فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۲ (بهار ۱۳۸۸) صص. ۵۳ تا ۷۴

شار ریچی ریمانی و کیلر، حدس‌های پوانکاره، هندسی سازی و کالابی*

محمد صفدری

در سال‌های نخست قرن بیستم، هانری پوانکاره، پس از آن که (همزمان با چند ریاضیدان دیگر) موفق شد قضیهٔ یکنواخت‌سازی را ثابت کند و طبقه‌بندی رویه‌ها را نتیجه بگیرد، اولین تلاش‌ها برای طبقه‌بندی خمینه‌های سه بعدی را آغاز کرد و حدس زیر را مطرح ساخت:

حدس پوانکاره: هر خمینهٔ سه بعدی بسته (فشرده و بی‌لبه) که همبند ساده باشد با کرهٔ سه بعدی S^3 همسانریخت است[۱].

این حدس نزدیک به یکصد سال پایه و انگیزه بسیاری از مطالعات در توپولوژی بعد پایین شد و البته تمام تلاش‌ها برای اثبات آن ناکام ماند. در ۲۰۰۰ میلادی مؤسسهٔ کلی[۲] این مسأله را به همراه شش مسألهٔ دیگر به عنوان مسائل «جایزه‌دار هزاره» معرفی کرد و برای حل آن جایزه‌ای یک میلیون دلاری تعیین نمود. تنها ۳ سال بعد گ. پرلمان[۳] طی دو مقاله که آنها را در arXiv قرار داد، توانست حدس پوانکاره را با کمک نظریهٔ شار ریچی ثابت کند. در واقع او قضیه‌ای بسیار کلی‌تر را ثابت کرد که حدس پوانکاره نتیجه‌ای ساده از آن است. این قضیه که خمینه‌های سه‌بعدی را به طور کامل طبقه‌بندی می‌کند حدس هندسی‌سازی ترستن[۴] است و روشی متعارف برای تجزیهٔ یک خمینهٔ سه بعدی به قسمت‌هایی با هندسه مشخص ارائه می‌کند.

*) این تحقیق در پژوهشگاه دانش‌های بنیادی (IPM) به عنوان طرح سربازی نخبگان تحت نظارت دکتر مهرداد شهشهانی انجام شده است.

۱) چون در بعد سه رسته خمینه‌های توپولوژیک و خمینه‌های دیفرانسیلی یکی است می‌توان به جای همسانریختی از وابرریختی استفاده کرد.

2) Clay 3) Grigori Perelman 4) W. Thurston

اواخر دهه هفتاد و اوایل دهه هشتاد، ترستن ثابت کرد که هر خمینه هاکن[1] هندسه‌پذیر می‌باشد و حدس زد که به طور کلی هر خمینه سه بعدی هندسه‌پذیر است [27]. در توضیح این مطلب اولاً باید گفت که منظور از خمینه هاکن، خمینه‌ای سه بعدی است که شامل رویه‌ای تراکم‌ناپذیر با گونه مثبت است. (یک رویه در یک خمینه سه بعدی را تراکم‌ناپذیر گوییم، هرگاه نگاشتی که شمول روی گروه بنیادی اول القاء می‌کند یک به یک باشد.) نکتهٔ دوم در رابطه با مفهوم هندسه‌پذیری است. خمینه سه‌بعدی M را هندسه‌پذیر می‌نامیم هرگاه بتوان آن را به تعدادی مؤلفه مجموع همبند تجزیه کرد و در هر مؤلفه مثل N بتوان تعدادی چنبره تراکم‌ناپذیر مجزا مثل T_iها یافت، به گونه‌ای که هر مؤلفهٔ همبندی $N\setminus \cup T_i$ متریکی کامل و موضعاً همگن با حجم متناهی بپذیرد. موضعاً همگن بودن یک خمینه به این معنی است که هر نقطه از آن یک همسایگی همگن داشته باشد، یعنی آن همسایگی با مجموعهٔ بازی از یک خمینه همگن کامل به طور طولپا یکریخت باشد. خمینه‌های همگن کامل هم خمینه‌هایی هستند که گروه ایزومتری‌های آنها به طور تراگذار روی آنها عمل کند. این خمینه‌ها را ترستن در بعد سه به طور کامل طبقه‌بندی نموده است. (البته با تحمیل چند شرط اضافی روی آنها، اما این شرط‌های اضافی به طور طبیعی در هندسی‌سازی برقرار می‌شوند و بنابراین این طبقه‌بندی همان است که به آن نیاز داریم.) وی ثابت کرد که در بعد سه، هشت خمینه متفاوت با فرض بالا وجود دارند که به آنها هندسه‌های مدل می‌گویند. ما در اینجا هندسه‌های مدل را دقیقاً معرفی نمی‌کنیم ولی سه تا از آنها را که در بعد دو نیز وجود دارند نام می‌بریم. هندسه مدل تخت $\mathbb{R}^3$، هندسه مدل بیضوی S^3 و هندسه مدل هذلولوی H^3.

همان گونه که گفته شد، تلاش‌هایی که برای اثبات حدس پوانکاره و پس از آن حدس هندسی‌سازی ترستن، با استفاده از ابزارهای توپولوژیک صورت گرفت، همه ناکام ماندند. البته هندسه‌پذیری رده‌های مختلفی از خمینه‌های سه بعدی ثابت شد اما به طور مشخص در مورد برخی رده‌ها هیچ‌گونه پیشرفتی حاصل نشد؛ تا این که گرایش به سمت استفاده از ابزارهای آنالیز هندسی در توپولوژی هندسی پیدا شد و سرانجام یکی از همین ابزارها، شار ریچی، بر مشکلات غلبه نمود و قضایای طبقه‌بندی ۳ ــ خمینه‌ها را نتیجه داد. شار ریچی به تعبیری صورت سهموی معادلهٔ اینشتین در نسبیت عام است و همهٔ دلایل اهمیت معادلهٔ اینشتین در مورد آن نیز معتبرند. مشخصاً این که انحنای ریچی تنها تانسور از جنس متریک است (به جز مضارب متریک) که تحت عمل وابرریختی‌ها ناورداست و تنها به مشتقات تا مرتبه دوم متریک، بستگی دارد. نکته دیگری که اهمیت شار ریچی در بعد سه را برجسته می‌کند این است که در بعد سه انحنای ریمان به طور کامل از روی انحنای ریچی مشخص می‌شود. بنابراین شار ریچی که انتظار می‌رود انحنای ریچی را به سمت «هموار» شدن هدایت کند، انحنای ریمان را نیز تحت کنترل خواهد داشت و نتایج هندسی ـ توپولوژیک را به دست خواهد داد.

1) Haken

۱. شار ریچی

ابتدا چند تعریف را از هندسهٔ ریمانی یادآوری و نمادهای خود را مشخص می‌کنیم. خمینه $n-$ بعدی M را در نظر بگیرید. متریک ریمانی روی M را با g_{ij} نشان می‌دهیم. نمادهای کریستوفل Γ_{ij}^k، عبارتند از

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{۱}{۲} g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \tag{۱}$$

تانسورهای انحنای ریمان R_{ijl}^k و R_{ijkl} به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$R_{ijl}^k = \partial_i \Gamma_{jl}^k - \partial_j \Gamma_{il}^k + \Gamma_{ip}^k \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jp}^k \Gamma_{il}^p \tag{۲}$$

$$R_{ijkl} = g_{kp} R_{ijl}^p \tag{۳}$$

با استفاده از این تانسورها انحنای ریچی R_{ik} و انحنای اسکالر R با روابط زیر داده می‌شوند:

$$R_{ik} = g^{jl} R_{ijkl} \tag{۴}$$

$$R = g^{ik} R_{ik} \tag{۵}$$

اکنون می‌توانیم شار ریچی را تعریف کنیم. فرض کنید $(M^n, g_۰)$ یک خمینه ریمانی n ـ بعدی باشد. شار ریچی روی M^n در واقع یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای برای تحول متریک است:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -۲ R_{ij} \tag{۶}$$

$$g(۰) = g_۰$$

این معادله را نخستین بار ریچارد هامیلتون[۱] در ۱۹۸۲ در نظر گرفت [12] و با استفاده از آن قضیهٔ زیر را ثابت کرد:

قضیهٔ ۱ــ۱. هر خمینهٔ سه‌بعدی که متریکی با انحنای ریچی مثبت بپذیرد، فضاگونه کروی است، یعنی، خارج‌قسمتی از کرهٔ سه بعدی است.

