فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۸، شمارهٔ ۶۴ (بهار و تابستان ۱۳۹۸)، صص. ۷۹ تا ۹۸

مروری بر عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک

پرویز احمدی، مسعود حسنی و رضا میرزایی

چکیده

در این مقاله، پس از ارائهٔ تاریخچه‌ای از عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک، نتایج پژوهش‌های انجام‌شده در زمینهٔ رده‌بندی عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک بر خمینه‌های ریمانی و شبه‌ریمانی با تقریب هم‌ارزیِ مداری آورده شده است. همچنین مسئله‌های بازِ پژوهشی موجود در این زمینه معرفی شده‌اند.

۱. سرآغاز و تاریخچه

شهرت فلیکس کلاین[1] به‌سبب کارهایی است که در زمینهٔ هندسهٔ نااقلیدسی انجام داده است. بنابر نگرش کلاین، یک هندسه در واقع یک G-فضای M است که در آن، G گروهی از تبدیلات M است. این دیدگاه پلی بین هندسه و جبر برقرار می‌کند. روشن است که طبیعی‌ترین حالت زمانی اتفاق می‌افتد که G به‌طور متعدی بر M عمل کند. در این حالت، M را یک G-*فضای همگن* می‌خوانیم. برای مثال، هندسهٔ اقلیدسی، هندسهٔ تصویری و هندسهٔ مستوی از این دست هستند. وقتی M یک G-فضای همگن است، بسیاری از مسائل هندسی را می‌توان به مسائلی در جبر تبدیل کرد که در اغلب موارد، حل آنها ساده‌تر می‌شود. اگر عمل G بر M متعدی نباشد، بحث قدری پیچیده‌تر می‌شود. حالت خاصی از این مورد که از نیمه‌های قرن بیستم به بعد مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفته است، وقتی است که M یک خمینه و G گروهی از تبدیلات M است و عمل آن بر M، مداری با نقص بُعدِ یک در M دارد. در این

عبارات و کلمات کلیدی. خمینهٔ ریمانی؛ عمل گروه لی بر یک خمینه؛ نقصِ همگنیِ یک.

[1] Felix Klein

© ۱۳۹۸ (انجمن ریاضی ایران)

حالت، M را یک G-*فضا با نقصِ همگنیِ یک* می‌نامیم (G-فضاهای با نقصِ همگنیِ دو، سه و ... به‌طور مشابه تعریف می‌شوند).

مطالعهٔ خمینه‌های با نقصِ همگنیِ یک، دو و ... از دههٔ ۱۹۴۰ با عمل گروه‌های فشرده بر فضاهای اقلیدسی و کره‌ها آغاز شد. گروه‌های فشردهٔ همبند که به‌طور متعدی بر کره‌ها عمل می‌کنند، رده‌بندی شدند و ثابت شد که گروه‌های مذکور با زیرگروه‌هایی از گروه‌های قائم، مزدوج هستند (این گروه‌ها بر فضاهای اقلیدسی با نقصِ همگنیِ یک عمل می‌کنند [۲۰، ۳۳]). در سال ۱۹۴۱ مطالعه روی گروه‌های فشرده و همبند که بر کرهٔ $\mathbb{S}^n$ با نقصِ همگنیِ یک عمل می‌کنند، توسط مونتگُمری و زیپین [۳۵] آغاز شد. از نتایج مورد توجه در این مطالعه، مشخص شدن مدارها با تقریب طولپایی در حالت‌هایی خاص و تقلیل مسئله به مسئلهٔ عمل بر فضای اقلیدسی nبُعدی و متعدی بر کرهٔ واحد آن بود. در سال ۱۹۵۶ مونتگُمری، ساملسون و یانگ [۳۴] نشان دادند که عمل طولپایی گروه لی فشردهٔ G بر فضاهای اقلیدسی با نقصِ همگنیِ یک و دو با یک عمل خطی هم‌ارز است. مطالعه و رده‌بندی گروه‌های لی همبند و فشرده که بر فضاهای اقلیدسی با نقصِ همگنیِ یک، دو و سه عمل می‌کنند، در سال ۱۹۹۶ تکمیل شد [۴۱].

از مقاله‌های تأثیرگذار در زمینهٔ خمینه‌های با نقصِ همگنیِ یک، [۳۶] است. در این مقاله نشان داده شد که اگر M یک خمینهٔ همبند با نقصِ همگنیِ یک نسبت به عمل گروه لی همبند و فشردهٔ G باشد، آن‌گاه فضای مداری M/G با یکی از چهار فضای (الف) خط حقیقی $\mathbb{R}$؛ (ب) دایرهٔ $\mathbb{S}^1$؛ (پ) نیم‌خط $[0,\infty)$؛ (ت) بازهٔ بستهٔ $[0,1]$ همانسان است. همچنین توصیفی از خمینه برحسب فضای مداری M/G، گروه لی G و زیرگروه‌های ثابت‌ساز نقاط اصلی و تکین، ارائه گردید.

در حالتی که گروه لی G فشرده است، می‌توان بر M متر ریمانی تام و G-پایا در نظر گرفت ولی فشرده بودنِ G شرط لازم برای وجود متر نیست. در واقع می‌توان بر M یک متر ریمانی تام و G-پایا گذاشت اگر و تنها اگر G بر M به‌طور سره عمل کند (به عبارت دیگر، نگاشت $(g,x)\mapsto(gx,x)$ از $G\times M$ به $M\times M$ سره باشد). این خود معادل است با اینکه یک متر ریمانی G-پایا بر M موجود و $G\subseteq Iso(M)$ بسته باشد [۶، ۳۸]. بنابراین در مطالعهٔ G-خمینه‌های ریمانی، همواره فرض بر این است که G یک زیرگروه بسته از گروه طولپایی‌های M است.

مطالعهٔ اصولی خمینه‌های ریمانی با نقصِ همگنیِ یک با کارهای بِرار برژری[1] آغاز شد. او بیشترِ مطالب ارائه‌شده برای گروه‌های لی فشرده را به خمینه‌های ریمانی با نقصِ همگنیِ یک تعمیم داد و نشان داد در حالتی که G یک زیرگروه بسته از گروه طولپایی‌های خمینهٔ ریمانی M است که بر M با نقصِ همگنیِ یک عمل می‌کند، فضای مداریِ یکی از چهار فضای یاد شده در بالا است [۱۱]. کارهای او را الکسیوسکی دنبال کرد [۹]. از جمله، معرفی و اثبات وجود ژئودزیک‌های قائم و ویژگی‌های آنها بود که

[1] Bérard Bergery

نقش اساسی در مطالعهٔ خمینه‌های ریمانی با نقصِ همگنیِ یک دارد. ریاضیدانان بسیاری G-خمینه‌های ریمانی با نقصِ همگنیِ یک را مطالعه کرده‌اند و نتایجی جالب به‌دست آورده‌اند که از جمله می‌توان به [۶، ۷، ۹، ۱۳، ۱۴، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۳۶] اشاره کرد. G-خمینه‌های ریمانی با نقصِ همگنیِ یک هنوز از موضوع‌های مورد علاقهٔ ریاضیدانان است و مسائلی باز در این زمینه وجود دارد. مطالعهٔ G-خمینه‌های شبه‌ریمانی، پیچیده‌تر از G-خمینه‌های ریمانی است. در واقع تفاوت‌های اولیه‌ای که در این موضوع ظاهر می‌شوند، این پیچیدگی را نمایان می‌کنند. برای مثال، هر گروه طولپاییِ هر خمینهٔ ریمانی فشرده، یک گروه لیِ فشرده است و هر گروه لی همبند فشرده می‌تواند بر یک خمینهٔ ریمانی به‌صورت طولپا عمل کند [۱]. همچنین اگر گروه لیِ عمل‌کننده بر یک خمینهٔ ریمانی، زیرگروهی بسته از گروه طولپایی‌ها باشد، آن عمل سره است. در مورد خمینه‌های شبه‌ریمانی، گزاره‌های بالا ممکن است صادق نباشند. در واقع ثابت شده است که گروه طولپایی‌های یک خمینهٔ شبه‌ریمانی، یک گروه لی است [۲۷]. اما مسئلهٔ رده‌بندی (با تقریب یکریختی) گروه‌های لی که بر خمینه‌های شبه‌ریمانی به‌صورت طولپا عمل می‌کنند، حتی برای خمینه‌های لورنتسی[۱] فشرده حل نشده است. ریاضیدانان بسیاری، مسئلهٔ یافتن گروه‌های لی را که بر یک خمینهٔ لورنتسی فشرده به‌صورت طولپایی عمل می‌کنند، در حالت‌های خاصی مطالعه کرده‌اند و به نتایجی قابل توجه دست یافته‌اند که از آن جمله می‌توان به [۱، ۲۳، ۳۰، ۴۵] اشاره کرد. اما به‌جرأت می‌توان گفت که مطالعهٔ G-خمینه‌های شبه‌ریمانی با نقصِ همگنیِ یک با کارهای احمدی و کاشانی آغاز شد [۲، ۳، ۴، ۵]. آنها فضا-فرم‌های لورنتسی با نقصِ همگنیِ یک را بررسی کردند. هنگامی که عمل سره است، هنوز می‌توان از ویژگی‌های توپولوژیکی G-خمینه‌های ریمانی استفاده کرد اما اگر عمل سره نباشد، حتی تعریف‌های قبلی از مدارهای اصلی و تکین، کاربرد ندارند و باید تعریف‌های جدیدی جایگزین کرد [۵]. به‌علاوه ممکن است فضای مداری، هاوسدُرف یا حتی موضعاً اقلیدسی نباشد [۳]. با توجه به تعداد اندک مقاله‌های موجود دربارهٔ خمینه‌های شبه‌ریمانی با نقصِ همگنیِ یک، آشکار است که مسائل بسیاری در این زمینه برای مطالعه وجود دارد. نگارندگان این مقاله، با توجه به اهمیت موضوع بر آن شدند تا مسائل موجود و کارهای انجام شده در زمینهٔ G-خمینه‌های ریمانی و شبه‌ریمانی را به‌طور گذرا مرور کنند.

