فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۸، شمارهٔ ۶۵ (پاییز و زمستان ۱۳۹۸) صص. ۶۱ تا ۷۵

ریاضیات در تقابل با فلسفه و علوم طبیعی

مرتضی منیری

چکیده

در این مقاله، برخی از تقابل‌های مشهور بین ریاضیدانان و فیلسوفان را به‌لحاظ تاریخی مرور می‌کنیم. پرسش این است که «آیا ریاضیدانان باید نظریات فیلسوفان را در نقد آثار خود یا برخی شاخه‌های ریاضیات، جدی بگیرند؟» البته این شامل انتقادهای گاه‌به‌گاه برخی از اعضای جامعهٔ ریاضی با انگیزه‌های بنیادی و فلسفی به همکاران خود نیز می‌شود. به‌علاوه، پرسشی مشابه در مورد پیوند ریاضیات و علوم تجربی مطرح است: آیا اگر اصلی در ریاضیات، علی‌رغم داشتن شواهد درون‌ریاضیاتی، منجر به نتیجه‌ای غیرقابل باور دربارهٔ جهان خارج شود، باید آن را کنار گذاشت؟ از جملهٔ این چالش‌های تاریخی، بحث‌هایی بوده که بر سر پذیرش اصل انتخاب یا جایگاه برهان‌های متّکی بر محاسبات رایانه‌ای میان ریاضیدانان درگرفته است. بحث‌هایی را که اخیراً بر سر موضوعاتی چون عمیق بودن یا سطحی بودن و سودمند بودن یا نبودنِ بخش‌هایی از ریاضیات می‌شود، می‌توان در همین راستا ارزیابی کرد.

۱. سرآغاز

دربارهٔ اهمیت دیدگاه‌های فلسفی برای ریاضیات و ریاضیدانان، نظرات متفاوتی وجود دارد. استیوارت شاپیرو[۱] در کتاب خود [۱۵] با عنوان فلسفهٔ ریاضی: ساختار و هستی‌شناسی، دو نظر کاملاً متفاوتِ موجود را معرفی می‌کند. دیدگاه اول[۲] نقشی اساسی برای فلسفه قائل است و بحث‌های فلسفی از قبیل هستی‌شناسی هویات ریاضی و شناخت‌شناسی، یعنی بررسی نحوهٔ دسترسی انسان به حقایق ریاضی را

عبارات و کلمات کلیدی. فلسفهٔ ریاضی؛ علوم تجربی؛ یقین ریاضی؛ برهان رایانه‌ای.

[۱] Stewart Shapiro [۲] philosophy-first

حائز اهمیت اساسی می‌داند. دیدگاه دوم[۱]، اهمیت فلسفه را برای ریاضیات و ریاضیدانان منکر می‌شود و ریاضیدانان را تنها افراد صاحب صلاحیت در مورد هر گونه اظهار نظر دربارهٔ ریاضیات می‌داند. معتقدان به دیدگاه دوم، این امر را که ریاضیدانان بخواهند بخشی از ریاضیات را به‌دلیل انتقادات فلسفی کنار بگذارند، غیر قابل قبول می‌دانند و حتی به‌استهزا می‌گیرند. به نظر می‌رسد که همین دیدگاه دوم بر جامعهٔ ریاضیدانان حاکم است. این دیدگاه در میان فیلسوفان معاصر نیز طرفدارانی همچون پنلوپه مدی[۲] دارد. این در حالی است که کواین[۳]، فیلسوف بزرگ معاصر، علوم طبیعی را در قلهٔ فلسفه و علم فرض می‌کند و ریاضیات را تا آنجا صادق می‌داند که در این علوم کاربرد داشته باشد. مدی که فیلسوفی در مکتب کواین است، برخلاف او برای ریاضیات نیز در کنار علوم تجربی نقش مستقل و اساسی قائل است. به اعتقاد او، ملاک‌های حاکم بر ریاضیات باید درونی باشند و توسط خود جامعهٔ ریاضیدانان وضع شوند.

دیدگاه حاکم بر نحوهٔ ارتباط ریاضیات و علوم طبیعی در گذر زمان تغییر کرده است [۱۴]. از نظر افلاطون، ریاضیات عبارت بود از مطالعهٔ حقایق قطعی و ابدی و تغییرناپذیری که در سلسله‌مراتب دانش، در عالی‌ترین جایگاه قرار دارند. برای پیشروان انقلاب فکری در قرن هفدهم میلادی همچون گالیله و نیوتن، ریاضیات زبان علوم بود و جایگاهی برابر با آنها داشت. به اعتقاد آنها، خداوند جهان را بر اساس قواعد و معادلات ریاضی خلق کرده است. با ظهور ساختارهای مجرّد ریاضی و پیش از همه، نظریهٔ مجموعه‌های نامتناهی با پیشتازیِ کانتور، ریاضیات وارد حوزه‌هایی شد که به‌ظاهر پیوندی با جهان خارج نداشتند. به‌ویژه ساختارهای جبری مانند گروه (۱۸۵۴–کیلی[۴])، حلقه (۱۹۱۴–فرانکل[۵]) و میدان (۱۸۹۳–وِبِر[۶]) قابل ذکر هستند. این تلاش‌ها و در ادامه، دستاوردهای عظیم نوتر[۷] در قسمت‌های مختلف جبر شامل جبر جابه‌جایی و ناجابه‌جایی، منجر به انتشار کتاب جبر مجرّد توسط وندر واردن[۸] بر اساس درس‌های نوتر و آرتین[۹] در سال ۱۹۳۰ شد [۱۶].

در اینجا قصد نداریم به آن چیزی که به بحران در مبانی ریاضیات شهرت دارد و به ظهور دیدگاه‌هایی مانند منطق‌گرایی، صورتگرایی و شهودگرایی منجر شد، بپردازیم. توجه ما معطوف به مسائلی است که بخش‌هایی خاص از ریاضیات با آن مواجه بوده یا هستند. این فارغ از مسئلهٔ سازگاریِ ریاضیات یا تحویل‌گراییِ نظریه‌مجموعه‌ای است. اگر نامی از فرگه[۱۰]، هیلبرت[۱۱] و براوئر[۱۲] که پیشروان این سه مکتب هستند، می‌بریم، با تأکید بر دیدگاه انتقادیِ آنها دربارهٔ بخشی خاص از ریاضیات خواهد بود. برای آشنایی با سه فلسفهٔ یاد شده، [۳] را بخوانید. پرسشی دیگر که در اینجا مطرح می‌شود، این است که چگونه می‌توان بخش‌های مختلف ریاضیات را ارزیابی و ارزشگذاری کرد؟ برای مثال، مفهوم عمق را که یکی

[۱] philosophy-last-if-at-all [۲] Penelope Maddy [۳] Willard van Orman Quine [۴] Arthur Cayley [۵] Abraham Fraenkel [۶] Heinrich Weber [۷] Emmy Noether [۸] Van der Waerden [۹] Emil Artin [۱۰] Gottlob Frege [۱۱] David Hilbert [۱۲] L. E. J. Brouwer

از ملاک‌های ارزشگذاری در ریاضیات است، چگونه می‌توان تحلیل کرد. در این باره نیز می‌توان از دید درون‌ریاضیاتی یا فلسفی بحث کرد.

