فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۸، شمارهٔ ۶۴ (بهار و تابستان ۱۳۹۸)، صص. ۱۵۹ تا ۱۶۶

چندجمله‌ای‌نگاری؛ تلفیقی از ریاضی و هنر

مرتضی بیشه‌نیاسر

چکیده

در این مقاله، قصد داریم چندجمله‌ای‌نگاری حاصل از روش‌های تکراری از خانواده نیوتن را ارائه کنیم. چندجمله‌ای‌نگاری فرآیند تجسم ریشه‌های یک چندجمله‌ای مختلط است و در بسیاری از زمینه‌ها همچون آموزش ریاضی، هنرهای تجسمی، صنعت نساجی و قالی‌بافی کاربرد دارد. طی چند مثال مشاهده خواهیم کرد که با تغییر پارامترها، الگوهای زیبایی حاصل خواهد شد.

۱. سرآغاز

یکی از مهم‌ترین اهداف در طراحی با کمک رایانه، تولید طرح و الگوهای زیبا است. تولید طرح‌های متنوع، مستلزم لحاظ کردنِ جنبه‌های گوناگونی مانند ابتکار، نوآوری و تحلیل و توسعهٔ طرح است به‌طوری که یک طراح که با طرح‌های قالی، جواهرات و یا پارچه سروکار دارد، می‌بایست با همهٔ این جنبه‌ها آشنایی داشته باشد. این امر، انگیزه‌ای است برای گسترش روش‌هایی که به‌وسیلهٔ آنها بتوان طرح‌های جالب و متنوع ایجاد کرد.

یکی از ابزارهای توسعهٔ این روش‌ها، چندجمله‌ای‌ها و روش‌های عددی است. چندجمله‌ای‌ها از مهم‌ترین موضوعات ریاضی هستند که بشر از دیرباز با آنها و مسائل مربوط به آنها سروکار داشته است. برای مثال، مدارک تاریخی به‌دست آمده نشان می‌دهد که سومریان و مردم یونان باستان با مسائلی روبه‌رو بوده‌اند که به زبان ریاضی امروزی، ریشه‌یابیِ چندجمله‌ای‌ها تفسیر می‌شود [۴]. در قرن هفدهم میلادی، نیوتن روشی عددی برای تقریب ریشه‌های یک چندجمله‌ای ارائه داد. در سال ۱۸۷۹ آرتور کیلی[1] رفتار

عبارات و کلمات کلیدی. روش نیوتن؛ چندجمله‌ای؛ چندجمله‌ای‌نگاری؛ طرح و الگو.

[1] Arthur Cayley

روش نیوتن در صفحهٔ مختلط را روی معادلهٔ $z^{3} - 1 = 0$ مورد بررسی قرار داد که بعدها این مسئله توسط ژولیا[1] (۱۹۱۸) و مندلبرو[2] (۱۹۸۲) حل شد. آخرین دستاورد مربوط به چندجمله‌ای‌ها، چندجمله‌ای‌نگاری[3] است که در سال ۲۰۰۴ میلادی توسط بهمن کلانتری ابداع شد [۴]. در واقع چندجمله‌ای‌نگاری به‌عنوان هنر و علم تجسّم تقریب ریشه‌های چندجمله‌ای مختلط از طریق تصاویر فرکتالی و غیرفرکتالی تولید شده بر اساس ویژگی‌های همگرایی تکرار توابع معرفی می‌شود. این روش که براساس روش‌های تکراری در حل معادلات غیرخطی بنا شده است، این امکان را به کاربر می‌دهد که طرح‌ها و الگوهای زیبا ایجاد کند. از این طرح‌ها و الگوها می‌توان در مواردی همچون صنعت قالی‌بافی و گلیم‌بافی و همچنین تولید پارچه‌های منقوش استفاده کرد (شکل ۱). علاوه بر این به‌لحاظ آموزشی، چندجمله‌ای‌نگاری می‌تواند باعث علاقه‌مندی

شکل ۱. نمونه‌هایی از کاربرد طرح‌های تولید شده توسط چندجمله‌ای‌نگاری در قالی‌بافی [۳].

