فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۷، شمارهٔ ۶۳ (پاییز و زمستان ۱۳۹۷) صص. ۱۷۵ تا ۱۸۰

جنبه‌های حرکت براونی*

مایکل بی. مارکوس

مترجم: روح‌الله جهانی‌پور

مارک یور[1] یکی از پیشگامان پژوهش دربارهٔ حرکت براونی در دنیا است. این کتاب که با همکاری شاگردش، روژه مانسوی[2]، ویرایش شده است، چاپ مجدد درس‌نوشتارهایی است که پیش از این به سال ۱۹۹۲ در مؤسسهٔ فناوری فدرال سوئیس[3] در زوریخ ایراد کرده بود. بازبینی این کتاب فرصتی را فراهم می‌کند تا همگان بدانند حرکت براونی چه موجود مهمی در ریاضیات است و چقدر با دیگر حوزه‌های آنالیز ریاضی اشتراک دارد.

اگر بخواهیم حرکت براونی را برای ریاضیدانی که اصلاً چیزی دربارهٔ آن نخوانده است، شرح دهیم، می‌توانیم بحث را با فرآیند تصادفی دیگری آغاز کنیم که *قدم زدن تصادفی ساده* خوانده می‌شود. این فرآیند، گردایه‌ای از تابع‌های حقیقی‌مقدار بر بازهٔ $[0,+\infty)$ است که مقدار هر کدام در صفر برابر با صفر است و نمودار آنها موازی محور xها است بجز اینکه در اعداد صحیح مثبت، با شانس یکسان یک واحد به بالا یا یک واحد به پایین می‌پَرد (سکه‌ای را پرتاب کنید. اگر شیر آمد، تابع یک واحد به بالا می‌پَرد و اگر خط آمد، یک واحد به پایین). تا نقطهٔ $x = m$، 2^m تا تابعِ ممکن یا به‌قولِ احتمال‌دانان، مسیر وجود دارد که همگی با شانس یکسان رخ می‌دهند. فرض کنیم S_m نمایش چنین مسیری باشد. روشن است که $-m \leq S_m \leq m$. ثابت می‌شود که اگر m خیلی بزرگ باشد، شانس خیلی کمی وجود دارد که $S_m = \pm m$. در واقع نتیجه‌ای بنیادی در نظریهٔ احتمال به‌نام *قضیهٔ حد مرکزی* می‌گوید که

---

* این مقاله، مروری است بر کتاب
Mansuy, R., Yor, M., *Aspects of Brownian Motion*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
نشانیِ مقاله به زبان اصلی از این قرار است:
Michael B. Marcus, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **48** (2011), no. 3, 481–484.

[1] Mark Yor [2] Roger Mansuy [3] Eidgenössische Technische Hochschule

وقتی $m \longrightarrow \infty$، متغیر تصادفیِ $S_m/\sqrt{m}$ دارای توزیع احتمال نرمال با میانگین صفر و واریانس یک است. بنابراین اگر بخواهیم این فرآیند را طوری تعمیم دهیم که پرش‌ها در نقاط k/n که n عدد صحیح بزرگ و k عدد صحیح نامنفی است نیز رخ دهد و وقتی $n \to \infty$، فرآیند حاصل بلادرنگ بی‌کران یا متحد با صفر نشود، باید اندازهٔ پرش‌ها را $۱/\sqrt{n}$ بگیریم. این فرآیند تعمیم‌یافته را با $\{X_n\}$ نشان می‌دهیم. با در اختیار داشتنِ یک توپولوژی مناسب، می‌توانیم حد $\lim_{n\to\infty} X_n$ را حساب کنیم و گردایه‌ای از مسیرها به‌دست آوریم که روی $\mathbb{R}^+$ پیوسته‌اند. این فرآیند حدی، حرکت براونی است و آن را با $\{B_t : t \in \mathbb{R}^+\}$ نشان می‌دهیم (البته درست‌تر این است که بنویسیم $\{B_t(\omega) : \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+\}$ که در اینجا Ω یک فضای احتمال است، زیرا B در واقع گردایه‌ای از تابع‌ها است).