G-خمینه‌های با نقصِ همگنیِ یک، از دیدگاه‌های متفاوتی مطالعه شده‌اند که حتی فهرست کردن کارهای انجام شده در این زمینه در حوصلهٔ این نوشتار نمی‌گنجد. این مقاله به رده‌بندی عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک بر خمینه‌های ریمانی و شبه‌ریمانی با تقریب هم‌ارزیِ مداری می‌پردازد [۱۲].

۲. عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک

عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک از جمله شاخه‌های جالب رایج در زمینهٔ خمینه‌های اینشتینی، خمینه‌های با هلونومی خاص، خمینه‌های مجهز به یک متر با انحنای برشی ثابت مثبت و ... است. دلیل این جذابیت

[۱] Lorentzian manifolds

در آن است که می‌توان به‌کمک عملی با نقصِ همگنیِ یک، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به یک معادلهٔ دیفرانسیل عادی تقلیل داد. در این بخش، به ارائهٔ برخی مبانی عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک می‌پردازیم و دربارهٔ رده‌بندی بعضی از نتایج بحث می‌کنیم.

۱.۲. عمل‌های سره و G– خمینه‌های ریمانی. فرض کنیم M یک خمینهٔ هموار و G یک گروه لی باشد. گوییم G بر M *به‌طور هموار عمل می‌کند*، اگر نگاشتی هموار مانند

$$\rho : G \times M \to M$$

موجود باشد که برای هر $g, g' \in G$ و هر $p \in M$ رابطه‌های $\rho(gg', p) = \rho\big(g, \rho(g', p)\big)$ و $\rho(e, p) = p$ برقرار باشد که در آن، e عضو بی‌اثر گروه G است. معمولاً از نماد $g.p$ (یا حتی gp) به‌جای $\rho(g, p)$ استفاده می‌شود (ما هم از نماد gp در سراسر این مقاله استفاده خواهیم کرد). برای هر نقطهٔ $p \in M$، *مدار* p را مجموعهٔ $G.p = \{gp | g \in G\}$ و گروه *پایاگر* (ثابت‌ساز) در p را زیرگروه

$$G_p = \{g \in G | gp = p\}$$

از G تعریف می‌کنیم. این زیرگروه همواره زیرگروهی بسته از G است. اگر برای نقطه‌ای مانند $p \in M$ داشته باشیم $G.p = M$ (که در نتیجه برای هر $q \in M$ خواهیم داشت $G.q = M$) در این صورت عمل G بر M را متعدّی و M را یک G–*فضای همگن* می‌نامیم. در حالت کلی $G.p$ یک زیرخمینه از M است ولی این زیرخمینه لزوماً نشانده‌شده نیست. برای مثال، عمل گروه جمعی $\mathbb{R}$ بر چنبره تخت $\mathbb{T}^۲$ را که از خارج‌قسمت $\mathbb{R}^۲$ بر $\mathbb{Z}^۲$ به‌دست آمده است، در نظر بگیرید:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{T}^۲ \to \mathbb{T}^۲, \qquad (t, [x, y]) \mapsto [x + t, y + \omega t]$$

که در آن، ω یک عدد حقیقی ثابت است. اگر ω عددی گنگ باشد، آن‌گاه هر مدار این عمل در $\mathbb{T}^۲$ چگال است و از این‌رو زیرخمینهٔ نشانده‌شده نیست. تحت چه شرایط دینامیکی، مدارها زیرخمینه‌های نشانده‌شده می‌شوند؟ برای پاسخ دادن به این سؤال، نخست تعریف زیر را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم M یک خمینهٔ هموار و G یک گروه لی باشد که بر M عمل می‌کند. عمل G بر M را سره گوییم اگر نگاشت

$$G \times M \longrightarrow M \times M, \qquad (g, p) \mapsto (gp, p)$$

سره باشد (یعنی تصویر وارون هر زیرمجموعهٔ فشرده از $M \times M$ در $G \times M$ فشرده باشد).

برای مثال، هر عمل از یک گروه لی فشرده بر یک خمینه، سره است. اگر عمل G بر M سره باشد، آن‌گاه هر مدار $G.p$ یک زیرخمینهٔ نشانده‌شده و بسته در M است (گزارهٔ ۲۱-۷ از [۳۱]).

مجموعهٔ مدارهای عمل G بر M را با M/G نشان می‌دهیم و با استفاده از نگاشت تصویر طبیعی $M \to M/G$ با ضابطهٔ $p \mapsto G.p$، مجموعهٔ M/G را به توپولوژی خارج‌قسمتی مجهز می‌کنیم. فضای M/G لزوماً هاوسدُرف نیست. برای مثال، اگر ω در مثال قبل عدد گنگ باشد، آن‌گاه $T^2/\mathbb{R}$ هاوسدُرف نیست. این رفتار ناخوشایند از عمل‌های سره، سر نمی‌زند. اگر G بر M به‌طور سره عمل کند آن‌گاه M/G هاوسدُرف، هر مدار $G.p$ در M زیرخمینه‌ای نشانده‌شده و هر گروه پایاگر G_p فشرده است.

اگر M یک خمینهٔ شبه‌ریمانی و G یک گروه لی باشد که به‌طور هموار با طولپایی‌ها بر M عمل می‌کند، آن‌گاه یک همریختی گروه لی $\rho : G \to Iso(M)$ داریم. عمل G بر M را *وفادار* گوییم اگر $\ker\rho = \{Id\}$. بدون از دست رفتن کلیّت، همواره می‌توان فرض کرد که عمل G بر M وفادار است (اگرنه عمل القایی $G/\ker\rho$ بر M یک عمل طولپایی وفادار خواهد بود).

عمل طولپای یک گروه لی مانند H بر یک خمینهٔ شبه‌ریمانی N با عمل طولپای G بر M یکریخت (هم‌ارز مداری) نامیده می‌شود اگر یک یکریختی گروه لی مانند $\Psi : G \to H$ و یک طولپایی مانند $f : M \to N$ موجود باشند چنان‌که به‌ازای هر $p \in M$ و هر $g \in G$ داشته باشیم

$$f(gp) = \Psi(g)f(p).$$

قضیهٔ زیر را که پیوند بین عمل‌های سره و عمل‌های طولپا بر خمینه‌های ریمانی را مشخص می‌کند، الکسیوسکی در سال ۱۹۷۹ ثابت کرد [۸].

قضیه ۲.۲. *فرض کنیم M یک خمینهٔ هموار و G یک گروه لی باشد که بر M عمل می‌کند. این عمل سره است اگر و تنها اگر متر ریمانی g روی M موجود باشد چنان‌که G یک زیرگروه لی بسته از گروه $Iso_{\mathrm{g}}(M)$ باشد.*

۲.۲. وجود قاچ در عمل‌های سره. یکی از ویژگی‌های بنیادی عمل‌های سره، وجود قاچ است. زیرخمینهٔ S از M را یک *قاچ* در نقطهٔ $p \in M$ گوییم اگر

(S_1) $p \in S$؛

(S_2) مجموعهٔ $G.S := \{gq | g \in G,\ q \in S\}$ در M باز باشد؛

(S_3) $G_p.S = S$؛

(S_4) عمل G_p بر S با یک عمل خطی قائم از G_p بر یک گوی باز از فضای اقلیدسی، یکریخت باشد؛

($S_۵$) نگاشت

$$(G \times S)/G_p \to M, \qquad G_p.(g,q) \mapsto gq$$

یک وابرسانی به‌روی $G.S$ باشد که در آن، $(G \times S)/G_p$ فضای مداری عمل G_p به‌روی $G \times S$ با ضابطهٔ $k(g,q) := (gk^{-۱}, kq)$ است. توجه کنید که $(G \times S)/G_p$ کلاف تاری وابسته به کلاف اصلی $G \mapsto G/G_p$ با تار S و از این‌رو یک خمینهٔ هموار است.

