فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۸، شمارهٔ ۶۴ (بهار و تابستان ۱۳۹۸)، صص. ۵۹ تا ۷۸

نظریهٔ ارگودیک: دستگاه‌های دینامیکی از دیدگاه آنالیز تابعی

مهدی رحیمی و مرتضی میرزایی ازندریانی

چکیده

دستگاه‌های دینامیکی یکی از شاخه‌های مهم و کاربردی ریاضیات است که هم ریشه در علوم دیگر مانند فیزیک دارد و هم کاربردهای فراوانی در این علوم. گرچه نظریهٔ دستگاه‌های دینامیکی خاستگاه هندسی داشته است، در مسیر تحوّل خود از ابزارهای آنالیز تابعی بهره گرفته است و آن چنان با این شاخه از ریاضیات در هم آمیخته که به‌سختی می‌توان آنها را از یکدیگر جدا دانست. نظریهٔ ارگودیک بخشی از دستگاه‌های دینامیکی است که به مطالعهٔ تابع‌های حافظ اندازه بر فضاهای احتمال می‌پردازد. در این مقاله، ضمن اشاره به ریشه‌های فیزیکیِ نظریهٔ ارگودیک، مواردی از به‌کارگیریِ روش‌های آنالیز تابعی را در این بخش از دستگاه‌های دینامیکی از نظر می‌گذرانیم.

۱. سرآغاز

در اواسط قرن نوزدهم، لودویگ بولتسمان[۱] (۱۸۴۴–۱۹۰۶)، فیزیکدان جوان اتریشی، تلاش بسیار کرد تا بین ترمودینامیک و مکانیک کلاسیک وحدت ایجاد کند. تمرکز او بر معرفی قانون دوم ترمودینامیک با استفاده از اصول مکانیک کلاسیک بود. قانون دوم ترمودینامیک بیان می‌کند که آنتروپیِ یک دستگاه بسته (دستگاهی که با محیط اطراف خود تبادل جرم و انرژی ندارد) هرگز کاهش نمی‌یابد. با این حال، تلاش بولتسمان با تناقضی منسوب به تسرملو[۲] در سال ۱۸۹۶ مواجه شد. این تناقض برگرفته از یک قضیهٔ ساده اما عمیق از آنری پوانکاره[۳] است که به *قضیهٔ بازگشت پوانکاره* معروف است [۱۲]. بولتسمان

عبارات و کلمات کلیدی. دستگاه دینامیکی؛ نظریهٔ ارگودیک؛ اندازهٔ پایا؛ اندازهٔ ارگودیک.

[۱]Ludwig Boltzmann [۲]Ernst Zermelo [۳]Henri Poincaré

برای برطرف کردنِ پارادوکس تسرملو، فرضی را بر دستگاه‌های ترمودینامیکی اعمال کرد که رفتاری خاص برای این دستگاه‌ها را پیش‌بینی می‌کرد و بعدها *فرض ارگودیک* نامیده شد. صورت‌بندی ریاضی این فرض برای دستگاه‌های دینامیکی بر فضاهای اندازه، منجر به تولد شاخه‌ای از ریاضیات به‌عنوان بخشی از نظریهٔ دستگاه‌های دینامیکی شد که آن را *نظریهٔ ارگودیک* می‌نامند. بدین ترتیب اگرچه نظریهٔ ارگودیک ریشه در ترمودینامیک دارد، در مسیر تحوّل خود به یکی از شاخه‌های غنی در ریاضیات تبدیل شده است. در این میان، آنالیز تابعی نقشی مهم در تعمیق این نظریه ایفا نموده است تا جایی که این شاخه از دستگاه‌های دینامیکی نتایج و کاربردهای شگفت‌انگیزی در حوزه‌های مختلف و گاه متفاوت در ریاضیات و دیگر شاخه‌های علوم به همراه داشته است.

۲. دستگاه دینامیکی

تعریف‌هایی گوناگون از دستگاه دینامیکی وجود دارد که برخی از آنها بسیار کلی و برخی دیگر خاص‌تر هستند. در این میان، دو تعریف از دستگاه‌های دینامیکی نسبت به تعریف‌های دیگر بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند [۴، ۵]. منظور از یک *دستگاه دینامیکی گسسته* تابعی است مانند $f : X \to X$ که بر یک فضای X عمل می‌کند. عموماً X را فضای حالت‌های دستگاه و f را قانون تحوّل حاکم بر نقاط X در نظر می‌گیریم که به هر حالت $x \in X$، حالت $f(x) \in X$ را به‌عنوان حالت بعدی پس از گذشت یک واحد زمانی نظیر می‌کند. در این الگو، زمان پارامتری گسسته است. به‌علاوه مجموعهٔ

$$O_f(x) = \{x, f(x), f^{۲}(x), \cdots, f^n(x), \cdots\}$$

آیندهٔ x تحت دینامیک f است و آن را *مدار* x می‌نامیم. منظور از نقطهٔ ثابت f، نقطه‌ای مانند $x \in X$ است که $f(x) = x$. به عبارت دیگر، مدار یک نقطهٔ ثابت، مجموعه‌ای تک‌عضوی است.

در *دستگاه‌های دینامیکی پیوسته*، پارامتر زمان پیوسته فرض می‌شود و به این دستگاه‌ها *شار* نیز می‌گویند. به عبارت دیگر، یک شار بر فضای X خانواده‌ای از توابع مانند

$$f^t : X \to X \qquad (t \in \mathbb{R})$$

است به‌طوری که f° تابع همانی بر X است و برای هر $s, t \in \mathbb{R}$ داریم $f^t \circ f^s = f^{t+s}$. شارها عمدتاً در پیوند با معادلات دیفرانسیل ظاهر می‌شوند. برای مشاهدهٔ این پیوند، فرض کنیم $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک میدان برداری از ردهٔ $\mathcal{C}^{۱}$ باشد به‌طوری که برای هر $x \in \mathbb{R}^n$، مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$\frac{dy}{dt} = F(y(t)), \quad y(\circ) = x$$

دارای جوابی مانند

$$\phi(\cdot, x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \qquad t \mapsto \phi(t, x)$$

باشد. در این صورت خانوادهٔ $f^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ با ضابطهٔ $f^t(x) := \phi(t; x)$، شار متناظر با دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dt} = F(y(t))$$

است [۱۰]. معمولاً فرض می‌شود که X مجهز به یک σ−جبر است و f و توابع f^t اندازه‌پذیر هستند. اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، X را به‌همراه σ−جبر بُرل در نظر می‌گیریم و تابع‌های f و f^t را پیوسته فرض می‌کنیم.

در ادامه دو مثال از دستگاه‌های دینامیکی، اولی با زمان پیوسته و دومی با زمان گسسته، ارائه می‌کنیم. پیش از آن، نکاتی را در مورد چنبرهٔ دو بُعدی بیان می‌کنیم. فرض کنیم $S^۱$ دایرهٔ واحد در صفحه باشد. چنبرهٔ دو بُعدی $\mathbb{T}^۲ = S^۱ \times S^۱$ را در نظر بگیرید. رابطهٔ $\sim$ بر $\mathbb{R}^۲$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

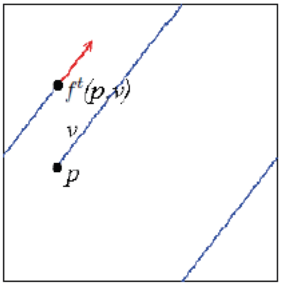
$$(x_۱, y_۱) \sim (x_۲, y_۲) \iff (x_۱ - x_۲, y_۱ - y_۲) \in \mathbb{Z}^۲.$$

به‌سادگی دیده می‌شود که $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی بر $\mathbb{R}^۲$ است. فرض کنیم $\frac{\mathbb{R}^۲}{\mathbb{Z}^۲}$ مجموعهٔ متشکل از رده‌های هم‌ارزی $[(x, y)]$ مجهز به توپولوژی خارج‌قسمتی باشد. در این صورت تابع $\phi : \frac{\mathbb{R}^۲}{\mathbb{Z}^۲} \to \mathbb{T}^۲$ با ضابطهٔ $\phi([(x, y)]) := (e^{۲\pi ix}, e^{۲\pi iy})$ یک همسانریختی بین $\mathbb{T}^۲$ و $\frac{\mathbb{R}^۲}{\mathbb{Z}^۲}$ است. به عبارت دیگر، با تقریب همسانریختی می‌توان نوشت $\mathbb{T}^۲ = \frac{\mathbb{R}^۲}{\mathbb{Z}^۲}$.

