فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۸، شمارهٔ ۶۴ (بهار و تابستان ۱۳۹۸)، صص. ۹۹ تا ۱۱۵

# مروری بر فرم‌های فیستر

امیرحسین نخودکار

**چکیده**

در این مقاله، به مرور مفاهیم اولیه در نظریهٔ جبریِ فرم‌های مربعی می‌پردازیم. پیوند میان این فرم‌ها و فرم‌های دوخطی، ناورداهای مقدماتیِ این فرم‌ها و تفاوت‌های موجود بین حالتی که مشخصهٔ میدان برابر با دو است و حالتی که مشخصه برابر با دو نیست، به‌اختصار بیان شده‌اند. همچنین فرم‌های فیستر که نقشی کلیدی در نظریهٔ فرم‌های مربعی دارند، معرفی و برخی کاربردهای آنها بیان می‌شوند.

## ۱. سرآغاز

نظریهٔ فرم‌های مربعی در آغاز، به‌عنوان شاخه‌ای از نظریهٔ اعداد در جریان حل معادله‌های دیوفانتیِ درجه‌دو پدیدار شد. مطالعه بر روی این فرم‌ها، توسط فرما[۱] در قرن هفدهم با طرح مسئلهٔ وجود جواب صحیح برای معادلهٔ دیوفانتی $x^۲ + y^۲ = k$ آغاز شد. پس از فرما ریاضیدانانی بزرگ مانند اویلر[۲]، لاگرانژ[۳] و گاوس[۴] این مطالعات را ادامه دادند و این نظریه به شکل کنونی آن نزدیکتر شد. کارهای مینکوفسکی[۵] در اواخر قرن نوزدهم و هَسِه[۶] در اوایل قرن بیستم منجر به پیشرفتی عمیق در نظریهٔ فرم‌های مربعی شد که از آن زمان تاکنون، پایه و اساس پژوهش‌های بسیاری بوده است.

منظور از فرم مربعی همان چندجمله‌ای همگن درجه‌دو است. برای مثال، $۴x^۲ + xy - ۳y^۲$ یک فرم مربعی *دومتغیره* (یا *دوتایی*) است. نظریهٔ فرم‌های مربعی و روش‌های پژوهش در آن، وابستگی زیادی به ماهیت ضرایب این فرم‌ها دارد. این ضرایب، در جبرخطی و هندسهٔ تحلیلی، عموماً عددهای حقیقی یا

*عبارات و کلمات کلیدی.* فرم مربعی؛ فرم دوخطی؛ فرم فیستر؛ سطح میدان.

[۱]Pierre de Fermat [۲]Leonhard Euler [۳]Joseph-Louis Lagrange [۴]Carl Friedrich Gauss [۵]Hermann Minkowski [۶]Helmut Hasse

عددهای مختلط و در توپولوژی جبری، عددهای صحیح هستند [۱۰]. در نظریهٔ حسابی و جبریِ فرم‌های مربعی، ضرایب به‌ترتیب، متعلق به یک حلقهٔ جابه‌جایی و یک میدان هستند.

نظریهٔ جبریِ فرم‌های مربعی به بررسی ویژگی‌های این فرم‌ها روی یک میدان دلخواه می‌پردازد. از جمله مسائل مهم در این نظریه می‌توان به رده‌بندی فرم‌های مربعی، ناورداهای آنها و رفتار آنها نسبت به گسترش‌های میدانی اشاره کرد. نظریهٔ جبری فرم‌های مربعی در سال ۱۹۳۷ توسط ویت[۱] [۲۸] پایه‌گذاری شد. مقالهٔ ویت شامل نتایجی زیبا است که مفاهیم اساسی نظریهٔ جبریِ فرم‌های مربعی را تشکیل می‌دهند. در این مقاله، قضیه‌های رده‌بندی فرم‌های مربعی روی یک میدان دلخواه که مشخصهٔ آن ۲ نیست، ارائه شده است. پس از ویت، فیستر[۲] تأثیرگذارترین پژوهشگر در پیشرفت نظریهٔ جبریِ فرم‌های مربعی بوده است. او در سال ۱۹۶۵ یکی از مهم‌ترین مفاهیم در این نظریه را معرفی کرد که امروزه به‌نام *فرم‌های فیستر* شناخته می‌شود. فرم‌های فیستر، فرم‌های مربعی $۲^n$*تایی* هستند که به حاصل‌ضرب $n$ فرم دوتایی به‌شکل $x^۲+ay^۲$ تجزیه می‌شوند. این فرم‌ها در بُعد پایین به‌طور طبیعی در مطالعهٔ جبرهای روی میدان $\mathbb{F}$ پدیدار می‌شوند: فرم‌های فیسترِ یک‌*تایی* و *دوتایی* را می‌توان به‌ترتیب، فرم نُرم گسترش‌های میدانی جدایی‌پذیر از درجهٔ دو و جبرهای کواترنیون روی $\mathbb{F}$ در نظر گرفت (بخش ۳.۵ را ببینید).

نظریهٔ جبریِ فرم‌های مربعی، پیوندی ژرف با نظریهٔ فرم‌های دوخطی روی میدان‌ها دارد. چنان‌که خواهیم دید، نظریه‌های فرم‌های مربعی و دوخطی در حالتی که مشخصهٔ میدان برابر با ۲ نیست، عملاً یکی هستند و به همین دلیل است که حالت مشخصهٔ ۲ پیچیدگی‌های خاص خود را دارد. هدف این مقاله، مروری کوتاه بر مفاهیم پایه‌ای نظریهٔ جبریِ فرم‌های مربعی و دوخطی، ناورداهای مقدماتی آنها، رده‌بندی این فرم‌ها، تفاوت‌ها در مشخصهٔ ۲ و غیر از آن، و نیز فرم‌های فیستر است.

## ۲. فرم‌های مربعی و دوخطی

**۱.۲. فرم‌های مربعی.** گرچه فرم‌های مربعی را می‌توان روی حلقه‌های جابه‌جایی تعریف کرد، در این مقاله در مورد فرم‌های مربعی روی یک میدان صحبت می‌کنیم. منظور از یک *فرم مربعی $n$تایی* ($n$بُعدی) روی میدان $\mathbb{F}$، یک چندجمله‌ای $n$متغیرهٔ همگن درجه‌دو با ضرایب در $\mathbb{F}$ است. شکل کلی یک فرم مربعی به‌صورت

$$\varphi(x_۱,\ldots,x_n)=\sum_{i,j=۱}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

است که در آن، به‌ازای هر $i,j$، $a_{ij}\in\mathbb{F}$. فرم $\varphi$ را می‌توان به زبان ماتریسی نیز بیان کرد. فرض کنیم $X$ یک بردار ستونی با مؤلفه‌های $x_۱$، $x_۲$، $\ldots$، $x_n$ و $A=(a_{ij})$ یک ماتریس $n\times n$ باشد که از ضرایب

[۱] Ernst Witt [۲] Albrecht Pfister

$\varphi$ تشکیل شده است. در این صورت داریم $\varphi(X) = X^t A X$ که در آن، $X^t$ نشان‌دهندهٔ ترانهادهٔ $X$ است. توجه کنید که اگر $\mathrm{char}\mathbb{F} \neq ۲$، آن‌گاه فرم $\varphi$ را می‌توان به‌صورت

$$\varphi(x_۱, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=۱}^{n} a'_{ij} x_i x_j$$

نمایش داد که در آن، $a'_{ij} = \frac{۱}{۲}(a_{ij} + a_{ji})$. در این حالت، $A' = (a'_{ij})$ یک ماتریس متقارن است. بنابراین اگر مشخصهٔ میدان $\mathbb{F}$ برابر با ۲ نباشد، هر فرم مربعی، یک ماتریس متقارن به‌دست می‌دهد. دقت کنید که این مطلب در حالتی که مشخصهٔ $\mathbb{F}$ برابر با ۲ باشد، برقرار نیست.

