فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۷، شمارهٔ ۶۳ (پاییز و زمستان ۱۳۹۷)، صص. ۱۶۵ تا ۱۷۳

مجموع‌های انتخابیِ یک سری نامتناهی*

آر. جی. فِردیناندز

مترجم: رسول کاظمی و مهدی دهقانی

چکیده

مجموع یک زیرمجموعه از جمله‌های یک سری نامتناهی، یک مجموع *انتخابیِ* آن سری نامیده می‌شود. در این مقاله، به توصیف مجموعهٔ همهٔ مجموع‌های انتخابیِ برخی سری‌ها می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که اگر یک سری در شرط‌های ویژه‌ای صدق کند، مجموعهٔ همهٔ مجموع‌های انتخابی آن، به روشی مشابه با ساختن مجموعهٔ کانتور به‌دست می‌آید.

۱. سرآغاز

هر دانشجویی که حساب دیفرانسیل و انتگرال خوانده باشد، می‌داند که سری هندسی $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲^n}$ همگرا و مجموع آن برابر با ۱ است. اما اگر فقط زیرمجموعه‌ای از جمله‌های این سری را جمع کنیم، چه اتفاقی می‌افتد؟ برای مثال، مجموع جمله‌های زوج برابر است با $\frac{۱}{۳} = \frac{\frac{۱}{۴}}{۱-\frac{۱}{۴}} = \cdots + \frac{۱}{۲^۶} + \frac{۱}{۲^۴} + \frac{۱}{۲^۲}$. یا می‌توانیم تعدادی متناهی از جمله‌ها را جمع کنیم؛ مثلاً $\frac{۱۷}{۱۲۸} = \frac{۱}{۲^۷} + \frac{۱}{۲^۳}$. عددهای $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱۷}{۱۲۸}$ نمونه‌هایی از آن چیزی هستند که بُنار و خوری *مجموع‌های انتخابی* سری‌ها نامیده‌اند ([۱]، صص. ۷۹–۸۱). ممکن است پیش از مطالعهٔ مقاله مایل باشید همهٔ مجموع‌های انتخابی ممکن برای سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲^n}$ و همچنین سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲}{۳^n}$ را حدس بزنید.

عبارات و کلمات کلیدی. سری نامتناهی؛ مجموع انتخابی؛ مجموعهٔ کانتور؛ سری بسنده.

* نام و نشان مقالهٔ اصلی از این قرار است:
Ferdinands, R. J., Selective sums of an infinite series, *Mathematics Magazine*, **88** (2015), no. 3, 179–185.

۲. مجموع‌های انتخابی

اکنون مفهوم مجموع‌های انتخابی را به‌طور رسمی تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری از اعداد حقیقی باشد. عدد حقیقی x یک *مجموع انتخابیِ* این سری خوانده می‌شود اگر $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ که در آن، $\{c_n\}$ دنباله‌ای است که جمله‌های آن ۰ یا ۱ است.

برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ هر مجموع انتخابی، عددی بین ۰ و ۱ است، زیرا چنین مجموعی به‌شکل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n}$ است که در آن، به‌ازای هر n، $c_n = 0$ یا $c_n = 1$. یعنی هر مجموع انتخابی، عددی در بازهٔ $[0, 1]$ با نمایش دودویی $0/c_1c_2c_3\ldots$ است. اما هر عدد حقیقی در بازهٔ $[0, 1]$ را می‌توان به این صورت نوشت. بنابراین مجموعهٔ S متشکل از همهٔ مجموع‌های انتخابیِ این سری برابر با بازهٔ $[0, 1]$ است و در نتیجه S بزرگترین مجموعهٔ ممکن از مجموع‌های انتخابیِ یک سری با جمله‌های مثبت و مجموع ۱ است. در این حالت می‌گوییم S *بیشین* است.

مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ نیز برابر با ۱ است. یک مجموع انتخابی آن به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c_n}{3^n}$ است که در آن، به‌ازای هر n، $2c_n = 0$ یا $2c_n = 2$. از این‌رو مجموعهٔ S شامل همهٔ عددهایی در بازهٔ $[0, 1]$ است که نمایش آنها در پایهٔ ۳ شامل رقم ۱ نیست. به عبارت دیگر، S مجموعهٔ کانتور است. می‌دانیم که مجموعهٔ کانتور یک مجموعهٔ اندازه–صفر است ([۲]، ص. ۱۴۳).