دانش‌آموزان و دانشجویان به مباحثی مانند چندجمله‌ای‌ها، دنباله‌ها، همگرایی و روش‌های تکراری شود. در بخش دومِ این مقاله، تعدادی از روش‌های تکراری از خانوادهٔ نیوتن را مرور می‌کنیم. در بخش سه، یک الگوریتم ساده برای تولید طرح و الگو بیان می‌کنیم. در بخش چهارم، با چند مثال، تأثیر پارامترهای موجود در الگوریتم را در ایجاد طرح‌های متنوع و زیبا مشاهده خواهیم کرد.

۲. روش‌های تکراری از خانوادهٔ نیوتن

فرض کنیم $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n با ضرایب مختلط باشد. بنابر قضیهٔ اساسی جبر، چندجمله‌ای $p(z)$ دارای n ریشه است که ممکن است این ریشه‌ها متمایز باشند یا نباشند. یکی از پُرکاربردترین روش‌های عددی برای تقریب ریشه‌های $p(z)$، روش نیوتن

$$z_{n+1} = N(z_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{۲.۱}$$

[1] Gaston Julia [2] Benoit Mandelbrot [3] polynomiography

است که در آن، $N(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}$. بر اساس این روش، تدابیر چندگامی متعددی همچون [۱]

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n)+f'(y_n)} \\ y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(f'(x_n)+f'(y_n))}{2f'(x_n)f'(y_n)} \\ y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

توسط پژوهشگران برای حل معادلات غیرخطی $f(x) = 0$ به‌کار گرفته شده است که در آن، f تابعی به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر است و نقطهٔ آغازین x_0 به‌قدر کافی نزدیک به جواب در نظر گرفته می‌شود. حال فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداقل دو با ضرایب مختلط باشد. با فرضِ $D_0(z) = 1$، برای $m \geq 1$ تابع $D_m(z)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D_m(z) = \det \begin{pmatrix} p'(z) & \frac{p''(z)}{2!} & \cdots & \frac{p^{(m-1)}(z)}{(m-1)!} & \frac{p^{(m)}(z)}{(m)!} \\ p(z) & p'(z) & \ddots & \ddots & \frac{p^{(m-1)}(z)}{(m-1)!} \\ 0 & p(z) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & p'(z) & \frac{p''(z)}{2!} \\ 0 & 0 & \cdots & p(z) & p'(z) \end{pmatrix}.$$

در [۴، ۵] به‌کمک $D_m(z)$ یک خانواده از روش‌های تکراری به‌شکل $\{B_m(z)\}$ معرفی شده است که در آن،

$$B_m(z) = z - p(z)\frac{D_{m-2}(z)}{D_{m-1}(z)}, \qquad m = 2, 3, 4, \cdots. \tag{۲.۲}$$

خانوادهٔ $\{B_m(z)\}$ را *خانوادهٔ اساسی*[۱] می‌نامیم. روشن است که

$$B_2(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)} \tag{۳.۲}$$

و

$$B_3(z) = z - \frac{2p(z)p'(z)}{2p'^2(z) - p(z)p''(z)}; \tag{۴.۲}$$

یعنی $B_2(z)$ همان روش نیوتن و $B_3(z)$ همان روش هالی[۲] است. روشن است که برای mهای بزرگ، روش حاصل از خانوادهٔ اساسی، پیچیده‌تر خواهد بود. یادآور می‌شویم که در تولید الگو و طرح‌های زیبا

[۱] basic family [۲] Halley's method

به‌کمک روش‌های تکراری، مرتبهٔ همگرایی روش مدنظر نخواهد بود. از این‌رو می‌توان به‌کمک روش نیوتن، روش‌هایی نااستاندارد مانند روش مان[۱]:

$$z_{n+1} = (1-\alpha)z_n + \alpha N(z_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \alpha \in (0, 1] \tag{۵.۲}$$

روش ایشیکاوا[۲]:

$$\begin{cases} z_{n+1} = (1-\alpha)z_n + \alpha N(v_n) \\ v_n = (1-\beta)z_n + \beta N(z_n) \end{cases} \tag{۶.۲}$$

که در آن،

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \alpha \in (0, 1], \quad \beta \in (0, 1]$$

و روش $S-$تکرار:

$$\begin{cases} z_{n+1} = (1-\beta)N(z_n) + \beta N(v_n) \\ v_n = (1-\alpha)z_n + \alpha N(z_n) \end{cases} \tag{۷.۲}$$

که در آن،

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \alpha \in (0, 1], \quad \beta \in (0, 1]$$