این قضیه، اولین استفاده از شار ریچی برای طبقه‌بندی خمینه‌های سه بعدی و در واقع بهانه‌ای برای شروع مطالعهٔ شار ریچی و نقش آن در این طبقه‌بندی بود. هامیلتون در همان مقاله وجود و

۱) منظور از g^{ij} وارون g_{ij} است. در طول این مقاله همواره از اختصار جمع‌بندی اینشتین استفاده می‌کنیم یعنی روی اندیس‌هایی که هم در بالا و هم در پایین ظاهر شده‌اند جمع می‌بندیم.

2) Richard S. Hamilton

یکتایی جواب را برای شار ریچی ثابت کرد. اثبات او مبتنی بر قضیه تابع وارون نش ـ موزر[1] و در نتیجه بسیار پیچیده بود. وی هم‌چنین شرایط وجود بلندمدت (جواب ماکسیمال) را بررسی کرد و اصل ماکسیمم را برای تانسورها ثابت نمود. مقاله او در حقیقت پایه‌ای برای نظریه شار ریچی و تحقیقات بعدی روی آن شد. در ادامهٔ این بخش به بیان قضایای فوق و طرح اثبات آنها می‌پردازیم.

قضیه ۱—۲. روی هر خمینه ریمانی بسته، شار ریچی برای زمان کوتاه جواب دارد و جواب آن یکتاست.

همان طور که گفتیم، اثبات هامیلتون برای این قضیه بسیار پیچیده و تکنیکی بود. یک سال بعد د. تورک[2] در [11] اثباتی بسیار ساده برای این قضیه ارائه داد. برای بیان این اثبات لازم است ابتدا نگاهی دقیق‌تر به شار ریچی و معادلات تحولی که القا می‌کند بیاندازیم. اگر مقدار R_{ij} را از معادلات (۲)، (۳)، و (۴) در معادله (٦) جایگذاری کنیم و سپس خطی سازی شده شار را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}_{ij} = \Delta\tilde{g}_{ij} + g^{kl}(\partial_i\partial_j\tilde{g}_{kl} - \partial_i\partial_k\tilde{g}_{jl} - \partial_j\partial_k\tilde{g}_{il}) \qquad (۷)$$

$$+ (\text{جملات مرتبهٔ پایین‌تر})$$

که در آن $\tilde{g}$ وردش g است. توجه کنید که اگر $\Delta\tilde{g}$ تنها جملهٔ مرتبهٔ دوم بود، شار ریچی یک معادلهٔ سهموی می‌شد و طبق قضایای کلاسیک معادلات دیفرانسیل، وجود و یکتایی جواب نتیجه می‌شد. در واقع د. تورک نیز به طور هوشمندانه‌ای جملات غیر از $\Delta\tilde{g}$ را حذف می‌کند و بدین ترتیب قضیه را نتیجه می‌گیرد. برای حذف این جملات اضافی، کافی است توجه کنیم که برابر با قرینه مشتق لی متریک نسبت به میدان برداری

$$W_i = g_{ik}g^{pq}(\Gamma^k_{pq} - (\Gamma_\circ)^k_{pq})$$

می‌باشند که $\Gamma_\circ$ هموستار متریک $g_\circ$ است. بنابراین اگر شار را با ابرریختی‌های تولید شده توسط این میدان برداری ترکیب کنیم، می‌توانیم این جملات را حذف کنیم و در نهایت چون ترکیب با وابرریختی مثل تغییر مختصات است، می‌توان نتیجه گرفت که شار اولیه نیز، یعنی همان شار ریچی، جواب یکتا دارد.

توجه کنید که در این اثبات به وجود وابرریختی‌های یک میدان برداری تا زمانی دلخواه نیاز داریم و فرض فشردگی خمینه هم برای تضمین این موضوع می‌باشد. البته این قضیه برای خمینه‌های نافشرده نیز برقرار است و این تعمیم در مقاله‌های [25] و [5] انجام گرفته است. پس از این، نوبت به وجود بلندمدت جواب می‌رسد. این قضیه را نیز هامیلتون در اولین مقاله‌اش درباره شار ریچی ثابت کرده است.

1) Nash-Moser inverse function theorem 2) D. DeTurk

قضیهٔ ۱ــ۳. فرض کنید که $(M^n, g(t))$ جوابی برای شار ریچی روی یک خمینه فشرده باشد و جواب در بازهٔ زمانی ماکسیمال $[0, T)$ وجود داشته باشد. در این صورت اگر $T < \infty$ داریم:

$$\lim_{t\to T} \max_{x\in M^n} |Rm(x,t)| = \infty$$

اثبات این قضیه با استفاده از برهان خلف می‌باشد. یعنی فرض می‌کنند که $|Rm|$ وقتی $t \longrightarrow T$ کراندار بماند، و ثابت می‌کنند که وقتی $t \longrightarrow T$، متریک‌های $g(t)$ به سمت یک متریک هموار $g(T)$ میل می‌کنند و بعد با استفاده از وجود کوتاه مدت جواب، جواب را از $g(T)$ ادامه می‌دهند و این با ماکسیمال بودن T در تناقض است.

در ادامهٔ این بخش به بیان معادلات تحول القا شده توسط شار ریچی و اصل ماکسیمم می‌پردازیم. انحنای اسکالر و انحنای ریچی، به ترتیب تحت شار به صورت زیر تغییر می‌کنند:

$$\frac{\partial}{\partial t}R = \Delta R + 2|Rc|^2 \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}R_{ij} = \Delta R_{ij} + 2g^{kp}g^{lq}R_{kijl}R_{pq} - 2g^{pq}R_{ip}R_{qj} \tag{9}$$

و برای عنصر حجم داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}d\mu = -Rd\mu \tag{10}$$

که نتیجه می‌دهد حجم تحت شار ریچی به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\frac{\partial}{\partial t}V = \frac{\partial}{\partial t}\int_{M^n} d\mu = \int_{M^n} \frac{\partial}{\partial t}d\mu = -\int_{M^n} Rd\mu \tag{11}$$

کمیت $r = \int_{M^n} Rd\mu$ میانگین انحنای اسکالر است و به کمک آن می‌توان شار ریچی را به گونه‌ای نرمال کرد که حجم را ثابت نگه دارد. برای این منظور، شار نرمال شده‌ی ریچی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial t}g = -2Rc + \frac{2r}{n}g \tag{12}$$

این شار برای به دست آوردن برخی نتایج هندسی ــ توپولوژیک مناسب‌تر است. زیرا از به‌وجود آمدن تکینگی‌هایی مانند رمبش[1] خمینه به یک نقطه جلوگیری می‌کند. ما هم در ابتدا از نرمال شدهٔ شار ریچی استفاده می‌کنیم و چند نتیجه هندسی ــ توپولوژیک را به دست می‌آوریم ولی در بررسی شار با جراحی، معمول است که شار را بدون نرمال شدگی در نظر بگیرند. به معادله تحول انحنای اسکالر تحت شار نرمال شده، در بخش بعدی نیاز خواهیم داشت:

1) Collapse

$$\frac{\partial}{\partial t}R = \Delta R - \frac{2r}{n}R + 2|Rc|^2 \qquad (13)$$

در پایان این بخش به توضیح مختصری دربارهٔ اصل ماکسیمم برای تابع‌های عددی و میدان‌های تانسوری می‌پردازیم. اصل ماکسیمم برای توابع عددی، قضیه‌ای آشنا در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سهموی است و ما در اینجا آن را یادآوری می‌کنیم.

قضیه ۱—۴۰ فرض کنید $u : M^n \times [0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی هموار باشد که در نامعادله زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \leq \Delta u + F(u)$$

که لاپلاسین نسبت به متریک متغیر $g(t)$ می‌باشد و $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی موضعاً لیپشیتز است. اگر ثابت $c \in \mathbb{R}$ چنان باشد که $\forall x \in M^n \ u(x,0) \leq c$ و تابع φ جواب معادله دیفرانسیل عادی زیر باشد:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= F(\varphi) \\ \varphi(0) &= c \end{aligned}$$

آنگاه برای هر $x \in M^n$ و هر $t \in [0,T)$ که φ در آن تعریف شده است، داریم:

$$u(x,t) \leq \varphi(t)$$

لازم به ذکر است که این قضیه با تبدیل همهٔ نابرابری‌ها از $\leq$ به $\geq$ نیز برقرار است.