فرم‌های مربعی به‌طور طبیعی در ریاضیات ظاهر می‌شوند. برای مثال، نگاشت $q$ از مجموعهٔ اعداد مختلط به مجموعهٔ اعداد حقیقی که به هر عدد مختلط $z$ مربع قدرمطلق آن، یعنی $|z|^۲$ را نسبت می‌دهد، یک فرم مربعی است، زیرا با نمایش عدد مختلط $z$ به‌صورت زوج مرتب $(x, y)$ داریم

$$q(x, y) = x^۲ + y^۲.$$

فرم $q$ یک فرم *ضربی* است، یعنی برای هر دو عدد مختلط $z_۱$ و $z_۲$ داریم $q(z_۱z_۲) = q(z_۱)q(z_۲)$.

فرم‌های مربعی در مطالعهٔ جبرهای با بُعد پایین روی میدان $\mathbb{F}$ نیز ظاهر می‌شوند. منظور از یک جبر (شرکت‌پذیر) روی میدان $\mathbb{F}$ حلقه‌ای یکدار مانند $A$ است که یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ تشکیل می‌دهد. برای مثال، هر توسیع میدان $\mathbb{F}$، یک جبر جابه‌جایی روی $\mathbb{F}$ است. همچنین برای هر عدد طبیعی $n > ۱$ مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های $n \times n$ روی $\mathbb{F}$ با اعمال جمع و ضرب ماتریسی و ضرب در عدد، یک جبر ناجابه‌جایی روی $\mathbb{F}$ است. رده‌ای مهم از جبرها، *جبرهای تقسیمی* هستند، یعنی جبرهایی که همهٔ عضوهای ناصفر آنها وارون‌پذیرند. به‌لحاظ تاریخی، اولین مثال از یک جبر تقسیمیِ ناجابه‌جایی را همیلتون[۱] یافت. این جبر که اکنون به *جبر کواترنیون‌های حقیقی* معروف است، یک جبر چهار بُعدی $\mathbb{H}$ روی میدان اعداد حقیقی با پایهٔ $\{۱, i, j, k\}$ است به‌طوری که

$$i^۲ = -۱, \quad j^۲ = -۱, \quad ij = -ji = k.$$

جبر کواترنیون‌های حقیقی، مجهز به یک فرم مربعی به نام *فرم نُرم* است. برای هر

$$x = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$$

نُرم $x$ به‌صورت $N(x) = a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲$ تعریف می‌شود. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که فرم $N$ نیز ضربی است. این مطلب را می‌توان از قضیهٔ چهار مربع اویلر نتیجه گرفت که بیان می‌کند برای

[۱] William Rowan Hamilton

$i = 1, 2, 3, 4$ اگر $x_i$ و $y_i$ اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2)$$

که در آن،

$$z_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4,$$
$$z_2 = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3,$$
$$z_3 = x_1y_3 - x_2y_4 - x_3y_1 + x_4y_2,$$
$$z_4 = x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_4y_1.$$

**۲.۲. فرم‌های دوخطی.** بحث دربارهٔ فرم‌های دوخطی را با حالتی خاص از این فرم‌ها که با آن آشنا هستیم، آغاز می‌کنیم. اگر $\mathbb{F}$ یک میدان باشد، *ضرب متعارف دوخطی* روی فضای برداری $\mathbb{F}^n$ نگاشتی از $\mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n$ به $\mathbb{F}$ است که به هر دو بردار ستونی $u, v \in \mathbb{F}^n$ عدد $u \cdot v := u^t v \in \mathbb{F}$ را نسبت می‌دهد. ویژگی مهم این نگاشت، دوخطی بودن آن است؛ به این معنی که با ثابت نگه داشتنِ هر یک از مؤلفه‌ها، این نگاشت نسبت به مؤلفهٔ دیگر، خطی است. در حالت کلی فرض کنیم $V$ یک فضای برداری با بُعد متناهی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. منظور از یک *فرم دوخطی* روی $\mathbb{F}$، نگاشتی مانند $\mathfrak{b} : V \times V \to \mathbb{F}$ است به‌طوری که به‌ازای هر $u, u', v, v' \in V$ و هر $\lambda \in \mathbb{F}$ روابط زیر برقرار باشند:

$$\mathfrak{b}(u + u', v) = \mathfrak{b}(u, v) + \mathfrak{b}(u', v),$$
$$\mathfrak{b}(u, v + v') = \mathfrak{b}(u, v) + \mathfrak{b}(u, v'),$$
$$\mathfrak{b}(\lambda u, v) = \mathfrak{b}(u, \lambda v) = \lambda \mathfrak{b}(u, v).$$

دو ردهٔ مهم از فرم‌های دوخطی، فرم‌های متقارن و پادمتقارن هستند: فرم دوخطی $\mathfrak{b}$ روی $V$ را *متقارن* می‌نامیم اگر به‌ازای هر $u, v \in V$، $\mathfrak{b}(u, v) = \mathfrak{b}(v, u)$ و آن را *پادمتقارن* می‌نامیم اگر به‌ازای هر $u, v \in V$، $\mathfrak{b}(u, v) = -\mathfrak{b}(v, u)$.

نظریهٔ فرم‌های دوخطی موضوعی جذاب در ریاضیات است و کاربردهای بسیاری دارد. این فرم‌ها از جنبه‌های گوناگون در جبر و نظریهٔ اعداد مورد بررسی قرار گرفته‌اند (فصل هفدهمِ [۸] را ببینید). نخستین مطالعات جدّی روی این فرم‌ها با کارهای گاوس دربارهٔ قانون تقابل مربعی آغاز شد و پس از آن به‌دست ریاضیدانانی مانند آیزنشتاین[1]، مینکوفسکی، ویت و هَسِه ادامه یافت. برای مطالعهٔ ساختار جبری این فرم‌ها به چند مفهوم مقدماتی نیاز داریم که در ادامهٔ این بخش به بیان آنها می‌پردازیم.

[1] Gotthold Eisenstein

چنان‌که پیش از این گفتیم، آشناترین مثال از فرم‌های دوخطی، ضرب متعارف دوخطی روی فضای برداری $\mathbb{F}^n$ است که البته یک فرم متقارن است. به‌طورکلی برای هر ماتریس مربعی مانند $A$ با درایه‌های متعلق به $\mathbb{F}$، نگاشت $\mathfrak{b} : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ با ضابطهٔ $\mathfrak{b}(u,v) = u^t A v$ یک فرم دوخطی است (عضوهای $\mathbb{F}^n$ را به‌عنوان بردار ستونی در نظر گرفته‌ایم). اهمیت این مثال در این است که در واقع همهٔ فرم‌های دوخطی از این نوع هستند: فرض کنیم $\mathfrak{b}$ یک فرم دوخطی روی $V$ و $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای $V$ باشد. با فرضِ $A = (\mathfrak{b}(v_i, v_j))$ ماتریسی مربعی از مرتبهٔ $n$ به‌دست خواهیم آورد به‌طوری که برای هر $u, v \in V$ داریم $\mathfrak{b}(u,v) = [u]_{\mathcal{B}}^t A [v]_{\mathcal{B}}$ که در آن، $[u]_{\mathcal{B}}$ ماتریس ستونی نمایش $u$ در پایهٔ $\mathcal{B}$ است. ماتریس $A$ را *ماتریس گرام*[1] $\mathfrak{b}$ نسبت به پایهٔ $\mathcal{B}$ می‌نامیم. به‌سادگی می‌توان دید که اگر $A'$ ماتریس گرام $\mathfrak{b}$ نسبت به پایه‌ای دیگر برای $V$ باشد، آن‌گاه ماتریسی وارون‌پذیر مانند $P$ (*ماتریس تعویض پایه*) وجود دارد به‌طوری که $A' = P^t A P$. به‌ویژه $A$ متقارن (پادمتقارن) است اگر و تنها اگر $A'$ متقارن (پادمتقارن) باشد. بنابراین فرم‌های دوخطی متقارن (پادمتقارن)، فرم‌هایی هستند که ماتریس گرام آنها متقارن (پادمتقارن) است.