هر عمل سره در هر نقطه، یک قاچ تعبیه می‌کند [۳۸]. باید توجه کرد که هر قاچ S این امکان را فراهم می‌سازد تا مطالعهٔ عمل G بر M در یک همسایگی G–ناوردا حول p را به مطالعهٔ عمل G_p روی قاچ S تبدیل کنیم.

وجود قاچ در هر نقطه ما را قادر می‌سازد تا یک رابطهٔ ترتیب جزئی روی نوع مدارها تعریف کنیم. مدارهای $G.p$ و $G.q$ را *از یک نوع* گوییم اگر G_p و G_q در G با هم مزدوج باشند. این امر یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مدارهای G تعریف می‌کند. ردهٔ هم‌ارزی هر مدار را با $[G.p]$ نشان می‌دهیم و آن را *نوع مدار* $G.p$ می‌نامیم. مجموعهٔ نوع‌های مداری عمل G روی M را با $\mathfrak{O}$ نشان می‌دهیم. یک رابطهٔ ترتیب جزئی روی $\mathfrak{O}$ را بدین گونه تعریف می‌کنیم که $[G.p] \leq [G.q]$ اگر و تنها اگر G_q با زیرگروهی از G_p در G مزدوج باشد. اگر S یک قاچ در p باشد، آن‌گاه شرایط $S_۴$ و $S_۵$ به‌ازای هر $q \in G.S$ رابطهٔ $[G.p] \leq [G.q]$ را ایجاب می‌کنند. اگر M/G همبند باشد، آن‌گاه بزرگترین نوع مدار در $\mathfrak{O}$ وجود دارد. هر نماینده از این بزرگترین نوع مدار را *مدار اصلی* می‌نامیم. به عبارت دیگر، یک مدار مانند $G.p$ اصلی است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $q \in M$ گروه ثابت‌ساز G_p با زیرگروهی از G_q در G مزدوج باشد. اجتماع همهٔ مدارهای اصلی در M باز و چگال است. هر مدار اصلی، یک مدار با حداکثر بُعد است. هر مدار غیر اصلی را که بُعدش با بُعد مدار اصلی برابر باشد، *مدار استثنایی* گوییم. هر مدار را که بُعدش کمتر از بُعد مدار اصلی باشد، یک *مدار تکین* نامیم. *نقص ِهمگنی ِ*یک عمل، نقص ِبُعد مدار اصلی آن است.

فرض کنیم M یک خمینهٔ ریمانی همبند و G زیرگروهی بسته از گروه طولپایی‌های M باشد که به‌طور طبیعی بر M عمل می‌کند. همان‌طور که قبلا گفتیم، به‌ازای هر $g \in G$ نگاشت

$$\varphi_g : M \to M, \qquad p \mapsto gp$$

یک طولپایی است. اگر $p \in M$ و $g \in G_p$، آن‌گاه φ_g نقطهٔ p را ثابت نگاه می‌دارد. بنابراین در هر نقطه مانند $p \in M$، گروه ثابت‌ساز G_p روی T_pM به‌شکل زیر عمل می‌کند:

$$G_p \times T_pM \to T_pM, \qquad (g,X) \mapsto g.X = d\varphi_p X.$$

چون $G.p$ تحت G_p پایا است، فضای مماس $T_p(G.p)$ و فضای قائم $\nu_p(G.p)$ بر $G.p$ در نقطهٔ p تحت این عمل، ناوردا هستند. تحدید این عمل به $T_p(G.p)$ را

$$\xi : G_p \times T_p(G.p) \to T_p(G.p), \qquad (g, X) \mapsto g.X$$

نمایش پایاگر در نقطهٔ p گوییم و تحدید آن به‌روی $\nu_p(G.p)$ را

$$\sigma_p : G_p \times \nu_p(G.p) \to \nu_p(G.p), \qquad (g, Y) \mapsto g.Y$$

نمایش قاچ عمل در نقطهٔ p می‌نامیم. اگر $(G_p)^\circ$ مؤلفهٔ همبندی همانی G_p باشد، آنگاه تحدید نمایش قاچ روی $(G_p)^\circ$ را *نمایش قاچ همبند* می‌نامیم.

فرض کنیم $p \in M$ و $r \in \mathbb{R}_+$ به‌اندازهٔ کافی کوچک باشد تا تحدید نگاشت نمایی $\exp_p$ خمینهٔ M بر $U_r(\circ) \subseteq \nu_p(G.p)$ یک نشاننده از $U_r(\circ)$ به M باشد. بنابراین $S = \exp_p\left(U_r(\circ)\right)$ یک قاچ در نقطهٔ p است که آن را *قاچ ژئودزیک* می‌نامیم. به بیان هندسی، قاچ ژئودزیک S از پیمایش همهٔ ژئودزیک‌هایی که از نقطهٔ p نشأت می‌گیرند و در نقطهٔ p بر $G.p$ قائم هستند، تا فاصلهٔ r به‌دست می‌آید. چون طولپایی‌ها ژئودزیک را به ژئودزیک می‌نگارند، به‌ازای هر $g \in G$ داریم

$$gS = \exp_{gp}\left(g.U_r(\circ)\right).$$

بنابراین $G.S$ با لغزاندن S به‌وسیلهٔ عمل گروه G در راستای مدار $G.p$ به‌دست می‌آید. فرض کنیم $q \in S$ و $g \in G_p$. در این صورت $gq \in S$ و از این‌رو $gS = S$. چون $S \cap G.p = \{p\}$، نتیجه می‌گیریم $gp = q$ و از این‌رو $g \in G_p$. بنابراین ثابت کرده‌ایم که اگر S یک قاچ ژئودزیک در نقطهٔ p باشد، آنگاه به‌ازای هر $q \in S$ داریم $G_q \subseteq G_p$.

فرض کنیم S یک قاچ ژئودزیک در نقطهٔ p باشد. در این صورت $G.S$ یک مجموعهٔ باز در M است. چون اجتماع مدارهای اصلی، یک مجموعهٔ باز و چگال است، نتایج به‌دست آمده در بالا ایجاب می‌کنند که $G.p$ یک مدار اصلی است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $q \in S$ داشته باشیم $G_q = G_p$. از سوی دیگر، هر $g \in G_q$ نقاط p و q را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین اگر فرض کنیم قاچ ژئودزیک به‌اندازهٔ کافی کوچک است، آنگاه ژئودزیکِ واقع در S، نقاط p و q را به هم وصل می‌کند. از این‌رو G_q زیرفضای خطی یک‌بُعدی از $\nu_p(G.p)$ را که با این ژئودزیک متناظر است، به‌طور نقطه‌ای ثابت نگه می‌دارد. این مطلب یک رده‌بندی سودمند را برای مدارهای اصلی ایجاب می‌کند: مدار $G.p$ اصلی است اگر و تنها اگر نمایش قاچ S_p، بدیهی باشد.

۳.۲. عمل‌های قطبی و اَبَرقطبی. فرض کنیم M یک خمینهٔ ریمانی کامل و G یک زیرگروه بسته از $Iso(M)$ باشد. زیرخمینهٔ نشانده‌شده و کاملِ S از M را یک *مقطع* از عمل G نامیم اگر S هر مدار G را طوری قطع کند که به‌ازای هر $p \in S$ داشته باشیم $T_pS \subseteq \nu_p(G.p)$. عمل G را *قطبی*گوییم اگر این عمل یک مقطع داشته باشد. ثابت می‌شود که مقطع هر عمل قطبی، تماماً ژئودزیک است. یک عمل قطبی را *اَبَرقطبی* نامیم اگر این عمل یک مقطع تخت القا کند. عمل‌های اَبَرقطبی روی فضاهای متقارن ریمانی تحویل‌ناپذیر همبند ساده از نوع فشرده (با تقریب هم‌ارزیِ مداری) رده‌بندی شده‌اند [۲۸]. در این زمینه مسائل باز زیر در سال ۲۰۱۱ در پنجمین کارگاه بین‌المللی هندسهٔ دیفرانسیل مطرح شده است.