همان طور که گفتیم، هامیلتون توانست اصل ماکسیمم را به میدان‌های تانسوری که تحت معادلات دیفرانسیل پاره‌ای تحول می‌کنند، تعمیم دهد. البته این تعمیم برای تانسورهای دلخواه نسبتاً پیچیده است و ما آن را در ساده‌ترین حالت، یعنی ۲ ـ تانسورهای هموردا متقارن بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱—۵. فرض کنید که $\alpha(t)$ خانواده‌ای یک پارامتری از ۲ ـ تانسورهای هموردا متقارن روی خمینهٔ ریمانی M^n باشد که تحول آن در نابرابری زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha \geq \Delta\alpha + \beta$$

که در آن نابرابری به این معنی است که $\frac{\partial}{\partial t}\alpha - \Delta\alpha - \beta$ نامنفی معین است. در اینجا نیز Δ نسبت به متریک متغیر $g(t)$ است و β ۲ـتانسور متقارنی است که در فرض بردار ویژه پوچ صدق می‌کند، یعنی اگر v یک بردار ویژه α متناظر مقدار ویژه صفر باشد آنگاه $\beta(v,v) \geq 0$.

حال اگر α در لحظه صفر (مثبت) نامنفی معین باشد در لحظات بعد نیز چنین خواهد بود. با استفاده از این قضیه بود که هامیلتون توانست قضیه (۱ـ۱) را ثابت کند. در واقع او برای این اثبات متریک اولیه را که انحنای ریچی آن مثبت بود با شار ریچی متحول کرد. در طی این تحول انحنای ریچی همواره مثبت باقی می‌ماند. او سپس تخمین‌های مناسبی برای انحنا به دست آورد که نشان می‌داد انحنا به مقدار ثابتی میل می‌کند و به کمک وجود بلند مدت جواب، نشان داد که وقتی

$t \longrightarrow \infty$ متریک‌ها به متریکی با انحنای ثابت و مثبت میل می‌کنند و طبق قضایای کلاسیک نتیجه گرفت که خمینه، خارج‌قسمتی از کره است.

۲. شار روی رویه‌ها و یکنواخت‌سازی

در این بخش می‌خواهیم شار نرمال شده‌ی ریچی را روی رویه‌ها در نظر بگیریم. چون برای رویه‌ها رابطهٔ $Rc = \frac{R}{2}g$ برقرار است، شار به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t}g = (r - R)g$$

هامیلتون در [14] برای اولین بار شار بالا را بررسی کرد و قضیه‌ی زیر را به دست آورد که البته بخشی از اثبات آن را چاو[1] در [8] کامل کرد.

قضیه ۲–۱. فرض کنید که (M^2, g_0) یک رویه ریمانی بسته باشد. در این صورت جواب یکتای $g(t)$ برای شار نرمال شده ریچی

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}g &= (r - R)g \\ g(0) &= g_0 \end{aligned} \tag{۱۴}$$

به‌ازای $t \geq 0$ وجود دارد. به علاوه وقتی که $t \longrightarrow \infty$، متریک‌های $g(t)$ به طور یکنواخت در هر نرم C^k به متریکی هموار با انحنای ثابت میل می‌کنند.

توجه کنید که قضیه‌ی بالا یکنواخت‌سازی رویه‌ها را نتیجه می‌دهد. زیرا، از آنجا که تغییرات متریک تحت شار همواره مضربی از خود متریک است، رده همدیسی متریک تغییر نمی‌کند. پس آنچه که ثابت شده در واقع این است که در هر رده همدیسی متریکی با انحنای ثابت وجود دارد و این یک حکم کلاسیک است که یکنواخت‌سازی رویه‌ها را نتیجه می‌دهد.

در حقیقت آنچه که این قضیه به دست می‌دهد چیزی بیشتر از یکنواخت‌سازی است، زیرا راهی کانونی برای تبدیل هر متریک به متریک با انحنای ثابت و همدیس با آن ارائه می‌دهد. و این راه کانونی همان شار ریچی است.

در ادامهٔ این بخش به طرح مختصر اثبات این قضیه و ایده‌های پشت آن می‌پردازیم. ابتدا توجه کنید که طبق قضیهٔ (۱ـ۲) جواب برای کوتاه مدت وجود دارد. اکنون اگر بتوانیم کرانداری یکنواخت R را ثابت کنیم از قضیهٔ (۱ـ۳) می‌توان نتیجه گرفت که جواب تا زمان بی‌نهایت وجود خواهد داشت. برای یافتن کران R، طبق آنچه که در معادلات دیفرانسیل تحولی معمول است، باید معادله تحول R را به دست آوریم و سپس از اصل ماکسیمم استفاده نمائیم. طبق معادله (۱۳) داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}R = \Delta R + R(R - r) \tag{۱۵}$$

1) B. Chow

که این نوع معادله به معادله عکس‌العمل ـ انتشار[1] معروف است. حال اصل ماکسیمم نتیجه می‌دهد که R همواره از جواب معادله دیفرانسیل عادی

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}s &= s(s-r) \\ s(0) &= s_0 \end{aligned}$$

بزرگتر است که s_0 یک کران پایین برای R در لحظه صفر است. ولی، از آنجا که این معادله به ازای مقادیر اولیه بزرگتر از r در زمان متناهی تکینه می‌شود، نمی‌توان با استفاده از آن یک کران بالای مناسب برای R به دست آورد.

برای یافتن کران بالای مناسب برای R باید توجه کرد که تکینگی فوق از جملهٔ R^2 در معادله تحول R حاصل می‌شود. پس اگر ما بتوانیم با افزودن یک جمله مناسب به R، جمله نامطلوب R^2 را حذف کنیم می‌توانیم امیدوار باشیم که کران بالای مناسبی به دست خواهیم آورد. در واقع این ایده مشکل را حل می‌کند. برای تعریف کمیت مناسبی که به دنبال آن بودیم ابتدا باید پتانسیل انحنا را تعریف کنیم. توجه کنید که چون طبق تعریف r، $\int_M (R-r)d\mu = 0$، معادلهٔ زیر طبق نظریه هاج جواب دارد و جواب آن پتانسیل انحنا نامیده می‌شود:

$$\Delta f = R - r. \tag{16}$$

حال $H = R - r + |\nabla f|^2$ کمیت مناسبی است که می‌خواستیم. نامعادلهٔ زیر برای تحول H به دست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t}H \leq \Delta H + rH. \tag{17}$$

طبق اصل ماکسیمم خواهیم داشت $H \leq Ce^{rt}$ و چون $R - r \leq H$، کرانی را که می‌خواستیم به دست می‌آوریم.

با استفاده از این کران برای R می‌توان وجود بلند مدت جواب و همگرایی $g(t)$ به متریک با انحنای ثابت را، برای حالت $r \leq 0$ یعنی برای رویه‌های با گونهٔ مثبت، ثابت نمود. تنها حالتی که می‌ماند گونهٔ صفر یعنی کره است که برای آن داریم $r > 0$ و در نتیجه کران e^{rt} به بی‌نهایت میل می‌کند و به درد نمی‌خورد. برای این حالت نیز می‌توان با کمک یک کمیت جدید کران مناسبی پیدا کرد و اثبات را مانند حالت‌های دیگر کامل نمود. این کمیت جدید $M = \nabla\nabla f - \frac{1}{2}(\Delta f)g$ است که برای تحول آن نابرابری زیر را داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}|M|^2 \leq \Delta|M|^2 - 2R|M|^2 \tag{18}$$

1) reaction-diffusion equation

اکنون اگر بتوانیم نشان دهیم که در طول زمان $R \geq c > 0$ به طور یکنواخت برقرار است، آنگاه طبق اصل ماکسیمم به دست می‌آوریم:

$$|M| \leq Ce^{-ct}. \quad (۱۹)$$

و این کران وقتی $t \to \infty$ به صفر میل و مشکل را حل می‌کند. تنها نکته‌ای که می‌ماند اثبات وجود کران پایین مثبت و یکنواخت برای R است. چون رویهٔ مورد مطالعه کره است میانگین انحنای اسکالر آن مثبت است و می‌توان نشان داد که پس از گذشت زمانی متناهی از شار ریچی انحنا مثبت می‌شود. برای اثبات کرانداری یکنواخت از پایین، کمیتی شبیه انتروپی کلاسیک را در نظر می‌گیرند:

$$N = \int_M R \log R d\mu. \quad (۲۰)$$

می‌توان ثابت کرد که N در طول شار ریچی نزولی است و این خاصیت کمک می‌کند تا کران دلخواه را به دست آوریم. توصیف دقیق‌تر مراحل اثبات را می‌توان در [9] یافت.