اکنون متناظر با ردهٔ ماتریس‌های وارون‌پذیر و قطری‌پذیر، می‌توان دو رده از فرم‌های دوخطی را تعریف کرد: فرم دوخطی $\mathfrak{b}$ روی $V$ *ناتبهگون* نامیده می‌شود اگر ماتریس گرام آن وارون‌پذیر باشد. در این صورت $(V, \mathfrak{b})$ را یک *فضای دوخطی* می‌نامیم. فرم دوخطی $\mathfrak{b}$ روی $V$ *قطری‌پذیر* نامیده می‌شود اگر ماتریس گرام آن قطری‌پذیر باشد؛ یعنی پایه‌ای مانند $\{v_1, \dots, v_n\}$ برای $V$ موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر $i \neq j$، $\mathfrak{b}(v_i, v_j) = 0$. در این حالت، فرم $\mathfrak{b}$ را با $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_{\mathfrak{b}}$ نمایش می‌دهیم که در آن، به‌ازای هر $i = 1, \dots, n$، $\alpha_i = \mathfrak{b}(v_i, v_i) \in \mathbb{F}$.

فرم‌های مربعی پیوندی ناگسستنی با فرم‌های دوخطی متقارن دارند. اگر $V$ یک فضای برداری $n$بُعدی روی $\mathbb{F}$ باشد، هر فرم مربعی $n$تایی روی $\mathbb{F}$ را می‌توان همچون یک تابع $q : V \to \mathbb{F}$ در نظر گرفت به‌طوری که

الف) برای هر $\alpha \in \mathbb{F}$ و هر $v \in V$، $q(\alpha v) = \alpha^2 v$؛

ب) نگاشت $\mathfrak{b}_q : V \times V \to \mathbb{F}$ با ضابطهٔ $\mathfrak{b}_q(u,v) = q(u+v) - q(u) - q(v)$ یک *فرم دوخطی* باشد.

توجه کنید که فرم $\mathfrak{b}_q$ متقارن است. بنابراین هر فرم مربعی $q$ یک فرم دوخطی متقارن $\mathfrak{b}_q$ القا می‌کند. این فرم را *شکل قطبی* $q$ می‌نامیم. اگر مشخصهٔ میدان $\mathbb{F}$ برابر با ۲ نباشد، عکس این ادعا نیز صادق است: برای هر فرم دوخطی متقارن $\mathfrak{b}$ روی $V$ نگاشت $q_{\mathfrak{b}} : V \to \mathbb{F}$ با ضابطهٔ $q_{\mathfrak{b}}(v) = \frac{1}{2}\mathfrak{b}(v,v)$ یک فرم مربعی است. بنابراین وقتی مشخصهٔ میدان برابر با ۲ نباشد، فرم‌های مربعی با فرم‌های دوخطی متقارن در تناظر یک‌به‌یک هستند.

[1] Jørgen Pedersen Gram

## ۳. رده‌بندی فرم‌های مربعی و دوخطی

**۱.۳. فرم‌های مربعی.** یکی از مهم‌ترین مسائل در نظریهٔ فرم‌های مربعی، رده‌بندی آنها است؛ به این معنی که تعیین کنیم تحت چه شرایطی دو فرم مربعی $n$تایی $q_۱$ و $q_۲$ *طولپا* هستند. به عبارت دیگر، چه وقت ماتریس وارون‌پذیر $C$ از مرتبهٔ $n$ وجود دارد به‌طوری که برای هر بردار ستونی $n$تایی مانند $X$، $q_۲(X) = q_۱(CX)$. دو فضای مربعی $(V_۱, q_۱)$ و $(V_۲, q_۲)$ *طولپا* هستند اگر یک یکریختی فضاهای برداری مانند $\tau : V_۱ \to V_۲$ وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $u \in V_۱$، $q_۲(\tau(u)) = q_۱(u)$. نخستین نتیجه در رده‌بندی فرم‌های مربعی (رده‌بندی موضعیِ فرم‌های مربعی صحیح و گویا) را مینکوفسکی در سال ۱۸۸۴ به‌دست آورد [۱۹، ۲۰]. در سال ۱۸۸۹ دیکسون[۱] [۷] مسئلهٔ رده‌بندی فرم‌های مربعی را روی میدان‌های متناهی حل کرد تا اینکه ویت [۲۸] توصیفی کامل از فرم‌های مربعی در حالتی که مشخصهٔ میدان برابر با ۲ نباشد، ارائه نمود. ویت تجزیه‌ای از فرم‌های مربعی بر اساس مجموع *متعامد* فضاهای مربعی و فرم‌های *ناتک‌رَوَند*[۲] و هذلولوی بیان کرد. مجموع متعامد دو فضای مربعی $(V_۱, q_۱)$ و $(V_۲, q_۲)$ که با $(V_۱ \perp V_۲, q_۱ \perp q_۲)$ نشان داده می‌شود، یک فضای مربعی است که در آن، $V_۱ \perp V_۲ = V_۱ \oplus V_۲$ و به‌ازای هر $v_۱ \in V_۱$ و $v_۲ \in V_۲$ داریم

$$(q_۱ \perp q_۲)((v_۱, v_۲)) = q_۱(v_۱) + q_۲(v_۲).$$

برای مثال، مجموع متعامد دو فرم یک‌بُعدی $ax^۲$ و $bx^۲$، فرم دو بُعدی $ax^۲ + by^۲$ است. منظور از یک فرم *تک‌رَوَند*[۳] یک فرم مربعی $q$ روی فضای برداری $V$ است که شامل یک بردار ناصفر *خودمتعامد* است، یعنی بردار ناصفر $v \in V$ که $q(v) = ۰$. فرمی که تک‌رَوَند نباشد، *ناتک‌رَوَند* نامیده می‌شود. به‌سادگی می‌توان دید هر فرم مربعی دو بُعدیِ تک‌رَوَند، با فرم $xy$ طولپا است. چنین فرمی را یک *صفحهٔ هذلولوی* می‌نامیم. یک فرم مربعی را *هذلولوی* می‌نامیم هرگاه مجموع متعامدی از صفحه‌های هذلولوی باشد. قضیهٔ تجزیهٔ ویت می‌گوید اگر مشخصهٔ میدان برابر با ۲ نباشد، هر فرم مربعی را می‌توان به مجموع متعامد یک فرم صفر، یک فرم ناتک‌رَوَند و یک فرم هذلولوی تجزیه کرد (*فرم صفر*، فرمی است که به هر بردار، صفر را نسبت می‌دهد). در سال ۱۹۴۱ ارف[۴] [۲] نشان داد این تجزیه برای فرم‌های مربعی در مشخصهٔ ۲ نیز برقرار است.

در بررسی فرم‌های مربعی، معمولاً فرم‌های *منظم* را در نظر می‌گیریم، یعنی فرم‌هایی که شکل قطبی آنها ناتبهگون است. به‌سادگی می‌توان دید که فرم‌های منظم، دقیقاً همان فرم‌های مربعی هستند که در تجزیهٔ ویتِ آنها، فرم صفر ظاهر نمی‌شود. بنابراین هر فرم مربعی را می‌توان به مجموع متعامد یک فرم

[۱] Leonard Eugene Dickson [۲] anisotropic [۳] isotropic [۴] Cahit Arf

صفر و یک فرم منظم، تجزیه کرد. این فرم منظم نیز مجموع متعامدی از یک فرم ناتک‌رَوَند و یک فرم هذلولوی است.