۱. رده‌بندی (با تقریب هم‌ارزیِ مداری) عمل های قطبی روی $\mathbb{C}H^n$ که مدار تکین دارند ($n > ۲$)؛

۲. مشخص کردن هندسهٔ زیرخمینه‌ایِ مدارهای حاصل از عمل‌های قطبی روی $\mathbb{C}H^۲$؛

۳. رده‌بندی (با تقریب هم‌ارزیِ مداری) عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک روی فضای هذلولوی کواترنیونی $\mathbb{H}H^n$ که $n > ۲$؛

۴. ارائهٔ مثال(هایی) از عمل‌های اَبَرقطبی با مدار تکین و از نقصِ همگنیِ بزرگتر یا مساوی دو بر فضاهای متقارن ریمانی از نوع نافشرده؛

۵. ارائهٔ مثال(هایی) از عمل‌های قطبی روی فضای هذلولوی $\mathbb{H}H^n$ برای $n \geqslant ۲$، و روی صفحهٔ هذلولوی کیلی $\mathbb{O}H^۲$.

۴.۲. فضای مداری عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک. فرض کنیم M یک خمینهٔ ریمانی همبند کامل و G یک زیرگروه بستهٔ همبند از $Iso(M)$، گروه طولپاییهای M، باشد که روی M با نقصِ همگنیِ یک عمل می‌کند. فضای مدارهای این عمل را با M/G و نگاشت کانونی تصویر را با $\pi : M \to M/G$ نمایش می‌دهیم که نقطهٔ $p \in M$ را به مدار $G.p$ می‌نگارد. با استفاده از نگاشت π، مجموعهٔ M/G را به توپولوژی خارج‌قسمتی مجهز می‌کنیم. در سال ۱۹۵۶ برای گروه‌های لی فشرده [۳۶] و در سال ۱۹۸۲ برای حالت کلی [۱۱] نشان داده شد که فضای مداری M/G با یکی از فضاهای $\mathbb{R}$، $\mathbb{S}^۱$، $[۰,۱]$، $[۰,\infty)$ همانسان است. همچنین ثابت شد که نقطهٔ p متعلق به یک مدار تکین یا استثنایی است اگر و تنها اگر تصویر آن تحت π، یک نقطهٔ مرزی باشد. این نتیجه نشان می‌دهد که هر عمل با نقصِ همگنیِ یک، حداکثر دو مدار تکین یا استثنایی دارد که با نقاط مرزی M/G متناظرند. اگر یک مدار تکین موجود باشد، آن‌گاه به بیان هندسی هر مدار اصلی به‌شکل یک تیوب حول آن مدار تکین است. اگر M/G با $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{S}^۱$ همانسان باشد، آن‌گاه همهٔ مدارها اصلی خواهند بود و مدارهای عمل G روی M، یک برگ‌بندی ریمانی روی M تشکیل می‌دهند. با وجود این، چون همهٔ مدارهای اصلی با هم همانسان هستند، نگاشت تصویر $\pi : M \to M/G$ یک کلاف تاری است. اگر به‌علاوه M همبند ساده باشد، آن‌گاه M/G نمی‌تواند با $\mathbb{S}^۱$ همانسان باشد. این مطلب از دنبالهٔ دقیق هموتوپی یک کلاف تاری با تار همبند و فضای

پایهٔ $\mathbb{S}^1$ نتیجه می‌شود. هر عمل با نقصِ همگنیِ یک، اَبَرقطبی است و هر ژئودزیک که به‌طور قائم یک مدار را قطع کند، یک مقطع است. اگر G یک گروه از انتقال‌ها در $\mathbb{R}^2$ باشد که با یک خط تولید شده است، آن‌گاه $\mathbb{R}^2/G = \mathbb{R}$. اگر M یک استوانه مستدیر در $\mathbb{R}^3$ و G گروه انتقال‌ها در راستای محور M باشد، آن‌گاه $M/G = \mathbb{S}^1$. اگر $G = SO(2)$ گروه چرخش‌های حول مبدأ در $\mathbb{R}^2$ باشد، آن‌گاه $\mathbb{R}^2/G = [0, \infty)$. سرانجام، اگر $G = SO(2)$ گروه ثابت‌ساز عمل گروه $SO(3)$ روی کرهٔ دو بُعدی S^2 باشد، آن‌گاه $S^2/G = [0, 1]$.

در همهٔ مثال‌هایی که در بالا آمد، مدار تکین یک زیرخمینه، تماماً ژئودزیک است. ممکن است تصوّر شود که هر مدار تکین یک زیرخمینه، تماماً ژئودزیک است. در واقع این حدس برای مدارهای تکین با بُعد پایین صحیح است. به عبارت دقیق‌تر، اگر M یک خمینهٔ ریمانی و G یک گروه لی بسته و همبند از $I(M)$ باشد که بر M به‌صورت وفادار، طولپا و با نقصِ همگنیِ یک عمل می‌کند به‌طوری که

$$\dim(G.p) < \frac{1}{2}(\dim M - 1),$$

آن‌گاه $G.p$ در M تماماً ژئودزیک است. برای مشاهدهٔ مدارهای تکین که تماماً ژئودزیک نباشند، به [13] رجوع کنید. یکی دیگر از ویژگی‌های مدارهای تکین، مینیمال بودنِ آنها است. فرض کنیم F یک مدار تکین یا استثنایی، α فرم بنیادی دوم F و H بردار انحنای میانگین در نقطه‌ای مانند $p \in F$ باشد. یک پایهٔ متعامد یکه مانند $\{e_1, \dots, e_m\}$ که $m = \dim F$ برای $T_p(F)$ اختیار می‌کنیم. چون عمل دارای نقصِ همگنیِ یک است، گروه ثابت‌ساز G_p در نقطهٔ p روی بردارهای با اندازهٔ یکسان در فضای قائم بر F در نقطهٔ p، به‌طور متعدی عمل می‌کند. بنابراین طولپایی $g \in G$ موجود است به‌طوری که $g_* H = -H$ و داریم

$$mH = \sum_{i=1}^{m} \alpha(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha(g_* e_i, g_* e_i) = g_* \sum_{i=1}^{m} \alpha(e_i, e_i) = m g_* H = -mH.$$

این معادله نشان می‌دهد که $H = 0$ و از این‌رو F مینیمال است. بنابراین اگر

$$2 \dim F < \dim M - 1,$$

آن‌گاه F نه‌تنها مینیمال است، تماماً ژئودزیک نیز هست.

۵.۲. عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک روی کره‌ها. عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک روی کره‌ها در [24] رده‌بندی شده‌اند. در آنجا یک فهرست دقیق از گروه‌هایی که روی کره‌ها با نقصِ همگنیِ یک عمل می‌کنند، به‌دست آمده و ادعا شده است که هر عمل با نقصِ همگنیِ یک روی $\mathbb{S}^n$ با نمایش پایاگر یک

فضای ریمانی متقارن $n+1$ بُعدی از رتبهٔ ۲ هم‌ارز مداری است. اثبات مستقیم این مطلب هنوز یک مسئلهٔ باز است.

۶.۲. عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک بر فضاهای تصویری مختلط. یک حقیقت جالب این است که در فضاهای تصویری مختلط، نظریهٔ *اَبَررویه‌های هم‌پارامتر*[1] و ابررویه‌های با انحنای اصلی ثابت، با هم متفاوت هستند. در واقع به کمک نگاشت هوپف $\mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ اَبَررویه‌های هم‌پارامتر ناهمگن خاصی در کره‌ها، به اَبَررویه‌های هم‌پارامتر با انحناهای اصلی غیرثابت در فضاهای تصویری مختلط نگاشته می‌شوند [۴۴]. تعیین همگن یا هم‌پارامتر بودنِ اَبَررویه‌ها با انحناهای اصلی ثابت در $\mathbb{CP}^n$ همچنان یک مسئلهٔ باز است. رده‌بندی اَبَررویه‌های همگن $\mathbb{CP}^n$ در [۴۲] انجام شده است. به‌سادگی دیده می‌شود که هر اَبَررویهٔ همگن در $\mathbb{CP}^n$، تصویر اَبَررویه‌ای همگن در $\mathbb{S}^{2n+1}$ است. اما اَبَررویه‌های همگنی در $\mathbb{S}^{2n+1}$ وجود دارند که تحت عمل $\mathbb{S}^1$ پایا نیستند و بنابراین به اَبَررویه‌ای همگن در $\mathbb{CP}^n$ تصویر نمی‌شوند. در واقع اَبَررویه‌هایی که به اَبَررویه‌های همگن تصویر می‌شوند، دقیقاً آنهایی هستند که از نمایش‌های پایاگر فضاهای متقارن *ارمیتی* از رتبهٔ ۲ به‌دست می‌آیند. به عبارت دقیق‌تر، این رده‌بندی بیان می‌کند که هر عمل با نقصِ همگنیِ یک روی $\mathbb{CP}^n$ با تصویری‌شدهٔ نمایش پایاگر یک فضای $n+1$ بُعدی متقارن ارمیتی از رتبهٔ ۲، هم‌ارز مداری است.