با پیشرفت رایانه‌ها و گسترش استفاده از آنها در ریاضیات، پرسشی پیشِ روی ریاضیدانان (یا فیلسوفان ریاضی، بسته به دیدگاهی که می‌پذیریم) قرار گرفت مبنی بر اینکه چگونه می‌توان بین یقین ادعایی در ریاضیات و احتمال خطاهای نرم‌افزاری یا سخت‌افزاری متّکی بر محاسبات رایانه‌ای، جمع کرد؟ در بخش پایانیِ مقاله، به این موضوع خواهیم پرداخت. اما در آغاز، چند نمونه از نظرهای انتقادی فیلسوفان و یا خود ریاضیدانان را با انگیزه‌های فلسفی دربارهٔ بخش‌هایی خاص از ریاضیات و به‌طور کلی دستاوردهای علمی ریاضیدانان، ذکر می‌کنیم. ممکن است ترتیبِ تاریخی را در صورت وجود ملاحظات دیگر، رعایت نکنیم.

۲. اقلیدس، افلاطون، نیوتن و بارکلی

افلاطون[۱] در زمرهٔ فیلسوفانی است که جایگاهی اساسی برای فلسفه در تحلیل و فهم ریاضیات قائل بوده‌اند. او ریاضیدانان را متهم می‌کرد که به‌درستی نمی‌دانند که به چه کاری مشغول هستند. در میان این ریاضیدانان، اقلیدس[۲]، هندسه‌دان بزرگ نیز قرار داشت. اقلیدس در کتاب اصول، با تکیه بر دستاوردهای پیشینیان به بنای هندسه پرداخت. برای این کار، او از روش اصل‌موضوعی استفاده کرد. ادبیات مورد استفادهٔ او در این حوزه، دلالت بر نوعی فعالیت دارد [۵]. برای مثال، اصل اول بیان می‌کند که

«هر دو نقطه را با یک خط راست می‌توان به هم وصل کرد.»

توجه کنید که او نمی‌گوید:

«به‌ازای هر دو نقطه، خطی وجود دارد که از آن دو نقطه می‌گذرد.»

تأکید اقلیدس بر امکان رسم چنین خطی است. به‌علاوه، به هنگام اثبات قضیه‌هایی که تساوی دو شئ مانند دو مثلث را بیان می‌کنند، از عمل‌هایی مانند «برهم‌گذاری» یا «انطباق» صحبت می‌کند. لذا به نظر می‌رسد که او برای اشیای هندسی وجودی مادی یا دست‌کم، وجودی ذهنی قائل بوده است. افلاطون به این دیدگاه معترض بود و در کتاب جمهور، به انتقاد از هندسه‌دانان پرداخت. از نظر او، اشیای هندسی نوعی وجود متعالی و مجرّد دارند و مستقل از بشر در عالم مُثُل[۳] حضور دارند. آنها را نمی‌توان جابه‌جا یا بر هم منطبق کرد. آنها ابدی و بی‌تغییر هستند. بر همین اساس، او هندسه‌دانان را متهم کرد که نمی‌دانند به چه کاری مشغول هستند!

تفاوت این دو دیدگاه در چیست؟ آیا صرفاً اختلافی لفظی است؟ به اعتقاد شاپیرو، این دو دیدگاه تفاوت مهمی دارند. برای مثال، مسائلی مشهور مانند بررسی امکان رسم زاویه‌ای با اندازه‌ای خاص با

---

[۱] Plato [۲] Euclid [۳] forms

خطکش و پرگار، مسائلی بودند که هندسه‌دانان باستان به آنها پرداختند و در دوران جدید نیز باعث ایجاد و رشد جبر مجرّد شدند. آیا با ادبیات ایستای افلاطونی، این مسائل اصولاً می‌توانستند مطرح شوند؟ یا لازمهٔ این امر، دیدگاه پویای اقلیدسی بوده است؟ به نظر می‌رسد که جواب سؤال اخیر مثبت باشد.

اسقف بارکلی[۱] (۱۶۸۵–۱۷۵۳) یکی از منتقدین نیوتن بود. انتقادهای او هم به پژوهش‌های نیوتن در فیزیک و به‌طورکلی‌تر به روش او در علوم طبیعی و هم به دستاوردهای ریاضی نیوتن، به‌ویژه حساب بی‌نهایت کوچک‌ها بوده است. لذا نخست، مختصری به مورد اول می‌پردازیم [۲] که تا حدودی ما را به عرصهٔ فلسفهٔ علم می‌کشاند. سپس به انتقادات بارکلی به حساب بی‌نهایت کوچک‌ها که در این مقاله بیشتر مورد نظر است، خواهیم پرداخت با ذکر این نکته که ریاضیات و فیزیک از دید نیوتن جدایی‌ناپذیر هستند.

۱.۲. روش‌شناسی علمی نیوتن. نیوتن کتاب بنیادی خود را «اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعی» نامید تا بدیلی باشد برای شاهکار دکارت با عنوان «اصول فلسفه». اما کتاب او تنها به‌لحاظ محتوای ریاضی و فیزیک آن، اهمیت دارد تا از نظر فلسفی. البته در مورد تلقّیِ نیوتن از متافیزیک و اهمیت آن در مطالعهٔ جهان طبیعی، بحث‌های زیادی صورت گرفته است و نظرات مختلفی وجود دارد [۶]. نیوتن در روش علمی، مخالف دکارت بود. دکارت می‌خواست قوانین طبیعت را از اصول کلی متافیزیکی استنتاج کند ولی نیوتن با این نظر مخالف بود. نیوتن دو روش متفاوت برای بررسی‌های علمی معرفی کرد. اولین روش، تحلیل و تألیف است مشابه با روش استقرایی–قیاسی ارسطو. اساس این روش، کشف اصول کلی به‌کمک استقرا است؛ البته نه لزوماً به معنای سادهٔ نتیجه‌گیری کلی از چند مشاهدهٔ پراکنده، بلکه به معنایی که شامل حدس‌های صائب مبتنی بر تحلیل یک تجربهٔ واحد نیز بشود. مرحلهٔ تألیف شامل کشف نتایج قیاسی حاصل از مرحلهٔ تحلیل است. او این روش را در کشف‌های خود در زمینهٔ نورشناسی، به‌ویژه در توضیح تجزیهٔ نور به رنگ‌های مختلف پس از عبور از یک منشور، به‌کار برد.