به‌لحاظ شهودی، به‌سادگی می‌توان دید که $B_۰ = ۰$ و به‌علاوه B دارای نموهای مستقل مانا است. منظور از مانایی این است که همهٔ نموهای هم‌طول [به‌لحاظ زمانی]، توزیع احتمال یکسان دارند. افزون بر این، چون B حد فرآیندهایی است که در یک بازه به طول n، به‌اندازهٔ $۱/\sqrt{n}$ افزایش یا کاهش می‌یابند، مدول پیوستگی مسیرهای B از مرتبهٔ $\sqrt{t}$ است. نخستین بار نُربِرت وینر[۱] در سال ۱۹۲۳ وجود چنین گردایهٔ بزرگی از تابع‌های پیوستهٔ مشتق‌ناپذیر را ثابت کرد که در زمان خودش، نتیجه‌ای بسیار بارز و قابل ملاحظه بود.

به‌ازای هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر مانند $A \subseteq \mathbb{R}$،

$$\mu_t(A) = \int_۰^t \chi_{\{B(s)\in A\}} ds$$

مدت زمانی را نشان می‌دهد که مسیر حرکت براونی با شروع از مبدأ، پیش از فرارسیدنِ لحظهٔ t در مجموعهٔ A می‌گذراند. نکتهٔ جالب این است که برای هر t ثابت، μ_t نسبت به اندازهٔ لبگ پیوستهٔ مطلق است. مشتق رادُن–نیکودیم آن را نسبت به اندازهٔ لبگ با ℓ_t^x نشان می‌دهیم. البته این یک متغیر تصادفی است، زیرا به مسیرهای B وابسته است. با ℓ_t^xها یک فرآیند تصادفی تشکیل می‌دهیم، یعنی گردایهٔ متغیرهای تصادفی $\ell = \{\ell_t^x : (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\}$. این فرآیند را طوری می‌توان ساخت که ℓ روی $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ پیوسته یا به‌اصطلاحِ عام، «توأماً پیوسته» شود. فرآیند تصادفی ℓ *زمان‌های موضعی* حرکت براونی نامیده می‌شود.

خانواده‌ای دیگر از فرآیندهای تصادفی وجود دارد که پیوندی نزدیک با حرکت براونی و زمان‌های موضعیِ آن دارد: فرآیند بِسِل مربعیِ[۲] δبُعدی به‌ازای $\delta \geq ۰$. توصیف این فرآیند به زبان ساده بجز وقتی که δ یک عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی با یک باشد، کاری مشکل است. یک فرآیند بِسِل مربعیِ kبُعدی عبارت است از $\{\sum_{j=۱}^k (B_t^۲)_j : t \in \mathbb{R}^+\}$ که در آن، $(B_t)_j$ها، $j = ۱,۲,\ldots,k$ حرکت‌های

---
[۱] Norbert Wiener [۲] squared Bessel process

براونی مستقل هستند. بخش عمده‌ای از این کتاب به نقش‌آفرینیِ متقابل میان حرکت براونی، زمان‌های موضعی آن و فرآیندهای بِسِل اختصاص دارد. بیشترِ نتایج از نوع توزیعی هستند و با محاسبهٔ تبدیل‌های فوریه و لاپلاس به‌دست می‌آیند. به‌کمک این نتایج، پیوندهای شگفت‌آوری آشکار و درستیِ آنها ثابت می‌شود که غالباً اسرارآمیز به نظر می‌رسند، زیرا تعبیر احتمالاتی، یعنی تعبیری شبه‌فیزیکی بر پایهٔ ماهیت فرآیند مورد بررسی، ندارند و به این دلیل، نویسندگان مرتب از این بابت ابرازِ تأسف می‌کنند. البته هنوز جا دارد روی موضوعِ ارائهٔ شرحی مبسوط از این پیوندهای گیرا، کار شود.

جنبهٔ فریبندهٔ دیگری از حرکت براونی که در این کتاب روشن شده است، اندرکنش‌های آن با دیگر حوزه‌های آنالیز ریاضی است که در نگاه نخست، دور از احتمال به نظر می‌رسند. در ادامه که مطالب کتاب را فصل به فصلِ مرور می‌کنیم، به این مطلب اشاره خواهیم کرد.

چنان‌که در بند اول گفتیم، این کتاب چاپ مجدد یازده فصل نخستِ درس‌نوشتارهای مارک یور است.[۱] فصل‌های باقیماندهٔ بخش دوم این مجموعه، در اثری دیگر بازنشر شده است.[۲] در مقدمهٔ کتاب، نویسندگان می‌گویند: «اصلاحات بسیار کمی در نخستین یازده فصل ویرایش قدیمی انجام داده‌ایم که عمدتاً افزایش شمار مراجع است.» بخش دوم این درس‌نوشتارها را ریچارد بَس[۳] مرور کرده است.[۴] مرور فصل‌های ۱۰ و ۱۱ که دو فصل پایانی این کتاب هستند در آن نسخه‌ای هم که ریچارد بَس مرور کرده، آمده است.