فضاهای متقارن ارمیتی متناظر از رتبهٔ دو عبارت‌اند از

$$\mathbb{CP}^{k+1} \times \mathbb{CP}^{n-k}, \qquad k \in \{0, \dots, n-1\},$$

$G_2^+(\mathbb{R}^{2n+1})$ و $G_2(\mathbb{C}^{2k+1})$ برای $k \geq 3$ و $SO(10)/U(5)$ و $E_6/T.Spin(10)$ که در آن، $G_2^+(\mathbb{R}^{2n+1})$ و $G_2(\mathbb{C}^{2k+1})$ به‌ترتیب، نشان‌دهندهٔ خمینهٔ گراسمانی همهٔ زیرفضاهای خطی جهتدار دو بُعدی $\mathbb{R}^{2n+1}$ و خمینهٔ گراسمانی همهٔ زیرفضاهای خطی مختلط دو بُعدی $\mathbb{C}^{2k+1}$ هستند. این نتایج در [۴۳] تعمیم یافت و همهٔ زیرگروه‌های همبند و بستهٔ $SU(n+1)$ را که بر $\mathbb{CP}^n$ با نقصِ همگنیِ یک عمل می‌کنند، رده‌بندی شد. در اینجا روش رده‌بندی، کاملاً متفاوت است و از روش‌های همولوژیکی بهره می‌گیرد. در واقع فرض می‌شود که M یک خمینهٔ ریمانی هموار همبند ساده است که حلقهٔ کوهمولوژی با ضرایب گویای آن با حلقهٔ کوهمولوژی با ضرایب گویای یکی از فضاهای تصویری مختلط یکریخت است. سپس همهٔ گروه‌های لی همبند و فشرده که بر M با نقصِ همگنیِ یک عمل می‌کنند، رده‌بندی می‌شود. برای مثال، این روش همهٔ درجه‌دوهای مختلط با بُعد فرد (که گراسمانی‌های حقیقی هستند) را شامل می‌شود:

$$G_2^+(\mathbb{R}^{2n+1}) = SO(2n+1)/SO(n) \times SO(2n-1).$$

[1] isoparametric

برای فضاهای تصویری چهارتایی[۱]، ایواتا [۲۵] از روشی مشابه استفاده کرد. او فرض کرد که M یک خمینهٔ همبند ساده است که حلقهٔ کوهمولوژی گویای آن با حلقهٔ کوهمولوژی گویای یک فضای تصویری چهارتایی یکریخت است. سپس همهٔ گروه‌های لی همبند و فشرده را که بر M با نقصِ همگنی یک عمل می‌کنند، رده‌بندی کرد. برای مثال، ایواتا نشان داد که هر عمل با نقصِ همگنی یک بر $\mathbb{HP}^n$، هم‌ارز مداری با عمل $SU(n+۱)$ یا با عمل $Sp(k+۱)\times Sp(n-k)$ است $(۰\leq k\leq n-۱)$. برهان دیگری نیز توسط دآتری[۲] ارائه شده است [۲۲]. برای صفحهٔ تصویریِ کیلی $\mathbb{OP}^۲$، ایواتا [۲۶] با روش کوهمولوژی خود نشان داد که هر عمل با نقصِ همگنیِ یک روی $\mathbb{OP}^۲$، با عمل $Spin(۹)$ یا $Sp(۳)\times SU(۲)$ هم‌ارز مداری است.

۷.۲. عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک بر فضاهای ریمانی متقارن از نوع فشرده. رده‌بندی عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک روی فضاهای ریمانی متقارن همبند سادهٔ تحویل‌ناپذیر از نوع فشرده، بخشی از رده‌بندی بسیار کلی عمل‌های اَبَرقطبی (با تقریب هم‌ارزیِ مداری) روی این فضاها است [۲۸]. در اینجا ایدهٔ این رده‌بندی را در حالت خاصی که عمل با نقصِ همگنیِ یک باشد و فضای متقارن $M=G/K$ از رتبهٔ بزرگتر یا مساوی ۲ باشد، شرح می‌دهیم. فرض کنیم H یک زیرگروه بستهٔ مهین از G باشد. اگر عمل H بر M متعدی نباشد، آن‌گاه نقصِ همگنیِ آن دست‌کم یک است. چون عمل هر زیرگروه بسته از H دست‌کم برابر با نقصِ همگنیِ H است و ما به دنبال رده‌بندی با تقریب هم‌ارزیِ مداری هستیم، کافی است فقط زیرگروه‌های بستهٔ مهین G را بررسی کنیم. اما ممکن است H به‌طور متعدی روی M عمل کند. این امر دقیقاً در چهار حالت اتفاق می‌افتد که در اینجا $G/K=H/(H\cap K)$ را فهرست می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
SO(۲n)/U(n) &= SO(۲n-۱)/U(n-۱) \qquad (n\geq ۴),\\
SU(۲n)/Sp(n) &= SU(۲n-۱)/Sp(n-۱) \qquad (n\geq ۳),\\
G_۲^+(\mathbb{R}^۷) &= SO(۷)/SO(۲)\times SO(۵)=G_۲/U(۲),\\
G_۲^+(\mathbb{R}^۸) &= SO(۸)/SO(۳)\times SO(۵)=Spin(۷)/SO(۴).
\end{aligned}$$

بنابراین کافی است زیرگروه‌های بستهٔ مهین G به‌استثنای موارد ذکر شده در بالا را بررسی کنیم. ثابت می‌شود که عمل زیرگروه بستهٔ H با نقصِ همگنیِ یک است اگر در شرط $\dim \geq \dim M-۱$ صدق کند. این رابطه‌ها بسیاری از موارد را از حوزهٔ بررسی خارج می‌کنند و مطالعه را آسان‌تر می‌نمایند. برای زیرگروه‌های بستهٔ مهین دیگر، باید نقصِ همگنی را مورد به مورد محاسبه کنیم. یک روش برای انجام این

[۱] quaternionic projective space [۲] D’Atri

کار، محاسبهٔ نقص بُعد نمایشِ قاچ است که در واقع عمل گروه پایاگر $H \cap K$ بر فضای قائم بر نقطهٔ p در مدار $G.p$ است. این رَویّه به‌طور کامل رده‌بندی همهٔ عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک را با تقریب هم‌ارزیِ مداری و از این‌رو رده‌بندی اَبَررویه‌های همگن $M = G/K$ را میسّر می‌سازد. برای مشاهده جزئیات بیشتر، به [۲۸] رجوع کنید.

۸.۲. خمینه‌های با انحنای منفی و نقصِ همگنیِ یک. اکثر مقاله‌های مربوط به بررسی عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک، بر پایهٔ روش‌های جبری و تدبیرهای موجود در نظریهٔ گروه‌های لی و جبر لی نوشته شده‌اند. از معدود مقاله‌هایی که در آنها از روش‌های هندسی استفاده شده است، [۳۹] است که در آن، خمینه‌های ریمانی با انحنای منفی و نقصِ همگنیِ یک بررسی شده‌اند. در این مقاله ثابت شده است که (الف) اگر M یک خمینهٔ ریمانی با انحنای منفی و با نقصِ همگنیِ یک باشد که مدار تکین با بُعد بزرگتر از ۱ دارد، آن‌گاه M همبند ساده است؛ (ب) اگر M خمینهٔ ریمانی با انحنای منفی و با نقصِ همگنیِ یک و ناهمبند ساده باشد و $n = \dim M \geq ۳$، آن‌گاه هر مدار اصلی یا با $\mathbb{R}^p \times \mathbb{T}^k$ وابرسان است یا توسط $\mathbb{S}^{n-۲} \times \mathbb{R}$ پوشانده می‌شود. مدار تکین در صورت وجود، یکتا است و $\pi_۱(M) = \mathbb{Z}$؛ (پ) فضای مداری با $\mathbb{R}^+$، $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{S}^۱$ وابرسان است؛ (ت) اگر گروه عمل‌کنندهٔ G نیم‌ساده باشد، آن‌گاه M همبند ساده است.

۳. معادل‌سازی مسئلهٔ رده‌بندی خمینه‌های ریمانی با نقصِ همگنیِ یک با یک مسئلهٔ رده‌بندی در جبر

همان‌طور که گفتیم، اگر M یک G–خمینهٔ ریمانی باشد، فضای مداری M/G با یکی از فضاهای زیر همانسان است:

$$\mathbb{R},\ \mathbb{S}^۱,\ [۰,۱],\ [۰,+\infty).$$

ثابت می‌شود که از هر نقطه از M یک ژئودزیک عبور می‌کند که مدارها را قطع می‌کند و در نقطهٔ تقاطع، بر مدار عمود است (ژئودزیک قائم). اگر γ یک ژئودزیک قائم باشد، بزرگترین زیرگروه G که γ تحت آن پایا است، یک گروه از طولپایی‌ها روی γ القا می‌کند که آن را *گروه وایل*[۱] می‌نامیم. اگر x یک نقطهٔ اصلی و متعلق به γ باشد و $K = G_x$، آن‌گاه K به‌طور بدیهی روی γ عمل می‌کند. بنابراین گروه وایل با یک زیرگروه از $N = N_G(K)/K$ یکریخت است.