روش دیگری که نیوتن برای پژوهش علمی پیشنهاد کرد، عبارت است از روش اصل‌موضوعی و کتاب اصول را نیز بر همین مبنا نوشت. در این روش، بهای بیشتر به تخیّل خلاق دانشمند داده می‌شود تا به تعمیم‌های استقرایی. مرحلهٔ اول این روش عبارت است از تنظیم تعدادی اصل که روابط بین مفاهیم مورد نظر را تعیین می‌کنند. برای مثال، اصول سه‌گانهٔ مشهور مکانیک نیوتنی، روابط بین مفاهیمی مانند «حرکت» و «نیرو» را تعیین می‌کنند. دومین مرحله عبارت است از شیوه‌ای برای پیوند دادنِ اصول یاد شده با رویدادهای عالم واقع. برای مثال، او با فرض ثابت بودن مرکز ثقل منظومهٔ شمسی، اصول خود را دربارهٔ حرکت سیارات به‌کار برد. مرحلهٔ سوم عبارت است از تأیید تجربی اصول پیوند داده شده با عالم واقع. به نظر نیوتن، روش او می‌توانست توضیح دهد که از نظر ریاضی، پدیده‌های مختلف چگونه با هم در

[۱] Bishop Berkeley

ارتباط هستند ولی نیوتن به‌خلاف دکارت معتقد نبود که این روش در مورد ذات پدیده‌ها اطلاعی به‌دست می‌دهد و به همین دلیل، نظریه‌های تجربی ضروری نیستند و قابل تجدید نظر هستند.

بارکلی یکی از نخستین منتقدان فلسفهٔ علم نیوتن بود. او را از آغازگرانِ مکتب اصالتِ قرارداد در فلسفهٔ علم می‌دانند. بارکلی فیزیک نیوتنی را صرفاً معادلاتی می‌دانست که از عهدهٔ پیش‌بینی رخدادهای طبیعی برمی‌آیند اما دربارهٔ خودِ واقعیت چیزی نمی‌گویند. بارکلی اعتقاد داشت که حتی کیفیات اولیه مانند امتداد و حرکت، ذهنی هستند. به نظر او، نیوتن از دیدِ خودش در لزوم تمایز بین نظریه‌های ریاضی دربارهٔ طبیعت از فرضیه‌هایی در مورد واقعیت طبیعت، پایبند نمانده است. به اعتقاد بارکلی، توسّل نیوتن به اصطلاحاتی از قبیل «نیروهای جاذبه»، می‌توانست گمراه‌کننده باشد. بنابر نظر بارکلی، این‌ها صرفاً موجوداتی فرضی و مخلوق ذهن شخصِ تعریف‌کننده هستند و می‌توان آنها را به شیوه‌هایی متفاوت تبیین کرد. بارکلی نظر نیوتن را رد کرد که بر مبنای آن، فضا و زمانِ مطلق بدون وجود چیزی در آن، وجود دارند. برای مثال، زمان را تنها تسلسلی حاصل از ایده‌های ذهنی انسان می‌دانست که به‌سبب توالیِ حوادث وجود می‌یابد. در مورد مکان نیز اعتقادی مشابه داشت.

آرای بارکلی دربارهٔ نظریات فیزیکیِ نیوتن، بعدها موافقانی پیدا کرد. ماخ[1] (۱۸۳۳–۱۹۱۶) با انتقادهای بارکلی نسبت به نیوتن موافق بود و کار علم را تنها کشف ارتباط نمودها می‌دانست. پوانکاره[2] (۱۸۵۴–۱۹۱۲) فلسفهٔ اصالتِ قرارداد را به کمال رساند. او معتقد بود اگر قانونی علمی بدون توسّل به تجربه درست تلقی گردد، صرفاً ناشی از تصمیم دانشمندان برای استفاده از آن است. اگر حکمی بدون توسّل به تجربه و به‌طور پیشینی صحیح باشد، به این سبب بوده که طوری بیان شده است که قابل رد کردن نباشد، مانند ادعاهایی دربارهٔ نحوهٔ حرکت یک ذره بدون تأثیر عوامل دیگر که در عمل غیرقابل تجربه است. این احکام را می‌توان تعریف دانست. پوپر[3] (۱۹۰۲–۱۹۹۴) دیدگاه اصالتِ قرارداد را غیرقابل رد می‌دانست اما آن را جدی نمی‌گرفت.

۲.۲. حساب بی‌نهایت کوچک‌ها. دیدگاه بارکلی در فلسفهٔ علم، متاثر از دیدگاه کلی او در فلسفه است که وجود داشتن را چیزی جز درک شدن نمی‌دانست [۸]. راجر اسکروتن[4] در کتاب خود با عنوان تاریخ فلسفه می‌گوید جملهٔ فوق را باید این طور تعبیر کرد که «وجود داشتن یعنی محسوس بودن.» [۱۸] ما به چیزی بجز محسوسات خود دسترسی نداریم. هیچ چیز مستقل از ذهن، به‌ویژه هویات مجرّد، وجود ندارند. ما تصوّری از یک مثلث خاص داریم اما چیزی به‌عنوان مثلث مجرّد در قالب یک مفهوم کلی وجود ندارد. ایدهٔ مثلث از نظر بارکلی چیزی جز تصویر ذهنیِ آن نیست. انتقاد اصلی بارکلی بر حساب بی‌نهایت کوچک‌های نیوتن بر این پایه مبتنی بود. به اعتقاد او مفهوم «بی‌نهایت کوچک» یا «فلوکسیون» که کمیتی ناصفر و در عین حال کوچکتر از هر عدد مثبتی است، غیر قابل تصوّر و درک است. او در این

[1] Ernst Mach [2] Henri Poincaré [3] Karl Popper [4] Roger Scruton

باره می‌گوید: «اعتراف می‌کنم که در حال حاضر، درک کمیت بی‌نهایت کوچک، یعنی بی‌نهایت کمتر از هر مقدار قابل درک یا قابل تصوّر، و یا کمتر از کمترین مقدار متناهی، در مخیّلهٔ من نمی‌گنجد.» [۷] بر همین اساس، او معتقد بود که حساب بی‌نهایت کوچک‌ها حاوی تناقض و بنابراین بی‌اعتبار است. به زبان امروزی و به‌عنوان مثالی ساده، در محاسبهٔ حد تابع $\frac{x}{(x+1)x}$ در نقطهٔ صفر، در جایی x را صفر قرار می‌دهیم و در جایی آن را ناصفر فرض می‌کنیم؛ این جز تناقض چیست؟ توجه کنید که در آن زمان، هنوز تعریف اپسیلون–دلتاییِ حد در دسترس نبود. بنابراین این ایرادها پاسخی قانع‌کننده نداشتند.

علی‌رغم این موضوع، استفاده از بی‌نهایت کوچک‌ها در ریاضیات ادامه یافت. دلیل این امر را باید اعتقاد نیوتن و دیگر پیشروان انقلاب علمی در قرن‌های شانزدهم و هفدهم میلادی نسبت به جایگاه ریاضیات جستجو کرد. از نظر آنان، ریاضیات زبان علوم و توصیف‌کنندهٔ جهان خارج بود و لذا ناسازگاری در آن معنی نداشت. اگر ایراداتی وجود داشت، در گذرِ زمان رفع‌شدنی بودند. در واقع، نیوتن و لایب‌نیتس با مفهوم شهودی حد به اندازهٔ کافی آشنا بودند و برای آنها، مفاهیم اساسی حسابان مانند مماس و مساحت سطح زیر منحنی، از نظر شهودی روشن بودند و نیاز به توجیه نداشتند. جمع کوچک و نخبه‌ای که به‌همراه این دو و یا بلافاصله پس از آنها بر روی این مفاهیم کار کردند مانند اویلر و یا برادران برنویی، آنقدر تبحّر داشتند و مستعد بودند که شهود، آنها را به بیراهه نبرد. البته این به این معنی نیست که آنها در این زمینه اشتباهی نداشتند. با عمومی‌تر شدن ریاضیات و به‌ویژه حسابان در قرن نوزدهم، در اختیار داشتنِ زبانی دقیق برای جلوگیری از فرو رفتن در تناقض‌ها ضروری به نظر می‌رسید.