**۲.۳. فرم‌های دوخطی متقارن.** مشابه قضیهٔ تجزیهٔ ویت برای فرم‌های دوخطی متقارن وجود دارد. مفاهیم مجموع متعامد و تک‌رَوَند برای فرم‌های دوخطی، شبیه فرم‌های مربعی تعریف می‌شوند. برای مثال، فرم دوخطی $\mathfrak{b}$ روی فضای برداری $V$ *تک‌رَوَند* نامیده می‌شود اگر بردار ناصفر $v \in V$ موجود باشد که $\mathfrak{b}(v,v) = ۰$. به‌علاوه فرم دو بُعدی $\mathfrak{b}$ را یک *صفحهٔ هذلولوی* می‌نامیم اگر ماتریس گرام آن نسبت به پایه‌ای مناسب، به‌شکل $\left(\begin{smallmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{smallmatrix}\right)$ باشد. فرم دوخطی متقارن $\mathfrak{b}$ *هذلولوی* نامیده می‌شود در صورتی که مجموعی متعامد از صفحه‌های هذلولوی باشد. با این تعریف، به‌سادگی می‌توان دید که فرم مربعی $q$ هذلولوی است اگر و تنها اگر $\mathfrak{b}_q$ هذلولوی باشد. وقتی مشخصهٔ میدان برابر با ۲ نیست، با توجه به تناظر بین فرم‌های دوخطی متقارن و فرم‌های مربعی، نتایج ویت برای فرم‌های دوخطی متقارن نیز به‌کار می‌روند. اما اگر مشخصهٔ میدان ۲ باشد، وضعیت کمی متفاوت است. نخستین مطالعهٔ جدّی روی فرم‌های دوخطی که حالت میدان با مشخصهٔ ۲ را نیز شامل شود، توسط کنبوش[1] در [۱۴] انجام گرفت. در این راستا مفهومی جدید برای فرم‌های دوخطی متقارن معرفی شد: فرم دوخطی متقارن ناتبهگون $\mathfrak{b}$ را *هم‌رَوَند*[2] گوییم اگر زیرفضایی از $V$ مانند $W$ موجود باشد به‌طوری که $\dim W = \frac{۱}{۲}\dim V$ و تحدید $\mathfrak{b}$ به $W \times W$ صفر باشد. به‌سادگی می‌توان دید که وقتی مشخصهٔ میدان برابر با ۲ نیست، فرم دوخطی متقارن $\mathfrak{b}$ هم‌رَوَند است اگر و تنها اگر هذلولوی باشد. اگر مشخصهٔ میدان ۲ باشد، هر فرم دوخطی متقارن هذلولوی، هم‌رَوَند است اما عکس این مطلب صادق نیست. بنابراین اگر مشخصهٔ میدان ۲ باشد، باز هم قضیهٔ تجزیهٔ ویت را می‌توان برای فرم‌های دوخطی متقارن به‌کار برد البته با این تغییر که شرط ضعیف‌ترِ هم‌رَوَندی را جایگزین هذلولوی بودن کنیم.

پس از کنبوش، افراد زیادی فرم‌های دوخطی متقارن را در حالت مشخصهٔ ۲، بررسی کردند. از میان آنها می‌توان به میلنُر[3]، ساه[4]، کاتو[5]، بائسا[6] و آراویر[7] اشاره نمود ([۱۸]، [۲۴]، [۱۳] و [۱] را ببینید). مرجعی جدید و کامل دربارهٔ فرم‌های دوخطی و مربعی، [۱۱] است.

**۳.۳. فرم‌های دوخطی متناوب.** رده‌ای دیگر از فرم‌های دوخطی که در مطالعهٔ فرم‌های مربعی هنگامی که مشخصهٔ میدان برابر با ۲ است، ظاهر می‌شود، ردهٔ فرم‌های متناوب است. فرض کنیم $V$ یک فضای برداری روی میدان $F$ باشد که مشخصهٔ آن برابر با ۲ است و $q$ یک فرم مربعی روی $V$ باشد. در این صورت برای هر $v \in V$ داریم

$$\mathfrak{b}_q(v,v) = q(۲v) - q(v) - q(v) = ۰.$$

[1] Manfred Knebusch [2] metabolic [3] John Milnor [4] Chih-Han Sah [5] Kazuya Kato [6] Ricardo Baeza
[7] Roberto Aravire

با استفاده از این ویژگی می‌توان رده‌ای دیگر از فرم‌های دوخطی (در مشخصهٔ دلخواه) را تعریف کرد: فرم دوخطی $\mathfrak{b}$ را روی $V$ *متناوب* می‌نامیم اگر به‌ازای هر $v \in V$، $\mathfrak{b}(v,v) = ۰$. اگرنه $\mathfrak{b}$ را *نامتناوب* می‌خوانیم. اگر مشخصهٔ $F$ برابر با ۲ نباشد و $\mathfrak{b}$ یک فرم دوخطی متناوب باشد، آن‌گاه تساوی $\mathfrak{b}(u+v,u+v) = ۰$ نتیجه می‌دهد که برای هر $u,v \in V$، $\mathfrak{b}(v,u) = -\mathfrak{b}(u,v)$؛ به عبارت دیگر، $\mathfrak{b}$ پادمتقارن است. به‌عکس، اگر $\mathfrak{b}$ پادمتقارن باشد، آن‌گاه تساوی $\mathfrak{b}(v,v) = -\mathfrak{b}(v,v)$ نتیجه می‌دهد که به‌ازای هر $v \in V$، $\mathfrak{b}(v,v) = ۰$؛ یعنی $\mathfrak{b}$ متناوب است. بنابراین اگر مشخصهٔ میدان برابر با ۲ نباشد، فرم‌های دوخطی متناوب و فرم‌های دوخطی پادمتقارن، یکسان هستند.

توجه کنید که فرم دوخطی متناوب یک‌بُعدی در واقع همان فرم صفر است. همچنین به‌سادگی می‌توان دید که هر فرم دوخطی ناتبهگون متناوبِ دو بُعدی پایه‌ای مانند $\{u,v\}$ دارد که در $\mathfrak{b}(u,v) = -\mathfrak{b}(v,u) = ۱$ صدق می‌کند. چنین فرمی را یک *صفحهٔ هذلولوی* می‌نامیم. پس دو نوع صفحهٔ هذلولوی تعریف کرده‌ایم: یکی متقارن و دیگری متناوب. ماتریس گرام یک صفحهٔ هذلولوی در حالت کلی نسبت به پایهٔ مناسب، به‌شکل $\left(\begin{smallmatrix} ۰ & ۱ \\ \pm ۱ & ۰ \end{smallmatrix}\right)$ است. مشابه با فرم‌های متقارن، مجموع متعامد صفحه‌های هذلولوی را یک *فرم هذلولوی* می‌نامیم. رده‌بندی فرم‌های متناوب در مشخصهٔ دلخواه بسیار ساده است. در واقع هر فرم دوخطی متناوب را می‌توان به‌صورت مجموع یک فرم صفر و یک فرم هذلولوی نوشت (برای مثال، گزارهٔ ۱.۸ از [۱۱] را ببینید). به‌ویژه هر فرم دوخطی ناتبهگون متناوب، یک فرم هذلولوی است. بنابراین دو فرم متناوبِ هم‌بُعد، طولپا هستند اگر و تنها اگر رتبهٔ ماتریس گرام آنها با هم برابر باشد.

با توجه به آنچه گفتیم، شکل قطبی هر فرم مربعی در مشخصهٔ ۲، متناوب است. به‌ویژه فرم‌های منظم در مشخصهٔ ۲ لزوماً دارای بُعد زوج هستند. از سوی دیگر، اگر مشخصه برابر با ۲ نباشد، تنها فرم مربعی که فرم دوخطی متناظر با آن متناوب است، فرم صفر است.

## ۴. دترمینان و ناوردای ارف

**۱.۴. فرم‌های قطری‌پذیر.** رده‌ای مهم از فرم‌های مربعی، ردهٔ فرم‌های قطری‌پذیر است. فرض کنیم $\mathbb{F}$ یک میدان باشد و $a_۱,\dots,a_n \in \mathbb{F}$. فرم مربعی

$$q(x_۱,\dots,x_n) = a_۱x_۱^۲ + \cdots + a_nx_n^۲$$

را با نماد $\langle a_۱,\dots,a_n\rangle$ نشان می‌دهیم. چون ماتریس این فرم، یک ماتریس قطری است، آن را *فرم قطری* می‌نامیم. یک فرم مربعی را *قطری‌پذیر* می‌نامیم اگر با یک فرم قطری طولپا باشد. توجه کنید که هر فرم قطری‌پذیر را می‌توان به‌صورت مجموعی متعامد از فرم‌های مربعی یک‌بُعدی به‌شکل $ax^۲$ نوشت که در آن، $a \in \mathbb{F}$. بنابراین فرم مربعی $q$ روی فضای برداری $V$ قطری‌پذیر است اگر و تنها اگر $V$ پایه‌ای مانند $\{v_۱,\dots,v_n\}$ داشته باشد به‌طوری که برای هر $i \neq j$، $\mathfrak{b}_q(v_i,v_j) = ۰$. چنین پایه‌ای یک