[۱] Weil group

تعریف ۱.۳. G-خمینه‌های ریمانی M و M' را به‌طور قائم هم‌ارز نامیم اگر وابرسانی $\varphi : M \to M'$ موجود باشد چنان‌که φ هر مدار از M را به مداری در M' و هر ژئودزیک قائم در M را به یک ژئودزیک قائم M' بنگارد.

تعریف ۲.۳. فرض کنیم γ یک W ژئودزیک قائم و W گروه وایل آن و δ یک دامنهٔ اصلی برای W باشد (کوچکترین زیرمجموعهٔ همبند در تصویر γ که $W\delta = \gamma$). در این صورت δ را یک قطعهٔ ژئودزیک می‌نامیم.

گزاره ۳.۳. *اگر δ یک قطعه ژئودزیک باشد، نقاط درون δ دارای زیرگروه پایاگر K هستند. زیرگروه پایاگر H برای یک نقطهٔ مرزی $y \in \delta$ برابر با K است اگر y اصلی باشد و شامل K است اگر y تکین باشد. در حالت دوم H/K با یک کرهٔ S^m، $m \in \{۰, ۱, ۲, ...\}$ وابرسان است.*

گزاره ۴.۳. *فرض کنیم δ یک قطعه ژئودزیک و W گروه وایل آن باشد. یکی از حکم‌های زیر صادق است:*

۱) $\delta = \gamma = R$؛
۲) $\delta = \gamma \simeq \mathbb{S}^۱$، $W = \{e\}$ *یا برای یک* $w \in W$، $\delta = w\{\gamma(t) : ۰ \leq t \leq ۱\}$؛
۳) δ *یکی از شعاع‌های ژئودزیک* $\gamma^{\pm} = \{\gamma(\pm t) : t \geq ۰\}$ *است؛*
۴) $\delta = w\{\gamma(t) : ۰ \leq t \leq ۱\}$ *برای یک* $w \in W$.

اکنون برای هر یک از حالت‌های δ بیان‌شده در گزارهٔ قبل، یک مجموعهٔ با نام θ به‌صورت زیر نسبت می‌دهیم:

۱) $\theta = \{K\}$ که در آن، $K = G_x$، $x \in \gamma$؛
۲) $\theta = \{K, \tau\}$ که τ یک مولد برای گروه وایل است؛
۳) $\theta = \{H, K\}$ که H زیرگروه پایاگر نقطهٔ تکین (یکتا) روی δ و K زیرگروه پایاگر برای نقاط اصلی روی δ است؛
۴) $\theta = \{H, K, H'\}$ که H و H' زیرگروه‌های پایاگر برای نقاط تکین روی δ و K زیرگروه پایاگر نقطه‌های اصلی است و

$$\frac{H'}{k} \simeq S^{m'}, \qquad \frac{H}{k} \simeq S^m$$

که در آن، $m, m' \in \{۰, ۱, ۲, ...\}$.

مجموعهٔ θ بیان‌شده در بالا را مجموعهٔ پذیرفتنی می‌نامیم.

قضیهٔ زیر یکی از جالب‌ترین قضیه‌ها در زمینهٔ رده‌بندی خمینه‌های ریمانی با نقصِ همگنیِ یک است.

قضیه ۵.۳. *([۹]). یک تناظر یک‌به‌یک بین مجموعه‌های پذیرفتنی (یکسان با تقریب مزدوج بودن در G) و G-خمینه‌های ریمانی (یکسان با تقریب قائم هم‌ارزی) وجود دارد.*

۱.۳. عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک بر خمینه‌های آدامار. فرض کنیم M یک خمینهٔ آدامار (خمینه‌ای ریمانی، همبند، همبند ساده، کامل و با انحنای نامثبت) باشد. فرض کنیم G یک زیرگروه همبند بسته از گروه طولپایی‌های یک خمینهٔ آدامار nبُعدی M باشد که بر M با نقصِ همگنیِ یک عمل می‌کند. در این صورت یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد (برای مشاهدهٔ جزئیات، [۱۲] را بخوانید):

(۱) همهٔ مدارها اصلی هستند و گروه پایاگر در هر نقطه یک زیرگروه فشردهٔ مهین از G است. هر مدار با $\mathbb{R}^{n-1}$ وابرسان است و یک زیرگروه بستهٔ همبند حل‌پذیر از G موجود است به‌طوری که روی هر مدار به‌طور ساده متعدی عمل می‌کند.

(۲) دقیقاً یک مدار تکین F وجود دارد و گروه ثابت‌ساز هر نقطه از F یک زیرگروه فشردهٔ مهین از G است. مدار تکین با $\mathbb{R}^k$ وابرسان است که در آن، $k \in \{0, \dots, n-2\}$ و یک زیرگروه همبند بستهٔ حل‌پذیر از G موجود است به‌طوری که بر F به‌طور متعدی ساده عمل می‌کند. هر مدار اصلی با $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}$ وابرسان است.

۲.۳. عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک بر فضاهای اقلیدسی. هر مدار از یک عمل با نقصِ همگنیِ یک، انحنای اصلی ثابت دارد. اَبَررویه‌های با انحنای اصلی ثابت برای $n = 3$ توسط لوی چیویتا[۱] [۳۲] و در حالت کلی در [۴۰] رده‌بندی شده‌اند. این امر به رده‌بندی زیر منجر می‌شود (یادآور می‌شویم که گروه طولپایی $Iso(\mathbb{R}^n)$ برابر است با ضرب نیم‌مستقیم $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$):

(۱) عمل $SO(n) \times \{0\}$: مدار تکین، یک نقطه و مدارهای اصلی، کره‌ها هستند؛

(۲) عمل $SO(n-k) \times \mathbb{R}^k$ برای $k \in \{1, \dots, n-2\}$: مدار تکین، فضای تماماً ژئودزیک $\mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^n$ و مدارهای اصلی، تیوب‌های حول آن هستند؛

(۳) عمل $\{e_{SO(n)}\} \times \mathbb{R}^{n-1}$: همهٔ مدارها اصلی و اَبَرصفحه‌های تماماً ژئودزیک هستند.

۳.۳. عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک بر فضاهای هذلولوی حقیقی. هر مدارِ یک عمل با نقصِ همگنیِ یک، انحناهای اصلی ثابت دارد. اَبَررویه‌های با انحناهای اصلی ثابت فضای هذلولوی حقیقی $\mathbb{RH}^n$ توسط کارتان[۲] [۲۱] رده‌بندی شده‌اند: هر عمل با نقصِ همگنیِ یک روی $\mathbb{RH}^n$ با یکی از عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک در زیر، هم‌ارز مداری است:

(۱) عمل $SO_0(1, n)$: مدار تکین، یک نقطه و مدارهای اصلی، اَبَرکره‌های ژئودزیک هستند؛

---
[۱] Levi-Civita [۲] Henri Cartan

(۲) عمل $SO_\circ(۱,k) \times SO(n-k)$ که $k \in \{۱,\dots,n-۲\}$: مدار تکین، فضای تماماً ژئودزیک $\mathbb{RH}^k \subseteq \mathbb{RH}^n$ و مدارهای اصلی، تیوب‌هایی حول مدار تکین هستند؛

(۳) عمل $SO_\circ(۱,n-۱)$: همهٔ مدارها اصلی هستند و یکی از آنها اَبَرصفحهٔ تماماً ژئودزیک $\mathbb{RH}^{n-۱}$ و بقیهٔ مدارها با این مدار وابرسان هستند؛

(۴) عمل زیرگروه پوچ‌توان حاصل از یک تجزیهٔ ایواساوای[۱] $SO_\circ(۱,n)$: همهٔ مدارها اصلی هستند و هر کدام یک کره‌نما[۲] در $\mathbb{RH}^n$ است. برگ‌بندی حاصل، همان برگ‌بندی کره‌نمای مشهور برای $\mathbb{RH}^n$ است.

روش کارتان برای فضاهای هذلولوی $\mathbb{CH}^n$، $\mathbb{HH}^n$ و $\mathbb{OH}^۲$ کاربرد ندارد، زیرا معادلهٔ گاوس–کوداتسی[۳] برای این فضاها بسیار پیچیده می‌شود.