را برای تولید طرح‌های جدید به‌کار برد. توجه کنید که روش نیوتن حالت خاصی از روش‌های بالا است، زیرا با انتخابِ $\beta = 0$ و $\alpha = 1$، سه روش بالا تبدیل به روش نیوتن خواهند شد. دنبالهٔ $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ حاصل از روش‌های تکراری را *مدار*[۳] نقطهٔ آغازین z_0 می‌نامیم. مجموعهٔ همهٔ نقاط آغازین z_0 به‌طوری که دنبالهٔ $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ همگرا به z^* باشد، *پهنهٔ جذب*[۴] z^* نام دارد. در [۶]، پهنهٔ جذب روش‌هایی از خانوادهٔ نیوتن مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش بعدی، یک الگوریتم کلی برای ترسیم یک طرح به‌وسیلهٔ روش‌های تکراری بیان می‌کنیم.

۳. چندجمله‌ای‌نگاری

برای ایجاد یک طرح زیبا به‌وسیلهٔ چندجمله‌ای‌نگاری، یک چندجمله‌ای مانند $p(z)$ و یک روش تکراری $z_{n+1} = T(z_n)$ نیاز است. کافی است نقطهٔ z_0 از ناحیهٔ مورد نظر A در صفحهٔ مختلط را به‌عنوان نقطهٔ آغازین فرآیند تکرار در نظر بگیریم و دنبالهٔ حاصل از روش تکراری را تولید کنیم. الگوریتم زیر را می‌توان برای تولید یک طرح به روش تکراری به‌کار گرفت:

مرحلهٔ ۱: $k \in \mathbb{N}, z_0 \in A \subseteq \mathbb{C}$ را دریافت کن و قرار بده $i = 0$.

[۱] Mann [۲] Ishikawa [۳] orbit [۴] basins of attraction

مرحلهٔ ۲: اگر $i \leq k$ به مرحلهٔ (۳) برو؛ وگرنه به مرحلهٔ (۶) برو.

مرحلهٔ ۳: $z_{i+1} = T(z_i)$ و به مرحلهٔ (۴) برو.

مرحلهٔ ۴: اگر شرط توقف برقرار است، به مرحلهٔ ۶ برو؛ وگرنه به مرحلهٔ ۵ برو.

مرحلهٔ ۵: $i = i + 1$ و به مرحلهٔ (۲) برو.

مرحلهٔ ۶: نقطهٔ z_0 را با رنگ iام رنگ کن.

در الگوریتم فوق، k حداکثر دفعات تکرار در نظر گرفته شده برای فرآیند تکراری است. چنانچه طی k تکرار شرط توقف برقرار نشود، فرض بر همگرا نبودن دنبالهٔ تولیدی به یکی از ریشه‌های $p(z)$خواهد بود. برای شرط توقف می‌توان از معیارهای استاندارد

$$|z_{n+1} - z_n| < \epsilon, \qquad |p(z_{n+1})| < \epsilon \tag{۱.۳}$$

استفاده کرد که $\epsilon \ll 1$. چون هدف از چندجمله‌ای‌نگاری ایجاد طرح‌های زیبا است، می‌توان از شرایط توقف دیگر که متعارف نیستند نیز استفاده کرد. برای مثال، در [۲]، نویسنده از شرایط توقف متفاوت و نااستانداردِ

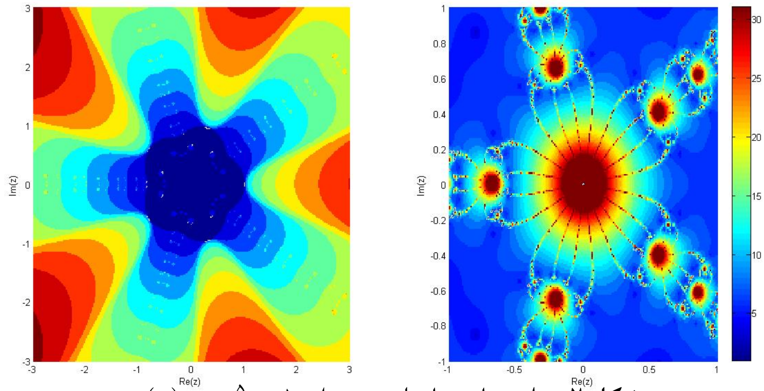
$$\left|a|z_{n+1}|^2 - b|z_n|^2\right| < \epsilon, \qquad \left|\frac{a}{|z_{n+1}|^2} - \frac{b}{|z_n|^2}\right| < \epsilon$$

استفاده کرده است.