۳. هیلبرت و فرِگه

بر خلاف اقلیدس، هیلبرت در کتاب مبانی هندسه، هنگام بحث دربارهٔ هویات هندسی، از ادبیات وجودی استفاده می‌کند [۱۲]. اصل اول او به قرار زیر است:

«هر دو نقطهٔ متمایز، یک خط راست را مشخص می‌کنند.»

در این اصل هیچ فعالیتی وجود ندارد، بلکه هر دو نقطه تنها خطی را که از قبل موجود بوده است، مشخص می‌کنند. این ادبیات جایگاهی محکم در دیدگاه هیلبرت در مبانی ریاضیات دارد. این دیدگاه هیلبرتِ صورتگرا، موجب اعتراض فرِگه، فیلسوف بزرگ و مدافع مشهور افلاطون‌گرایی، شد. از نظر هیلبرت، سازگاریِ مجموعه‌ای از اصول در مبحثی خاص از ریاضیات، صادق بودنِ آن اصول و بنابراین وجود هویات مورد اشارهٔ آن اصول را نتیجه می‌دهد اما به اعتقاد فرِگه، اصول به این دلیل سازگار هستند که صادق‌اند و ویژگی‌های اشیای ریاضیِ واقعاً موجود را توصیف می‌کنند.

اعتراض فرِگه این بود که برای مثال، در یک رمان ممکن است مجموعه‌ای سازگار از گزاره‌ها در زمینه‌ای خیالی مطرح شود اما این به معنای واقعی بودنِ ماجرای آن و وجود افراد و اشیای مورد اشاره در

آن زمان نخواهد بود. البته به نظر می‌رسد که هیلبرت در این مورد، نوعی وجود ساختگی و آرمانی را در نظر داشته است نه وجود به معنای متعارف آن. از نظر هیلبرت، فرضیات مناسب در مورد وجود اشیای فرامتناهی باعث می‌شوند که نظریات ریاضی صیقل‌یافته‌تر باشند. جیمز رابرت براون[۱] که خود فیلسوفی افلاطون‌گرا است، از هیلبرت دفاع می‌کند [۱] و معتقد است که بر خلاف اصلی پرطرفدار در فلسفهٔ علم که بنابر آن، همواره باید کمترین فرضیات را در مورد وجود اشیای فیزیکی داشت، در عالم افلاطونیِ ریاضیات این شیوه ضرورتی ندارد. در عالم افلاطونی هر چه موجودات بیشتر، بهتر!

دیدگاه هیلبرت که خود ملهم از تجربهٔ ریاضیاتیِ او به‌ویژه در زمینهٔ هندسه‌های نااقلیدسی بود، زمینه را برای ظهور ریاضیاتِ اصل‌موضوعی و مجرّد فراهم کرد. به نظر می‌رسد که پذیرش تلقّی فلسفی فرگه از اصول موضوع به‌عنوان گزاره‌هایی دربارهٔ اشیای مشخص و از قبل موجود، می‌توانست مانعی در این زمینه باشد.

۴. اصل انتخاب

هرچند استفاده از صورت شهودی اصل انتخاب تاریخچه‌ای طولانی دارد، معرفی آن به‌عنوان یک اصل، توسط تسرملو[۲] در سال ۱۹۰۴ و در اثبات اصل خوش‌ترتیبی انجام شده است. یکی از صورت‌های این اصل این است که به‌ازای هر خانوادهٔ ناتهی A از مجموعه‌های ناتهی، تابعی مانند f با دامنهٔ A وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $a \in A$، $f(a) \in a$. توجه کنید که این اصل ماهیتی کاملاً غیرساختنی دارد و هیچ روش یا الگوریتمی برای تعیین $f(a)$ ارائه نمی‌کند. امروزه اکثر ریاضیدانان این اصل را پذیرفته‌اند ولی وضعیت همواره این گونه نبوده است. در زمان معرفی این اصل توسط تسرملو، گروهی از بزرگترین ریاضیدانان زمان مانند بئر[۳]، لبگ[۴] و بُرل[۵] به مخالفت با آن پرداختند و دلیل مخالفت آنها با این اصل، ملاحظات فلسفی‌شان دربارهٔ مفاهیمی مانند مجموعه و تابع بود. مخالفین این اصل عمدتاً موضعی ضدواقع‌گرایانه در ریاضیات داشتند و به وجود مستقل اشیای ریاضی معتقد نبودند. از دید آنها، برای مشخص شدن یک تابع، صرفِ اعلام وجود آن کفایت نمی‌کند و باید روشی مشخص برای محاسبهٔ مقدارهای آن ارائه کرد ولی در بیان اصل انتخاب، چنین دیدگاهی حاکم نیست.

نیمهٔ اول قرن بیستم شاهد کاربردهای گوناگون این اصل در شاخه‌های متعدد ریاضیات از قبیل جبر، آنالیز و توپولوژی بود. در واقع دلیل پذیرش این اصل توسط ریاضیدانان بزرگی مانند هیلبرت، کاربردهای فراوان آن و نه ملاحظات فلسفی بوده است. یکی از نگرانی‌های ریاضیدانان در پذیرش این اصل، قضیهٔ مشهور به پارادوکس باناخ–تارسکی[۶] بوده است. بنابر این قضیه، گویا می‌توان یک کره را به دو کره با شعاع برابر با کرهٔ اولیه، تقسیم کرد. این از نظر فیزیکی ناممکن است. نکتهٔ اصلی در اثبات قضیهٔ باناخ–تارسکی

---

[۱] James Robert Brown [۲] Ernst Zermelo [۳] René-Louis Baire [۴] Henri Lebesgue [۵] Émile Borel
[۶] Banach-Tarski Paradox

این است که دو بخش یاد شده، لبگ–اندازه‌ناپذیر هستند. اینجا است که از اصل انتخاب استفاده می‌شود، زیرا وجود مجموعه‌های لبگ–اندازه‌ناپذیر، از نتایج اصل انتخاب است.