۳. طرح اثبات حدس پوانکاره

در این بخش می‌خواهیم خلاصهٔ اثبات پرلمان را بیان کنیم. ابتدا بهتر است که طرحی کلی از مراحل اثبات داشته باشیم. همان طور که گفته شد اولین استفاده از شار ریچی برای طبقه‌بندی هندسی و توپولوژیک توسط هامیلتون در اولین مقاله‌اش درباره شار ریچی صورت گرفت. وی ثابت کرده بود که هر خمینه سه بعدی که متریک با انحنای ریچی مثبت بپذیرد، فضاگونه کروی است یعنی خارج‌قسمتی از کره سه بعدی است. در واقع هامیلتون نشان داده بود که اگر شار نرمال شده‌ی ریچی را روی خمینه‌ای سه بعدی که انحنای ریچی مثبت دارد به جریان بیاندازیم، شار تا زمان بی‌نهایت ادامه خواهد یافت و در بی‌نهایت به متریکی با انحنای ثابت مثبت میل خواهد کرد. (این که خمینه‌ای بسته با متریکی با انحنای ثابت مثبت خارج‌قسمتی از کره است یک قضیه کلاسیک هندسه است.) اما در طول بیست و چند سالی که از پیدایش نظریه شار ریچی می‌گذشت (تا قبل از اثبات حدس پوانکاره) مشخص شده بود که کار همیشه به این سادگی پیش نمی‌رود و شار روی خمینه‌های سه بعدی دلخواه ایجاد تکینگی می‌کند. برای غلبه بر این مشکل هامیلتون در [17] شار ریچی با جراحی را برای طبقه‌بندی دسته‌ای از خمینه‌های چهاربعدی معرفی کرد. ایده او این بود که اندکی قبل از این که تکینگی ایجاد شود با یک جراحی توپولوژیک یک همسایگی از ناحیه‌ای را که تکینه می‌شود خارج کنیم و شار را پس از جراحی دوباره ادامه دهیم. حال اگر این فرایند را بتوانیم به گونه‌ای انجام دهیم که شار با جراحی تا زمان بی‌نهایت ادامه یابد می‌توانیم امیدوار باشیم که شار در بی‌نهایت به متریکی میل کند که هندسه خمینه را مشخص کند (همانند متریک‌های با انحنای ثابت).

اگرچه هامیلتون توانسته بود جراحی بالا را به طور موفقیت‌آمیزی در بعد چهار (البته برای رده‌ای خاص از خمینه‌ها) به انجام برساند اما به دلیل پاره‌ای از مشکلات که مهمترین آنها عدم شناخت کافی از هندسه و توپولوژی تکینگی‌ها بود، مسأله در بعد سه همچنان حل نشده باقی مانده بود. در واقع کار بزرگ پرلمان این بود که موفق شد فرایند بالا را در بعد سه انجام دهد. برای این که دقیق‌تر باشیم قضیهٔ اصلی پرلمان را به طور کامل بیان می‌کنیم.

قضیهٔ وجود سرتاسری جواب برای شار ریچی با جراحی: فرض کنید که (M, g) یک خمینهٔ ریمانی سه بعدی بسته و جهت‌پذیر باشد. در این صورت یک شار ریچی با جراحی وجود دارد که به هر $t \in [\circ, \infty)$ یک خمینهٔ ریمانی $(M(t), g(t))$ نسبت می‌دهد و خواص زیر را دارد:

i) $g(\circ) = g$ و $M(\circ) = M$،

ii) زیرمجموعه گسسته $T \subset (\circ, \infty)$ از زمان‌های جراحی وجود دارد که اگر I یک مؤلفه همبندی $[\circ, \infty) \backslash T$ و در نتیجه یک بازه باشد و اگر $t_I = \inf I$ آنگاه برای $t \in \{t_I\} \cup I$، $t \mapsto (M(t), g(t))$ یک شار ریچی هموار است یعنی $M(t)$ روی این بازه ثابت است و داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -\text{۲} Rc \quad t \in \{t_I\} \cup I$$

iii) اگر $t \in T$ و $\varepsilon > \circ$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد در این صورت هر مؤلفه همبندی $M(t - \varepsilon)$ همسانریخت با جمع همبند متناهی تا از مؤلفه‌های همبندی $M(t)$ به همراه متناهی تا خمینهٔ فضاگونه کروی و $S^{\text{۲}}-$ کلاف‌های روی $S^{\text{۱}}$ می‌باشد. به علاوه هر مؤلفهٔ همبندی $M(t)$ دقیقاً در یکی از مؤلفه‌های همبندی $M(t - \varepsilon)$ به عنوان جمعوند ظاهر می‌شود.

در توضیح این قضیه بسیار مهم ابتدا باید متذکر شد که طبق (ii) زمان‌های جراحی یک زیرمجموعه گسسته از $(\circ, \infty)$ می‌باشند، لذا در هر بازه‌ی زمانی متناهی فقط تعدادی متناهی جراحی انجام می‌گیرد و زمان‌های جراحی در یک نقطه انباشته نمی‌شوند. هم‌چنین طبق (iii) در هر جراحی تعدادی از مؤلفه‌های همبندی خمینه را به جمعوندهای جمع همبند تجزیه می‌کنیم و تعداد متناهی خمینه فضاگونه کروی و $S^{\text{۲}}-$ کلاف روی $S^{\text{۱}}$ را حذف می‌کنیم و این در واقع توصیف کامل هر جراحی از نظر توپولوژیک می‌باشد.

پرلمان در سومین مقاله خود [24] قضیه زیر را ثابت کرد که اثباتی جداگانه برای حدس پوانکاره ارائه می‌کند. ناگفته نماند که پرلمان در دو مقاله اول خود اثباتی برای حدس هندسی‌سازی ترستن ارائه کرده بود که طبعاً اثباتی برای حدس پوانکاره نیز می‌باشد.

قضیهٔ انقراض در زمان متناهی[1]. فرض کنید (M, g) یک خمینه سه بعدی بسته و جهت‌پذیر باشد که گروه بنیادی آن حاصل ضرب آزادی از گروه‌های متناهی و گروه‌های دوری نامتناهی است.

1) Finite time extinction

در این صورت شار ریچی با جراحی با مقدار اولیه (M,g) در زمان متناهی منقرض می‌شود یعنی برای زمان‌های به اندازه کافی بزرگ $M(t)$ تهی است.

حال با استفاده از این دو قضیه اثبات حدس پوانکاره و کلی‌تر از آن حدس بیضوی سازی، که بیان می‌کند هر خمینهٔ سه بعدی بسته، با گروه بنیادی متناهی، فضاگونه کروی است، به سادگی انجام می‌گیرد. برای رفع مشکل جهت‌پذیری به این دو نکته توجه کنید که اولاً هر خمینه همبند ساده جهت‌پذیر است، ثانیاً می‌توان شار را به ۲ـپوشش جهت‌پذیر هر خمینه ترفیع داد.

حال فرض کنید (M,g) یک خمینه سه بعدی بسته و جهت‌پذیر با گروه بنیادی متناهی باشد. طبق قضایای بالا شار ریچی با جراحی روی (M,g) در زمان متناهی منقرض می‌شود یعنی $T > ۰$ وجود دارد (که می‌توان آن را زمان جراحی گرفت) که برای $t \geq T$ داریم: $M(t) = \emptyset$. اکنون چون زمانهای جراحی گسسته‌اند در بازه‌ی زمانی $[۰,T]$ متناهی تا جراحی صورت می‌گیرد که آنها را $t_۱, t_۲, \ldots, t_n = T$ می‌نامیم.

قسمت (iii) قضیه وجود سرتاسری جواب شار با جراحی نتیجه می‌دهد که

$$M(t_i) = M(t_{i+۱}) \# N_۱ \# \ldots \# N_{k_i}$$

که N_jها یا فضاگونه‌های کروی‌اند، یعنی $S^۳/\Gamma$ که Γ زیرگروهی متناهی از ایزومتریهای $S^۳$ یعنی $SO(۴)$ است که به طور خطی و آزاد عمل می‌کند. یا $S^۲$ـکلاف‌های روی $S^۱$اند، یعنی $S^۲ \times S^۱$ یا خارج‌قسمت آن تحت عمل $\mathbb{Z}_۲$.

حال داریم:

$$M(t_{n-۱}) = \emptyset \# N_۱ \# \ldots \# N_k$$

یعنی $M(t_{n-۱})$ جمع همبندی از فضاگونه‌های کروی و $S^۲-$ کلاف‌های روی $S^۱$ است. اگر به طور استقرایی پیش برویم نتیجه می‌شود که $M = M(۰) = M(t_۱) \# N_۱ \# \ldots \# N_l$ نیز از همین نوع است. اکنون با در نظر گرفتن این که گروه بنیادی $S^۲$ـکلاف‌های روی $S^۱$ برابر با $\mathbb{Z}$ است و با استفاده از قضیه ون کمپن نتیجه می‌شود که M جمع همبند تعدادی خمینه‌ی فضاگونه‌ی کروی است. حال نظر به این که گروه بنیادی M متناهی است و حاصل‌ضرب آزاد گروه‌های غیربدیهی نامتناهی است، قضیه ون کمپن نتیجه می‌دهد که تعداد جمعوندهای M یک است و M خمینه‌ای فضاگونه است. پس ما حدس بیضوی سازی را ثابت کرده‌ایم. اگر M همبند ساده باشد همین استدلال نتیجه می‌دهد که $M \simeq S^۳/\Gamma$. قضایای کلاسیک توپولوژی می‌گویند که Γ همان گروه بنیادی M است زیرا $S^۳$ همبند ساده و در نتیجه فضای پوششی جهانی M است. پس Γ گروهی بدیهی است و M با کره سه بعدی همسانریخت است یعنی حدس پوانکاره نیز نتیجه شد.