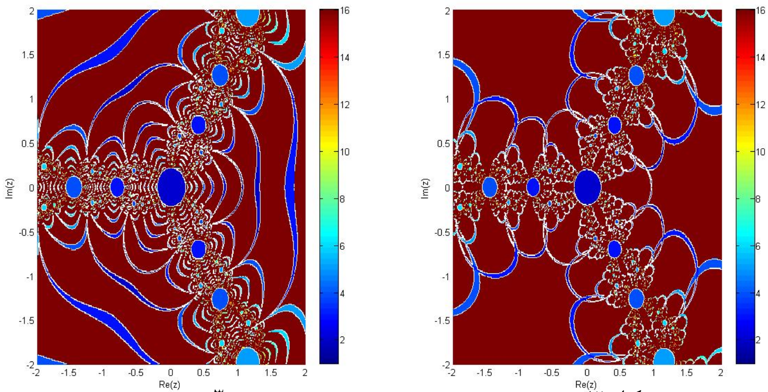
۴. مثال‌ها

در این بخش، قصد داریم الگوریتم مذکور در بخش قبل را روی برخی چندجمله‌ای‌ها اعمال کنیم و تأثیر روش‌ها و پارامترها را روی طرح‌ها بررسی کنیم. نتایج این بخش به‌وسیلهٔ نرم‌افزار متلب به‌دست آمده‌اند و در همهٔ مثال‌ها، $\epsilon = 0/001$ در نظر گرفته شده است.

مثال ۱.۴. چندجمله‌ای $p(z) = z^5 - 1$ را در نظر بگیرید. این چندجمله‌ای دارای پنج ریشهٔ متمایز است. اگر روش ایشیکاوا با $\beta = 0/5$ و $\alpha = 0/7$ به‌کار گرفته شود، آن‌گاه با $k = 30$ و شرط توقف $\left|\frac{0/5}{|z_{n+1}|^2} - \frac{0/5}{|z_n|^2}\right| < \epsilon$ شکل ۲ (سمت چپ) حاصل می‌شود. چنانچه از روش $S-$تکرار با $\beta = 0/5$ و $\alpha = 0/5$ با شرط توقف استاندارد $|z_{n+1} - z_n| < \epsilon$ استفاده شود، شکل ۲ (سمت راست) حاصل می‌شود.



شکل ۲. طرح‌های حاصل شده برای $p(z) = z^5 - 1$.



شکل ۳. طرح‌های مربوط به مثال ۲.۴ برای $p(z) = z^3 - 1$.

مثال ۲.۴. چندجمله‌ای $p(z) = z^3 - 1$ را به همراه روش نیوتن استاندارد و شرط توقف

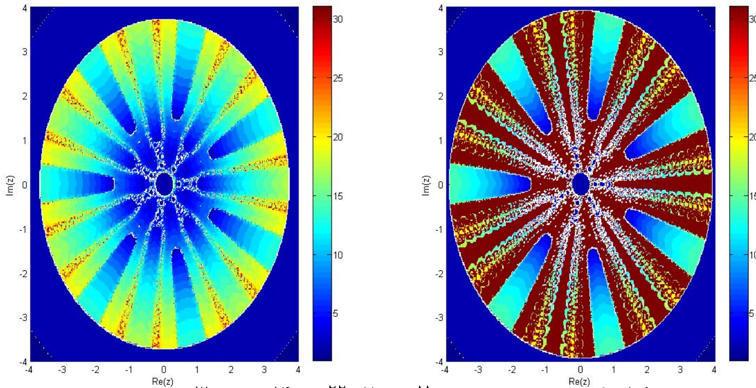
$$\left|\frac{0/045}{|z_{n+1}|^2} - \frac{0/05}{|z_n|^2}\right| < \epsilon$$

در نظر بگیرید. اگر $k = 15$، طرح زیبای نمایش داده‌شده در شکل ۳(سمت چپ) حاصل می‌شود. حال اگر شرط توقف را به‌صورت $\left|\frac{0/05}{|z_{n+1}|^2} - \frac{0/045}{|z_n|^2}\right| < \epsilon$ در نظر بگیریم، طرحی متفاوت از حالت قبل به‌دست می‌آید (شکل ۳، سمت راست).