این دو سری هندسی، دو حالت نهایی را نشان می‌دهند: حالتی که S بیشین است و حالتی که S اندازه–صفر است. حال این سؤال مطرح می‌شود که برای مجموع‌های انتخابیِ کدام دسته از سری‌ها، مانند این مثال‌ها، یکی از دو حالت نهایی رخ می‌دهد؟ و آیا حالت‌های دیگری نیز ممکن است؟ پولیا و سگو در [۵] و مِنون در [۳] به این سؤال‌ها پاسخ داده‌اند. در این مقاله، نتایجی را که آنها ثابت کرده‌اند با رویکردی متفاوت به‌دست می‌آوریم.

در حال حاضر فقط سری‌های همگرایی را که جمله‌های آنها مثبت و *غیرصعودی* هستند، در نظر می‌گیریم (در بخش پایانی، به سری‌های کلی‌تر خواهیم پرداخت). یک تعریف فنی برای سری‌های همگرا با جمله‌های مثبت و غیرصعودی بیان می‌کنیم که اثبات‌ها را ساده‌تر می‌کند.

تعریف ۲.۲. فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری همگرا باشد که دنبالهٔ $\{a_n\}$ مثبت و غیرصعودی است. می‌گوییم عدد حقیقی مثبت x نسبت به این سری *بسنده*[۱] است اگر $\sum_{i=n}^{\infty} a_i \geq x$ که در آن، n کوچکترین عدد صحیح مثبت است به‌طوری که $a_n \leq x$. اگر برای چنین n ی $\sum_{i=n}^{\infty} a_i < x$، می‌گوییم x نسبت

[۱] adequate

به سری *نابسنده* است (توجه کنید که چنین nی حتماً وجود دارد، زیرا سری همگرا است و در نتیجه حد دنبالهٔ $\{a_n\}$ صفر است).

به بیان دیگر، x نابسنده است اگر پس از حذف تمام جمله‌هایی از سری که اکیداً از x بزرگتر هستند، مجموع جمله‌های باقیمانده، اکیداً از x کمتر باشد. چون جمله‌های سری مثبت هستند، برای اینکه عددی یک مجموع انتخابی باشد، شرط زیر لازم است.

لم ۳.۲ (شرط لازم). *اگر x نابسنده باشد، آن‌گاه x یک مجموع انتخابی نیست. معادلاً اگر x یک مجموع انتخابی باشد، آن‌گاه x بسنده است.*

لازم به ذکر است که بسنده بودن، شرط کافی برای اینکه x یک مجموع انتخابی باشد، نیست. برای مثال، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را در نظر بگیرید که در آن، $a_1 = 6$، $a_2 = 4$ و به‌ازای $n \geq 3$، $a_n = \frac{1}{2^{n-2}}$. مجموع این سری برابر با $6 + 4 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^{n-2}} = 10 + 1 = 11$ است. عدد ۸ بسنده است، زیرا $a_1 < 8$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n > 8$ اما به‌آسانی دیده می‌شود که ۸ یک مجموع انتخابی نیست. حال یک شرط کافی ارائه می‌کنیم برای اینکه عددی یک مجموع انتخابی باشد.

لم ۴.۲ (شرط کافی). *فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری همگرا با جمله‌های مثبت و غیرصعودی باشد و $x > 0$. اگر هر عدد در بازهٔ $[0, x)$ بسنده باشد، آن‌گاه x یک مجموع انتخابیِ سری است.*