پس از این بحث اولیه و طرح کلی مراحل اثبات به سراغ جزئیات قضایای فوق می‌رویم.

۴. فشردگی شار

گام اول در اثبات قضیه وجود سرتاسری جواب و انجام جراحی این است که بتوانیم شناختی کافی از هندسهٔ تکینگی‌ها به دست آوریم. در واقع باید بدانیم قسمتی از خمینه که در فرایند جراحی جدا می‌شود دقیقاً چیست. این مهم‌ترین مشکل برای انجام جراحی در بعد سه بود که توسط پرلمان برطرف شد. یک نکته مهم در اینجا این است که تکینگی‌هایی که در بعد سه ظاهر می‌شوند به نوعی خوش رفتارند و دارای همسایگی‌هایی هستند که می‌توان با جراحی آنها را حذف کرد. اما این اتفاق در ابعاد بالاتر نمی‌افتد و هندسهٔ تکینگی‌ها پیچیده‌تر از آن است که با روش‌های شناخته شده جراحی توپولوژیک تا این زمان، قابل رفع باشند و این موضوع با غیرممکن بودن طبقه‌بندی خمینه‌ها در ابعاد بزرگتر یا مساوی چهار، سازگار است. البته هنوز هم می‌توان از شار ریچی برای مطالعهٔ خمینه‌های از ابعاد بالاتر استفاده کرد ولی باید شرط‌های توپولوژیک و هندسی اضافی بر خمینه تحمیل کنیم تا از پیدایش تکینگی‌های «بدخیم» جلوگیری کنیم و این کار قبل از پرلمان توسط هامیلتون برای دسته‌ای از خمینه‌های چهار بعدی انجام شده بود [17].

حال به بررسی تکینگی‌ها و روش یافتن یک همسایگی با توپولوژی مشخص برای آنها می‌پردازیم. طبق قضیه (۱ـ۳) تکینگی وقتی به‌وجود می‌آید که انحنا به بی‌نهایت میل کند. می‌توان نشان داد که زیرمجموعه Ω از M که انحنا روی آن به بی‌نهایت میل می‌کند بسته است و در زمان تکینگی، شار روی زیرمجموعهٔ باز $M\backslash\Omega$ به سمت متریکی هموار میل می‌کند. پس اگر یک همسایگی Ω را خارج کنیم می‌توانیم شار را ادامه دهیم. نکتهٔ مهم این است که Ω همسایگی‌هایی کانونی دارد که توپولوژی کاملاً مشخصی دارند. قضیهٔ زیر این مسأله را به طور دقیق بیان می‌کند.

قضیهٔ ۴ـ۱. فرض کنید $g(t), t \in [\circ, T)$ شار ریچی روی خمینهٔ سه بعدی، بسته و جهت‌پذیر M باشد. در این صورت برای هر $\varepsilon > \circ$ ثابت‌های $C, K > \circ$ وجود دارند به طوری که برای هر $t_\circ \in [\circ, T)$، هر $x \in (M, g(t_\circ))$ که $R(x) \geq K$ یک (C, ε)ـهمسایگی کانونی دارد.

$(C, \varepsilon)-$ همسایگی‌های کانونی به چهار دسته تقسیم می‌شوند. ما در اینجا به جزئیات تکنیکی تعریف آنها نمی‌پردازیم و در عوض توصیفی کلی از آنها ارائه خواهیم کرد. دسته اول و دوم به لحاظ توپولوژیک خمینه‌های فضاگونه کروی‌اند. دسته سوم که به آنها $\varepsilon-$ گردن‌بند[1] می‌گویند وابرریخت با استوانه سه بعدی یعنی $S^\text{۲} \times I$ هستند که I یک بازهٔ باز است و دستهٔ آخر که موسوم به $(C, \varepsilon)-$ کلاه[2] هستند اجتماع یک $\varepsilon-$گردن‌بند و یک هسته می‌باشند که هسته همسانریخت با $B^\text{۳}$ (گوی سه بعدی) یا $\mathbb{R}P^\text{۳}$ است که یک نقطه از آن حذف شده است، و در طول مرز خود که یک $S^\text{۲}$ است به یکی از مرزهای $\varepsilon-$گردن‌بند چسبیده است.

1) ε-necklace 2) (C, ε)-cap

روش اثبات این قضیه استفاده از قضایای فشردگی از نوع چیگر ـ گروموف [1] است. البته نسخهٔ قدیمی و اصلی این قضیه به تنهایی کافی نیست. هامیلتون در [16] توانست یک قضیهٔ فشردگی از نوع چیگر ـ گروموف را برای شار ریچی ثابت کند.

قضیهٔ ۴ــ۲. فرض کنید $(M_k, g_k(t))$ که $t \in (A, B]$ و $A < \circ \leq B$ دنباله‌ای از شارهای ریچی باشد که هر $g_k(t)$ کامل است و برای هر k، $p_k \in M_k$ و گوی‌های ژئودزیکی $B_\circ(p_k, s_k)$ نسبت به متریک $g_k(\circ)$ داده شده باشند که $\circ < s_k \leq \infty$ و $s_k \longrightarrow s_\infty \leq \infty$. هم چنین فرض کنید که:

i) برای هر شعاع $r < s_\infty$ ثابت‌های مثبت $C(r)$ و $k(r)$ موجود باشند به نحوی که روی $B_\circ(p_k, r) \times (A, B]$ داشته باشیم:

ii $k \geq k(r)$ برای هر $|Rm(g_k(t))| \leq C(r)$) ثابت مثبت δ موجود باشد به نحوی که شعاع یک به یکی [2] M_k در نقطه p_k نسبت به متریک $g_k(\circ)$ در رابطهٔ

$$\mathrm{inj}(M_k, p_k, g_k(\circ)) \geq \delta > \circ$$

برای هر $k \geq ۱$ صدق کند.

در این صورت زیردنباله‌ای از $(B_\circ(p_k, s_k), g_k(t), p_k)$ وجود دارد که روی $t \in (A, B]$ در توپولوژی C^∞_{loc} به شار ریچی $(B_\infty, g_\infty(t), p_\infty)$ میل می‌کند که B_∞ گوی ژئودزیکی حول p_∞ به شعاع s_∞ در متریک $g_\infty(\circ)$ است و $g_\infty(t)$ها کامل‌اند اگر $s_\infty = \infty$ باشد.

در توضیح این قضیه ابتدا باید در مورد توپولوژی C^∞_{loc} برای شارها صحبت کنیم. میل کردن در این توپولوژی بدین معنی است که زیرمجموعه‌های باز و تو در توی U_k از B_∞ موجودند که اجتماع آنها B_∞ را می‌پوشاند و برای هر k وابرریختی f_k از U_k به باز $V_k \subset B_\circ(p_k, s_k)$ وجود دارد به طوری که متریک‌های $\tilde{g}_k(t) = (f_k)^* g_k(t)$ در توپولوژی C^∞ روی زیرمجموعه‌های فشرده $B_\infty \times (A, B]$ به $g_\infty(t)$ میل کنند. البته همهٔ U_kها باید شامل p_∞ باشند و $f_k(p_\infty) = p_k$ شود.

حال با استفاده از این قضیهٔ فشردگی می‌توان قضیهٔ ساختار همسایگی تکینگی‌ها را ثابت کرد. برای این کار شار ریچی $g(t)$ را روی خمینه M در نظر بگیرید و فرض کنید $\circ \leq t < T < \infty$ یعنی تکینگی در زمان متناهی ظاهر می‌شود. اکنون در طول یک دنباله t_n که به T میل می‌کند شار را تغییر مقیاس می‌دهیم، یعنی شار

$$g^{(n)}(t) = \frac{۱}{L_n^۲} g(t_n + L_n^۲ t) \tag{۲۱}$$

را روی $M_n = M$ در نظر می‌گیریم. به سادگی دیده می‌شود که $g^{(n)}(t)$ها نیز در معادلهٔ شار ریچی صدق می‌کنند. ثابت‌های مثبت L_n طوری انتخاب شده‌اند که انحنای $g^{(n)}(t)$ها کراندار بماند، بنابراین وقتی به تکینگی نزدیک می‌شویم یعنی وقتی $n \longrightarrow \infty$، L_n به صفر میل خواهد کرد. نقاط $x_n \in M$ نیز نقاطی هستند که انحنا در آنها تقریباً ماکسیمم است. حال برای این که بتوانیم از

1) Cheeger-Gromov 2) injectivity radius

فشردگی استفاده کنیم لازم است که کران پایینی یکنواخت روی شعاع یک به یکی در x_nها به دست آوریم. هامیلتون حدس زد که چنین کران پایینی وجود دارد و این حدس او به حدس دور کوچک مشهور شد. پرلمان در [22] و [23] با استفاده از مفهوم حجم کاهش یافته که توسط خودش معرفی شده بود توانست آن را ثابت کند و امروزه این قضیه به عنوان قضیه نارمبش موضعی شناخته می‌شود. ما در بخش بعد به این مفهوم خواهیم پرداخت.