قضیهٔ باناخ–تارسکی را به گونه‌ای دیگر نیز می‌توان نگریست. ماهیت پارادوکس‌گونهٔ آن ناشی از این پیش‌فرض است که جهان فیزیکی توسط مجموعهٔ زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^۳$ مدل‌سازی شده است. اگر مدل را همهٔ زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر $\mathbb{R}^۳$ بگیریم، آن‌گاه ماهیت پارادوکس‌گونهٔ این قضیه برطرف می‌شود. در واقع، اگر به کاربردهای درون‌ریاضیاتیِ این اصل اهمیت بدهیم، ملاحظات تجربی نمی‌توانند در پذیرش یا رد آن دخالت داشته باشند؛ به‌ویژه اگر در فلسفهٔ علم قائل به این باشیم که نظریه‌های ریاضی صرفاً می‌توانند نمایش‌هایی از جهان خارج باشند و نه توصیف‌کننده آن، زیرا مدل‌های ریاضی توصیف‌گر جهان فیزیکی را نمی‌توان تغییر داد. مدی از این موضع دفاع می‌کند. بر خلاف نظر مدی، کواین که از نوعی فلسفه موسوم به طبیعی‌گرایی[۱] طرفداری می‌کرد، اصالت را به نظریات فیزیکی می‌داد. بنابراین برای مثال، به اعتقاد او اگر $\mathbb{R}^۳$ واقعاً بهترین توصیف فضا از دیدگاه نظریات حاکمِ فیزیکی باشد، باید در صحّت اصل انتخاب تردید کرد و حتی آن را کنار گذاشت. کتاب [۱۳] نوشتهٔ مدی در این زمینه خواندنی است.

۵. هیلبرت و براوئر

هیلبرت و براوئر هر دو از بزرگترین ریاضیدانان عصر خود بودند. داستان اختلاف این دو بر سر مبانی ریاضیات، برای همگان آشنا است [۴]. شهودگرایی، فلسفه‌ای بود که براوئر برای ریاضیات در سر داشت. شهودگرایی نوعی خاص از ساخت‌گرایی در فلسفهٔ ریاضی است. از دیدگاه ساخت‌گرایی، اصالت با ساختمان‌های ذهنی است. ریاضیات محصول ذهن ریاضیدان است. به اعتقاد براوئر، ما ریاضیات را کشف نمی‌کنیم، بلکه آن را می‌سازیم و اختراع می‌کنیم. نمادها و زبان، تنها راهی برای انتقال حقایق ریاضی به دیگران هستند. برای اینکه به حقیقتی وجودی در ریاضی معتقد باشیم، باید برهانی سازنده برای آن داشته باشیم. برای مثال، این ادعا را در نظر بگیرید: دو عدد اصم a و b وجود دارند به‌طوری که a به توان b گویا است. برای اثبات می‌گوییم اگر $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ گویا باشد، آن‌گاه دو عددی که در جستجوی آنها هستیم، هر دو $\sqrt{۲}$ هستند وگرنه $a = \sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ و $b = \sqrt{۲}$ جواب مسئله خواهند بود. اما ساخت‌گرایان این اثبات را نمی‌پذیرند. در اثبات مورد نظر ساخت‌گرایان، باید مقداری صریح و غیر مشروط برای a و b ارائه شود. در همین رابطه، از دیدگاه شهودگرایی، ترکیب فصلی دو گزاره را تنها هنگامی می‌توان پذیرفت که اثباتی برای دست‌کم یکی از آنها داشته باشیم. پس شهودگرایان، اصولی به‌شدت غیرساختنی مانند اصل انتخاب را نمی‌پذیرند. از سوی دیگر، ملاحظات شهودگرایانه باعث می‌شود که براوئر اصلی بسیار قوی مانند اصل پیوستگی را بپذیرد. این اصل به زبان ساده و نادقیق بیان می‌کند که اگر بتوان یک ویژگی را

[۱] naturalism

برای یک دنبالهٔ نامتناهی از اعداد طبیعی ثابت کرد، آن‌گاه چون این اثبات ساختنی است، در فرآیند انجام آن لزوماً تنها از بخشی متناهی از آن دنباله استفاده می‌شود و لذا هر دنبالهٔ دیگری که تا آن بخش با دنبالهٔ یاد شده برابر باشد نیز آن ویژگی را دارد. این اصل از دیدگاه کلاسیک معتبر نیست، زیرا در این حالت فرض بر این است که دنباله به‌طور کامل و افلاطونی داده شده و چون اثبات لزوماً ساختنی نیست، نمی‌توان نتیجه‌ای مانند قبل گرفت. این اصل یکی از مهم‌ترین اصول آنالیز شهودی و از ارکان اثبات برخی نتایج در این حوزه است. ریاضیات شهودگرایانه بر خلاف همتایان خود در دیگر مکاتب ساخت‌گرایی، در پاره‌ای موارد با ریاضیات کلاسیک ناسازگار است. در این مورد، دیدگاه فلسفی نه‌تنها منجر به رد بخش‌هایی از ریاضیات کلاسیک شده است، بلکه بخش‌هایی متفاوت با آن را نیز پیشنهاد کرده است.

۶. کریپکی، کواین و پاتنام

کواین از فلسفه‌ای موسوم به طبیعی‌گرایی دفاع می‌کرد که نوعی واقع‌گرایی علمی محسوب می‌شود. به اعتقاد کواین، بهترین نظریه‌های موجود و برترین دانش‌های زمان، علوم طبیعی هستند. اصولی فلسفی که حاکم بر علوم تجربی باشند و بتواند برای آنها خط‌مشی تعیین کنند، وجود ندارند. تنها در خودِ علوم طبیعی و با استانداردهای درونی آن است که می‌توان دربارهٔ این علوم قضاوت کرد. به‌علاوه، اشیاء مورد اشارهٔ نظریه‌های علمی و تجربی مانند اشیاء مورد اشاره در فیزیک ذرات بنیادی، از همان شأن وجودی برخوردارند که اشیاء فیزیکی محسوس پیرامون ما. طبیعی‌گرایی بعد از کواین شکل‌هایی تا اندازه‌ای متفاوت پیدا کرد. برای مثال، مدی برای ریاضیات نیز در کنار علوم تجربی، شأنی مستقل قائل است [۱۳].

به اعتقاد کواین، اگر نظریات موجود علمی ایجاب کنند، حتی می‌توان در پایه‌ای‌ترین حقایق منطقی که بر آنها مبتنی هستند، تجدیدنظر کرد. هیلاری پاتنام[۱]، فیلسوف بزرگ معاصر، با کواین در این زمینه موافق است. او بر اساس اعتقاد به ملاک‌های علوم تجربی (در اینجا مکانیک کوانتومی) از لزوم تغییر در اصول منطق کلاسیک، پیشنهاد شده توسط فون‌نویمان و بِرکوف[۲]، دفاع می‌کند [۹، ۲۰]. در این منطق، اصل توزیع‌پذیریِ «و» نسبت به «یا» در منطق کلاسیک:

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

رد می‌شود. یک راه توجیه این نظر، توجه به اصل عدم قطعیت در فیزیک کوانتمی است. بنابر این اصل، تعیین سرعت و موقعیت یک ذره در لحظه‌ای مشخص با یک دقت، ناممکن است. حال فرض کنید گزارهٔ A سرعت یک ذره و گزاره‌های B و C به‌ترتیب، موقعیت آن ذره را در دو مکان مختلف بیان کنند. در این صورت، گزارهٔ $A \wedge (B \vee C)$ می‌تواند صادق باشد ولی هر یک از دو مولفهٔ گزارهٔ فصلی $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ می‌توانند کاذب باشند.