مثال ۱.۲. ([۱۷]) فرض کنیم $\mathbb{T}^۲ = \frac{\mathbb{R}^۲}{\mathbb{Z}^۲}$ چنبرهٔ دو بُعدی و X مجموعهٔ متشکل از کلیهٔ زوج‌های $x = (p, v)$ باشد به‌طوری که $p \in \mathbb{T}^۲$ و v برداری واحد با ابتدای p است، یعنی

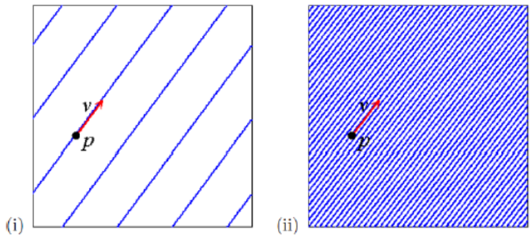
$$X = \{(p, v) : p \in \mathbb{T}^۲, \quad \|v\| = ۱\}.$$

متناظر با هر $(p, v) \in X$، خط راست یکتا در $\mathbb{T}^۲$ موجود است که از نقطهٔ p می‌گذرد و در امتداد بردار v قرار دارد. دستگاه دینامیکی پیوستهٔ (شار) $f^t : X \to X$ را به این صورت تعریف می‌کنیم: اگر $(p, v) \in X$ و خط یکتای گذرنده از p در راستای v را در نظر بگیریم، آنگاه $f^t(p, v)$ نقطه‌ای از X است که حاصل حرکت از نقطهٔ p در امتداد این خط راست با سرعت ثابت ۱ پس از گذشت زمان t است (شکل ۱).



شکل ۱

نکتهٔ جالب در این مثال این است که مدار برخی از نقاط X تحت این دینامیک، متناهی است؛ یعنی آن نقطه تناوبی است در حالی که مدار برخی نقاط تحت این دینامیک نامتناهی و در واقع در X چگال است. برای مثال، در شکل ۲ (i) نقطه‌ای تناوبی و در شکل ۲ (ii) نقطه‌ای با مدار چگال نشان داده شده است.



شکل ۲

مثال ۲.۲. ([۱۷]) دستگاه دینامیکی گسستهٔ $f:\frac{\mathbb{R}^۲}{\mathbb{Z}^۲}\to\frac{\mathbb{R}^۲}{\mathbb{Z}^۲}$ را به‌صورت

$$f(x_۱,x_۲)=A(x_۱,x_۲)^t \mod ۱$$

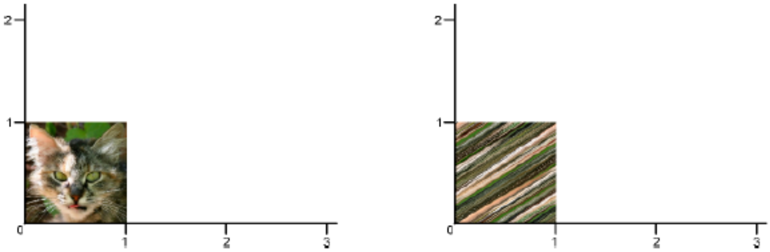
تعریف می‌کنیم که در آن،

$$A=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

به‌عبارت دیگر،

$$f(x_۱,x_۲)=(۲x_۱+x_۲ \mod ۱,\ x_۱+x_۲ \mod ۱).$$

در این صورت f یک همریختی خطی بر چنبره است که به نگاشت *گربهٔ آرنولد* معروف است[۱]. شکل زیر تبدیل یافتهٔ تصویر یک گربه تحت نگاشت آرنولد را نمایش می‌دهد.



شکل ۳

۳. اندازه‌های پایا

فرض کنیم $f : X \to X$ یک دستگاه دینامیکی اندازه‌پذیر بر فضای احتمال $(X, \mathcal{B}, \mu)$ باشد. اندازهٔ احتمال μ را f–*پایا* نامیم اگر

$$\forall B \in \mathcal{B} \qquad \mu(f^{-1}(B)) = \mu(B).$$

در این صورت گوییم f نسبت به μ *حافظ اندازه* است [۱۶، ۱۸]. اگر به μ به‌عنوان یک توزیع احتمال بنگریم، f–پایا بودنِ μ را می‌توان چنین تفسیر کرد که احتمال حضور یک نقطه در هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر B با احتمال حضور تصویر آن نقطه تحت f در B یکسان است. مجموعهٔ همهٔ اندازه‌های احتمال f–پایا را با $\mathcal{M}(X, f)$ نشان می‌دهیم.

همانند دیگر شاخه‌های ریاضیات، یکی از انگیزه‌های مهم مطالعهٔ دستگاه‌های حافظ اندازه، جنبه‌های ذاتی و زیبایی‌شناختیِ آن است. در واقع دستگاه‌هایی که دارای اندازه‌های پایا هستند، دارای ویژگی‌های عمیق و جالبی هستند که در قالب قضیه‌ها و نتایج بسیار زیبا بیان می‌شوند. به‌علاوه به‌کارگیریِ این قضیه‌های زیبا در شاخه‌های دیگر ریاضیات منجر به حل مسائلی جالب در این شاخه‌ها می‌شود. برخی از این شاخه‌ها در نهاد، بسیار از دستگاه‌های دینامیکی دور هستند؛ شاخه‌هایی مانند ترکیبیات و نظریهٔ اعداد. دلیل دیگر بر اهمیت اندازه‌های پایا، وجود مسائلی در علوم تجربی است که می‌توان آنها را با دستگاه‌های دینامیکی که کمیت به‌خصوصی را حفظ می‌کنند، مدل‌سازی کرد. برای مثال، دستگاه‌های هامیلتونی که تحوّل دستگاه‌های پایسته در مکانیک نیوتنی را توصیف می‌کنند، منجر به شارهایی می‌شوند

[۱] این نامگذاری برگرفته از حروف اول کلمات continuous automorphism of the torus است.

که اندازه‌ای طبیعی با نام *اندازهٔ لیوویل*[۱] را حفظ می‌کنند. یکی دیگر از دلایل اهمیت اندازه‌های پایا این است که مطالعهٔ اندازه‌های پایا برای یک دستگاه دینامیکی می‌تواند منجر به اطلاعاتی مهم دربارهٔ رفتار دینامیکی آن دستگاه شود که دستیابی به آنها از راه‌های دیگر، بسیار دشوار است. در این باره، یک نمونهٔ مهم، قضیهٔ بازگشت پوانکاره است که نوعی ویژگی بازگشت را برای دستگاه‌های دینامیکی حافظ اندازه پیش‌بینی می‌کند. قضیهٔ بازگشت پوانکاره می‌گوید اگر $f : X \to X$ یک دستگاه دینامیکی اندازه‌پذیر، μ یک اندازهٔ f-پایای متناهی و A مجموعه‌ای اندازه‌پذیر با اندازهٔ مثبت باشد، آنگاه تقریباً هر $x \in A$ تحت دینامیک f بی‌نهایت بار به A باز می‌گردد. به عبارت دیگر، مجموعه‌ای اندازه‌پذیر مانند $B \subseteq A$ موجود است به گونه‌ای که $\mu(B) = \mu(A)$ و برای هر $x \in B$ دنبالهٔ $n_۱ < n_۲ < n_۳ < \cdots$ موجود است چنان‌که به‌ازای هر i، $f^{n_i}(x) \in A$. برای مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ قضیهٔ بازگشت پوانکاره، [۱۶، ۱۸] را بخوانید.

قضیهٔ بازگشت پوانکاره در بسیاری از نتایج از جنس نظریهٔ اعداد مورد استفاده قرار گرفته است. مثال زیر نمونه‌ای ساده از این نوع مسائل است.