پس از آن که مشخص شد که با برقراری شرایط قضیهٔ فشردگی می‌توان با استفاده از آن نشان داد که شارهای معرفی شده در بالا زیردنباله‌ای همگرا دارند. حد این زیردنباله که در واقع توصیف کننده خمینه در لحظهٔ تکینگی است خواص هندسی و توپولوژیک خوبی دارد و به آن $\kappa-$جواب باستانی می‌گویند. کلمه باستانی برای این است که شار حدی در بازهٔ زمانی $(-\infty, 0]$ تعریف شده است. البته می‌توان نشان داد که شار حدی خواص زیاد دیگری نیز دارد ولی ما در اینجا به آنها نمی‌پردازیم. اکنون اگر نشان دهیم که x_∞ در شار حدی که یک $\kappa-$ جواب باستانی است همسایگی کانونی دارد از نزدیک بودن خمینه اولیه در $C^\infty_{loc}-$ توپولوژی به آن می‌توان نتیجه گرفت که نقاط با انحنای زیاد در خمینه اولیه نیز همسایگی‌های کانونی دارند و قضیه نتیجه می‌شود. برای این کار لازم است که شار روی $\kappa-$ جواب باستانی را یک بار دیگر تغییر مقیاس دهیم و از فشردگی استفاده کنیم. این شار حدی جدید خواص بسیار بیشتری از $\kappa-$ جواب‌های باستانی دارد و به آن جوابواره گرادیانی کوچک شونده[1] می‌گویند.

یکی از کارهای مهم پرلمان این بود که جوابواره‌های گرادیانی کوچک شونده در بعد سه را طبقه‌بندی کرد و از این طریق توانست نشان دهد که نقاط با انحنای زیاد در نزدیکی تکینگی، همسایگی کانونی دارند. این کار او نیز مبتنی بر حجم کاهش یافته، یکی از مهم‌ترین ابداعات وی بود.

۵. انتروپی و حجم کاهش یافته

در این بخش می‌خواهیم درباره دو تابع مهم که توسط پرلمان معرفی شده‌اند، به طور مختصر شرح دهیم. اولین آنها انتروپی پرلمان است. پیش از آن که پرلمان مقالات خود را منتشر کند تلاش‌ها برای یافتن تابعی که شار ریچی شار گرادیان آن باشد، بی‌نتیجه مانده بود. پرلمان با معرفی تابع انتروپی خود این کار را انجام داد و نشان داد که می‌توان به شار ریچی به عنوان یک شار گرادیان نگاه کرد. انتروپی پرلمان، تابع زیر است:

$$W(g,f,\tau) = \int_M [\tau(R + |\nabla f|^2) + f - n](4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-f} d\mu_g \qquad (22)$$

1) gradient shrinking solitons

که در آن g متریک ریمانی، f یک تابع C^∞ روی M و τ ثابتی است که فقط به زمان بستگی دارد. اگر شار ریچی را به عنوان یک سیستم دینامیکی نگاه کنیم که روی فضای متریک‌های ریمانی که خارج‌قسمت آنها را تحت عمل گروه و ابرریختی‌ها گرفته‌ایم، عمل می‌کند. در این صورت با استفاده از تابع انتروپی (که در واقع یک تابع لیاپانف برای این سیستم است.) می‌توان نشان داد که این سیستم دینامیکی جوابهای تناوبی غیرثابت ندارد. یعنی به جز نقاط ثابت، برای شار ریچی جواب تناوبی وجود ندارد و این بدین معنی است که اگر شار تا بی‌نهایت ادامه یابد حد آن یک نقطه ثابت شار است. نکته‌ای که در این جا باید به آن توجه کرد این است که چون خارج‌قسمت فضای متریک‌ها تحت عمل گروه وابرریختی‌ها، فضای فاز است بنابراین نقطه‌های ثابت جواب‌هایی هستند که تحت زمان با یک گروه از وابرریختی‌ها تغییر می‌کنند. به این جواب‌های معادله شار ریچی، جوابواره‌های ریچی[1] می‌گویند. در آخر باید متذکر شویم که چون شار ریچی تحت عمل وابرریختی‌ها ناورداست، بنابراین نوع نگاه بالا کاملاً طبیعی است.

دومین ابداع مهم پرلمان، یک تابع فاصله روی فضا ــ زمان است که به آن $\mathcal{L}$ـطول می‌گویند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_{\tau_۱}^{\tau_۲} \sqrt{\tau}(R(\gamma(\tau),\tau) + |\frac{d\gamma}{d\tau}|^۲_{g(\tau)})d\tau \qquad (۲۳)$$

که در آن $g(t)$ در معادلهٔ شارریچی صدق می‌کند و جهت $\tau = T - t$ در خلاف جهت زمان است. هم‌چنین γ خمی است، که با τ پرمایش شده است و به آن به عنوان یک خم در فضا ــ زمان، $M \times [\circ, T]$، نگاه می‌شود. با استفاده از این طول می‌توان یک مفهوم حجم تعریف کرد که به آن حجم کاهش یافته می‌گویند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{V}(\tau) = \int_M (۴\pi\tau)^{-\frac{n}{۲}} \exp(-l(x,\tau))d\mu_{g(\tau)} \qquad (۲۴)$$

که در آن $l(x,\tau) = \frac{L(x,\tau)}{۲\sqrt{\tau}}$ و L مینیمم $\mathcal{L}$ بین x و نقطهٔ ثابت p است. پرلمان ثابت کرد که حجم کاهش یافته در طول شار ریچی صعودی است و با استفاده از این مطلب قضیه نارمبش موضعی را اثبات نمود.

۵−۱ قضیهٔ نارمبش موضعی[2].

فرض کنید $g(t), t \in [\circ, T)$ شار ریچی روی خمینه بسته M^n باشد که $T < \infty$. در این صورت اعداد ثابت مثبت κ و $\rho_\circ$ وجود دارند به طوری که $g(t)$ها در همهٔ نقاط فضا ــ زمان و برای تمام مقیاس‌های کمتر از $\rho_\circ$، $\kappa-$ نارمبیده‌اند.

در این قضیه $\kappa-$ نارمبیدگی در مقیاس r به این معنی است که برای هر $(x_\circ, t_\circ) \in M \times [\circ, T)$ اتفاق زیر رخ دهد:

1) Ricci solitons 2) no local collapsing

هرگاه $|Rm|(x,t_\circ) \leq r^{-2}$ برای هر $x \in B_{t_\circ}(x_\circ, r)$، آنگاه

$$Vol_{t_\circ}(B_{t_\circ}(x_\circ, r)) \geq \kappa r^n.$$

در این جا $B_{t_\circ}(x_\circ, r)$ گوی ژئودزیکی حول نقطهٔ $x_\circ$ به شعاع r نسبت به متریک $g(t_\circ)$ است.

با استفاده از این قضیه می‌توان کران پایینی یکنواخت برای شعاع یک به یکی به دست آورد که برای استفاده از قضیهٔ فشردگی مورد نیاز بود. زیرا طبق قضایای استاندارد هندسه ریمانی می‌توان از روی مقدار انحنا و شعاع یک به یکی کرانی برای حجم گوی‌های ژئودزیکی کوچک به دست آورد و چون طبق قضیه نارمبش موضعی کران پایینی برای حجم گوی‌های ژئودزیکی و کرانی بالا برای انحنا داریم پس شعاع یک به یکی نیز باید از پایین کران‌دار باشد.