آنچه در ادامه خواهیم گفت، منتخبی از فصل‌های کتاب است که بر پیوند میان حرکت براونی، زمان‌های موضعیِ آن و فرآیندهای بِسِل و اندرکنش حرکت براونی با جنبه‌هایی از آنالیز ریاضی متمرکز است که در نگاه نخست، چندان مرتبط با نظریهٔ احتمال به دید نمی‌آیند.

در فصل ۱، زیرفضاهای خاصی از فضای گاوسی تولیدشده توسط حرکت براونی یک‌بُعدی مطالعه می‌شود و در نتیجه، پُل براونی[۵] و رابطهٔ بین حرکت براونی و نامساوی هاردی در فضای $L^۲$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. تبدیل فوریهٔ اندازه که به‌صورت

$$\int \lambda_{\omega,t}(dx) f(x) = \int_۰^t f(B_s(\omega)) ds$$

تعریف می‌شود و در آن، B حرکت براونی است، قریب‌به‌یقین در $L^۲$ است. بنابراین $\lambda_{\omega,t}(dx)$ پیوستهٔ مطلق است و خانوادهٔ چگالی‌های آن، ℓ_t^x، زمان‌های موضعیِ B تا لحظهٔ t هستند و در فرمول مربوط به

[۱] *Some Aspects of Brownian Motion*, Part I: *Some Special Functionals* (Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1992), and Part II: *Some Recent Martingale Problems* (Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1997). [۲] *Random Times and Enlargements of Filtrations in a Brownian Setting*, Lecture Notes in Mathematics (**1873**), Springer-Verlag, Berlin, 2006. [۳] Richard F. Bass [۴] *Metrica*, **49** (1999), 164–165. [۵] Brownian bridge

زمان‌های اِشغال[۱]، یعنی

$$\int_{\circ}^{t} f(B_s)ds = \int f(y)\ell_t^y dy$$

صدق می‌کنند. ارتباط عمیق بین حرکت براونی و زمان‌های موضعیِ آن، یکی از هیجان‌انگیزترین جنبه‌های حرکت براونی و خودِ این کتاب است.

فصل ۲ حاوی فرمول‌های متعدد دربارهٔ تبدیل‌های فوریه و تبدیل‌های لاپلاس تابعک‌های انتگرالیِ براونی است که بیان‌هایی متعدد از فرمول لِوی برای مساحت تصادفی حرکت براونی را به‌دست می‌دهند. در این فصل فرآیند بِسِل مربعی هم معرفی می‌شود. فرض کنیم $\{B_t \,:\, t \geq \circ\}$ فرآیند حرکت براونی در $\mathbb{R}^n$ باشد، یعنی مؤلفه‌های آن حرکت‌های براونی یک‌بُعدی مستقل باشند. در این صورت $X_t = |B_t|^{۲}$ فرآیند بِسِل مربعی nبُعدی است که از صفر آغاز می‌شود. اگر X_t را به‌صورت یک انتگرال تصادفی بنویسیم، خواهیم دید که می‌توان این تعریف را به فرآیندهای بِسِل مربعی δبُعدی، $\delta \geq \circ$، که از نقطهٔ $x \in \mathbb{R}$ آغاز می‌شوند، گسترش داد. این فرآیندها را با $\{Q_x^\delta \,:\, x \geq \circ, \delta \geq \circ\}$ نشان می‌دهیم و مشاهده می‌کنیم که برای هر $\delta, \delta', x, x' \geq \circ$ داریم $Q_x^\delta * Q_{x'}^{\delta'} = Q_{x+x'}^{\delta+\delta'}$ که در آن، عملگر $*$ پیچش بین دو اندازهٔ احتمال را نشان می‌دهد. این رابطه به‌ویژه وقتی جالب می‌شود که $\delta' = \circ$.