[۱] Hilary Putnam [۲] Birkhoff

در ادامهٔ این بخش به ایراد مشهور کواین به بخشی از منطق با عنوان منطق وجهی محمولی اشاره می‌کنیم. این منطقی است که هم شامل ادات منطقی و سورها است و هم شامل عملگر ضرورت $\Box$ است. بنابر ملاحظات کاملاً فلسفی، او اعتبار این منطق را زیر سؤال بُرد. خلاصهٔ نظر او را در این زمینه می‌توان با مثال زیر که یک استنتاج به‌ظاهر درست اما ناپذیرفتنی است، توضیح داد:

«ضرورتاً ۹ عددی فرد است. ۹ تعداد سیارات منظومهٔ شمسی است. پس ضرورتاً تعداد سیارات منظومهٔ شمسی عددی فرد است.»

مقدمات استنتاج بالا صادق هستند، اما نتیجهٔ آن کاذب است. بنابراین این شکل استنتاج و لذا خودِ منطق وجهی محمولی، ایراد دارد. در مورد این موضوع بحث‌های فراوانی شده است و کواین هم بارها به آن پرداخته است [۱۹].

با اینکه بسیاری معتقدند که معناشناسی ابداعیِ سول کریپکی[۱]، فیلسوف و منطق‌دان شهیر معاصر، برای منطق وجهی بسیاری از ابهامات موجود را رفع کرده است اما حتی خودِ کریپکی به‌صراحت از اهمیت دیدگاه‌های فلسفی در این مورد دفاع می‌کند. به اعتقاد او، «ریاضیات نمی‌تواند جایگزین فلسفه شود.» از سوی دیگر، منطق وجهی محمولی این روزها پیشرفت‌های فراوانی کرده و به‌سبب قدرت بیان بالایی که دارد، کاربردهای بسیاری در علوم رایانه یافته است. ایرادهای کواین نتوانسته جلوی رشد این حوزه به‌عنوان بخشی از منطق ریاضی با کاربردهای متفاوت را بگیرد. به‌علاوه، به نظر نمی‌آید که بتوان مثال فوق را در ریاضیات بازسازی کرد. مرجع [۱۱] کتابی در زمینهٔ منطق وجهی محمولی است که اخیراً منتشر شده است.

۷. برهان‌های رایانه‌ای و یقین ریاضی

در این بخش به موضوع برهان‌های متکی بر محاسبات مفصل رایانه‌ای می‌پردازیم. منظور ما از برهان‌های رایانه‌ای، برهان‌هایی است که در آنها رایانه‌ها به کمک ریاضیدانان می‌آیند. برهان‌های صرفاً رایانه‌ای را می‌توان نوعی خاص از برهان‌های منطقی با محدودیت‌های ذاتی آنها دانست. برای آشنایی اولیه با این موضوع و به‌طور کلی‌تر مفهوم برهانِ ریاضی، [۱] و [۱۷] را بخوانید.

به‌طور کلی می‌توان گفت که در ریاضیات با پدیده‌ای مشابه فرضیهٔ چرچ در نظریهٔ محاسبه‌پذیری مواجه هستیم. بنابر این فرضیه، هر نوع محاسبهٔ الگوریتمی در نهایت توسط ماشین‌های تورینگ نیز انجام‌پذیر خواهد بود. تلاش منطق‌دانان ریاضی بر این بوده است که به‌طور مشابه مفهوم شهودی برهان ریاضی را صوری کنند. دستگاه‌های مختلف اثباتی در این زمینه معرفی شده‌اند و هم‌ارز بودنِ آنها نشان داده شده است اما قضیه‌های ناتمامیت گودل ضعف آنها را برملا کرد. برهان‌های رایانه‌ایِ محض، گونه‌ای از برهان‌های

[۱] Saul Kripke

قاعده‌مند منطقی ولی بسیار مفصل‌تر هستند. اگر این اثبات‌ها از نوعی باشند که به همراهی کاربر نیز نیاز باشد، ممکن است بتوانند فراتر از محدودیت‌های گودلی عمل کنند؛ یعنی از شهود هم بهره ببرند.

امروزه برهان‌های متکی بر رایانه نقشی مهم در ریاضیات ایفا می‌کنند. برای مثال، رایانه‌ها نقشی اساسی در اثبات حدس بسیار قدیمی چهار رنگ ایفا کرده‌اند. کار یک رایانه بر اساس نرم‌افزاری است که برای آن نوشته می‌شود. بررسی اینکه یک برنامه دقیقاً همان کاری را که باید انجام دهد، انجام می‌دهد، چندان ساده نیست. مبحثی مهم از علوم رایانه با عنوان وارسی برنامه‌ها[۱] به این موضوع اختصاص دارد. البته در حال حاضر در مورد همهٔ زبان‌های برنامه‌نویسی چنین وارسی‌کننده‌هایی وجود ندارد. در مورد آنهایی هم که وجود دارد، بررسی اعتبار وارسی‌کننده‌ها معمولاً توسط برنامه‌های دیگر صورت می‌گیرد که خود نیاز به وارسی‌کردن و بررسی دقت عملکرد دارند. به این موارد، احتمال خطاهای سخت‌افزاری رایانه‌ها را هم بیفزایید. ممکن است در مرحله‌ای از محاسبه به‌علت نقصی سخت‌افزاری، یک جواب احتمالی معادلهٔ مورد بحث، نادیده گرفته شود. تشخیص این نوع خطاها نیز بسیار دشوار خواهد بود.

صرف‌نظر از برهان‌های رایانه‌ای، بخش‌هایی از ریاضیات وجود دارند که در آنها به برهان‌های بسیار طولانی نیاز است. این برهان‌ها معمولاً تنها توسط عدهٔ کمی بررسی می‌شوند و احتمال گرفته شدن خطا در آنها زیاد است. مجلات پژوهشی ریاضی شامل غلط‌نامه‌هایی هستند که برای اعلام تصحیحات مقاله‌های چاپ‌شدهٔ قبلی در همان مجلات فراهم شده‌اند. ممکن است اشتباهات بیشتری هم باشند که کشف‌نشده مانده‌اند. دیگر نوشتنِ «همان‌که می‌خواستیم» در پایان برهان‌ها به‌سبک اقلیدس، کاری ساده نیست. در واقع، به نظر می‌رسد که اثبات از نظر اقلیدس می‌بایست آنچنان باشد که بتوان آن را به نمایش گذاشت و انتظار داشت که بیننده (خواننده) بتواند فوراً آن را دریابد. برهان‌های طولانی و یا متکی بر محاسبات مفصل رایانه‌ای، مسلماً چنین ویژگی‌ای ندارند. در این زمینه، پرسش اصلی این است که این محتمل بودنِ خطا، چگونه با اعتقاد به قطعیت ریاضیات جمع می‌شود؟ پرسش دیگر این است که آیا تفاوتی بنیادی بین برهان‌های رایانه‌ای و برهان‌های دستی اما بسیار طولانی، وجود دارد؟