مثال ۱.۳. ([۱۶]) بازهٔ $X = [۰, ۱]$ را به‌همراه اندازهٔ لبگ m بر آن در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم نشان دهیم که بسط اعشاری تقریباً هر عدد در بازهٔ $[۰, ۱]$ که بسط آن با رقم ۴ شروع می‌شود، شامل بی‌نهایت رقم ۴ است. برای این منظور، تابع $f : [۰, ۱] \to [۰, ۱]$ را با ضابطهٔ $f(x) = ۱۰x - [۱۰x]$ تعریف می‌کنیم. در واقع f به هر x، قسمت اعشاری $۱۰x$ را نظیر می‌کند. به‌سادگی دیده می‌شود که اندازهٔ لبگ $\mu = m$، f-پایاست. بنابراین شرایط قضیهٔ بازگشت پوانکاره برقرار است. از طرف دیگر، اگر عدد x در بازهٔ $(۰, ۱)$ دارای بسط اعشاریِ $x = ۰.a_۰a_۱a_۲a_۳\cdots$ باشد که در آن، $a_i \in \{۰, ۱, ۲, ۳, \ldots, ۹\}$ و $a_i \neq ۹$ برای تعداد نامتناهی i، آنگاه $f(x) = ۰.a_۱a_۲a_۳a_۴\cdots$ و بنابراین

$$f^n(x) = ۰.a_na_{n+۱}a_{n+۲}\cdots \quad (n \geq ۱).$$

اکنون فرض کنیم A مجموعهٔ همهٔ اعداد $x \in (۰, ۱)$ باشد که بسط اعشاری آنها با رقم ۴ شروع می‌شود، یعنی $a_۰ = ۴$. با توجه به قضیهٔ بازگشت پوانکاره، تقریباً هر عضو A تحت دینامیک f بی‌نهایت بار به A باز می‌گردد؛ یعنی به‌ازای بی‌نهایت مقدار n داریم $a_n = ۴$ که این، حکم را ثابت می‌کند.

حکم مثال بالا برای هر رقم دیگر بجز ۴ نیز برقرار است. حتی می‌توان گفت هر بلوک دلخواه متشکل از $k \geq ۱$ رقم متوالی نیز با احتمال یک، بی‌نهایت بار در بسط اعشاری x تکرار می‌شود.

بنابراین وجود اندازه‌های پایا دست‌کم برای رده‌های مهمی از دستگاه‌های دینامیکی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. ایدهٔ اصلی این کار، تبدیل مسئلهٔ وجود اندازه‌های پایا به مسئلهٔ کلاسیک وجود نقطهٔ ثابت

[۱] Liouville measure

در آنالیز تابعی است. فرض کنیم $f : X \to X$ تابعی پیوسته بر فضای متری فشردهٔ X باشد. مسئلهٔ وجود اندازهٔ احتمال پایا برای چنین تابعی به‌سادگی به یک مسئلهٔ نقطهٔ ثابت تبدیل می‌شود. برای این کار، فرض کنیم $\mathcal{M}_۱(X)$ مجموعهٔ همهٔ اندازه‌های بُرل احتمال بر X باشد. نگاشت

$$f_* : \mathcal{M}_۱(X) \to \mathcal{M}_۱(X)$$

را به‌صورت

$$(f_*\mu)(A) := \mu(f^{-۱}(A)) \quad (A \in \mathcal{B})$$

تعریف می‌کنیم. روشن است که μ یک اندازهٔ f–پایا است اگر و تنها اگر μ یک نقطهٔ ثابت برای f_* باشد. برای اینکه بتوان از قضیه‌های کلاسیک نقطهٔ ثابت در آنالیز تابعی استفاده کرد، باید $\mathcal{M}_۱(X)$ را به یک توپولوژی مناسب مجهز کنیم به‌طوری که الف) $\mathcal{M}_۱(X)$ مترپذیر باشد به این معنی که متری بر فضای $\mathcal{M}_۱(X)$ موجود باشد که توپولوژی القایی توسط آن برابر با توپولوژی این فضا شود؛ ب) $\mathcal{M}_۱(X)$ فشرده باشد؛ پ) نگاشت $f_* : \mathcal{M}_۱(X) \to \mathcal{M}_۱(X)$ پیوسته باشد. این توپولوژی اسرارآمیز چیزی جز توپولوژی *ضعیف–ستاره* نیست. ایدهٔ تعریف این توپولوژی بر $\mathcal{M}_۱(X)$ قضیهٔ نمایش ریس[۱] و مفهوم توپولوژی ضعیف–ستاره برای دوگان فضای توابع پیوسته بر X است.

تعریف ۲.۳. توپولوژی ضعیف–ستاره بر $\mathcal{M}_۱(X)$ کوچکترین توپولوژی بر $\mathcal{M}_۱(X)$ است که همهٔ توابع $\mu \longmapsto \int_X \phi d\mu$ $(\phi \in \mathcal{C}(X))$ نسبت به آن پیوسته‌اند. عضوهای پایهٔ این توپولوژی عبارت‌اند از

$$V(\mu, \Phi; \epsilon) := \{m \in \mathcal{M}_۱(X) : \left|\int_X \phi_i dm - \int_X \phi_i d\mu\right| < \epsilon, i = ۱, ۲, \ldots, N\}$$

که در آن، $\epsilon > ۰$، $\Phi = \{\phi_۱, \phi_۲, \ldots, \phi_N\}$، $\phi_i \in \mathcal{C}(X)$ و $\mu \in \mathcal{M}_۱(X)$.

ثابت می‌شود که $\mathcal{M}_۱(X)$ مجهز به توپولوژی ضعیف–ستاره، یک فضای متری فشرده و محدب است. به‌علاوه تابع $f_* : \mathcal{M}_۱(X) \to \mathcal{M}_۱(X)$ پیوسته است [۱۶]. به‌کارگیریِ مستقیم قضیهٔ نقطهٔ ثابت شاودر[۲]، وجود نقطهٔ ثابت برای f_* و در نتیجه وجود اندازهٔ پایا برای f را تضمین می‌کند. به‌عبارت دیگر، اگر $f : X \to X$ تابعی پیوسته بر فضای متری فشردهٔ X باشد، آن‌گاه $\mathcal{M}(X, f) \neq \emptyset$، یعنی f دست‌کم یک اندازهٔ بُرل پایا دارد [۱۸].

گرچه با استفاده از ابزارهای آنالیز تابعی وجود اندازه‌های پایا برای توابع پیوسته بر فضاهای متری فشرده ثابت می‌شود، این آغاز راه است. در واقع $\mathcal{M}(X, f)$ دارای ویژگی‌های توپولوژیک بسیار جالبی است. به بیان دقیق‌تر، اگر $f : X \to X$ یک تابع پیوسته بر فضای متری فشردهٔ X باشد، آن‌گاه $\mathcal{M}(X, f)$ یک زیرمجموعهٔ محدب و فشرده از $\mathcal{M}_۱(X)$ است [۱۸].

[۱] Riesz representation theorem [۲] Schauder fixed-point theorem

اکنون نوبت قضیهٔ کرین–میلمن[۱] است که وجود انواع خاصی از اندازه‌های پایا را پیش‌بینی کند. این اندازه‌ها، در واقع اتم‌های تشکیل‌دهندهٔ اندازه‌های پایا هستند. یادآوری می‌کنیم که اگر A یک زیرمجموعهٔ محدب از فضای برداری Z باشد، $a \in A$ را یک *نقطهٔ گوشه‌ای* A نامیم اگر هیچ پاره‌خطِ بازِ گذرنده از نقطهٔ a به‌طور کامل در A قرار نگیرد. به‌عبارت دیگر، برای هر $x, y \in A$ اگر عدد $\lambda \in (۰, ۱)$ موجود باشد به‌گونه‌ای که $a = \lambda x + (۱ - \lambda) y$، آن‌گاه $x = y = a$. مجموعهٔ همهٔ نقاط گوشه‌ای A را با $\mathrm{ext}(A)$ نشان می‌دهیم. اگر B زیرمجموعه‌ای از فضای برداری توپولوژیک Z باشد، کوچکترین مجموعهٔ محدب بستهٔ شامل B را *پوش محدب بستهٔ*[۲] B می‌نامیم و آن را با $\overline{\mathrm{co}}(B)$ نشان می‌دهیم.