اثبات. گیریم x در فرض صدق کند و برابر با مجموع تعدادی متناهی از جمله‌های سری نیز نباشد. فرض کنیم n_1 کوچکترین عدد صحیحی باشد که $a_{n_1} < x$. چون x بسنده است، $\sum_{i=n_1}^{\infty} a_i \geq x$. اگر تساوی برقرار باشد، اثبات تمام است. پس فرض می‌کنیم $\sum_{i=n_1}^{\infty} a_i > x$. با شروع از a_{n_1} جمله‌های سری را جمع می‌کنیم تا جایی که برای اولین بار مجموع $a_{n_1} + a_{a_{n_1+1}} + \cdots$ از x بیشتر شود، یعنی بزرگترین عدد صحیح مثبت $N_1 \geq n_1$ را می‌یابیم که $\sum_{i=n_1}^{N_1} a_i < x < \sum_{i=n_1}^{N_1+1} a_i$. فرض کنیم n_2 کوچکترین عدد صحیحی است که $a_{n_2} < x - \sum_{i=n_1}^{N_1} a_i$ (توجه کنید که $n_2 > N_1$). چون هر عدد در $[0, x)$ بسنده است و $x - \sum_{i=n_1}^{N_1} a_i < x$، نتیجه می‌شود که $x - \sum_{i=n_1}^{N_1} a_i$ بسنده است. بنابراین $\sum_{i=n_2}^{\infty} a_i > x - \sum_{i=n_1}^{N_1} a_i$ (دوباره اگر تساوی برقرار باشد، اثبات پایان می‌پذیرد). همانند مرحلهٔ قبل، جمله‌های سری را جمع می‌کنیم تا به جملهٔ a_{N_2} برسیم به‌طوری که

$$\sum_{i=n_2}^{N_2} a_i < x - \sum_{i=n_1}^{N_1} a_i < \sum_{i=n_2}^{N_2+1} a_i.$$

بنابراین $x - (\sum_{i=n_1}^{N_1} a_i + \sum_{i=n_2}^{N_2} a_i)$ بسنده است و

$$x - \Big(\sum_{i=n_1}^{N_1} a_i + \sum_{i=n_2}^{N_2} a_i\Big) < a_{N_2+1}.$$

این روند را تا رسیدن به زیرسری

$$\sum_{i=n_1}^{N_1} a_i + \sum_{i=n_2}^{N_2} a_i + \cdots + \sum_{i=n_k}^{N_k} a_i + \cdots$$

تکرار می‌کنیم به‌طوری که $x - (\sum_{i=n_1}^{N_1} a_i + \sum_{i=n_2}^{N_2} a_i + \cdots + \sum_{i=n_k}^{N_k} a_i)$ بسنده باشد و

$$x - \Big(\sum_{i=n_1}^{N_1} a_i + \sum_{i=n_2}^{N_2} a_i + \cdots + \sum_{i=n_k}^{N_k} a_i\Big) < a_{N_k+1}.$$

چون مجموع‌های جزئی، صعودی و از بالا به x کراندار هستند، پس زیرسری همگرا است. از آنجا که $\lim_{k\to\infty} a_{N_k+1} = 0$، مجموع زیرسری برابر با x است و لذا x یک مجموع انتخابی است. □

نکتهٔ کلیدی در تعیین مجموعهٔ S که مشتمل بر همهٔ مجموع‌های انتخابی است، این است که ببینیم هر جمله از سری چگونه با مجموع جمله‌های پس از آن مقایسه می‌شود. فرض کنیم $R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$ که n یک عدد صحیح نامنفی است. اگر به‌ازای هر n، $a_n \le R_n$، آنگاه S بیشین است. اگر به‌ازای هر n، $a_n > R_n$، آنگاه S ویژگی‌هایی همانند مجموعهٔ کانتور دارد. این حالت‌ها به‌ترتیب در قضیه‌های ۵.۲ و ۶.۲ مورد بحث قرار می‌گیرند. قضیهٔ ۵.۲ در [۵] و قضیهٔ ۶.۲ در [۳] یافت می‌شوند.

قضیه ۵.۲. *فرض‌کنیم* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *یک سری همگرا با جمله‌های مثبت و غیرصعودی و* s *مجموع این سری باشد. مجموعهٔ* S *متشکل از همهٔ مجموع‌های انتخابی، برابر با بازهٔ* $[0, s]$ *است اگر و تنها اگر به‌ازای هر* $n \ge 1$*،* $a_n \le R_n$.