*پایهٔ متعامد* برای $(V, q)$ نامیده می‌شود. ژاکوبی[1] نشان داد که هر فرم مربعی روی میدان اعداد حقیقی، قطری‌پذیر است (بخش ۴۵ از [۵] را ببینید). در حالت کلی می‌توان نشان داد که وقتی مشخصهٔ میدان برابر با ۲ نیست، هر فرم مربعی، قطری‌پذیر است (نتیجهٔ ۲.۴ از فصل اول [۱۶] را ببینید). اما این مطلب در حالت مشخصهٔ ۲، برقرار نیست. به بیان دقیق‌تر، فرم‌های مربعیِ منظم در حالت مشخصهٔ ۲ نمی‌توانند قطری‌پذیر باشد. در واقع فرض کنیم مشخصهٔ میدان برابر با ۲ و $(V, q)$ یک فضای مربعی باشد و $V$ پایه‌ای متعامد مانند $\{v_1, \ldots, v_n\}$ داشته باشد. در این صورت برای هر $i \neq j$، $\mathfrak{b}_q(v_i, v_j) = 0$. از سوی دیگر، بنابر آنچه پیش از این گفتیم، فرم $\mathfrak{b}_q$ یک فرم متناوب است. بنابراین برای هر $i, j$ داریم $\mathfrak{b}_q(v_i, v_j) = 0$ و لذا $q$ منظم نیست.

گرچه وقتی مشخصهٔ میدان برابر با ۲ است، فرم‌های منظم، قطری‌پذیر نیستند، تجزیه‌ای کمابیش مشابه برای آنها وجود دارد. می‌توان نشان داد که در حالت مشخصهٔ ۲، هر فرم منظم، به مجموع متعامد فرم‌های دو بُعدی به‌شکل $ax^2 + xy + by^2$ تجزیه می‌شود (گزارهٔ ۷.۳۱ از [۱۱] را ببینید). این فرم دوتایی را با $[a, b]$ نشان می‌دهیم.

**۲.۴. دترمینان و ناوردای ارف.** فرض کنیم $q$ یک فرم مربعی منظم روی میدان $\mathbb{F}$ باشد که مشخصهٔ آن برابر با ۲ نیست و $A$ ماتریس متقارن متناظر با آن باشد. در این صورت *دترمینان* $q$ به‌عنوان عضوی از گروه خارج‌قسمتیِ $\mathbb{F}^\times/\mathbb{F}^{\times 2}$ با

$$\det(q) = \det A \cdot \mathbb{F}^{\times 2}$$

تعریف می‌شود. برای مثال، دترمینان فرم قطری $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ برابر است با $a_1 \cdots a_n\mathbb{F}^{\times 2}$. می‌دانیم که اگر $q \simeq q'$ و $A'$ ماتریس متقارن متناظر با $q'$ باشد، آن‌گاه ماتریس وارون‌پذیر $C$ وجود دارد که $A' = CAC^t$. بنابراین $\det A' = \det A(\det C)^2$. این مطلب نشان می‌دهد که دترمینان یک فرم مربعی، ناوردایی از ردهٔ طولپایی آن است. به‌سادگی می‌توان دید که اگر $q_1$ و $q_2$ دو فرم مربعی منظم باشند، آن‌گاه $\det(q_1 \perp q_2) = \det(q_1)\det(q_2)$. ویت نشان داد که اگر مشخصهٔ میدان برابر با ۲ نباشد، دو فرم مربعی دوتایی منظم $q_1$ و $q_2$ طولپا هستند اگر و تنها اگر دترمینان‌های آنها برابر باشند و هر دو یک مقدار مشترک را نمایش دهند (یعنی بردارهای $v_1$ و $v_2$ در فضاهای زمینهٔ $q_1$ و $q_2$ وجود داشته باشند که $q_1(v_1) = q_2(v_2)$).

اگر مشخصهٔ میدان برابر با ۲ نباشد، مفهوم دترمینانِ فرم‌های مربعی به‌شکل بالا قابل تعریف نیست، زیرا ماتریس متقارن متناظر با چنین فرمی وجود ندارد. در سال ۱۹۴۱ ارف مفهوم دترمینان را به این حالت تعمیم داد که در ادامه به آن می‌پردازیم. گفتیم که هر فرم مربعی دو بُعدیِ منظم، با فرمی به‌شکل

[1] Carl Gustav Jacob Jacobi

$[a,b]$ طولپا است که در آن، $a,b \in \mathbb{F}$. به‌علاوه به‌سادگی می‌توان دید که اگر $[a,b] \simeq [a',b']$، آن‌گاه اختلاف $ab$ و $a'b'$ عضوی به‌شکل $\alpha^{۲}+\alpha$ است که در آن، $\alpha \in \mathbb{F}$. قرار می‌دهیم

$$\wp(\mathbb{F}) = \{\alpha^{۲}+\alpha \mid \alpha \in \mathbb{F}\}.$$

$\wp(\mathbb{F})$ زیرگروهی جمعی از $\mathbb{F}$ است و در گروه خارج‌قسمتیِ $\mathbb{F}/\wp(\mathbb{F})$ داریم

$$ab + \wp(\mathbb{F}) = a'b' + \wp(\mathbb{F}).$$

تعریف می‌کنیم

$$\Delta([a,b]) = ab + \wp(\mathbb{F}) \in \mathbb{F}/\wp(\mathbb{F}).$$

اگر مشخصهٔ میدان برابر با ۲ و $q$ یک فرم مربعی منظم باشد، آن‌گاه می‌توان نوشت

$$q \simeq [a_۱, b_۱] \perp \cdots \perp [a_n, b_n]$$

که در آن، برای هر $i = ۱,۲,\ldots,n$، $a_i, b_i \in \mathbb{F}$. *ناوردای ارف* $q$ عبارت است از

$$\Delta(q) = a_۱b_۱ + \cdots + a_nb_n + \wp(\mathbb{F}) \in \mathbb{F}/\wp(\mathbb{F}).$$

ارف در [۲] نشان داد که این مقدار، مستقل از تجزیهٔ انتخابی برای $q$ است. روشن است که برای هر دو فرم مربعی منظم مانند $q_۱$ و $q_۲$، $\Delta(q_۱ \perp q_۲) = \Delta(q_۱) + \Delta(q_۲)$.

مشابه حالتی که مشخصهٔ میدان برابر با ۲ نیست، دو فرم مربعی دو بُعدی با هم طولپا هستند اگر و تنها اگر ناوردای ارف یکسانی داشته باشند و یک مقدار مشترک را نمایش دهند. ارف ثابت کرد که دو فرم مربعی روی یک میدان کامل از مشخصهٔ دو طولپا هستند اگر و تنها اگر ناوردای ارف یکسانی داشته باشند (قضیهٔ ۴.۵ از فصل نهمِ [۲۵] را ببینید). یادآوری می‌کنیم که میدان *کامل*، میدانی است که هر چندجمله‌ایِ تحویل‌ناپذیر در آن، جدایی‌پذیر باشد.