بنابر قضیهٔ کرین–میلمن، اگر A یک زیرمجموعهٔ فشرد و محدب ناتهی از یک فضای برداری موضعاً محدب Z باشد، آن‌گاه $\mathrm{ext}(A)$ ناتهی است و به‌علاوه $A = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}(A))$، یعنی A برابر است با پوش محدب بستهٔ نقاط گوشه‌ای آن. به‌عبارت دیگر، می‌توان A را از طریق نقاط گوشه‌ای آن بازیافت. اکنون اگر قضیهٔ کرین–میلمن را برای $A = \mathcal{M}(X, f)$ به‌کار گیریم، نتیجه می‌شود که مجموعهٔ نقاط گوشه‌ای $\mathcal{M}(X, f)$ ناتهی است. به‌علاوه اگر این مجموعه را با $\mathcal{E}(X, f)$ نشان دهیم، خواهیم داشت

$$\mathcal{M}(X, f) = \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{E}(X, f)).$$

اعضای $\mathcal{E}(X, f)$ را *اندازه‌های ارگودیک* نسبت به f می‌نامیم. اگر $\mu \in \mathcal{E}(X, f)$ اندازه‌ای ارگودیک باشد، زوج (f, μ) را یک *دستگاه دینامیکی ارگودیک* می‌خوانیم. بنابراین اگر دستگاه $f : X \to X$ دارای تعدادی متناهی اندازهٔ ارگودیک باشد:

$$\mathcal{E}(X, f) = \{m_۱, m_۲, \dots, m_n\},$$

آن‌گاه هر اندازهٔ f–پایا را می‌توان به‌صورت ترکیبی محدب از اعضای $\mathcal{E}(X, f)$ نوشت. به عبارت دیگر،

$$\mu \in \mathcal{M}(X, f) \Longleftrightarrow \exists \lambda_۱, \dots, \lambda_n \in [۰, ۱] : \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i = ۱, \quad \mu = \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i m_i. \qquad (۱.۳)$$

قبل از ارائهٔ مثال‌های بیشتر، در قالب تعریف و قضیهٔ زیر، یاد آوری می‌کنیم که دستگاه‌ها با رفتار دینامیکی مشابه، دارای اندازه‌های پایا و ارگودیک متناظر هستند.

تعریف ۳.۳. ([۸]) فرض کنیم X و Y دو فضای متری و $f : X \to X$ و $g : Y \to Y$ دو دستگاه دینامیکی باشند. f و g را مزدوج نامیم اگر نگاشت دوسویی اندازه‌پذیر $h : X \to Y$ با وارون اندازه‌پذیر موجود باشد به‌گونه‌ای که $h \circ f = g \circ h$. در این صورت می‌نویسیم $f \overset{h}{\sim} g$. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که تناظری یک‌به‌یک بین اندازه‌های پایا و ارگودیک دستگاه‌های مزدوج برقرار است.

[۱] Krein-Milman [۲] closed convex hull

قضیه ۴.۳. *([۸]) فرض‌کنیم X و Y دو فضای متری و $f : X \to X$ و $g : Y \to Y$ دو دستگاه دینامیکی مزدوج تحت تزویج $h : X \to Y$ باشند. در این صورت*

(۱) μ، f-پایاست اگر و تنها اگر $h_*\mu$، g-پایا باشد؛

(۲) μ نسبت به f ارگودیک است اگر و تنها اگر $h_*\mu$ نسبت به g ارگودیک باشد.

مثال زیر نمونه‌ای از دستگاه‌ها با تعداد متناهی اندازهٔ ارگودیک است [۸].

مثال ۵.۳. (نگاشت شمال-جنوب) فرض کنیم X دایرهٔ واحد به مرکز $(۰,۱) \in \mathbb{R}^۲$ باشد. نقطهٔ $N = (۰,۲)$ را قطب شمال و $S = (۰,۰)$ را قطب جنوب X می‌نامیم. برای هر $x \in X \setminus \{N\}$، خط گذرنده از N و x را در نظر بگیرید. این خط محور xها را در نقطهٔ یکتای $\phi(x)$ قطع می‌کند. اکنون نگاشت $T : X \to X$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(x) = \begin{cases} \phi^{-۱}(\frac{۱}{۲}\phi(x)) & x \in X \setminus \{N\} \\ N & x = N \end{cases}$$

بنابراین $T(N) = N$، $T(S) = S$ و اگر $x \neq N, S$، آن‌گاه $\lim_{n\to+\infty} T^n(x) = S$. به‌سادگی ثابت می‌شود که $\mathcal{E}(X,T) = \{\delta_N, \delta_S\}$ که در آن، δ_x اندازهٔ دیراک در نقطهٔ x است و به‌صورت

$$\delta_x(A) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases}$$

تعریف می‌شود. در نتیجه

$$\mathcal{M}(X,T) = \{\lambda\delta_N + (۱-\lambda)\delta_S :\ \lambda \in [۰,۱]\}.$$

مثال زیر نمونه‌ای از یک دستگاه دینامیکی با بی‌نهایت (در واقع ناشمارا) اندازهٔ ارگودیک است [۸].

مثال ۶.۳. نگاشت $f : [۰,۱] \to [۰,۱]$ با ضابطهٔ

$$f(x) = \begin{cases} ۲x & ۰ \leq x < \frac{۱}{۲} \\ ۲x - ۱ & \frac{۱}{۲} \leq x \leq ۱ \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. برای هر $p \in (۰,۱)$ قرار می‌دهیم $I^{(p)} = [۰,۱]$. تابع $f_p : I^{(p)} \to I^{(p)}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_p(x) = \begin{cases} \frac{x}{p} & x \in [۰,p) \\ \frac{x}{۱-p} - \frac{p}{۱-p} & x \in [p,۱] \end{cases}$$

به‌ازای هر $p \in (۰,۱)$ دستگاه‌های f و f_p مزدوج توپولوژیک هستند. برای معرفی دقیق نگاشت تزویج h_p، مجموعهٔ دنباله‌هایی را که جمله‌های آنها از ۰ و ۱ تشکیل شده‌اند، با D نشان می‌دهیم. به‌سادگی می‌توان دید که D همراه با

$$d((s_n)_{n\geq ۰},(t_n)_{n\geq ۰}) := \sum_{n=۰}^{+\infty} \frac{|s_n - t_n|}{۲^n}$$

یک فضای متری است. اکنون برای $p \in (۰,۱)$ قرار می‌دهیم $I_۰^{(p)} = [۰,p)$ و $I_۱^{(p)} = (p,۱]$. به‌ازای هر $x \in [۰,۱)$ دنبالهٔ $(x_۰^{(p)}, x_۱^{(p)}, \dots, x_i^{(p)}, \dots)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_i^{(p)} = \begin{cases} ۰ & f^i(x) \in I_۰^{(p)} \\ ۱ & f^i(x) \in I_۱^{(p)} \end{cases}$$

این دنباله در هر نقطهٔ $x \neq p$ خوش‌تعریف است. به‌علاوه یکتایی این دنباله از انبساطی بودنِ f_p نتیجه می‌شود. توجه کنید که نگاشت $f : I \to I$ $(I = [۰,۱))$ حالت خاص $f_p : I^{(p)} \to I^{(p)}$ به‌ازای $p = \frac{۱}{۲}$ است. حال فرض کنیم نگاشت دوسویی $h_p : I^{(p)} \to I$ نقاط با دنباله‌های متناظرِ یکسان را به یکدیگر نگاشته و $x = p$ را به $x = \frac{۱}{۲}$ بنگارد. به‌سادگی می‌توان دید که h_p یک همسانریختی است و $f \overset{h_p}{\sim} f_p$. اکنون برای $p \in (۰,۱)$ قرار می‌دهیم $\mu_p := (h_p)_* m$ که در آن، m اندازهٔ لبگ بر $[۰,۱]$ است. در این صورت $\{\mu_p\}_{p\in(۰,۱)}$ خانواده‌ای از اندازه‌های ارگودیک متمایز برای f خواهد بود.