اثبات. فرض کنیم به‌ازای هر $n \ge 1$، $a_n \le R_n$. برای x در $[0, s)$ فرض کنیم n کوچکترین عدد صحیحی است که $a_n \le x$. اگر $n = 1$، آنگاه $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s \ge x$. بنابراین x بسنده است. اگر $n > 1$، آنگاه $a_n < x < a_{n-1}$ و $\sum_{i=n}^{\infty} a_i \ge a_{n-1} > x$ که نتیجه می‌دهد x بسنده است. بنابراین هر عدد در $[0, s)$ بسنده است. از لم ۴.۲ نتیجه می‌شود که هر عدد در $[0, s)$ یک مجموع انتخابی است. چون به‌روشنی 0 یک مجموع انتخابی است، پس $S = [0, s]$. حال فرض کنیم $n \ge 1$ وجود دارد به‌طوری که $a_n > R_n$. در این صورت اگر عدد x چنان باشد که $R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i < x < a_n$،

آن‌گاه x بسنده نیست و از این‌رو یک مجموع انتخابی نیست. بنابراین اگر $S = [\circ, s]$، آن‌گاه به‌ازای هر $n \geq ۱$، $a_n \leq R_n$. □

قضیه ۶.۲. *فرض کنیم $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ یک سری همگرا با جمله‌های مثبت و غیرصعودی و s مجموع این سری باشد. فرض کنیم به‌ازای هر $n \geq ۱$، $a_n > R_n$. در این صورت $S = \bigcap_{n=۱}^{\infty} F_n$ که در آن، F_n اجتماع ۲^nتا بازهٔ بستهٔ دوبه‌دو مجزا به‌شکل $[\sum_{i=۱}^{n} c_i a_i, \sum_{i=۱}^{n} c_i a_i + R_n]$ است و هر c_i برابر با ۰ یا ۱ است.*

اثبات. پیش از ارائهٔ برهان، نشان می‌دهیم که F_nها را می‌توان به روشی مشابه با روش ساختن مجموعهٔ کانتور به‌دست آورد. با حذف بازهٔ باز $(R_۱, a_۱)$ از $[\circ, s]$ آغاز می‌کنیم تا بازه‌هایی بسته به طول $R_۱$ در دو طرف باقی بماند (از این مطلب استفاده می‌کنیم که $R_۱ < a_۱$). پس

$$F_۱ = [\circ, R_۱] \cup [a_۱, s].$$

در مرحلهٔ بعدی، با حذف یک بازهٔ باز از هر بازه در $F_۱$، بازه‌هایی بسته به طول $R_۲$ در دو طرف باقی می‌ماند. بنابراین

$$F_۲ = [\circ, R_۲] \cup [a_۲, a_۲ + R_۲] \cup [a_۱, a_۱ + R_۲] \cup [a_۱ + a_۲, s].$$

این روند را تکرار می‌کنیم تا دنبالهٔ $F_۱ \supset F_۲ \supset F_۳ \supset \cdots$ به‌دست آید. به‌استقرا می‌توان نشان داد که F_n به همان شکلی است که در قضیه بیان شده است. جزئیات را به خواننده واگذار می‌کنیم. اکنون نشان می‌دهیم که $S = \bigcap_{n=۱}^{\infty} F_n$. فرض کنیم $x \in S$. بنابر تعریف، دنبالهٔ $\{c_i\}$ از ۰ها و ۱ها وجود دارد به‌طوری که $x = \sum_{i=۱}^{\infty} c_i a_i$. به‌ازای هر n داریم

$$\sum_{i=۱}^{n} c_i a_i \leq \sum_{i=۱}^{\infty} c_i a_i = x = \sum_{i=۱}^{n} c_i a_i + \sum_{i=n+۱}^{\infty} c_i a_i \leq \sum_{i=۱}^{n} c_i a_i + R_n.$$

پس $x \in (\sum_{i=۱}^{n} c_i a_i, \sum_{i=۱}^{n} c_i a_i + R_n) \subseteq F_n$ و بنابراین $S \subseteq \bigcap_{n=۱}^{\infty} F_n$. سپس فرض کنیم به‌ازای هر $n \geq ۱$، $x \in F_n$. دنبالهٔ $\{c_n\}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم: به‌ازای هر $n \geq ۱$، x به یک بازه در F_n متعلق است و به بازهٔ بازی که از آن حذف می‌شود، تعلق ندارد. اگر x سمت چپ بازهٔ باز حذف شده باشد، قرار می‌هیم $c_n = \circ$ و اگر سمت راست این بازه باشد، قرار می‌دهیم $c_n = ۱$. به‌سادگی با استقرا ثابت می‌شود که به‌ازای هر $n \geq ۱$،

$$\sum_{i=۱}^{n} c_i a_i \leq x \leq \sum_{i=۱}^{n} c_i a_i + R_n.$$

چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است، پس $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$. این نتیجه می‌دهد که $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i$ و از این‌رو $x \in S$. $\square$

خلاصهٔ این دو قضیه این است که مجموعهٔ S متشکل از همهٔ مجموع‌های انتخابی، بیشین است اگر و تنها اگر به‌ازای هر n، $a_n \le R_n$ در حالی که اگر به‌ازای هر n، $a_n > R_n$، آن‌گاه S شبیه مجموعهٔ کانتور است. اما همان‌طور که نتیجهٔ زیر نشان می‌دهد، S لزوماً اندازه–صفر نیست (این نتیجه در [۳] نیز آمده است).