۴.۳. عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک روی فضاهای ریمانی متقارن از نوع نافشرده. در مورد فضاهای از نوع نافشردهٔ تحویل‌ناپذیر[۴]، رده‌بندی (با تقریب هم‌ارزیِ مداری) برای فضاهای دارای رتبهٔ ۱، به‌استثنای فضاهای هذلولوی چهارتایی، به‌دست آمده است [۱۷]. مطالعهٔ فضاهای با رتبه‌های بالاتر به دو حالت تقسیم شده است: حالتی که مدارها یک برگ‌بندی فضا را تشکیل می‌دهند (این حالت در [۱۵] بررسی و رده‌بندی کاملی از عمل‌ها ارائه شده است). حالت دوم که در [۱۶] بررسی شده است، به رده‌بندی این عمل‌ها در حالتی می‌پردازد که یک مدار تکین تماماً ژئودزیک وجود داشته باشد. اخیراً در [۱۸] نتایج و روش‌های قبلی به‌صورت یک روش اسلوبمند ساماندهی شده‌اند تا عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک، یک گروه لی H بر فضای متقارن تحویل‌ناپذیر $M = \frac{G}{K}$ از نوع نافشرده و رتبهٔ بالاتر را که یک مدار تکین دارد، مورد بررسی قرار دهند. ثابت شده است که (الف) یا H در یک زیرگروه اکیداً تحویلی مهین مانند L در G واقع است؛ (ب) یا H در یک زیرگروه اکیداً سهموی مهین مانند Q قرار دارد. در حالت (الف)، عمل‌های H و L هم‌ارز مداری هستند و مدار تکین در M تماماً ژئودزیک است. حالت (ب) کمی پیچیده‌تر است و به دو بخش (ب۱) و (ب۲) تقسیم می‌شود: (ب۱) این حالت که *تعمیم کانونی* نامیده می‌شود، به مثال‌هایی می‌پردازد که از زیرخمینه‌های تماماً ژئودزیک M با رتبهٔ پایین‌تر (این زیرخمینه‌ها را *مؤلفه‌های مرزی* می‌نامیم) به‌دست می‌آیند و حالت (ب۲) که *ساختار پوچ‌توان* نامیده می‌شود، قدری مرموز و پیچیده است و توصیف آن از حوصلهٔ این نوشتار خارج است. در همان مقاله، نتایج به‌دست آمده برای رده‌بندی فضاهای دارای رتبهٔ دوی زیر به‌کار برده شده‌اند:

$$\frac{SL(۳,\mathbb{R})}{SO(۳)}, \qquad \frac{SO_\circ(۲,۳)}{SO(۲)\times SO(۳)}, \qquad \frac{G_۲^۲}{SO(۴)}.$$

[۱]Iwasawa [۲]horosphere [۳]Codazzi-Gauss equation [۴]irreducible

در [۱۹] با تعمیم روش‌های جدید و به کاربردن ساختار پوچ‌توان، رده‌بندی فضاهای دیگری از رتبه ۲ را به‌دست آمده است که عبارت‌اند از

$$\frac{G_2^{\mathbb{C}}}{G_2}, \qquad \frac{SL(3,\mathbb{C})}{SU(3)}, \qquad \frac{SO_\circ(2,n+2)}{SO(2)\times SO(n+2)}.$$

۴. G-خمینه‌های شبه‌ریمانی با نقصِ همگنیِ یک

اگر M یک خمینهٔ ریمانی و G زیرگروهی بسته از $Iso(M)$ باشد که بر M به‌صورت طولپایی عمل می‌کند، آن‌گاه عمل سره است. این مطلب برای خمینه‌های شبه‌ریمانی در حالت کلی درست نیست. همان‌طورکه در بخش قبل آمد، سره بودنِ عمل در مطالعهٔ G-خمینه‌ها ابزاری بسیار توانمند است. بنابراین در این بخش، G-خمینه‌های شبه‌ریمانی را در دو حالت (عمل‌های سره و ناسره) بررسی می‌کنیم.

طبیعی است که برای مطالعهٔ G-خمینه‌های شبه‌ریمانی، از فضاهای مدل آغاز کنیم که همان فضا-فرم‌ها هستند. بنابر تعریف، یک *فضا-فرم* خمینهٔ شبه‌ریمانی همبند، کامل و با انحنای ثابت است. در واقع دو فضا-فرم همبند ساده طولپا هستند اگر و تنها اگر دارای بُعد، اندیس و انحنای برابر باشند [۳۷]. اگر $M(n,\nu,C)$ فضا-فرم همبند ساده با بُعد n، اندیس ν و انحنای C باشد، آن‌گاه برای هر $n\geq 2$،

$$M(n,\nu,C)=\begin{cases}\mathbb{S}_\nu^n(r) & C=\frac{1}{r^2},\quad 0\leq\nu\leq n-2\\ \mathbb{R}_\nu^n & C=0\\ \mathbb{H}_\nu^n(r) & C=-\frac{1}{r^2},\quad 2\leq\nu\leq n\end{cases}$$

که در آن، $\mathbb{R}_\nu^n$ نشان‌دهندهٔ فضای برداری حقیقی $\mathbb{R}^n$ با ضرب داخلی

$$\langle x,y\rangle=-\sum_{i=1}^{\nu}x_iy_i+\sum_{i=\nu+1}^{n}x_iy_i$$

است،

$$\mathbb{S}_\nu^n(r)=\{x\in\mathbb{R}_\nu^{n+1}|\langle x,x\rangle=r^2\}$$

و

$$\mathbb{H}_\nu^n(r)=\{x\in\mathbb{R}_{\nu-1}^{n+1}|\langle x,x\rangle=-r^2\}.$$

معمولاً $\mathbb{S}_\nu^n(1)$ و $\mathbb{H}_\nu^n(1)$ را با $\mathbb{S}_\nu^n$ و $\mathbb{H}_\nu^n$ نمایش می‌دهند. همچنین $\mathbb{R}_1^n$ فضای مینکوفسکی nبُعدی، $\mathbb{S}_1^n$ *فضای دسیتر*[۱] nبُعدی و $\mathbb{H}_1^n$ فضای *آنتی‌دسیتر*[۲] nبُعدی نامیده می‌شود.

[۱] deSitter [۲] anti deSitter

عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک بر فضاهای مینکوفسکی در [۲، ۴، ۱۴] مطالعه شده‌اند. در [۴] با فرض سره بودنِ عمل و وجود یک مدار فضاگون، ثابت می‌شود که همهٔ مدارهای فضاگون، اصلی و طولپا با $\mathbb{R}^{n-1}$ هستند و بنابراین عمل، با عمل طبیعی گروه جمعی $\mathbb{R}^{n-1}$ بر $\mathbb{R}^n_1$ هم‌ارز مداری است. در [۲] عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک (در هر دو حالت سره و ناسره) بر فضای مینکوفسکی سه‌بُعدی مطالعه شده‌اند و گروه‌های عمل‌کننده با تقریب تزویج رده‌بندی شده‌اند. روش‌های به‌کار رفته در این مقاله قابل تعمیم به حالت کلی نیست و برای رده‌بندی عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک بر فضای مینکوفسکی nبُعدی، باید از ابزارهای دیگری استفاده کرد. در [۱۴] مثال‌هایی از عمل‌های ناسره آورده شده است که فضاهای مداری حاصل، هاوسدُرف نیستند. همچنین در این مقاله با روش‌هایی مشابه، عمل‌ها با نقصِ همگنیِ یک بر فضای مینکوفسکی دو بُعدی و سه‌بُعدی با تقریب هم‌ارزیِ مداری، رده‌بندی شده‌اند.

عمل‌های با نقصِ همگنیِ یک بر فضای دسیتر nبُعدی (در دو حالت سره و ناسره) در [۵] بررسی شده‌اند. در حالتی که عمل سره باشد، ثابت می‌شود که گروه عمل‌کننده فشرده و متعلق به فهرست بُرل[۱] است و هر مداری، فضاگون و متجانس با $\mathbb{S}^{n-1}$ است. به‌ویژه مدار تکین وجود ندارد و فضای مداری با $\mathbb{R}$ وابرسان است. بنابراین عمل‌های سره با نقصِ همگنیِ یک بر فضای دسیتر nبُعدی با تقریب هم‌ارزیِ مداری، رده‌بندی می‌شوند.

در همان مرجع، گروه‌هایی که به‌طور ناسره و با نقصِ همگنیِ یک عمل می‌کنند، در حالت‌های آبلی، نیم‌ساده و تحویل‌ناپذیر، با تقریب تزویج رده‌بندی شده‌اند. در هر سه حالت، مدارها با تقریبِ طولپایی به‌دست آمده‌اند. یکی دیگر از نتایج زیبای این مقاله این است که عمل، سره است اگر و تنها اگر فضای مداری هاوسدُرف باشد اگر و تنها اگر گروه عمل‌کننده فشرده باشد.