با توجه به مثال قبل، دستگاه‌هایی دینامیکی وجود دارند که در آنها $\mathcal{E}(X,f)$ نامتناهی و حتی ناشمارا است و لذا باید نمایش اعضای $\mathcal{M}(X,f)$ به‌صورت ترکیب محدب اعضای $\mathcal{E}(X,f)$ را به‌نحوی شایسته به حالت نامتناهی تعمیم دهیم. در اینجا نیز ابزار دیگری در آنالیز تابعی به نام *قضیهٔ شوکه*[۱] راهگشا است. در ادامه به نقش این قضیهٔ مهم آنالیز تابعی در تعمیق تصویر ذهنی ما از اندازه‌های پایا و ارگودیک می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که فضای توپولوژیک V موضعاً فشرده نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in V$ همسایگی باز U از x موجود باشد به گونه‌ای که بستار U فشرده باشد.

تعریف ۷.۳. ([۱۱]) فرض کنیم Y زیرمجموعه‌ای ناتهی و فشرده از فضای توپولوژیک موضعاً فشردهٔ V و τ یک اندازهٔ احتمال بر Y باشد. گوییم اندازهٔ احتمال τ نقطهٔ $x_۰ \in V$ را نمایش می‌دهد اگر به‌ازای هر $\Phi \in V^*$ داشته باشیم

$$\Phi(x_۰) = \int_Y \Phi d\tau.$$

اکنون آماده‌ایم که قضیهٔ شوکه را بیان نماییم [۱۱].

[۱] Choquet's Theorem

قضیه ۸.۳. *گیریم Y یک زیرمجموعهٔ متریپذیر محدب فشرده از فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب V باشد و $x_\circ \in Y$. در این صورت اندازهٔ احتمال τ بر Y موجود است چنانکه $\tau(\text{ext}(Y)) = ۱$ و τ، $x_\circ$ را نمایش می‌دهد.*

فرض کنیم $\mu \in \mathcal{M}(X, f)$ و $\phi : X \to \mathbb{R}$ تابعی اندازه‌پذیر و کراندار باشد. با توجه به اینکه $\mathcal{E}(X, f) = \text{ext}(\mathcal{M}(X, f))$، می‌توان قضیهٔ شوکه را برای $V = \mathcal{M}(X)$، فضای اندازه‌های بُرل مختلط، $Y = \mathcal{M}(X, f)$، $x_\circ = \mu$ و تابعک $\Phi : \mathcal{M}(X) \to \mathbb{C}$ با ضابطهٔ $\Phi(\mu) = \int_X \phi d\mu$ به‌کار گرفت تا نتیجهٔ زیر به‌دست آید.

نتیجه ۹.۳. *([۱۸]) فرض کنیم $f : X \to X$ تابعی پیوسته بر فضای متری فشردهٔ X باشد. در این صورت برای هر $\mu \in \mathcal{M}(X, f)$، اندازهٔ احتمال یکتای τ بر زیرمجموعه‌های بُرل فضای $\mathcal{M}(X, f)$ موجود است چنانکه $\tau(\mathcal{E}(X, f)) = ۱$ و برای هر تابع اندازه‌پذیر کراندار $\phi : X \to \mathbb{R}$،*

$$\int_X \phi(x) d\mu(x) = \int_{\mathcal{E}(X,f)} \left(\int_X \phi(x) dm(x) \right) d\tau(m). \qquad (۲.۳)$$

با به‌کارگیریِ قضیهٔ همگرایی یکنوا، به‌سادگی ثابت می‌شود که (۲.۳) برای هر تابع اندازه‌پذیر نامنفی $\phi : X \to \mathbb{R}$ نیز برقرار است. همچنین اگر در رابطهٔ (۲.۳) قرار دهیم $\phi = \chi_A$، آن‌گاه

$$\mu(A) = \int_{\mathcal{E}(X,f)} m(A) d\tau(m). \qquad (۳.۳)$$

نتیجهٔ (۳.۳) در واقع تعمیمی از (۱.۳) برای حالتی است که $\mathcal{E}(X, f)$ نامتناهی باشد. با این شرایط، می‌نویسیم $\mu = \int_{\mathcal{E}(X,f)} m d\tau(m)$ و آن را *تجزیهٔ ارگودیک* μ می‌نامیم.

تجزیهٔ ارگودیک اندازهٔ f-پایای μ در عمل بسیار سودمند است چراکه در بسیاری از موارد می‌توان برای اثبات حکمی در مورد اندازهٔ f-پایای μ، نخست آن را برای اندازه‌های ارگودیک ثابت کرد و سپس از طریق نمایش تجزیهٔ ارگودیک، آن را برای μ نیز تعمیم داد. نمونه‌ای از این روش را در بخش ۵ ارائه خواهیم داد.

۴. قضیه‌های ارگودیک فون‌نویمان و بِرکُف

در این بخش، به بیان قضیه‌های بنیادی در نظریهٔ ارگودیک می‌پردازیم. برای بیان انگیزهٔ اصلی این قضیه‌ها، نخست فرض کنیم $A \subseteq X$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر با اندازهٔ مثبت باشد و $x \in X$ نیز نقطه‌ای دلخواه در X باشد. می‌خواهیم مجموعهٔ عبورهای مدار x تحت دینامیک f از مجموعهٔ A را مورد بررسی قرار دهیم. به عبارت دیگر، می‌خواهیم تعداد دفعاتی را که x تحت دینامیک f مجموعهٔ A را ملاقات

می‌کند، یعنی تعداد اعضای مجموعهٔ $\{j \geq ۰ : f^j(x) \in A\}$ را مورد بررسی قرار دهیم. برای مثال، بنابر قضیهٔ بازگشت پوانکاره، مجموعهٔ فوق برای تقریباً هر نقطهٔ $x \in A$ نامتناهی است. اما می‌خواهیم اطلاعات دقیق‌تری دربارهٔ آن داشته باشیم. به این منظور، متوسط زمان سفر x در A را تعریف می‌کنیم:

$$\omega(x, A) := \lim_{n\to+\infty} \frac{۱}{n}\#(\{۰ \leq j \leq n-۱ : \quad f^j(x) \in A\}). \tag{۱.۴}$$

توجه کنید که در اینجا $\#(A)$ یعنی تعداد اعضای A. یک پرسش جالب این است که تحت چه شرایطی متوسط زمان سفر x در A عددی مثبت است؟ قبل از پاسخ به این پرسش، نخست باید سؤالی بنیادی‌تر را طرح کنیم. آیا حد (۱.۴) لزوماً موجود است؟ تحت چه شرایطی وجود این حد تضمین می‌شود؟

این سؤال‌ها ریشه در کارهای فیزیکدان اتریشی لودویگ بولتسمان، بنیانگذار نظریهٔ جنبشی گازها، دارد. بولتسمان یکی از طرفداران نظریهٔ اتمی گازها بود. بنابر این نظریه، گازها متشکل از تعداد بسیار زیادی ذرات کوچک در حال حرکت هستند که به‌طور پیوسته با یکدیگر برخورد می‌کنند. اساساً باید بتوان رفتار یک گاز را از طریق به‌کارگیری قوانین مکانیک کلاسیک در مورد هر یک از این ذرات توصیف کرد. اما در عمل این کار ناممکن است چراکه تعداد این ذرات بسیار زیاد است. طرح نظریهٔ جنبشی گازها این است که رفتار گازها را در مقیاسی ماکروسکوپی به‌عنوان ترکیبی آماری از حرکات کلیهٔ مولکول‌های آن توصیف نماییم. برای صورت‌بندی ریاضی این نظریه، بولتسمان مجبور به اعمال یک فرض بر دستگاه متشکل از ذرات تشکیل‌دهندهٔ گاز شد که به *فرض ارگودیک* معروف است. به زبان کنونی، فرض ارگودیک ادعا می‌کند که برای دستگاه‌هایی که حرکت ذرات یک گاز را توصیف می‌کنند (شارهای هامیلتونی)، متوسط زمان سفر تقریباً هر نقطه در هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر A برابر با اندازهٔ آن مجموعه است. به‌عبارت دیگر، $\omega(x, A) = \mu(A)$ تقریباً همه‌جا بر X.