فرآیند بِسِل مربعی مرتبهٔ صفر، زمان موضعیِ کلی حرکت براونی را تا یک زمان توقف معین توصیف می‌کند. این مطلب که یکی از قضیه‌های کلاسیک رِی–نایت[۲] است، نخستین نتیجه در فصل ۳ است. صورت‌های زیادی از این قضیه‌های یکریختی وجود دارد که متضمن زمان‌های موضعی حرکت براونی با قوانین توقف گوناگون و فرآیندهای بِسِل مربعی با ابعاد مختلف هستند. یک ویژگی که هنگام مطالعهٔ فرآیندهای مارکف کلی، بدیهی به نظر می‌رسد (مثل محتوای قضیهٔ یکریختیِ دینکین[۳]) ولی در مورد حرکت براونی، غامض است، این است که یک رابطهٔ کلی بین زمان‌های موضعی فرآیندهای مارکف متقارن گذرا و مربع‌های فرآیندهای گاوسی مستقل مربوط به آن فرآیندهای مارکف وجود دارد. اتحادهای چِشِلسکی–تیلور[۴] دربارهٔ ویژگی‌های فرآیندهای بِسِل در سال ۱۹۶۲، یک سال پیش از نخستین قضیهٔ رِی–نایت منتشر شد. فصل ۴ با بیان رابطهٔ بین فرآیندهای بِسِل مربعی و زمان‌های موضعی حرکت براونی ادامه می‌یابد تا این اتحادها بیان و تعمیم داده شوند.

در فصل‌های ۵ و ۷ چرخش‌های حرکت براونی مسطح مطالعه می‌شود. فرض کنیم

$$Z_t = X_t + \mathrm{i}Y_t, \quad t \geq \circ, \quad Z_\circ = z_\circ \neq \circ$$

که در آن، $X_t - X_\circ$ و $Y_t - Y_\circ$ حرکت‌های براونی مستقل هستند. گیریم $\{\theta_t(\omega) \,:\, t \geq \circ\}$ یک تحقق پیوسته از آرگومان‌های $\{Z_u(\omega) \,:\, u \leq t\}$ حول $\circ$ باشد. در فصل ۵، نتیجهٔ کلاسیک منسوب

[۱] occupation times [۲] Ray-Knight theorems [۳] Dynkin isomorphism theorem [۴] Ciesielski-Taylor

به اسپیتزر[1] که می‌گوید

$$\lim_{t\to\infty} \frac{۲\theta_t}{\log t} \overset{\text{law}}{=} C_۱$$

ثابت و تعمیم داده می‌شود. در اینجا $C_۱$ یک متغیر تصادفی با توزیع کُشی است که تابع چگالی احتمال آن عبارت است از $۱/\pi(۱+x^۲)$ برای $-\infty < x < +\infty$. رویکرد حل این مسئله، استفاده از عددهای چرخشی «توری براونی»[2]، یعنی پُل براونی مختلط است. در فصل ۷، نتیجهٔ منسوب به اسپیتزر به حالت چندبُعدی برای عددهای چرخشی $(\theta_t^۱, \ldots, \theta_t^n)$ حرکت براونی مسطح حول n نقطه گسترش می‌یابد. در گسترشی دیگر، حرکت براونی در $\mathbb{R}^۳$ در نظر گرفته می‌شود و قوانین مجانبی مربوط به عددهای چرخشیِ آن حول تعدادی متناهی پاره‌خط جهتدار و خم‌های بی‌کران معین، به‌دست می‌آید. *عدد پیوندیِ*[3] دو خم بسته در $\mathbb{R}^۳$ که یکدیگر را قطع نمی‌کنند، توسط گاوس معرفی شد. در اینجا با اصلاحاتی، این عدد در مورد دو خم براونی تعریف می‌شود. اصلاحات لازم است، زیرا دو حرکت براونی مستقل در $\mathbb{R}^۳$ قریب‌به‌یقین یکدیگر را قطع می‌کنند.

در فصل ۶، انتگرال حرکت براونی نمایی با رانش، روی بازه‌های زمانی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این فصل را می‌توان ادامهٔ فصل ۵ دانست، زیرا مشابهت‌هایی در برخی روش‌های به‌کار رفته در اثبات‌ها وجود دارد. نتایج به‌دست آمده در این فصل، به فرآیندهای مارکف کلی‌تر و به‌ویژه فرآیندهای لِوی، گسترش می‌یابد.