## ۵. فرم‌های فیستر

**۱.۵. ترکیب فرم‌های مربعی.** نظریهٔ ترکیب فرم‌های مربعی روی میدان‌ها در قرن نوزدهم با طرح مسألهٔ یافتن اتحادهای $n$مربع به‌شکل

$$(a_۱^۲ + \cdots + a_n^۲)(b_۱^۲ + \cdots + b_n^۲) = (c_۱^۲ + \cdots + c_n^۲) \tag{۱.۵}$$

روی میدان اعداد مختلط آغاز شد که در آن، هر $c_k$ فرمی دوخطی برحسب $a_i$ها و $b_j$ها است؛ یعنی هر $c_k$ ترکیبی خطی از اعضای مجموعهٔ $\{a_ib_j \mid ۱ \leqslant i,j \leqslant n\}$ است. با توجه به تعویض‌پذیریِ

عمل ضرب در میدان‌ها، رابطهٔ بالا در حالت $n = ۱$ بدیهی است. به‌علاوه اتحاد فیبوناتچی، برقراریِ این اتحاد را در حالت $n = ۲$ نشان می‌دهد. در سال ۱۷۴۸ اویلر رابطه‌ای برای مجموع چهار مربع کامل یافت و از آن برای اثبات این مطلب که هر عدد صحیح مثبت، مجموعی از چهار مربع کامل است، استفاده کرد. این رابطه را نیز در بخش دوم بیان کردیم و دیدیم که با استفاده از آن می‌توان نشان داد که فرم نُرم کواترنیون‌های حقیقی، ضربی است. لژاندر[۱] نشان داد که وقتی $n = ۳$، اتحاد (۱.۵) روی میدان اعداد گویا برقرار نیست. او ثابت کرد که اعداد ۳ و ۲۱ را می‌توان به‌صورت مجموع سه مربع کامل در $\mathbb{Q}$ نوشت اما $۶۳ = ۲۱ \times ۳$ را نمی‌توان. در سال ۱۸۱۸ دِگِن[۲] اتحادی برای مجموع هشت مربع کامل به‌دست آورد. با کشف جبر شرکت‌ناپذیر هشت‌گان‌ها توسط گریوز[۳] و کیلی[۴] در سال ۱۸۴۸، رابطهٔ دِگِن برای اثبات ضربی بودنِ فرم نُرم این جبر به‌کار رفت. پس از آن، نزدیک به ۵۰ سال ریاضیدانان سعی در ساختن اتحادی مشابه برای سایر مقادیر $n$ به‌ویژه $n = ۱۶$ داشتند اما در این راه ناموفق بودند. تا اینکه در سال ۱۸۹۸ هورویتس[۵] ثابت کرد اتحادی همانند (۱.۵) روی مجموعهٔ اعداد مختلط وجود دارد اگر و تنها اگر $n = ۱, ۲, ۴, ۸$. اثبات هورویتس را می‌توان به هر میدان $\mathbb{F}$ که مشخصهٔ آن ۲ نباشد، تعمیم داد. لازم به ذکر است که اگر مشخصهٔ میدان برابر با ۲ باشد، مجموع هر تعداد مربع کامل، باز یک مربع کامل است. با وجود این، صورتی از مسئلهٔ هورویتس در حالت مشخصهٔ ۲ نیز وجود دارد ([۱۲]). هورویتس مسئله‌ای کلی‌تر را نیز مطرح کرد که اساس مطالعات بعدی دربارهٔ ترکیب فرم‌های مربعی شد: به‌ازای کدام مقادیر طبیعی $r$، $s$ و $n$ اتحادی به‌شکل

$$(a_۱^۲ + \cdots + a_r^۲)(b_۱^۲ + \cdots + b_s^۲) = (c_۱^۲ + \cdots + c_n^۲)$$

وجود دارد که در آن، هر $c_k$ فرمی دوخطی برحسب $a_i$ها و $b_j$ها است؟ برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه، به [۲۷] مراجعه کنید.

**۲.۵. فرم‌های فیستر.** گرچه نظریهٔ جبری فرم‌های مربعی روی میدان‌ها را ویت پایه‌ریزی کرد، طی ۲۵ سال بعد، مقالات بسیار کمی در این باره نوشته شدند و همان تعداد معدود نیز کمتر تحت تأثیر کار ویت بودند. ارف در این باره تعبیری زیبا دارد: «دروازه باز شده بود ولی هیچ‌کس قدم به داخل نمی‌گذاشت.» این وضعیت یک‌باره با گذشتن فیستر از این دروازه، تغییر کرد. داستان از ارائهٔ یک درس توسط لنتس[۶] در نیمسال اول تابستان ۱۹۶۲ در دانشگاه مونیخ آغاز شد. این درس شامل مباحثی از کتاب آرتین[۷] [۳] و دیودونه[۸] [۹] در مورد گروه‌های کلاسیک بود. همچنین کارهای هورویتس در باب ترکیب فرم‌های مربعی و یادداشت‌های کنزر[۹] در مورد سطح میدان‌ها نیز در آن درس مرور شده بودند. *سطح* میدان $\mathbb{F}$ کوچکترین

---

[۱] Adrien-Marie Legendre [۲] Carl Ferdinand Degen [۳] John T. Graves [۴] Arthur Cayley [۵] Adolf Hurwitz [۶] Hanfried Lenz [۷] Emil Artin [۸] Jean Dieudonné [۹] Hellmuth Kneser

عدد مانند $s(\mathbb{F})$ است که ۱− را می‌توان به‌صورت مجموع $s(\mathbb{F})$تا مربع کامل در $\mathbb{F}$ نوشت. اگر چنین عددی وجود نداشته باشد، قرار می‌دهیم $s(\mathbb{F}) = \infty$. برای مثال، $s(\mathbb{R}) = \infty$ و $s(\mathbb{C}) = ۱$. پیش از آن در سال ۱۹۳۰ ون در واردن[۱] این سؤال را مطرح کرده بود که «کدام مقادیر صحیح می‌توانند سطح یک میدان باشند؟» در سال ۱۹۳۴ کنزر [۱۵] نشان داد که این مقادیر می‌توانند تنها ۱، ۲، ۴، ۸ یا مضاربی از ۱۶ باشند. کمی بعد از ارائهٔ درس مذکور، لنتس مقالهٔ [۱۷] را در این باره منتشر نمود و آن را با یک مسألهٔ باز دربارهٔ سطح میدان‌ها به پایان رساند: آیا برای هر $s > ۴$ که در شرایط بالا صدق کند، میدانی با سطح $s$ وجود دارد؟ (پیش از آن وجود میدان‌هایی با سطح ۱، ۲ و ۴ ثابت شده بود.) چند ماه بعد، کَسلِز[۲] ثابت کرد $۱ + x_1^۲ + \cdots + x_n^۲$ را نمی‌توان به‌شکل مجموع $n$ مربع کامل در $\mathbb{R}^n(x_۱, \ldots, x_n)$ نوشت [۶]. با استفاده از این حکم، فیستر توانست میدان‌هایی با سطح ۸ و ۱۶ ارائه کند ([۲۶]).

در سال ۱۹۶۴ لنتس این سؤال را مطرح کرد که «اگر در (۱.۵)، $c_k$ها توابعی گویا از $a_i$ها و $b_i$ها باشند، به‌ازای کدام مقادیر $n$ تساوی برقرار خواهد بود؟» فیستر ثابت کرد که اتحادی با شرط مذکور وجود دارد اگر و تنها اگر $n$ توانی از دو باشد. به این ترتیب فیستر تعمیمی از قضیهٔ هورویتس را ثابت کرد.

بعدها فیستر متوجه شد که مسئلهٔ سطح میدان‌ها با این موضوع در پیوند است که اعضایی از یک میدان که به‌شکل مجموع $۲^n$تا مربع کامل نوشته می‌شوند، تشکیل یک گروه می‌دهند. او این واقعیت را در سال ۱۹۶۵ ثابت کرد و نخستین مقالات خود ([۲۱] و [۲۲]) را به رشتهٔ تحریر درآورد. چنین بود که فیستر فرم‌های ضربی را تعریف کرد. این فرمها بعداً *فرم‌های فیستر* نامیده شدند.