تلاش‌ها برای تأیید و یا رد فرض ارگودیک منجر به پیشرفت‌هایی مهم در نظریهٔ ارگودیک و دستگاه‌های دینامیکی و مکانیک آماری شد. قبل از بیان قضیه‌های ارگودیک فون‌نویمان و بِرکُف، به (۱.۴) بازمی‌گردیم. به‌سادگی می‌توان دید که اگر $A \subseteq X$ اندازه‌پذیر باشد و $x \in X$، آنگاه

$$\begin{aligned}\omega(x, A) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{۱}{n}\#(\{۰ \leq j \leq n-۱ : f^j(x) \in A\}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{۱}{n}\sum_{j=۰}^{n-۱} \chi_A(f^j(x)).\end{aligned} \tag{۲.۴}$$

بنابراین اگر در (۲.۴) قرار دهیم $\phi = \chi_A$، آنگاه می‌توان عبارت سمت راست (۲.۴) را به‌صورت

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{۱}{n}\sum_{j=۰}^{n-۱} \phi(f^j(x)) \tag{۳.۴}$$

بازنویسی کرد که منجر به تعمیمی طبیعی از پرسش اصلی می‌شود: آیا حد (۳.۴) برای توابع اندازه‌پذیر کلی‌تر ϕ موجود است؟

فون‌نویمان[۱] به‌کمک ابزارهای آنالیز تابعی، قضیهٔ کلی‌تر زیر را برای طولپایی‌ها بر فضاهای هیلبرت ثابت کرد. منظور از یک طولپایی بین فضاهای هیلبرت $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ و $(K, \langle\cdot,\cdot\rangle_K)$ نگاشتی خطی مانند $U : H \to K$ است با این ویژگی که به‌ازای هر $x, y \in H$، $\langle x, y\rangle_H = \langle Ux, Uy\rangle_K$.

قضیه ۱.۴. *([۱۶]) فرض کنیم $U : H \to H$ یک طولپایی خطی بر فضای هیلبرت H و P نگاشت تصویر متعامد بر زیرفضای $I(U) = \{x \in H : Ux = x\}$ باشد. در این صورت به‌ازای هر $x \in H$،*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j x = Px.$$

اکنون اگر $f : X \to X$ یک دستگاه دینامیکی و μ اندازه‌ای f-پایا باشد، *عملگر کوپمن*[۲] متناظر با f بر فضای هیلبرت $H = L^2(\mu)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U_f : L^2(\mu) \to L^2(\mu), \qquad U_f(\phi) := \phi \circ f.$$

به‌سادگی می‌توان دید که U_f عملگری خطی و کراندار و در واقع یک طولپایی بر فضای هیلبرت $L^2(\mu)$ است. با به‌کار گیریِ قضیهٔ فون‌نویمان برای $H = L^2(\mu)$ و $U = U_f$، عملگر کوپمن متناظر با f، قضیهٔ ارگودیک فون‌نویمان به‌دست می‌آید [۱۶]:

قضیه ۲.۴. *برای هر تابع $\phi \in L^2(\mu)$ دنبالهٔ $S_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ f^j$ در نُرم $L^2(\mu)$ به تابعی مانند $\tilde{\phi} \in L^2(\mu)$ همگرا است که در آن، $\tilde{\phi}$ تصویر متعامد ϕ بر زیرفضای*

$$I = \{\phi \in L^2(\mu) : \quad \phi \circ f = \phi\}$$

است.

جورج دیوید بِرکُف[۳] قضیهٔ ارگودیک فون‌نویمان را به نحوی مطلوب ارتقاء داد. او نشان داد که همگراییِ دنبالهٔ S_n در قضیهٔ فون‌نویمان نه‌تنها در نرم L^2، بلکه تقریباً همه‌جا رخ می‌دهد.

قضیه ۳.۴. *([۱۶]) فرض کنیم $f : X \to X$ تابعی اندازه‌پذیر و μ اندازه‌ای احتمال و f-پایا باشد. برای هر تابع انتگرال‌پذیر $\phi : X \to \mathbb{R}$ حد*

$$\tilde{\phi}(x) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x))$$

[۱] von Neumann [۲] Koopman operator [۳] George David Birkhoff

برای تقریباً هر $x \in X$ موجود است. به‌علاوه $\tilde{\phi}$ نیز انتگرال‌پذیر است و داریم

$$\int_X \tilde{\phi} d\mu = \int_X \phi d\mu.$$

قضیهٔ ارگودیک بِرکُف وجود حد $\tilde{\phi}(x) := \lim_{n\to+\infty} \frac{۱}{n}\sum_{j=۰}^{n-۱} \phi(f^j(x))$ را تضمین می‌کند. این کمیت را *میانگین زمانی* ϕ در نقطهٔ x می‌نامیم. میانگین زمانی در حالت کلی به نقطهٔ x وابسته است اما حالاتی هم وجود دارند که میانگین زمانی به x بستگی پیدا نمی‌کند و $\tilde{\phi}$ تابعی ثابت است؛ یعنی از تقریباً هر نقطهٔ x که شروع کنیم، متوسط مقادیر ϕ بر مدار x مقداری ثابت است. در این حالت دستگاه فراموشکار است و نقطهٔ شروع در میانگین زمانی را فراموش می‌کند. ثابت می‌شود که این شرایط برای دستگاه‌های ارگودیک رخ می‌دهد، یعنی زمانی که $\mu \in \mathcal{E}(X, f)$. به‌علاوه در این حالت، به‌سادگی می‌توان دید که برای تقریباً هر $x \in X$ داریم

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{۱}{n}\sum_{j=۰}^{n-۱} \phi(f^j(x)) = \int_X \phi d\mu. \tag{۴.۴}$$

به‌عبارت دیگر، در دستگاه‌های ارگودیک، میانگین زمانی در تقریباً همهٔ نقاط با میانگین فضایی برابر است. به‌ویژه با قرار دادنِ $\phi = \chi_A$ در (۴.۴)، برای تقریباً هر x خواهیم داشت $\omega(x, A) = \mu(A)$. بنابراین در دستگاه‌های ارگودیک، متوسط زمان سفر تقریباً همهٔ نقاط فضا در مجموعهٔ A برابر با حجم A است. به عبارت دیگر، هر مجموعه به اندازهٔ حجمش مسافر می‌پذیرد.

۵. آنتروپی

اصطلاح *آنتروپی* نخستین بار توسط ریاضیدان و فیزیکدان آلمانی رودُلف کلاوسیوس[۱]، یکی از بنیانگذاران ترمودینامیک، به‌کار گرفته شد. در نظریهٔ دستگاه‌های در حال تعادل ترمودینامیکی، آنتروپی میزان بی‌نظمی دستگاه را اندازه‌گیری می‌کند. قانون دوم ترمودینامیک می‌گوید یک دستگاه ترمودینامیکی بسته در جهتی تحوّل می‌کند که آنتروپی (بی‌نظمی) دستگاه افزایش یابد. پس از آن، مفهوم آنتروپی در شاخه‌های علمی گوناگون ظاهر شد. در اواسط قرن بیستم، یک مهندس الکترونیک آمریکایی به نام کلود شانون[۲] [۱۴] مفهوم آنتروپی را در نظریهٔ اطلاعات وارد کرد. تقریباً همزمان، کُلموگُروف [۷] و یاکوف سینایی[۳] [۱۵] تعریفی از آنتروپی برای دستگاه‌های دینامیکی در نظریهٔ ارگودیک ارائه کردند.