لِوی در مقاله‌ای به سال ۱۹۳۹ نشان داد که دو متغیر تصادفی

$$\int_۰^۱ ds\,\chi_{\{B_s>۰\}} \quad \text{و} \quad \sup\{۰\le t<۱ : B_t=۰\}$$

دارای توزیع آرک‌سینوس هستند. تاکنون این نتیجه در جهت‌های بسیاری تعمیم داده شده است. در فصل ۸، این نتیجه در سه جهت تعمیم داده می‌شود که در آنها به‌جای $\{B_s : s\ge ۰\}$ یکی از موارد زیر قرار می‌گیرد: اول، فرآیند بِسِلِ متقارن با بُعد $۰ < \delta < ۲$. دوم، حرکت براونی والش[4] و سوم، حرکت براونی بازتابی با اختلالِ تکین[5]، یعنی فرآیند $\{|B_s|-\mu\ell_s^۰ : s\ge ۰\}$ که در آن، $\{\ell_s^۰ : s\ge ۰\}$ زمان موضعی $\{B_s : s\ge ۰\}$ در ۰ است و $\mu > ۰$. باید به‌یاد داشت که $\{\ell_s^۰ : s\ge ۰\}$ نقشی کلیدی در هر سه تعمیم دارد.

مطالعهٔ فرآیند $\{|B_s|-\mu\ell_s^۰ : s\ge ۰\}$ در فصل ۹ نیز ادامه می‌یابد و قضیهٔ دیگری از رِی–نایت ثابت می‌شود که این بار، توزیع توأمِ $\{\ell^x_{\tau_s^\mu}(X) : x\ge ۰\}$ و $\{\ell^{-x}_{\tau_s^\mu}(X) : x\ge ۰\}$ را به مربع‌های

[1] Spitzer [2] Brownian lace [3] linking number [4] Walsh Brownian motion [5] singularly perturbed reflecting Brownian motion

فرآیندهای بِسِل پیوند می‌دهد و در اینجا $\{\tau_s^\mu \; : \; s \geq ۰\}$ وارون زمان موضعی $\{\ell_s^\mu \; : \; s \geq ۰\}$ وابسته به فرآیند X در μ است. از این قضیه هم نتایج متعددی به‌دست می‌آید.

زمان موضعی حرکت براونی، $\{\ell_t^x \; : \; (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$، برگردانی پیوسته دارد. در واقع این برگردان نسبت به هر دوی x و t هُلدر–پیوسته است. بنابراین می‌توانیم تبدیل هیلبرت ℓ_t^x را در نقطهٔ $x \in \mathbb{R}$ بیابیم. در فصل ۱۰ از این مطلب برای تعریف و به‌دست آوردنِ توزیع

$$\lim_{\varepsilon \to ۰} \int_۰^t \frac{\chi_{\{|B_s - a| \geq \varepsilon\}}}{B_s - a} ds$$

و متغیرهای تصادفی وابسته به آن، استفاده می‌شود. برخی کاربردها از جمله در مطالعهٔ مسیرهای فرآیندهای بِسِل ارائه می‌شوند.

فصل پایانی، یعنی فصل ۱۱ عنوانی فریبنده دارد: «نمایش‌های احتمالاتیِ تابع زتای ریمان و برخی تعمیم‌های وابسته به فرآیندهای بِسِل.» نویسندگان بلادرنگ توضیح می‌دهند که «هدف این فصل، تشریح فرضیهٔ ریمان نیست! بلکه ... ارائهٔ برخی ... روابط بین ... تابع زتای ریمان ... و حرکت براونی است.» آنها نشان می‌دهند که تابع زتای ریمان را می‌توان برحسب نخستین زمان برخورد به ۱ به‌صورت مجموع دو فرآیند بِسِل سه‌بُعدی که از صفر آغاز می‌شوند، نوشت و آن‌گاه اتحادهای جالب دیگری نیز به‌دست می‌آورند.

من با جمع‌بندی بَس که در مروری بر فصل‌های ۱۰ تا ۱۸ این یادداشت‌ها نگاشته است و قبلاً به آن اشاره کردم، موافقم: «کتابی شعف‌انگیز است. مرا به یاد نوشتجات رامانوجان می‌اندازد؛ باز هم پیوندهای زیبا و غیرمنتظرهٔ بسیار بین اشیاء به‌ظاهر بی‌ربط.» با وجود این، خواننده از دانش و کاربلدیِ نویسندگان شگفت‌زده می‌شود. به‌علاوه در این کتاب آشکار می‌شود که هرچند مطالعهٔ حرکت براونی یک‌صد سال قدمت دارد، خط هادیِ ادامهٔ مطالعه و پژوهش‌های جدید در این باره همچنان بی‌پایان است.

روح‌الله جهانی‌پور: دانشگاه کاشان، دانشکدهٔ علوم ریاضی

رایانامه: jahanipu@kashanu.ac.ir