۶ رفتار شار با جراحی در زمان‌های بزرگ

تا اینجا دربارهٔ اتفاقاتی که در زمان‌های تکینگی می‌افتد صحبت کردیم و ساختار آنها را مشخص نمودیم. حال قبل از به‌وجود آمدن تکینگی باید با یک جراحی توپولوژیک (که در واقع تجزیه یک مجموع همبند به مؤلفه‌هایش است) آن را خارج کنیم و به جای آن یک گوی سه بعدی با متریکی مشخص قرار دهیم. (یعنی قسمت‌های غیرتکینه را با آن جمع همبند کنیم.) به این گوی سه بعدی، جواب استاندارد می‌گویند. پس از جراحی باید دوباره شار ریچی را روی خمینه جدید به حرکت درآوریم تا به تکینگی بعدی برسیم. برای این که بتوان این کار را تا زمان بی‌نهایت انجام داد کافی است که زمان‌های جراحی که همان زمانهای ایجاد تکینگی‌اند (البته اندکی قبل از آن‌اند.) زیرمجموعه‌ای گسسته از $[\circ, \infty)$ باشند. اثبات این مطلب برخلاف مطالب قبلی بسیار ساده است. روش کار این است که توجه کنیم در هر جراحی مقدار حجمی که از خمینه حذف می‌شود کران پایینی دارد. (این به دلیل نوع تعریف فرایند جراحی است.) از طرف دیگر طبق معادله (۱۱) حجم در نامعادله تحول

$$\frac{d}{dt}Vol \leq -R_{\min}.Vol \tag{۲۵}$$

صدق می‌کند. بنابراین در یک بازه زمانی متناهی، افزایش حجم متناهی است. پس برای تعداد جراحی‌ها در این بازه زمانی کرانی بالا خواهیم داشت (زیرا پس از انجام تعداد مشخصی جراحی چیزی از خمینه باقی نمی‌ماند!) لذا تعداد جراحی‌ها در هر بازه زمانی متناهی، متناهی است و در نتیجه زمانهای جراحی گسسته‌اند.

حال نوبت به قضیهٔ انقراض در زمان متناهی می‌رسد. ایده اثبات این قضیه این است که نشان می‌دهند $M(t)$ برای tهای به اندازه کافی بزرگ گروه‌های بنیادی اول، دوم و سوم بدیهی دارد و می‌دانیم که هر خمینه سه بعدی بسته با این خاصیت تهی است. البته این گزاره وقتی درست است که خمینه اولیه را همبند ساده فرض کنیم اما برای حالتهای دیگر (که در صورت قضیه ذکر شده‌اند) می‌توان با ترفیع به پوشش جهانی این استدلال را تکرار کرد. پس برای اثبات قضیه باید نشان دهیم

که $\pi_2(M(t))$ و $\pi_3(M(t))$ برای tهای بزرگ بدیهی‌اند (فرض کرده‌ایم که π_1 بدیهی است.) ما در اینجا به شرح مختصر بدیهی شدن π_2 می‌پردازیم. برای بررسی π_3 و جزئیات طرح اثبات زیر می‌توانید به [21] مراجعه نمایید.

برای اثبات بدیهی بودن $\pi_2(M(t))$ برای tهای بزرگ احتیاجی به فرض‌های قضیه انقراض در زمان متناهی روی گروه بنیادی نداریم. در واقع این گزاره برای شار ریچی با جراحی روی هر خمینهٔ سه بعدی بسته و جهت‌پذیر درست است. ایده اثبات استفاده از مساحت کره‌های دو بعدی غوطه‌ور شده در خمینه است. برای این منظور کمیت $W_2(g)$ را به عنوان مینیمم مساحت کره‌های دو بعدی غوطه‌ور شده در M که پوچ هموتوپ نیستند، در نظر می‌گیریم. می‌توان تغییرات $W_2(g)$ را تحت شار ریچی با جراحی محاسبه کرد و نشان داد که این کمیت در زمان متناهی، منفی می‌شود. اما $W_2(g)$ باید همواره نامنفی باشد، پس نتیجه می‌شود که از جایی به بعد همه‌ی کره‌های دوبعدی غوطه‌ور شده در خمینه پوچ هموتوپند و لذا گروه بنیادی دوم بدیهی است.

تا اینجا مطالب لازم برای اثبات حدس پوانکاره و کلی‌تر از آن، حدس بیضوی سازی را، بیان کردیم. گام بعدی که برای اثبات حدس هندسی‌سازی ترستن باید برداشته شود، تحلیل رفتار حدی شار با جراحی است، زیرا در حالت کلی انقراضی در زمان متناهی رخ نمی‌دهد و خمینه تا زمان بی‌نهایت ناتهی می‌ماند. در این راستا لازم است توجه شود که در هر جراحی قسمت‌هایی از خمینه که جدا می‌شوند توپولوژی کاملاً مشخصی دارند و در واقع هندسه‌پذیرند، پس اگر بتوان نشان داد که در زمان‌های به‌اندازه کافی بزرگ، $M(t)$ هندسه‌پذیر است نتیجه می‌شود که $M = M(0)$ نیز هندسه‌پذیر می‌باشد و اثبات کامل می‌گردد. اثبات هندسه‌پذیری $M(t)$ برای tهای بزرگ نیز توسط پرلمان در [23] انجام گردید. این اثبات که به طور گسترده از توپولوژی بعد پایین استفاده می‌کند در منابع [4] و [19] شرح داده شده است. ما در اینجا تنها اشاره می‌کنیم که در این اثبات نشان می‌دهند که $M(t)$ در زمانهای بزرگ یک گراف خمینه است، یعنی به قسمت‌هایی تجزیه می‌شود که هر کدام از آنها S^1- کلاف روی یک رویه است، و هندسه‌پذیری این دسته از ۳ ـ خمینه‌ها از مدت‌ها پیش ثابت شده است [28].

۷. شار کیلر ـ ریچی و حدس کالابی

شار ریچی روی خمینه‌های کیلر نخستین بار در ۱۹۸۵ توسط کائو[1] در نظر گرفته شد [3]. وی نشان داد که شار ریچی ساختار کیلر را حفظ می‌کند و اثباتی جدید برای وجود متریک‌های کیلر ـ اینشتین[2] روی خمینه‌های کیلر با کلاس اول چرن نامثبت ارائه کرد. او هم چنین اثباتی جدید برای حدس کالابی ارائه داد که از اثبات قبلی آن بسیار ساده‌تر بود.

1) H. Cao

۲) یعنی فرم ریچی مضربی از فرم کیلر باشد

حدس کالابی: هر $(1,1)$– فرم در کلاس اول چرن، فرم ریچی یک متریک در کلاس کیلر متریک اولیه است.

روش اثبات چنین است که شار نرمال شده ریچی (یا شار ریچی به اضافه یک جمله ثابت) را روی خمینهٔ کیلر به جریان می‌اندازند و نشان می‌دهند که این شار تا بی‌نهایت ادامه دارد و به متریک موردنظر میل می‌کند. این کار بسیار شبیه حالتی است که شار ریچی را روی رویه‌ها در نظر گرفتیم. (در واقع خمینه‌های کیلر یک بعدی‌اند.) مسأله‌ای که باعث می‌شود این روش کار کند این است که با تکنیک‌های استاندارد هندسه کیلر می‌توان شار نرمال شده کیلر ـ ریچی را به معادله‌ای از نوع مونژ ـ آمپر سهموی تبدیل کرد:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi=\log\frac{\det(g_\circ+\partial\bar{\partial}\varphi)}{\det(g_\circ)}+\frac{r}{n}\varphi-f_\circ \qquad (۲۶)$$

که در آن φ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$g(t)=g_\circ+\partial\bar{\partial}\varphi \qquad (۲۷)$$

به دست آوردن معادله (۲۶) هم آسان است. کافی است از رابطه (۲۷) نسبت به زمان مشتق بگیریم و از رابطهٔ $\frac{\partial}{\partial t}g_{i\bar{j}}=-R_{i\bar{j}}+\frac{r}{n}g_{i\bar{j}}$ استفاده کنیم. (در شار کیلر ـ ریچی برای راحتی محاسبات ضریب ۲ را حذف می‌کنند.)

$$-R_{i\bar{j}}+\frac{r}{n}g_{i\bar{j}}=\frac{\partial}{\partial t}g_{i\bar{j}}=\frac{\partial}{\partial t}\partial_i\bar{\partial}_j\varphi=\partial_j\bar{\partial}_j\frac{\partial}{\partial t}\varphi \qquad (۲۸)$$

پس

$$\partial\bar{\partial}\frac{\partial}{\partial t}\varphi=-Rc+\frac{r}{n}g=-(Rc-Rc_\circ)+\frac{r}{n}(g-g_\circ)-Rc_\circ+\frac{r}{n}g_\circ. \qquad (۲۹)$$

حال کافی است توجه کنیم که $g-g_\circ=\partial\bar{\partial}\varphi$ و طبق قضایای کلاسیک هندسه کیلر:

$$Rc-Rc_\circ=-\partial\bar{\partial}\log\frac{\det g}{\det g_\circ}. \qquad (۳۰)$$

هم چنین چون کلاس اول چرن علامت‌دار است می‌توان $g_\circ$ را طوری انتخاب کرد که کلاس $Rc_\circ-\frac{r}{n}g_\circ$ بدیهی باشد و در نتیجه معادله زیر جواب داشته باشد:

$$Rc_\circ-\frac{r}{n}g_\circ=\partial\bar{\partial}f_\circ \qquad (۳۱)$$

(البته می‌توان نشان داد که معادلهٔ $Rc-\frac{r}{n}g=\partial\bar{\partial}f$ همواره جواب دارد و جواب آن در $R-r=\Delta f$ صدق می‌کند. به تابع f پتانسیل انحنا نیز می‌گویند. به تشابه موجود با پتانسیل انحنای رویه‌ها توجه نمایید.)