نتیجه ۷.۲. *با همان فرض‌های قضیهٔ ۶.۲، اندازهٔ مجموعهٔ S برابر است با* $m(S) = \lim_{n\to\infty}(2^n R_n)$.

اثبات. این نتیجه به‌سادگی از این مطلب که هر F_n شامل 2^n بازه، هر کدام به طول R_n است و با به‌کارگیریِ نتیجه‌ای آشنا از نظریهٔ اندازه ([۲]، گزارهٔ ۸.۱۴، ص. ۴۰۴) حاصل می‌شود که بر طبق آن، $m(S) = m(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) = \lim_{n\to\infty} m(F_n) = \lim_{n\to\infty}(2^n R_n)$. $\square$

۳. چند مثال

مثال ۱.۳. اگر $0 < r < 1$، آن‌گاه سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ همگرا و مجموع آن برابر با $\frac{r}{r-1}$ است. ملاحظه کنید که $r^n \le \sum_{i=n+1}^{\infty} r^i$ اگر و تنها اگر $r^n \le \frac{r^{n+1}}{r-1}$ اگر و تنها اگر $r \ge \frac{1}{2}$. بنابر قضیهٔ ۵.۲، مجموعهٔ همهٔ مجموع‌های انتخابی برابر است با $S = [0, \frac{r}{r-1}]$ اگر و تنها اگر $\frac{1}{2} \le r \le 1$. اگر $0 < r < \frac{1}{2}$، آن‌گاه به‌ازای هر $n \ge 1$ داریم $r^n > \sum_{i=n+1}^{\infty} r^i$. بنابراین S دارای ساختار توصیف‌شده در قضیهٔ ۶.۲ است و اندازهٔ آن برابر است با

$$m(S) = \lim_{n\to\infty}\left(2^n \frac{r^{n+1}}{1-r}\right) = \frac{r}{1-r}\lim_{n\to\infty}(2r)^n = 0,$$

زیرا $0 < 2r < 1$.

مثال ۲.۳. این مثالی از یک سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ است که در آن، S دارای ساختار توصیف‌شده در قضیهٔ ۶.۲ است اما اندازهٔ آن صفر نیست. گیریم $a_1 = 2$ و به‌ازای هر $n \ge 2$، $a_n = \frac{n^2+1}{2^n n(n-1)}$. پس به‌ازای هر $n \ge 2$، $a_n = \frac{n}{(n-1)2^{n-1}} - \frac{n+1}{n 2^n}$ و لذا یک سری تلسکوپی حاصل می‌شود. به‌سادگی بررسی می‌شود که به‌ازای هر $n \ge 1$، $\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = \frac{n+1}{n 2^n}$ و $a_n > \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$. پس فرض‌های قضیهٔ ۶.۲ برقرارند. اندازهٔ S از رابطهٔ $m(S) = \lim_{n\to\infty}(2^n \frac{n+1}{2^n n}) = 1$ به‌دست می‌آید. در [۳] نشان داده شده است که به‌طور کلی چگونه می‌توان یک سری با مجموع s ساخت که در شرایط قضیهٔ ۶.۲ صدق کند و به‌ازای هر $0 \le \alpha \le s$ مجموعهٔ S دارای اندازهٔ α باشد.