فرم‌های فیستر نخست در حالتی که مشخصهٔ میدان برابر با ۲ نیست، تعریف و پس از آن به حالت مشخصهٔ ۲ تعمیم داده شدند. این فرمها بر پایهٔ مفهوم حاصل‌ضرب تانسوریِ فرم‌های مربعی تعریف می‌شوند: اگر $q_۱$ و $q_۲$ دو فرم مربعی روی فضاهای برداری $V_۱$ و $V_۲$ باشند، *حاصل‌ضرب تانسوری* آنها که با $q_۱ \otimes q_۲$ نمایش داده می‌شود، فرمی مربعی روی $V_۱ \otimes V_۲$ است که با

$$(q_۱ \otimes q_۲)(v_۱ \otimes v_۲) := q_۱(v_۱)q_۲(v_۲)$$

تعریف می‌شود. حال فرض کنیم $\mathrm{char}\mathbb{F} \neq ۲$ و $\alpha_۱, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ ناصفر باشند. فرم مربعی $۲^n$بُعدی

$$\langle ۱, \alpha_۱\rangle \otimes \cdots \otimes \langle ۱, \alpha_n\rangle$$

روی $\mathbb{F}$ را یک *فرم فیستر $n$تایی* می‌نامیم و آن را با $\langle\langle \alpha_۱, \ldots, \alpha_n\rangle\rangle$ نمایش می‌دهیم. به‌طور مشابه می‌توان فرم‌های دوخطی فیستر را تعریف کرد: فرض کنیم $\mathfrak{b}_۱$ و $\mathfrak{b}_۲$ دو فرم دوخطی روی فضاهای برداری $V_۱$ و $V_۲$ باشند. *حاصل‌ضرب تانسوری* آنها که با $\mathfrak{b}_۱ \otimes \mathfrak{b}_۲$ نمایش داده می‌شود، فرمی دوخطی روی

[۱] Bartel Leendert van der Waerden [۲] John William Scott Cassels

$V_۱ \otimes V_۲$ است که برای هر $u_۱, v_۱ \in V_۱$ و هر $u_۲, v_۲ \in V_۲$ در

$$(\mathfrak{b}_۱ \otimes \mathfrak{b}_۲)(u_۱ \otimes u_۲, v_۱ \otimes v_۲) := \mathfrak{b}_۱(u_۱, v_۱)\mathfrak{b}_۲(u_۲, v_۲)$$

صدق می‌کند. توجه کنید که ماتریس گرام $\mathfrak{b}_۱ \otimes \mathfrak{b}_۲$ نسبت به پایهٔ مناسب، برابر با حاصل‌ضرب تانسوری یا حاصل‌ضرب کرونکر[1] ماتریس‌های گرام $\mathfrak{b}_۱$ و $\mathfrak{b}_۲$ است. حال برای $\alpha_۱, \ldots, \alpha_n \in F$ ناصفر، فرم دوخطی $۲^n$بُعدی

$$\langle ۱, \alpha_۱\rangle_b \otimes \cdots \otimes \langle ۱, \alpha_n\rangle_b$$

روی $\mathbb{F}$ را یک *فرم فیستر $n$تایی* می‌نامیم و آن را با $\langle\langle \alpha_۱, \ldots, \alpha_n\rangle\rangle_b$ نمایش می‌دهیم.

فرم‌های فیستر ابزارهایی توانمند برای حل بسیاری از مسائل دشوار در نظریهٔ فرم‌های دوخطی و مربعی است. فیستر ثابت کرد که هر فرم فیستر $q$ ضربی است؛ به این معنی که برای هر دو بردار $u$ و $v$ از فضای برداری زمینهٔ $q$، بردار $w$ در این فضا وجود دارد که $q(u)q(v) = q(w)$. این مطلب برای فرم‌های فیستر یک‌تایی نتیجه‌ای ساده از تعمیم اتحاد فیبوناچی، موسوم به *اتحاد براهماگوپتا*[2] است که بیان می‌کند برای عضوهای $a$، $x$، $y$، $z$ و $w$ از میدان $\mathbb{F}$ داریم

$$(x^۲ + ay^۲)(z^۲ + aw^۲) = (xz - ayw)^۲ + a(xw + yz)^۲.$$

همچنین فیستر با استفاده از این فرم‌ها ثابت کرد که سطح هر میدان، یا نامتناهی است یا توانی از دو است. به‌علاوه او ثابت کرد که برای هر $n$ میدانی وجود دارد که سطح آن برابر با $۲^n$ است. همچنین برای فرم‌های فیستر، مسئلهٔ دشوار تک‌روند بودن به مسئلهٔ سادهٔ هذلولوی بودن تبدیل می‌شود: اگر مشخصهٔ میدان برابر با ۲ نباشد، هر فرم فیستر تک‌روند، هذلولوی است [۲۳].

اگر مشخصهٔ میدان برابر با ۲ باشد، فرم‌های دوخطی فیستر به‌طور مشابه تعریف می‌شوند اما با توجه به اینکه فرم‌های مربعی منظمِ قطری در حالت مشخصهٔ ۲ وجود ندارند، تعریف فرم‌های مربعی فیستر باید کمی متفاوت باشد. بیش از همه، بائسا به بررسی ویژگی‌های مهم این فرم‌ها در حالت مشخصهٔ ۲ پرداخت. او در مقالات متعددی نشان داد که نتایجی که فیستر به‌دست آورد، در حالت مشخصهٔ ۲ نیز برقرار هستند. تعریف فرم‌های فیستر در حالت مشخصهٔ ۲ نیازمند مفهوم حاصل‌ضرب تانسوری یک فرم مربعی و یک فرم دوخطی است: فرض کنیم $V$ و $W$ دو فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشند، $\mathfrak{b}$ یک فرم دوخطی متقارن روی $V$ و $q$ یک فرم مربعی روی $W$ باشد. *حاصل‌ضرب تانسوری* $\mathfrak{b}$ و $q$ فرم $\mathfrak{b} \otimes q$ روی $V \otimes W$ است که برای هر $v \in V$ و هر $w \in W$ در

$$(\mathfrak{b} \otimes q)(v \otimes w) = \mathfrak{b}(v, v)q(w)$$

[1]Leopold Kronecker [2]Brahmagupta

صدق می‌کند و شکل قطبی آن، $\mathfrak{b}\otimes\mathfrak{b}_q$ است. حال برای $n\geqslant ۱$ فرض کنیم $a_۱,\dots,a_{n-۱}\in\mathbb{F}^\times$ و $a_n\in\mathbb{F}$. حاصل‌ضرب تانسوری

$$\langle\langle a_۱,\dots,a_{n-۱}\rangle\rangle_b\otimes[۱,a_n]$$

را یک فرم مربعی فیستر $n$تایی روی $\mathbb{F}$ می‌نامیم و آن را با $\langle\langle a_۱,\dots,a_n]]$ نمایش می‌دهیم. برای مثال، فرم فیستر یک‌تایی به‌شکل $x^۲+xy+ay^۲$ است که در آن، $a\in\mathbb{F}$. همچنین برای $a\in\mathbb{F}^\times$ و $b\in\mathbb{F}$ فرم فیستر دوتایی

$$\langle\langle a,b]]=\langle ۱,a\rangle\otimes[۱,b]=[۱,b]\perp a[۱,b]$$

همان فرم $x^۲+xy+by^۲+az^۲+azw+abw^۲$ است.

**۳.۵. فرم‌های فیستر در بُعد پایین.** این مقاله را با ارائهٔ مثال‌هایی از فرم‌های مربعی فیستر یک‌تایی و دوتایی که به‌طور طبیعی ظاهر می‌شوند، به پایان می‌بریم. نخست فرض کنیم $\mathbb{F}$ میدانی باشد که مشخصهٔ آن ۲ نیست. تعریف می‌کنیم $\mathbb{F}_a=\mathbb{F}[t]/(t^۲-a)$ که در آن، $a\in\mathbb{F}^\times$. در این صورت $\mathbb{F}_a$ یک جبر جدایی‌پذیر از درجهٔ دو روی $\mathbb{F}$ است. گیریم $j$ ردهٔ $t$ در $\mathbb{F}_a$ و $\iota$ خودریختی نابدیهی $\mathbb{F}_a$ باشد که $j$ را به $-j$ تصویر می‌کند. برای هر $u\in\mathbb{F}_a$، نُرم $u$ به‌صورت $N(u)=\iota(u)u$ تعریف می‌شود. بنابراین اگر $u=x+yj$ که $x,y\in\mathbb{F}$، آن‌گاه $N(u)=x^۲-ay^۲$. پس نگاشت $N$ همان فرم فیستر یک‌تایی $\langle\langle -a\rangle\rangle=\langle ۱,-a\rangle$ است.