حال از رابطهٔ

$$\partial\bar{\partial}\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \partial\bar{\partial}\log\frac{\det g}{\det g_\circ} + \partial\bar{\partial}\frac{r}{n}\varphi - \partial\bar{\partial}f_\circ \qquad (۳۲)$$

به سادگی به معادله (۲۶) می‌رسیم.

همان طور که گفته شد با استفاده از معادله بالا می‌توان وجود متریک‌های کیلر ـ اینشتین روی خمینه‌های کیلر با کلاس اول چرن نامثبت را بسیار ساده‌تر از اثبات اولیه‌اش، ثابت کرد. ولی اگر کلاس اول چرن مثبت باشد، لزوماً متریک کیلر ـ اینشتین روی خمینه موجود نیست. البته روش بالا نشان می‌دهد که شار روی این خمینه‌ها نیز تا بی‌نهایت ادامه می‌یابد. یکی از مسائل مهم در نظریهٔ شار کیلر ـ یچی که در طول بیست سال اخیر مورد توجه افراد فعال در این زمینه بوده است، تحلیل رفتار حدی جواب روی خمینه‌های کیلر با کلاس اول چرن مثبت است. خصوصاً این سوال مطرح بوده است که اگر روی چنین خمینه‌ای متریکی کیلر ـ اینشتین موجود باشد، آیا باز هم شار نرمال شده‌ی کیلر ـ ریچی در بی‌نهایت به آن میل می‌کند. تلاش برای پاسخ دادن به این سؤال منجر به این شد که بسیاری افراد با فرض کردن شرایطی اضافی به آن جواب مثبت دهند. یکی از این شرایط، مثبت بودن انحناهای دو مقطعی خمینهٔ کیلر است که تیان [1] و چن [2] در [6] و [7] به آن پرداخته‌اند. لازم به ذکر است که از قبل معلوم شده بود که شار کیلر ـ ریچی مثبت بودن انحناهای دو مقطعی را حفظ می‌کند [20].

پرلمان در کار منتشر نشده‌ای این مسأله را به طور کامل حل کرد و بدون هیچ شرط اضافی نشان داد که در صورت وجود متریک کیلر ـ اینشتین، شار به آن میل خواهد کرد. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه و آخرین پیشرفت‌ها راجع به این مساله به [26] مراجعه نمایید.

یکی دیگر از کاربردهای شار کیلر ـ ریچی در هندسه کیلر اثباتی نو برای حدس فرانکل است که اخیراً ارائه شده است [29].

حدس فرانکل. هر خمینه کیلر فشرده که انحناهای دو مقطعی مثبت دارد یکریخت با فضای افکنشی است.

این اثبات بدون استفاده از وجود متریک کیلر ـ اینشتین مبتنی بر استفاده از روش‌های نوینی است که توسط بوهم [3] و ویلکینگ [4] ابداع شده‌اند [2]. گفتنی است که این روش‌ها برای اثبات حدس هامیلتون مبنی بر این که هر خمینه با عملگر انحنای مثبت فضاگونه کروی است، به‌وجود آمده‌اند و در واقع نشان می‌دهند که شار نرمال شده ریچی روی این خمینه‌ها تا بی‌نهایت ادامه دارد و به متریکی با انحنای ثابت همگرا می‌شود. هامیلتون، خود این مطلب را در ابعاد سه و چهار ثابت کرده بود [12] و [13]. در پایان، لازم است به مقاله‌های [1] و [20] نیز اشاره کنیم که در آنها از شار کیلر ـ ریچی برای طبقه‌بندی خمینه‌های کیلر فشرده با انحناهای دو مقطعی نامنفی، استفاده شده است و در واقع حدس فرانکل را تعمیم داده‌اند.

1) G. Tian 2) X. Chen 3) C. Böhm 4) B. Wilking

مراجع

[1] Bando, Shigetoshi. On the classification of three-dimensional compact Kaehler manifolds of nonnegative bisectional curvature. J. Diff. Geom. 19(1984), n. 2, 283-297.

[2] Böhm, Christoph; Wilking, Burkhard. Manifolds with positive curvature operators are space forms. arXiv: math. DG/0606187.

[3] Cao, Huai-Dong. Deformation of Kähler metrics to Kähler-Einstein metrics on compact Kähler manifolds. Invent. Math. 81(1985), no. 2, 359-372.

[4] Cao, Huai-Dong; Zhu, Xi-Ping. A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures — application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow. Asian J. Math. 10(2006), 165-498.

[5] Chen, Bing-Long; Zhu, Xi-Ping. Uniqueness of the Ricci flow on complete noncompact manifolds. arXiv:math. DG/0505447.

[6] Chen, Xiuxiong; Tian, Gang. Ricci flow on Kähler-Einstein surfaces. Invent. Math. 147(2002), no. 3, 487-544.

[7] ———- , ———- . Ricci flow on Kähler-Einstein manifolds. Duke Math. J. 131 (2006), 17-73.

[8] Chow, Bennett. The Ricci flow on the 2-sphere. J. Diff. Geom. 33(1991), no. 2, 325-334.

[9] Chow, Bennett; Knopf, Dan. The Ricci flow: An introduction. Mathematical Surveys and Monographs, AMS, Providence, RI, 2004.

[10] Chow, Bennett; et. al. The Ricci flow: Techniques and Applications, Part 1: Geometric Aspects. Mathematical Surveys and Monographs, AMS, Providence, RI, 2007.

[11] DeTurck, Dennis. Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors. Diff. Geom. 18(1983), 157-162.

[12] Hamilton, Richard S. Three manifolds with positive Ricci curvature. J. Diff. Geom. 17(1982), no. 2, 255-306.

[13] ———- . Four manifolds with positive curvature operator. J. Diff. Geom. 24(2986), no. 2, 153-179.

[14] ———- . The Ricci flow on surfaces. Contemp. Math. 71, AMS, Providence, RI, 1988.

[15] ———- . The formation of singularities in the Ricci flow. Surveys in differential geometry, Vol. II, Cambridge, MA, 1993, 7-136.

[16] ———- . A compactness property for solutions of the Ricci flow. Amer. J. Math. 117(1995), no.3, 545-572.

[17] ———- . Four manifolds with positive isotropic curvature. Comm. Anal. Geom. 5(1997), no.1, 1-92.

[18] ———- . Non-singular solutions of the Ricci flow on three manifolds. Comm. Anal. Geom. 7(1999), no.4, 695-729.

[19] Kleiner, Bruce; Lott, John. Notes on Perelamn's papers. arXiv;math. DG/0605667.

[20] Mok, Ngaiming. The uniformization theorem for compact Kähler manifolds of nonnegative holomorphic bisectional curvature. J. Diff. Geom. 27(1988), no.2, 179-214.

[21] Morgan, John; Tian, Gang. Ricci flow and the Poincaré conjecture, Clay Mathematics Monographs, AMS, Providence, RI, 2007.

[22] Perelman, Grisha. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv:math., DG/0211159.

[23] ———- . Ricci flow with surgery on three manifolds, arXiv:math., DG/0303109.

[24] ———- . Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three manifolds. arXiv:math., DG/0307245.

[25] Shi, Wan-Xiong. Ricci deformation of the metric on complete noncompact Riemannian manifolds. J. Diff. Geom. 30(1989), no.2, 303-394.

[26] Tian, Gang; Zhu, Xiaohua. Convergence of Kähler-Ricci flow. J. Amer. Math. Soc. 20(2007), no.3, 675-699.

[27] Thurston, William P. Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. Bull. Amer. Math. Soc. 6(1982), no.3, 357-381.

[28] Waldhausen, F. Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten I,II. Invent. Math. 3(1967), 308-333: 4(1967), 87-117.

[29] Wang, YQ. A new Ricci flow proof of Frankel conjecture. arXiv:math. DG/0608151.

محمد صفدری
دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی
msafdari@math.sharif.edu