مثال ۳.۳. p-سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$ همگرا است اگر و تنها اگر $p > ۱$. با در نظر گرفتن مجموع‌های چپ برای نمودار تابع $f(x) = \frac{۱}{x^p}$، مشاهده می‌کنیم که عدد N وابسته به p موجود است به‌طوری که به‌ازای هر $n > N$ داریم

$$\sum_{i=n+۱}^{\infty} \frac{۱}{i^p} > \int_{n+۱}^{\infty} \frac{۱}{x^p} dx = \frac{۱}{(p-۱)(n+۱)^{p-۱}} > \frac{۱}{n^p}.$$

بنابر قضیهٔ ۵.۲، برای همهٔ چنین Nهایی مجموعهٔ همهٔ مجموع‌های انتخابی $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$ برابر با $[۰, s]$ است که در آن، $s = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$. p-سری‌ها مثال‌های مربوط به سومین حالت ممکن برای a_n و R_n را به‌دست می‌دهند؛ یعنی حالتی که در آن، تنها به‌ازای تعدادی متناهی n داریم $a_n > R_n$. در این حالت، مجموعهٔ S متشکل از همهٔ مجموع‌های انتخابیِ سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ اجتماع تعدادی متناهی از بازه‌های بسته است. برای اثبات این ادعا، توجه کنید که $N > ۱$ موجود است به‌طوری که به‌ازای هر $n \geq N$، $a_n \leq R_n$. همان‌طور که دیدیم، قضیهٔ ۵.۲ نتیجه می‌دهد که مجموعهٔ همهٔ مجموع‌های انتخابی برای سری $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$، بازهٔ $I = [۰, \sum_{n=N}^{\infty} a_n]$ است. مجموعهٔ S متشکل از همهٔ مجموع‌های انتخابیِ سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ در بر گیرندهٔ I و بازه‌های به‌شکل $\sum_{i=۱}^{N-۱} c_i a_i + I$ است که در آن، $c_i = ۰$ یا $c_i = ۱$. این نتیجه در [۳] نیز ثابت شده است.

۴. مجموع‌های انتخابی برای دیگر سری‌ها

بُنار و خوری ([۱] صص. ۸۰–۸۱) نشان داده‌اند که هر عدد حقیقی مثبت، یک مجموع انتخابی برای سری همساز $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ است. پس به نظر می‌رسد سری‌هایی کلی‌تر از آنهایی که در این مقاله در نظر گرفته شد (یعنی سری‌های واگرا یا سری‌هایی که جمله‌هایشان مثبت یا غیرصعودی نیستند)، ممکن است مجموع‌های انتخابی جالبی داشته باشند. برای مثال، در اینجا نتیجه‌ای در مورد سری‌های همگرای مطلق (که جمله‌هایشان ممکن است مثبت یا منفی باشد) می‌آوریم.

قضیه ۱.۴. *فرض کنیم $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ یک سری همگرای مطلق باشد. در این صورت مجموعهٔ S مشتمل بر همهٔ مجموع‌های انتخابی، فشرده است.*

اثبات. فرض کنیم $\{۰, ۱\}^\omega$ مجموعهٔ همهٔ دنباله‌هایی در $\mathbb{R}$ باشد که جمله‌های آنها فقط ۰ و ۱ است. تابع $f : \{۰, ۱\}^\omega \to S$ را به‌صورت $f(\{c_n\}) = \sum_{n=۱}^{\infty} c_n a_n$ تعریف می‌کنیم. توجه کنید که f خوش‌تعریف است، زیرا بنابر آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} c_n a_n$ همگرای مطلق است. علاوه بر این، f پیوسته است (تمرین ۶ در پایان مقاله را ببینید). چون بنابر قضیهٔ تیخونوف، مجموعهٔ $\{۰, ۱\}^\omega$ فشرده است ([۴]، ص. ۲۳۲)، پس $f(\{۰, ۱\}^\omega) = S$ نیز فشرده است. □

۵. مسائلی برای پژوهش‌های آینده

بررسی ماهیت مجموع‌های انتخابی انواع دیگر سری‌ها نیز می‌تواند جالب توجه باشد. در اینجا برخی سؤال‌های ممکن در این زمینه را مطرح می‌کنیم:

- آیا نتایجی که در مثال ۱ برای سری هندسی به‌دست آمد، به سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ که در آن، $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ و $0 < r < 1$ قابل تعمیم است؟
- در مورد مجموع‌های انتخابیِ سری‌های تناوبی چه می‌توان گفت؟
- در مورد مجموع‌های انتخابیِ سری‌های اعداد مختلط چه می‌توان گفت؟
- اگر به‌ازای نامتناهی مقدار برای n، $a_n > R_n$ و همچنین به‌ازای نامتناهی مقدار برای n، $a_n \leq R_n$، آن‌گاه دربارهٔ مجموعهٔ همهٔ مجموع‌های انتخابی چه می‌توان گفت؟ در تمرین ۴ پایان مقاله، مثالی از این گونه سری‌ها ارائه شده است.
- نتیجه‌ای در [۳] حاکی است که اگر به‌ازای هر $n \geq 1$، $a_n > R_n$، آن‌گاه نمایش هر مجموع انتخابی به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ یکتا است. تحت چه شرایطی، تعداد نمایش‌های یک مجموع انتخابی، شمارای نامتناهی یا ناشمارا است؟

۶. تمرین

مقاله را با ارائهٔ چند تمرین برای خواننده، به پایان می‌بریم.

(۱) اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای با جمله‌های مثبت و حد صفر باشد، ثابت کنید که یک تجدید آرایش از جمله‌های دنباله وجود دارد که در آن، جمله‌ها به ترتیبِ غیرصعودی هستند (توجه کنید که این نتیجه نشان می‌دهد که اگر یک سری همگرا با جمله‌های مثبت را در نظر بگیریم، بدون کاسته شدن از کلیت، می‌توان فرض کرد که جمله‌های آن غیرصعودی‌اند).

(۲) نشان دهید مجموعهٔ همهٔ مجموع‌های انتخابیِ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$ اندازه–صفر است. (راهنمایی: نشان دهید $\frac{1}{n!} < \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i!}$).

(۳) گیریم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری همگرا با جمله‌های مثبت و غیرصعودی باشد. اگر به‌ازای هر n بجز تعدادی متناهی، $a_n > R_n$، مجموعهٔ مجموع‌های انتخابی را توصیف کنید.

(۴) سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را با $a_{2n-1} = \frac{2}{3}(\frac{1}{6})^{n-1}$ و $a_{2n} = (\frac{1}{6})^n$ تعریف می‌کنیم.

(الف) نشان دهید به‌ازای هر n، $a_{2n-1} > \sum_{i=2n}^{\infty} a_i$ و $a_{2n} = \sum_{i=2n+1}^{\infty} a_i$؛

(ب) مجموعهٔ مجموع‌های انتخابیِ سری را بیابید و ثابت کنید این مجموعه، اندازه–صفر است.

(۵) فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ در فرض‌های قضیهٔ ۶.۲ صدق کند. نشان دهید که مجموعهٔ S تام و کلاً ناهمبند است. (نتایج تمرین ۵ در [۳] آمده است. برای مشاهدهٔ تعریف مجموعهٔ تام، صفحهٔ ۱۴۷ از [۲] را ببینید. در اثبات تام بودنِ S بسته به اینکه عضوهای S را بتوان به‌صورت مجموع تعدادی متناهی از جمله‌های سری نوشت یا نه، دو حالت جداگانه در نظر بگیرید.)

(۶) ثابت کنید که تابع $f : \{0,1\}^{\omega} \to S$ با ضابطهٔ $f(\{c_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ که در اثبات قضیهٔ ۱.۴ تعریف شد، پیوسته است. (راهنمایی: دنبالهٔ تابع‌های $\{f_n\}$ را به‌صورت $f_n(\{c_k\}) = c_n a_n$ تعریف کنید و از M–آزمون وایرشتراس ([۲]، ص. ۲۴۷) استفاده کنید.)

مراجع

[1] Bonar, D. D., Khoury, M. J., *Real Infinite Series*, MAA Textbooks, Washington DC, 2006.

[2] Krantz, S. G., *Real Analysis and Foundations*, 2nd edn., Chapman and Hall/CRC Press, London, 2005.

[3] Menon, P. K., On a class of perfect sets, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), no. 8, 706–711.

[4] Munkres, J. R., *Topology: A First Course*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.

[5] Polya, G., Szegö, G., *Problems and Theorems in Analysis (II)*, Part 1, Chapter 3, no. 131, Springer-Verlag, New York, 1990.

رسول کاظمی: دانشگاه کاشان، دانشکدهٔ علوم ریاضی

رایانامه: r.kazemi@kashanu.ac.ir

مهدی دهقانی: دانشگاه کاشان، دانشکدهٔ علوم ریاضی

رایانامه: m.dehghani@kashanu.ac.ir