[۱] Rudolf Clausius [۲] Claude Shannon [۳] Yakov Sinai

۱.۵. آنتروپی در نظریهٔ اطلاعات. فرض کنیم $X_۱$، $X_۲$، $\ldots$، X_n فهرستی از نمادها (حروف یا اعداد) باشند که در یک پیام متنی مورد استفاده قرار می‌گیرند. معمولاً بر اساس تجربه می‌توان به هر یک از این نمادها، احتمالی را نظیر کرد. برای مثال، در یک متن انگلیسی به‌نظر می‌رسد که حرف E به‌طور معمول بیشتر از حرف Z ظاهر می‌شود. بنابراین احتمال مشاهدهٔ حرف E از احتمال مشاهدهٔ حرف Z در یک متن انگلیسی بیشتر است. فرض کنیم $p_۱$، $p_۲$، $\ldots$، p_n به‌ترتیب، احتمال مشاهدهٔ نمادهای $X_۱$، $X_۲$، $\ldots$، X_n باشند:

$$p_i = Pr(X = X_i) \qquad (i = ۱, ۲, ۳, \ldots, n)$$

که در آن، $Pr(X = X_i)$ یعنی احتمال اینکه $X = X_i$ رخ دهد. روشن است که اگر یک پیام شامل نمادهایی باشد که احتمال مشاهدهٔ آنها کمتر است، برای خوانندهٔ پیام می‌تواند شامل خبری شوک‌برانگیزتر باشد و اطلاعات بیشتری را به خواننده می‌دهد. به عبارت دیگر، خواندن خبر رویدادی با احتمال کمتر، متناظر با کسب اطلاعات بیشتر است و خواندن خبری با احتمال رویداد بیشتر (رویداد محتمل) متناظر با کسب اطلاعات کمتری است. بنابراین می‌توان میزان اطلاعات کسب‌شده پس از مشاهدهٔ نماد X_i در یک متن را به‌صورت $I(X_i) = \log \frac{۱}{p_i}$ در نظر گرفت. توجه کنید که اگر $p_i \approx ۱$ (خبر حتمی)، آن‌گاه $I(X_i) \approx ۰$ و اگر $p_i \approx ۰$ (خبر ناممکن)، آن‌گاه $I(X_i) \approx +\infty$. شانون [۱۴] از این ایده بهره گرفت و آنتروپی متغیر تصادفی X با مقادیر $X_۱$، $X_۲$، $\ldots$، X_n و توزیع احتمال $p_i = Pr(X = X_i)$ را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$I(X) := \sum_{i=۱}^{n} p_i \log \frac{۱}{p_i} = -\sum_{i=۱}^{n} p_i \log p_i.$$

در واقع $I(X)$ متوسط اطلاعات متناظر با متغیر تصادفی X با مقادیر $X_۱$، $X_۲$، $\ldots$، X_n است. این کمیت نقش بسیار مهمی در نظریهٔ اطلاعات ایفا می‌نماید.

۲.۵. آنتروپی سیستم‌های دینامیکی. گیریم $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک فضای احتمال و $f : X \to X$ یک دستگاه دینامیکی حافظ اندازه بر X باشد. کُلموگُروف و سینایی ایدهٔ شانون را به‌کار گرفتند تا مفهوم آنتروپی را برای یک دستگاه دینامیکی تعریف کنند [۷، ۱۵]. تفاوت اصلی در اینجا است که در نظریهٔ اطلاعات، متغیر تصادفی X معمولاً گسسته است (یعنی مجموعهٔ مقدارهای آن متناهاشمارا است) در حالی که در نظریهٔ دستگاه‌های دینامیکی، دامنهٔ X (فضای حالت‌ها) در اکثر موارد مهم ناشمارا است. این موضوع منجر به استفاده از مفهوم افراز دامنهٔ X شد. مجموعهٔ $\xi = \{A_۱, A_۲, \ldots, A_m\}$ را یک *افراز فضای اندازهٔ* X می‌نامیم اگر برای $i \neq j$، $A_i \cap A_j = \emptyset$ و $\bigcup_{i=۱}^{m} A_i = X$. تلفیق دو افراز

$\xi = \{A_۱, A_۲, \dots, A_m\}$ و $\eta = \{B_۱, B_۲, \dots, B_k\}$ عبارت است از

$$\xi \vee \eta = \{A_i \cap B_j :\ i = ۱, ۲, \dots, m,\ j = ۱, ۲, \dots, k\}.$$

به‌علاوه متناظر با افراز ξ، افراز $f^{-k}\xi$ عبارت است از

$$f^{-k}\xi = \{f^{-k}(A_۱), f^{-k}(A_۲), \dots, f^{-k}(A_m)\}.$$

کُلموگُروف نخست آنتروپی یک افراز $\xi = \{A_۱, A_۲, \dots, A_m\}$ را به‌صورت

$$H_\mu(\xi) = -\sum_{i=۱}^{m} \mu(A_i) \log \mu(A_i)$$

تعریف کرد. روشن است که این تعریف بر آنتروپی شانون در نظریهٔ اطلاعات منطبق است. سپس آنتروپی دستگاه دینامیکی f نسبت به افراز ξ با

$$h_\mu(f, \xi) := \lim_{n \to +\infty} \frac{۱}{n} H_\mu\Big(\bigvee_{i=۰}^{n-۱} f^{-i}\xi\Big)$$

تعریف می‌شود که در آن، $\bigvee_{i=۰}^{n-۱} f^{-i}\xi$ افراز تولید شده توسط پیشامدهای n مشاهدهٔ پیاپی است. سرانجام، آنتروپی دستگاه دینامیکی f به‌صورت $h_\mu(f) := \sup_\xi h_\mu(f, \xi)$ تعریف می‌شود که در آن، سوپریمم بر همهٔ افرازهای فضای X گرفته می‌شود. می‌توان گفت $h_\mu(f)$ مقدار اطلاعات تولید شده توسط دستگاه دینامیکی f نسبت به اندازهٔ μ است. هرچه رفتار دینامیکی f پیچیده‌تر باشد، یک ناظر خارجی از مشاهدهٔ تحوّلات ناشی از دینامیک f بیشتر دچار تعجب می‌شود و اطلاعات بیشتری از مشاهدهٔ دینامیک f کسب می‌کند. به‌عبارت دیگر، آنتروپی یک دستگاه دینامیکی، نرخ رشد پیچیدگی دینامیکی را وقتی که دستگاه با زمان تحوّل می‌یابد، اندازه‌گیری می‌کند. بنابراین دستگاه‌های دینامیکی با رفتار دینامیکی ساده باید دارای آنتروپی صفر باشند. برای مثال، دَوَران‌ها بر دایره و یا دستگاه‌هایی که همهٔ نقاط فضا تحت دینامیک آنها به یک نقطهٔ ثابت جذب می‌شوند، دارای آنتروپی صفرند [۱۶، ۱۸]. پس از کُلموگُروف، رهیافت‌های متنوع و متفاوت فراوانی به مفهوم آنتروپی دستگاه دینامیکی ارائه شده است [۱، ۲، ۳، ۶، ۹، ۱۳].

اگر دستگاه دینامیکی f را ثابت نگه داریم و اندازهٔ μ را تغییر دهیم، می‌توان آنتروپی f را تابعی از μ در نظر گرفت. به عبارت دیگر، تابع $\mu \longmapsto h_\mu(f)$ از مجموعهٔ محدب $\mathcal{M}(X, f)$ به $[۰, +\infty]$ که *تابع آنتروپی* نامیده می‌شود. ثابت می‌شود که تابع آنتروپی آفین است [۱۸]، یعنی اگر $\mu_۱$، $\mu_۲$، $\dots$،

μ_n اندازه‌هایی f-پایا باشند و اعداد λ_1، λ_2، ...، λ_n در بازهٔ $[0,1]$ چنان باشند که $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$، آن‌گاه برای $\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i$ داریم

$$h_\mu(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i h_{\mu_i}(f). \tag{۱.۵}$$

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که تابع آنتروپی نسبت به تجزیهٔ ارگودیک خوش‌رفتار است.

قضیه ۱.۵. *([۱۸]) فرض‌کنیم f تابعی پیوسته بر فضای متری فشردهٔ X باشد. اگر $\mu \in \mathcal{M}(X,f)$ و $\mu = \int_{\mathcal{E}(X,f)} m d\tau(m)$ تجزیهٔ ارگودیک μ باشد، آن‌گاه*

$$h_\mu(f) = \int_{\mathcal{E}(X,f)} h_m(f) d\tau(m). \tag{۲.۵}$$

توجه کنید که اگر $\#(\mathcal{E}(X,f)) = n < +\infty$، آن‌گاه (۲.۵) به (۱.۵) تبدیل می‌شود.