قطعیت حقایق ریاضی، یک از ارکان افلاطون‌گرایی در فلسفهٔ ریاضی است. بر مبنای این فلسفه، هویات ریاضی مستقل از بشر وجود دارند و ویژگی‌هایی دارند اما این لزوماً به این معنی نیست که ما به این حقایق به‌طور آنی دسترسی داریم. هرچند مانند افلاطون بیندیشیم که روح ما پیش از مرگ از این حقایق اطلاع دارد، از نظر خودِ افلاطون هم فرآیند یادآوری مجدد ممکن است همراه با اشتباه باشد. اگر این را بپذیریم، می‌توانیم برهان‌های رایانه‌ای را شواهدی قوی بر پیوند میان حقایق گوناگون بدانیم. بنابراین در مورد پرسش اول باید گفت برهان‌های رایانه‌ای، نافیِ قطعیت حقایق ریاضی نیستند. در مورد پرسش دوم هم توضیحی مشابه وجود دارد. برهان‌های رایانه‌ای شواهدی بر درستیِ قضیه‌های مرتبط هستند و با

[۱] program verification

مرور بیشتر توسط ریاضیدانان و حتی با گذشت نسل‌ها، این شواهد یقینی‌تر می‌شوند. اثبات دقیق بودنِ اجرای برخی برنامه‌ها ساده است و در مورد برخی دیگر شاید هنوز راهی پیدا نشده باشد. با افزایش سرعت رایانه‌ها، تکرار برخی محاسبات امکان‌پذیر شده است و این، احتمال بروز خطاهای سخت‌افزاری را بسیار کاهش می‌دهد.

اجازه دهید که دوباره به این پرسش اصلی برگردیم که «آیا برهان‌های متکی بر رایانه تفاوت‌های بنیادی با اثبات‌های معمولی دارند؟» در صورت مثبت بودن پاسخ، آیا این به آن معنی خواهد بود که آنها در واقع برهان نیستند؟ آیا به دوران دخالت شواهد تجربی در ریاضیات وارد شده‌ایم؟ به اعتقاد نگارنده، در غیاب تعریفی جامع از یک برهانِ استاندارد، جواب دادن به این پرسش ناممکن است.

راهی برای توضیح وضعیت موجود، قائل شدن به گونه‌های متفاوتی از برهان‌ها است. دستهٔ اول همان برهان‌های مورد نظر اقلیدس هستند. برهان‌هایی که در یک نظر توسط گروه وسیعی از افراد قابل درک هستند. در دستهٔ دوم، برهان‌هایی قرار می‌گیرند که بسیار طولانی و پیچیده هستند و بررسی آنها توسط متخصصان زمان‌بر است اما ناممکن نیست. دستهٔ سوم شامل برهان‌های قضیه‌هایی است که هنوز برهانی بدون نیاز به رایانه برای آنها یافت نشده است. بررسی اعضای دستهٔ اخیر به‌صورت دستی ناممکن است. تفاوتی اساسی بین اعضای این دسته‌های برهان‌ها نیز وجود دارد. باید توجه کرد که برهان‌های ریاضی خطی نیستند و ما با یک شبکهٔ پیچیده مواجه‌ایم که در آن، برهان هر قضیه ممکن است متّکی بر فرض پذیرش درستیِ تعداد زیادی از قضیه‌های دیگر باشد. قسمت‌های عمیق‌تر ریاضیات معمولاً مهم‌ترین قسمت‌ها و در عین‌حال مستعدترین بخش‌ها به اشتباه بودن، هستند.

بجز رابطهٔ استنتاجی میان قضیه‌های مختلف، بخش‌های گوناگون ریاضیات ممکن است با هم ترکیب شوند و نظریه‌ای جدید و قضیه‌هایی جدید متولد شوند. توپولوژی جبری یا هندسهٔ جبری از این قبیل هستند. با ترکیب نظریه‌های مختلف، اشیای ریاضی جدیدی خلق یا معرفی می‌شوند که نیاز به بررسی دارند. حتی فرض وجود اشیای جدید مورد مطالعه، مبتنی بر پذیرش درستیِ برخی قضیه‌های ریاضی است. منظور قضیه‌هایی است که وجودِ آنها را توجیه یا اثبات می‌کنند. نکتهٔ دیگر در این مورد، اهمیت ارتباط تاریخی است. برای مثال، نظریهٔ اصل‌موضوعی مجموعه‌ها که در قرن بیستم میلادی به‌وجود آمد، مبنایی برای کل ریاضیات با سابقهٔ چند هزار ساله در نظر گرفته شد.

۸. عمیق بودن در ریاضیات

در این بخش پایانی، به‌طور مختصر به موضوع جالب عمق قضیه‌های ریاضی می‌پردازیم. ریاضیدانان برخی قضیه‌ها و اثبات‌های آنها را عمیق‌تر از برخی قضیه‌های دیگر می‌دانند. برخی قضیه‌ها به سطحی بودن متهم می‌شوند. اما سؤال این است که ملاک عمق چیست؟ ایا ملاکی عینی در مورد آن وجود دارد؟

یعنی آیا مستقل از دیدگاه ریاضیدانان، چیزی به نام عمق ریاضی وجود دارد یا این مفهوم تنها به نظر ریاضیدانان وابسته است و مستقل از آنها وجود ندارد؟ برای مثال، این اعتقاد وجود دارد که اثبات وایلز[۱] برای قضیهٔ آخر فرما[۲] عمیق است، زیرا این اثبات بر بخش‌های متفاوتی از ریاضیات کنونی استوار است و این، ملاکی پذیرفتنی برای عمق است. در عین حال این امکان وجود دارد که در آینده بخش‌های جدیدی از ریاضیات به‌وجود آیند و ریاضیدانان قادر باشند اثباتی تنها متکی بر یکی از این بخش‌ها برای قضیهٔ آخر فرما ارائه کنند. بنابراین عمق، نسبی خواهد بود. از سوی دیگر، بخشی از ریاضیات که به‌ظاهر مستقل از بخش‌های دیگر است و از عمق کمتری برخوردار است، ممکن است در آینده و با پژوهش‌های بیشتر و کشف ارتباط‌ها و کاربردهای جدید، معلوم شود که عمیق است.

به‌علاوه، یک شاخهٔ جدید ریاضی هرچند از لحاظ ظاهری می‌تواند مستقل از شاخه‌ای قدیمی‌تر باشد، ممکن است بر اساس ایده‌های اولیهٔ آن بنا شده باشد. برای مثال، ایدهٔ بررسی صوری و نمادیِ منطق و استنتاج هنگامی که توسط جُرج بول[۳] با دیدگاه قدیمی‌ترِ جبری ترکیب شد، به‌نوعی زمینه را برای ظهور منطق نمادی جدید فراهم کرد. هرچند منطق را می‌توان کاملاً مستقل از جبر دانست، به‌لحاظ تاریخی چنین نبوده است.

