

روش‌های تخمین تعداد صفرهای انتگرال آبلی

حمیدرضا ظهوری زنگنه، علی عطاییگی علمی

چکیده

ارتباط بسیار نزدیکی بین مسأله شانزدهم ضعیف شده هیلبرت و مسأله یافتن کران بالا برای تعداد صفرهای انتگرال آبلی وجود دارد. این مقاله به بررسی روش‌های مختلف برای تخمین تعداد صفرهای انتگرال آبلی می‌پردازد.

لغات کلیدی: مسأله شانزدهم ضعیف شده هیلبرت، سیکل‌های حدی، انتگرال آبلی.

مقدمه

یکی از مهم‌ترین مسائل باز در نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل تعیین تعداد ماگزیمم سیکل‌های حدی (مدارهای تناوبی ایزوله) یک دستگاه چندجمله‌ای مرتبه d در صفحه است که اولین بار توسط هیلبرت در ابتدای قرن گذشته در دومین کنگره بین‌المللی ریاضی دانان در پاریس مطرح شد. این مسأله با گذشت یک سده و اندی علیرغم تحقیقات جدی و چاپ صدها مقاله پیرامون آن هنوز حتی برای $d = 2$ باز است. شاید بهترین نتیجه به دست آمده در این راستا نتیجه‌ای است که به طور مستقل توسط ایلیاشنکو و اکال در ۱۹۹۱ میلادی ثابت شد. آنها نشان دادند که یک دستگاه چندجمله‌ای مفروض دارای تعداد متناهی سیکل حدی است. این نتیجه به قضیه متناهی بودن انفرادی مشهور است [۴].

حال یک اختلال چندجمله‌ای از یک دستگاه هامیلتونی چندجمله‌ای از درجه d به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = H_y(x, y) + \varepsilon f(x, y), \quad \dot{y} = -H_x(x, y) + \varepsilon g(x, y), \quad (1)$$

که در آن f, g, H به ترتیب چندجمله‌ای‌هایی نسبت به دو متغیر x و y با حداکثر درجه m, n

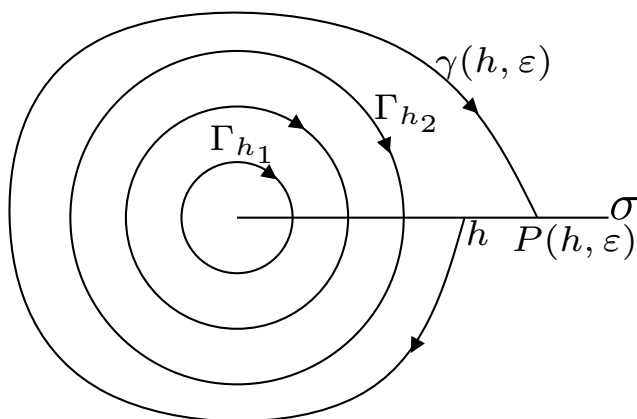
هستند، $d = \max\{m, n\}$ و ε پارامتری کوچک است. دستگاه $\dot{x} = P(x, y)$ ، $\dot{y} = Q(x, y)$ را انتگرال پذیر گویند هرگاه تابع $V(x, y)$ از رده C^1 موجود باشد که روی هیچ زیرمجموعه بازی از \mathbb{R}^2 ثابت نباشد و مدارهای این دستگاه روی منحنی‌های تراز V قرار داشته باشند. درحالت خاص این دستگاه را هامیلتونی گویند هرگاه تابع $H(x, y)$ از رده C^1 موجود باشد که $\frac{\partial H}{\partial x} = P(x, y)$ و $\frac{\partial H}{\partial y} = -Q(x, y)$. تابع H را تابعی هامیلتونی گویند. واضح است که هر دستگاه هامیلتونی انتگرال پذیر است. در این صورت دستگاه (۱) به ازای $\varepsilon = 0$ یک دستگاه هامیلتونی با تابع هامیلتونی H است و مدارهای آن روی منحنی‌های تراز $\{ (x, y) : H(x, y) = h \}$ قرار دارند. فرض کنید $\Gamma_h = \{ \gamma_h : h \in (h_1, h_2) \}$ یک طوق تناوبی (خانواده مدارهای تناوبی غیر ایزوله) باشد و σ یک برش متقاطع با خانواده منحنی‌های تراز γ_h باشد که توسط h پارامتری شده‌اند. هرگاه $\gamma(h, \varepsilon)$ مدار دستگاه مختل شده (۱) با نقطه شروع h در σ باشد، برای ε به اندازه کافی کوچک این مدار مجدداً برش σ را در نقطه‌ای یکتا قطع خواهد کرد که آن را با $P(h, \varepsilon)$ نشان می‌دهیم (شکل ۱ را مشاهده کنید). در این صورت $d(h, \varepsilon) = P(h, \varepsilon) - h$ تابع تغییر مکان یا تابع جابه‌جایی نامیده می‌شود. طبیعی است که تابع تغییر مکان می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$d(h, \varepsilon) = P(h, \varepsilon) - h = \varepsilon I_1(h) + \varepsilon^2 I_2(h) + \dots + \varepsilon^j I_j(h) + O(\varepsilon^{j+1}). \quad (2)$$