۳.۵. آنتروپی، اطلاعات و تجربه. با توجه به تعریف آنتروپی یک دستگاه دینامیکی، آنتروپی و اطلاعات را می‌توان دو روی یک سکه دانست که پیوندی ژرف با یکدیگر دارند. در زندگی روزمره اطلاعات، با تجربه در پیوند است. به این معنی که اگر شخصی وضعیت ویژه‌ای را تجربه کند، اطلاعات او دربارهٔ آن وضعیت، قبل و پس از تجربه متفاوت است. در واقع هرچه تجربهٔ شما در مورد یک پدیدهٔ خاص، بیشتر باشد، اطلاعات بیشتری دربارهٔ آن خواهید داشت و در نتیجه با مشاهدهٔ آن پدیده کمتر متعجب خواهید شد. اکنون این سئوال مطرح می‌شود که آیا می‌توان آنتروپی یک دستگاه دینامیکی را از طریق مفهوم تجربه به‌دست آورد؟ برای این کار، باید بار دیگر به مفهوم متوسط زمان سفر نقطهٔ $x \in X$ در مجموعهٔ A بازگردیم. در بخش ۴ کمیت

$$\omega(x,A) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \#(\{0 \le j \le n-1 : f^j(x) \in A\})$$

را تعریف کردیم که متوسط زمانی بود که x تحت دینامیک f پیشامد A را تجربه می‌کند. فرض کنیم $\xi = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ افرازی از فضای احتمال X باشد. قرار می‌دهیم

$$\Omega(x,\xi) := -\sum_{i=1}^m \omega(x,A_i) \log \omega(x,A_i).$$

اکنون آنتروپی موضعی f نسبت به افراز ξ در نقطهٔ x را به‌صورت

$$I_f(x,\xi) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \Omega\Big(x, \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\xi\Big)$$

تعریف می‌کنیم. آنتروپی موضعی f در نقطهٔ x عبارت است از

$$I_f(x) := \lim_{k\to\infty} I_f(x, \xi_k)$$

که در آن، $\{\xi_k\}_{k\geq ۱}$ دنباله‌ای صعودی از افرازها است که قطر آنها به صفر میل می‌کند. توجه کنید که در تعریف تابع I_f از ایدهٔ متوسط گذر یک نقطه از یک مجموعه استفاده شده است و به‌علاوه I_f دارای ماهیت موضعی است، یعنی I_f در هر نقطه تعریف می‌شود و برخلاف تعریف کُلموگُروف، به اندازهٔ f–پایای μ بستگی ندارد.

اگر قرار باشد I_f را نوعی آنتروپی موضعی بدانیم، باید متوسط آن بر کل فضای X منجر به آنتروپی کُلموگُروف f شود. به‌عبارت دیگر، اگر μ اندازه‌ای f–پایا باشد، آن‌گاه باید داشته باشیم

$$< I_f >_\mu := \int_X I_f(x) d\mu(x) = h_\mu(f). \tag{۳.۵}$$

برای اثبات (۳.۵)، از تجزیهٔ ارگودیک کمک می‌گیریم، به این معنی که نخست حکم را برای اندازه‌های ارگودیک ثابت می‌کنیم و سپس به کمک تجزیهٔ ارگودیک، آن را به اندازهٔ دلخواه f–پایای μ تعمیم می‌دهیم.

حالت ۱: ابتدا فرض کنیم $m \in \mathcal{E}(X, f)$ اندازه‌ای ارگودیک باشد. بنابر قضیهٔ ارگودیک بِرکُف، برای تقریباً هر $x \in X$ و هر $A \subseteq X$ اندازه‌پذیر داریم

$$\omega(x, A) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{۱}{n} \sum_{j=۰}^{n-۱} \chi_A(f^j(x)) = \int_X \chi_A dm = m(A).$$

بنابراین اگر $\xi = \{A_۱, A_۲, \ldots, A_k\}$ افرازی از X باشد، آن‌گاه برای تقریباً هر $x \in X$ داریم

$$\Omega(x, \xi) = -\sum_{i=۱}^{k} \omega(x, A_i) \log \omega(x, A_i) = -\sum_{i=۱}^{m} m(A_i) \log m(A_i) = H_m(\xi).$$

در نتیجه برای تقریباً هر $x \in X$،

$$I_f(x, \xi) = h_m(f, \xi).$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطهٔ اخیر و سپس قرار دادنِ ξ_k به‌جای ξ و میل دادنِ k به بی‌نهایت، خواهیم داشت

$$\int_X I_f(x) dm(x) = h_m(f).$$

پس (۳.۵) برای اندازه‌های ارگودیک برقرار است.

حالت ۲: اگر $\mu \in \mathcal{M}(X, f)$ اندازه‌ای پایا باشد، آن‌گاه می‌توان تجزیهٔ ارگودیک μ را به‌صورت

$$\mu = \int_{\mathcal{E}(X,f)} m d\tau(m)$$

در نظر گرفت. بنابراین

$$\begin{aligned} \int_X I_f(x) d\mu(x) &= \int_{\mathcal{E}(X,f)} \left(\int_X I_f(x) dm(x) \right) d\tau(m) \\ &= \int_{\mathcal{E}(X,f)} h_m(f) d\tau(m) = h_\mu(f) \end{aligned}$$

و لذا (۳.۵) برای هر اندازهٔ f–پایای μ ثابت می‌شود.

مراجع

[1] Adler, R. L., Konheim, A. G., McAndrew, M. H., Topological entropy, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **114** (1965), 309–319.

[2] Bowen, R., Entropy for group endomorphism and homogeneous spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **153** (1971), 401–414.

[3] Brin, M., Katok, A., *On local entropy in geometric dynamics*, Lecture Notes in Mathematics **1007**, Springer-Verlag, New York, 1983.

[4] Devaney, R. L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Pub. Co., 1989.

[5] Hirsch, M. W., Smale, S., Devaney, R. L., *Differential Equations, Dynamical Systems, and An Introduction to Chaos*, Springer-Verlag, New York, Berlin, 2004.

[6] Katok, A., Entropy and closed geodesics, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **2** (1983), no. 3-4, 339–365.

[7] Kolmogorov, A. N., New metric invariant of transitive dynamical systems and endomorphisms of Lebesgue spaces, *Doklady of Russian Academy of Sciences*, **119** (1958), 861–864.

[8] Luzzatto, S., *Introduction to Smooth Ergodic Theory*, Lecture note, ICTP-SISSA-Moscow, School on Geometry and Dynamics, 2013.

[9] Mané, R., On the topological entropy of geodesic flows, *J. Differential Geometry*, **45** (1997), 74–93.

[10] Meiss, J. D., *Differential Dynamical Systems*, Monographs on Mathematical Modeling and Computation **14**, SIAM, 2007.

[11] Phelps, R., *Lectures on Choquet's Theorem*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1966.

[12] Poincaré, H., Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta Math.*, **13** (1890), 1–270.

[13] Rahimi, M., Riazi, A., Entropy operator for continuous dynamical systems of finite topological entropy, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **38** (2012), no. 4, 883–892.

[14] Shannon, C., A mathematical theory of communication, *Bell Syst. Tech. Journal*, **27** (1948), 623–656.

[15] Sinai, Ya. G., On the notion of entropy of a dynamical system, *Doklady of Russian Academy of Sciences*, **124** (1959), 768–771.

[16] Viana, M., Oliveira, K., *Foundations of Ergodic Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2016.

[17] Walkden, C., *Ergodic Theory Lecture 1-Examples of Dynamical Systems*, School of Mathematics, The University of Manchester, 2013.

[18] Walters, P., *An Introduction to Ergodic Theory*, G. T. M. **79**, Springer-Verlag, New York, 1982.

تاریخ ارسال: ۹۵/۱۱/۱؛ تاریخ بازنگری: ۹۶/۲/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۹۶/۳/۲

مهدی رحیمی: دانشگاه قم، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی
رایانامه: m10.rahimi@gmail.com

مرتضی میرزایی ازندریانی: دانشگاه قم، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی
رایانامه: morteza_ma62@yahoo.com