در دفاع از عینی بودنِ عمق، می‌توان افلاطون‌گرایانه اندیشید و توجه کرد که از دید دانای مطلق، همهٔ ارتباط‌ها و کاربردها پیشاپیش آشکار هستند و بنابراین عمیق بودن یا نبودن هر بخشی از ریاضیات، یک حقیقت عینی است. هرچند این اعتقاد که عمق، مفهومی افلاطونی است، غیر قابل رد کردن است، می‌توان گفت که سودمند نیست. به هر حال مفهوم عمق در ریاضیات، کاربردهای خاص خود را دارد و موکول کردن آن به دانستن همهٔ حقایق افلاطونی دربارهٔ ریاضیات کمکی نمی‌کند. می‌بایست با ملاک‌هایی متکی بر دانش روز، دربارهٔ عمیق بودن یا نبودن بخش‌های مختلف ریاضیات تصمیم‌گیری کرد. این موضوعی است که خود ریاضیدانان و دانشمندان علوم دیگر که از ریاضیات عالی استفاده می‌کنند، باید دربارهٔ آن تصمیم بگیرند. یکی از شماره‌های اخیر تنها مجلهٔ اختصاصی فلسفهٔ ریاضی، به موضوع عمق در ریاضیات پرداخته است [۱۰].

۹. ملاحظات پایانی

نتیجهٔ بررسی‌های تاریخی ارائه‌شده در این مقاله چیست؟ آیا ریاضیدانان باید در مقاطع حساس به شهود خود اعتماد کنند و تنها ملاحظات درون‌ریاضیاتی را در نظر بگیرند یا باید به اظهارنظرهای خارج از جامعهٔ ریاضی و یا ملاک‌های غیرریاضیاتی نیز توجه کنند؟ البته لزومی ندارد که یکی از این دو راه افراطی مورد اشارهٔ شاپیرو را در پیش بگیریم. تاریخ ریاضیات نشان می‌دهد که معمولاً شهود ریاضیدانان

[۱] Andrew Wiles [۲] Pierre de Fermat [۳] George Boole

در مقاطع حساس در یافتنِ مسیر مناسب، درست عمل کرده است. از سوی دیگر، ریاضیات معاصر با مسائلی مواجه است که به نظر می‌رسد پاسخ آنها از دل محاسبات ریاضی یا استدلال‌های منطقی در نخواهد آمد. سرعت پیشرفت ریاضیات در مسیرهای بسیار متفاوت باعث شده است که اولاً ریاضیدانانی که در شاخه‌هایی مجزا کار می‌کنند، نتوانند آثار یکدیگر را درک کنند و ثانیاً مسیرهای پژوهشی‌ای ایجاد شود که به اعتقاد برخی، فاقد عمق و ارزش باشند. درست است که با توجه به پیچیدگی‌های ریاضیات، اظهار نظر غیرمتخصصین دربارهٔ آن و تعیین بایدها و نبایدها، برای ریاضیدانان پذیرفتنی نیست و به همین جهت، چه بخواهیم و چه نخواهیم باید همچون مدی، ملاک‌های درون‌ریاضیاتی برای تعیین ارزش بخش‌های مختلف آن را در درجهٔ اول اهمیت قرار دهیم اما به نظر می‌رسد تعیین اهمیت بخش‌های مختلف ریاضیات تنها به‌وسیلهٔ ریاضیدانان، صرفاً به‌دلیل ریاضیدان بودن، ممکن نیست. نیازهای علوم و فناوری‌های جدید به توسعهٔ بخش‌هایی جدید از ریاضیات همراه با ضرورت وجود پشتیبانی مالی، از موارد مهم تعیین‌کننده هستند.

سپاسگزاری: از فرزندم بهراد منیری بابت کمک بسیار در تایپ مقاله و آماده‌سازی نسخهٔ نهایی آن بسیار سپاسگزارم. از داور محترم مقاله نیز بابت پیشنهادهای مفید نگارشی و ویرایشی متشکرم.

مراجع

[۱] جیمز رابرت براون، فلسفهٔ ریاضی، ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل، انتشارات نوشتگان، تهران، ۱۳۹۴.

[۲] جان لازی، درآمدی تاریخی به فلسفهٔ علم، ترجمهٔ علی پایا، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۲.

[۳] مرتضی منیری، چرا فلسفه‌های سه‌گانهٔ مشهور ریاضی مهم هستند؟، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، سال **۳۷**، شمارهٔ ۶۲ (بهار و تابستان ۱۳۹۷)، صص. ۱– ۱۳ .

[۴] دیرک وان دالن، جدال موش و قورباغه: بحران ماتماتیشه آنالن، ترجمهٔ سیامک کاظمی، نشر ریاضی، سال **۹** (۱۳۷۶)، شماره ۱، صص. ۵۰ –۵۷.

[۵] تامس ال. هیس، اصول اقلیدس: سیزده مقاله، ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۸۷.

[۶] آندرو جانیاک، نیوتن فیلسوف، ترجمهٔ سعید جعفری، انتشارات نیلوفر، تهران، ۱۳۹۲.

[7] Berkeley, G., *The Analyst (1734)*, D. R.Wilkins (ed.), 2002.
http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Berkeley/Analyst/

[8] Berkeley, G., *A Treatise concerning the Principles of Human Knowledge (1734)*, D. R.Wilkins (ed.), 2002.
http://www.maths.tcd.ie/~dwilkins/Berkeley/HumanKnowledge/

[9] Birkhoff, G., von Neumann, J., The Logic of Quantum Mechanics, *Annals of Mathematics*, **37** (1936), 823–843.

[10] Special Issues of *Philosophia Mathematica* on ”Mathematical Depth”, **23** (2015), no. 1, 2.

[11] Gabbay, D., Shehtman, V., *Quantification in Nonclassical Logic*, Elsevier, Berlin, 2009.

[12] Hilbert, D., *The Foundations of Geometry*, The Open Court Publishing Company, 1950.

[13] Maddy, P., *Naturalism in Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1997.

[14] Maddy, P., How Applied Mathematics Became Pure, *The Review of Symbolic Logic*, **1** (2008), 16-41.

[15] Shapiro, S., *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford University Press, Oxford, 1997.

[16] Kleiner, I., *A History of Abstract Algebra*, Birkhauser, Boston، Basel، Berlin, 2007.

[17] Kleiner, I., Rigor and Proof in Mathematics: A Historical Perspective, *Mathematics Magazine*, **64** (1991), 291–314.

[18] Scruton, R., *A Short History of Modern Philosophy: From Descartes to Wittgenstein*, 2nd edn., Routledge, London, New York, 2002.

[19] Tuboly, A., T., Quine and Quantified Modal Logic: Against the Received View, *Organon F*, **22** (2015), 518–545.

[20] Putnam, H., The logic of quantum mechanics. In *Mathematics, Matter and Methods: Philosophical Papers*, Cambridge University Press, Cambridge, 1979.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۷/۴/۲۴؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۵/۲۲ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۵/۲۳

مرتضی منیری: دانشگاه شهید بهشتی، دانشکدهٔ علوم ریاضی
تارنما: http://facultymembers.sbu.ac.ir/mortezamoniri/
رایانامه: m-moniri@sbu.ac.ir