برای فضای آنتی‌دسیتر سه‌بُعدی، همهٔ گروه‌های عمل‌کننده با نقصِ همگنیِ یک (در هر دو حالت سره و ناسره) با تقریب تزویج در [۳] مشخص شده‌اند. روش اصلی در این رده‌بندی، رده‌بندی گروه‌های لی یک‌بُعدی و دو بُعدی و نمایش آنها در $SL(۲,\mathbb{R})$ است. در واقع مؤلف به‌جای استفاده از نمایش استاندارد $\mathbb{H}^۳_۱$، از نمایش این فضا در فضای ماتریس‌های ۲×۲ حقیقی، یعنی $SL(۲,\mathbb{R})$ با *متر دوپایا*[۲] استفاده می‌کند و رده‌بندی گروه‌های عمل‌کننده را به رده‌بندی زیرگروه‌هایی از

$$\frac{SL(۲,\mathbb{R}) \times SL(۲,\mathbb{R})}{\mathbb{Z}_۲}$$

تحویل می‌کند. نخستین بار در این مقاله فضای مداری غیرهاوسدُرف در حالتی که عمل، ناسره است در همهٔ حالات مشخص شده است. حالت‌های خاصی وجود دارند که در آنها فضای مداری، متناهی است.

[۱] Borel list [۲] biinvariant metric

مراجع

[1] Adams, S., The isometry group of a compact Lorentz manifold (I), *Inventions Mathematicae*, **129** (1997), 239–261.

[2] Ahmadi, P., Cohomogeneity one dynamics on three dimensional Minkowski space, Submited.

[3] Ahmadi, P., Cohomogeneity one three dimensional anti-de Sittere space, proper and nonproper actions, *Differential Geometry and its Applications*, **39** (2015), 93–112.

[4] Ahmadi, P. and Kashani, S. M. B., Cohomogeneity one Minkowski space $\mathbb{R}^n_1$, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, **78** (2011), no. 1, 49–59.

[5] Ahmadi, P., Kashani, S. M. B., Abedi, H., Cohomogeneity one de Sitter Space $\mathbb{S}^n_1$, *Acta Mathematica Sinica,* **26** (2010), no. 10, 1915–1926.

[6] Alekseevsky, A. V., Alekseevsky, D.V., G-manifolds with one dimensional orbit space, *Advances in Soviet Mathematics*, **8** (1992), 1–31.

[7] Alekseevsky, D. V., Compact quaternion spaces, *Functional Analysis and Its Applications*, **2** (1968), 106–114.

[8] Alekseevsky, D.V. On a proper action of a Lie group, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, **34** (1979), 219–220.

[9] Alekseevsky, D. V., Riemannian manifolds of cohomogeneity one, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, **56** (1989), 9–22.

[10] Atiyah, M., Berndt, J., Projective planes, Severi varieties and spheres: *Surveys in Differential Geometry* (VIII), Papers in Honor of Calabi, Lawson, Siu and Uhlenbeck, Somerville, MA, 1–27, 2003.

[11] Bérard Bergery, L., Sur de nouvelles variétés riemanniennes d'Einstein, *Institut Élie Cartan,* **4** (1982), 1–60.

[12] Berndt, J. *Lie group actions on manifolds*, Lecture note of a graduate course given at Sofia University, Tokyo, 2002.

[13] Berndt, J. and Brück, M. Cohomogeneity one actions on hyperbolic spaces, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **541** (2001), 209–235.

[14] Berndt, J., Diaz-Rawos, J. C., Vanae, M. J., Cohomogeneity one actions on Minkowski spaces, arXive:1410.1700 [math.DG].

[15] Berndt, J. and Tamaru, H., Homogeneous codimension one foliations on noncompact symmetric spaces, *Journal of Differential Geometry*, **63** (2003), 1–40.

[16] Berndt, J. and Tamaru, H. Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces with a totally geodesic singular orbit, *Tohoku Mathematical Journal*, **2** (2004), no. 56, 163–177.

[17] Berndt, J., Tamaru, H., Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces of rank one, *Transactions of the American Mathematical Society*, **359** (2007), no. 7, 3425–3438.

[18] Berndt, J., Tamaru, H., Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces of noncompact type, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **683** (2013), 129–159.

[19] Berndt, J., Dom'inguez-V'azquez, M., Cohomogeneity one actions on some noncompact symmetric spaces of rank two (English summary), *Transformation Groups*, **20** (2015), no. 4, 921–938.

[20] Borel, H., Some Remarks about Lie groups transitive on sphere and tori, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **55** (1949), 580–587.

[21] Cartan, E., Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, IV. Ser. **17** (1938), 177–191.

[22] D'Atri, J. E., Certain isoparametric families of hypersurfaces in symmetric spaces, *Journal of Differential Geometry*, **14** (1979), 21–40.

[23] Gromov, M., Rigid Transformation Groups, In: D. Bernard, Y. Choquet-Bruhat (eds.), *Geometrie Differentielle*, Herrmann, Paris, 1988.

[24] Hsiang, W. Y. and jun Lawson, H.B. Minimal submanifolds of low cohomogeneity, *Journal of Differential Geometry*, **5** (1971), 1–38.

[25] Iwata, K. Classiffication of compact transformation groups on cohomology quaternion projective spaces with codimension one orbits, *Osaka Journal of Mathematics*, **15** (1978), 475–508.

[26] Iwata, K. Compact transformation groups on rational cohomology Cayley projective planes, *Tohoku Mathematical Journal,* II. Ser. **33** (1981), 429–442.

[27] Kobayashi, S. *Transformation Groups in Differential Geometry*, Volume 70 of Ergebnisse der Mathematik und iher Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[28] Kollross, A., A classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions, *Transactions of the American Mathematical Society*, **354** (2002), 571–612.

[29] Koszul, J. L., Sur la forme hermitienne des espaces homogènes complexes, *Canadian Journal of Mathematics*, **7** (1955) , 562–576.

[30] Kowalsky, N., Actions of non-compact simple groups on Lorentz manifolds and other geometric manifolds, Thesis: University of Chicago, 1994.

[31] Lee, J. M., *An Introduction to Smooth Manifolds*, Springer-Verlag, 3rd edn., 2013.

[32] Levi Civita, T., Famiglie di superficie isoparametriche nell'ordinario spazio euclideo, *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei*, **6** (1937), no. 26, 355–362.

[33] Montgomery, D., Samelson, H., Transformation groups on spheres, *Annals of Mathematics,* **44** (1943), 457–470.

[34] Montgomery, D., Samelson, H., Yang, T., Groups on E^n with $(n-2)$-dimensional orbits, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **7** (1956), 719–728.

[35] Montgomery, D., Zippin, L., A class of transformation groups in E^n, *American Journal of Mathematics,* **63** (1941), 1–8.

[36] Mostert, P. S., On a compact Lie group acting on a manifold, *Annals of Mathematics*, **65** (1957), 447–455.

[37] O'Neill, B. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, (1983).

[38] Palais, R. S., On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups, *Annals of Mathematics*, **73** (1961), 295–323.

[39] Podesta, F., Spiro, A., Some topological properties of cohomogeneity one Riemannian manifolds of negative curvature. *Annals of Global Analysis and Geometry*, **14** (1996), 69–79.

[40] Segre, B., Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni, *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei*, **6** (1938), no. 27 , 203–207.

[41] Straume, E., Compact connected Lie transformation groups on sphere with low cohomogeneity (I), *Memoirs of the AMS*, **119** (1996), no. 569.

[42] Takagi, R. On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space, *Osaka Journal of Mathematics*, **10** (1973), 495–506 .

[43] Uchida, F., Classiffication of compact transformation groups on cohomology complex projective spaces with codimension one orbits, *Japanese Journal of Mathematics*, **3** (1977), 141–189.

[44] Wang, Q. M., Isoparametric hypersurfaces in complex projective spaces, *Differential Geometry and Differential Equations*, Proceedings of 1980 Beijing symposium, **3** (1982), 1509–1523.

[45] Zimmer, R. J., On the automorphism group of a compact Lorentz manifold and other geometric manifolds, *Inventions Mathematicae*, **89** (1986), 411–424.

تاریخ ارسال: ۹۵/۸/۱۸؛ تاریخ بازنگری: ۹۵/۹/۲۸؛ تاریخ پذیرش: ۹۵/۱۰/۲

پرویز احمدی: دانشگاه زنجان، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی
تارنما: http://www.znu.ac.ir/members/ahmadi-parviz
رایانامه: p.ahmadi@znu.ac.ir
مسعود حسنی: دانشگاه زنجان، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی
رایانامه: masoud.hasani@znu.ac.ir
رضا میرزایی: دانشگاه بین‌المللی امام خمینی، گروه ریاضی محض
رایانامه: r.mirzaei@sci.ikiu.ac.ir