اکنون به بررسی فرم نُرم جبرهای کواترنیون می‌پردازیم. این جبرها تعمیمی از جبر کواترنیون‌های حقیقی هستند و این گونه تعریف می‌شوند: یک *جبر کواترنیون* روی میدان $\mathbb{F}$ که مشخصهٔ آن ۲ نیست، یک جبر چهار بُعدی مانند $Q$ با پایهٔ $\{۱,i,j,k\}$ است که در شرایط

$$i^۲\in\mathbb{F}^\times,\quad j^۲\in\mathbb{F}^\times,\quad k=ij=-ji$$

صدق می‌کند. بنابراین هر $q\in Q$ را می‌توان به‌شکل $q=x+yi+zj+wk$ نوشت که در آن، $x,y,z,w\in\mathbb{F}$. مزدوج $q$ به‌صورت $\bar q=x-yi-zj-wk$ و نُرم $q$ با دستورِ $N(q)=\bar qq$ تعریف می‌شود. اگر قرار دهیم $a=i^۲\in\mathbb{F}^\times$ و $b=j^۲\in\mathbb{F}^\times$، آن‌گاه

$$N(q)=\bar qq=x^۲-ay^۲-bz^۲+abw^۲.$$

بنابراین فرم نُرم $Q$ همان فرم فیستر دوتایی $\langle\langle -a,-b\rangle\rangle$ است.

در حالتی که مشخصهٔ میدان برابر با ۲ است، فرم‌های فیستر یک‌تایی و دوتایی به‌طور مشابه ظاهر می‌شوند. فرض کنیم $\mathbb{F}$ میدانی با مشخصهٔ ۲ باشد. هر جبر جدایی‌پذیر از درجهٔ دو روی $\mathbb{F}$ به‌صورت

$\mathbb{F}_a = \mathbb{F}[t]/(t^۲ + t + a)$ است که در آن، $a \in \mathbb{F}$. فرض کنیم $j$ ردهٔ $t$ در $\mathbb{F}_a$ و $\iota$ خودریختی نابدیهی $\mathbb{F}_a$ باشد. در این صورت برای هر $u = x + yj \in \mathbb{F}_a$ که $x, y \in \mathbb{F}$ داریم $\iota(u) = x + y + yj$. بنابراین نُرم $u$ برابر است با $N(u) = \iota(u)u = x^۲ + xy + ay^۲$ که همان فرم فیستر $\langle\langle a]] = [۱, a]$ است. در پایان، فرض کنیم $Q$ یک *جبر کواترنیون* روی میدان $\mathbb{F}$ با مشخصهٔ ۲ باشد، یعنی یک جبر چهار بُعدی با پایهٔ $\{۱, i, j, k\}$ که در روابط

$$i^۲ + i \in \mathbb{F}, j^۲ \in \mathbb{F}^\times, k = ij = ji + j$$

صدق می‌کند. در این صورت هر $q \in Q$ را می‌توان به‌صورت $q = x + yi + zj + wk$ نوشت که $x, y, z, w \in \mathbb{F}$. *مزدوج* $q$ عبارت است از $\bar{q} = x + y + yi + zj + wk$ و *نُرم* $q$ با دستورِ

$$N(q) = \bar{q}q = x^۲ + xy + ay^۲ + bz^۲ + bzw + abw^۲$$

تعریف می‌شود که در آن، $a = i^۲ + i \in \mathbb{F}$ و $b = j^۲ \in \mathbb{F}^\times$. توجه کنید که فرم نُرم $Q$ همان فرم $\langle\langle b, a]]$ است.

**تشکر و قدردانی:** نویسندهٔ مقاله از داوران محترم به‌خاطر پیشنهادهای ارزشمندشان که باعث شد مقاله بهبود چشمگیری پیدا کند، تشکر می‌کند. همچنین نویسنده از نظرات سازندهٔ آقای دکتر رسول کاظمی در مورد این مقاله قدردانی می‌کند.

## مراجع


[1] Aravire, R., Baeza, R., Milnor's $K$-theory and quadratic forms over fields of characteristic two, *Comm. Algebra*, **20** (1992), no. 4, 1087–1107.

[2] Arf, C., Untersuchungen über quadratische formen in Körpern der charakteristik 2 (I), *J. Reine Angew. Math.*, **183** (1941), 148–167.

[3] Artin, E., *Geometric Algebra*, Interscience Publishers, Inc., New York, London, 1957.

[4] Bayer-Fluckiger, E., Shapiro, D. B., Tignol, J.-P., Hyperbolic involutions, *Math. Z.*, **214** (1993), no. 3, 461–476.

[5] Bôcher, M., *Introduction to Higher Algebra,* Dover Publications Inc., New York 1964.

[6] Cassels, J. W. S., On the representation of rational functions as sums of squares. *Acta Arith.*, **9** (1964), 79–82.

[7] Dickson, L. E., Determination of the structure of all linear homogeneous groups in a Galois field which are defined by a quadratic invariant, *Amer. J. Math.*, **21** (1899), no. 3, 193–256.

[8] Dickson, L. E., *History of the Theory of Numbers*. Vol. III: Quadratic and Higher Forms. With a chapter on the class number by G. H. Cresse, Chelsea Publishing Co., New York, 1966.

[9] Dieudonné, J., *La Géométrie des Groupes Classiques,* Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955.

[10] Dolgachev, I., Integral quadratic forms: Applications to algebraic geometry (after V. Nikulin), *Bourbaki Seminar*, Vol. 1982/83, 251–278.

[11] Elman, R., Karpenko, N., Merkurjev, A., *The Algebraic and Geometric Theory of Quadratic Forms,* American Mathematical Society Colloquium Publications **56**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[12] Junker, J., Das Hurwitz Problem für quadratische Formen über Körper der Charakteristik 2, Diplom thesis, Univ. Saarbrücken, 1980.

[13] Kato, K., Symmetric bilinear forms, quadratic forms and Milnor $K$-theory in characteristic two, *Invent. Math.*, **66** (1982), no. 3, 493–510.

[14] Knebusch, M., Grothendieck-und Wittringe von nichtausgearteten symmetrischen Bilinearformen, *S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Natur.*, Kl. (1969/1970), 93–157.

[15] Kneser, H., Verschwindende Quadratsummen in Körpern, *Jahresber Dtsch Math. Ver.*, **44** (1934), 143–146.

[16] Lam, T. Y., *Introduction to Quadratic Forms over Fields*, Graduate Studies in Mathematics, **6**7, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[17] Lenz, H., Einige Ungleichungen aus der Algebra der quadratischen Formen, *Arch. Math.*, **14** (1963), 373–382.

[18] Milnor, J., Symmetric inner products in characteristic 2,*Prospects in Mathematics*, pp. 59–75. Ann. of Math. Studies, no. **70**, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1971.

[19] Minkowski, H., Grundlagen für eine Theorie der quadratischen Formen mit ganzzahligen Koeffizienten, *Mémoires presentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut national de France,* Tome XXIX, no. **2**, 1884.

[20] Minkowski, H., Ueber die Bedingungen, unter welchen zwei quadratische Formen mit rationalen Coefficienten in einander rational transformirt werden können, *J. Reine Angew. Math.*, **106** (1890), 5–26.

[21] Pfister, A., Zur Darstellung von $-1$ als Summe von Quadraten in einem Körper, *J. London Math. Soc.*, **40** (1965) 159–165.

[22] Pfister, A., Multiplikative quadratische Formen, *Arch. Math.*, **16** (1965), 363–370.

[23] Pfister, A., Quadratische Formen in beliebigen Körpern, *Invent. Math.*, **1** (1966) 116–132.

[24] Sah, C. H., Symmetric bilinear forms and quadratic forms. *J. Algebra*, **20** (1972), 144–160.

[25] Scharlau, W., *Quadratic and Hermitian Forms,* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **270**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[26] Scharlau, W., On the history of the algebraic theory of quadratic forms, *Quadratic Forms and Their Applications*, pp. 229–259, Contemp. Math. **272**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[27] Shapiro, D. B., *Compositions of Quadratic Forms*, de Gruyter Expositions in Mathematics **33**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2000.

[28] Witt, E., Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpen, *J. Reine Angew. Math.*, **176**, 31–44.

تاریخ ارسال: ۹۵/۱۱/۲۳؛ تاریخ بازنگری: ۹۶/۷/۳۰؛ تاریخ پذیرش: ۹۶/۸/۴

امیرحسین نخودکار: دانشگاه کاشان، دانشکدهٔ علوم ریاضی

*تارنما:* `http://anokhodkar.kashanu.ac.ir`

*رایانامه:* `a.nokhodkar@kashanu.ac.ir`