مثال ۳.۴. چندجمله‌ای $p(z)=z^{21}+5z^{14}-\frac{22}{15}z^{7}-\frac{11}{675}$ را در نظر بگیرید. اگر روش $S-$ تکرار به همراه پارامترهای $k=30$، $\beta=0/8$ و $\alpha=0/95$ شرط توقف

$$\left|\frac{0/05}{|z_{n+1}|^2}-\frac{0/05}{|z_n|^2}\right|<\epsilon$$

مورد استفاده قرار گیرد، طرح نمایش داده‌شده در شکل ۴ (سمت چپ) حاصل می‌شود. کافی است شرط توقف به‌صورت $\left|\frac{0/05}{|z_{n+1}|^2}-\frac{0/049}{|z_n|^2}\right|<\epsilon$ تغییر یابد. طرح جدید را می‌توانید در شکل ۴ (سمت راست) مشاهده کنید. حالا اگر شرط توقف $|z_{n+1}-z_n|<\epsilon$ را به همراه پارامترهای $\beta=0/3$ و $\alpha=0/5$



شکل ۴. طرح مربوط به $p(z)=z^{21}+5z^{14}-\frac{22}{15}z^{7}-\frac{11}{675}$.

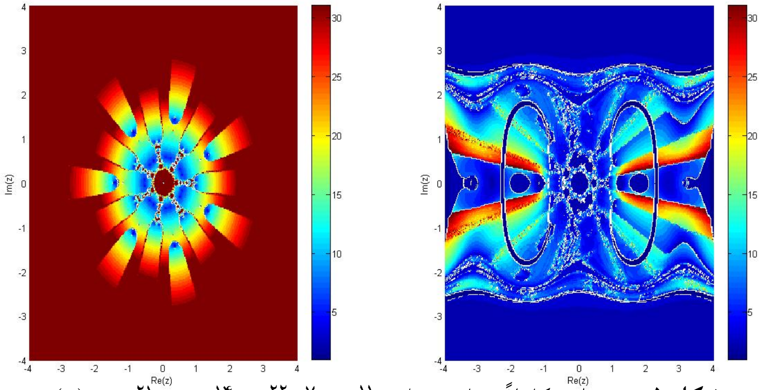
روی $p(z)$ اعمال کنیم، الگوی شکل ۵ (سمت چپ) به‌دست می‌آید. اگر β و α نه‌تنها اعداد ثابت باشند، بلکه با رفع محدودیت‌ها به‌صورت $\beta=|\sin z_n|$ و $\alpha=|\cos z_n|$ باشند، طرحی کاملاً متفاوت به‌دست می‌آید (شکل ۵، سمت راست).

همان‌طور که ملاحظه شد، با تغییر پارامترهای الگوریتم، می‌توان طرح و الگوهای زیبایی به‌دست آورد. این گستردگی، این امکان را به علاقه‌مندان می‌دهد که با در نظر گرفتن هر روش تکراری در حل معادلات غیرخطی و تغییر پارامترها و معیارها، طرح‌های زیبا تولید کنند.

مراجع

[1] Ardelea, G., A new third-order newton-type iterative method for solving nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.*, **219** (2013), 9856-9864.

[2] Gdawiec, K., Polynomiography and various convergence tests. In: Skala,V. (ed.), *WSCG2013 Communication Papers Proceedings,* Plzen, Czech Republic, Vaclav Skala-Union Agency, 2013, 15–20.



شکل ۵. دو طرح کاملاً متفاوت برای $p(z) = z^{21} + 5z^{14} - \frac{22}{15}z^{7} - \frac{11}{675}$.

[3] Kalantari, B., Two and Three-Dimensional Art Inspired by Polynomiography, *Visual Mathematics*, **416.29** (2006) 0-0.<httpp://eudml.org/doc/256795>.

[4] Kalantari, B., Polynomiography and applications in art, education, and science, *Comput. Graph.*, **28** (2004), 417–430.

[5] Kalantari, B., *Polynomial Root-Finding and Polynomiography*, World Scientific, Singapore, 2009.

[6] Susanto, H., Karjanto, N., Newton's method's basins of attraction revisited, *Appl. Math. Comput*., **215** (2009), 1084–1090.

تاریخ ارسال: ۹۵/۱۰/۲۷؛ تاریخ بازنگری: ۹۶/۸/۶؛ تاریخ پذیرش: ۹۶/۸/۷

مرتضی بیشه‌نیاسر: دانشگاه کاشان، دانشکدهٔ علوم ریاضی
رایانامه: mbisheh@kashanu.ac.ir