در این صورت $I(h) := I_1(h)$ اولین تقریب از تابع تغییر مکان دستگاه مختل شده (۱) را ارائه می‌دهد. از قضیه پوانکاره - پونتریاگین نتیجه می‌شود که برای مقادیر کوچک و مثبت ε شرط کافی برای انشعاب یک سیکل حدی از طوق تناوبی Γ_h آن است که $I(h)$ در اولین تقریب نسبت به ε برابر صفر باشد یعنی به ازای هر منحنی بسته γ_h در طوق تناوبی Γ_h داشته باشیم:

$$I(h) := \oint_{\gamma_h} f(x, y) dy - g(x, y) dx = 0, \quad (3)$$

عبارت $I(h)$ در (۳) یک انتگرال آبلی نامیده می‌شود که تعداد صفرهای آن یک کران بالا برای تعداد سیکل‌های حدی منشعب شده از طوق تناوبی دستگاه (۱) است. اگر سطح تراز $H = h$ شامل چندین طوق تناوبی باشد برای توابع چند جمله‌ای مفروض f, g و H و برای هر عدد h حقیقی، تابع I در حالت کلی یک تابع چند مقداری است. هرگاه $I(h) \equiv 0$ اختلال (۱) در تقریب مرحله اول نسبت به ε یک دستگاه پایستار (هامیلتونی و یا انتگرال پذیر) است و باید تقریب‌های مرتبه بالاتر را در نظر گرفت. فرانسوا الگوریتمی برای محاسبه $I_j(h)$ با فرض صفر بودن $I_k(h)$ ، $k \leq j$ ارائه داد که در این مقاله به آن نمی‌پردازیم [۴]. تعیین یک کران بالای دقیق از تعداد صفرهای ایزوله $I(h)$ مسأله مماسی و یا مسأله ضعیف شده شانزدهم هیلبرت نامیده می‌شود. با توجه به پیشرفت کند در روند حل مسأله شانزدهم هیلبرت این مسأله در ابتدا توسط آرنولد در ۱۹۷۷ میلادی مطرح [۱، ۲] و سپس توسط اسمیل در لیست مسائل حل نشده قرن بیست و یکم قرار گرفت. برای پاسخ دادن به این سؤال روش‌های متفاوتی ارائه شده است که در این مقاله به معرفی برخی از آن‌ها می‌پردازیم.



شکل ۱: $d(h, \varepsilon) = P(h, \varepsilon) - h$

۲. روش مبتنی بر معادلهٔ پیکارد - فوکس

در حالت کلی انتگرال آبلی $I(h)$ را می‌توان به صورت مجموع متناهی انتگرال‌هایی به صورت $I_{j,k} := \oint_{\Gamma_h} x^j y^k$ نوشت. خانوادهٔ بزرگی از معادلات دیفرانسیل که در کاربردها اهمیت خاصی دارد، از معادلات لینیارد تشکیل شده است که در این جا به بررسی حداکثر تعداد سیکل‌های حدی آن می‌پردازیم. این معادلات را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -f(x) + \varepsilon yg(x) \end{aligned} \quad (۴)$$

که در آن f و g توابعی چندجمله‌ای هستند. این دستگاه به ازای $\varepsilon = 0$ هامیلتونی با تابع هامیلتونی $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + F(x)$ است که در آن $F'(x) = f(x)$. فرض کنید $\{H(x, y) = h, h_1 < h < h_2\}$ خانواده‌ای از منحنی‌های بسته جبری Γ_h را نشان دهد که مبدأ را احاطه کرده است. هر گاه $g(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ و قرار دهیم $I_{k,1} = I_k := \oint_{\Gamma_h} x^k y dx$ آنگاه $I_0 = \oint_{\Gamma_h} y dx$ توجه می‌کنیم که طبق قضیهٔ گرین $I(h) = \varepsilon [a_0 I_0 + a_1 I_1 + \dots + a_n I_n]$ مساحت محصور به Γ_h را نشان می‌دهد، لذا به ازای هر $h \in (h_1, h_2)$ کمیتی مثبت است. در این صورت $I(h) = \varepsilon I_0(h) [a_0 + a_1 (I_1/I_0)(h) + \dots + a_n (I_n/I_0)(h)]$ و تخمین صفرهای $I(h)$ به تخمین تعداد صفرهای عبارت داخل کروشه منتهی می‌شود. با توجه به این مقدمه به معرفی روش پیکارد - فوکس می‌پردازیم. در این روش ابتدا دستگاه معادلات دیفرانسیلی که I_j ها در آن صدق

می‌کنند را می‌یابیم. این دستگاه معادلات دیفرانسیل به دستگاه معادلات پیکارد - فوکس مشهور است. با بررسی رفتار کیفی جواب‌های این معادلات، خواص هندسی و رفتارهای مجانبی آنها وقتی h به مقادیر بحرانی h_1 و h_2 میل می‌کند را تعیین می‌کنیم. برای بررسی رفتار هندسی نسبت انتگرال‌های آبلی $P_k(h) = \frac{I_k(h)}{I_0(h)}$ ، معادلات دیفرانسیلی که هر یک از آنها در آن صدق می‌کنند را می‌یابیم. این معادلات از نوع معادلات ریکاتی هستند. حال تعریف برخی مفاهیم مقدماتی را یادآوری می‌کنیم.

دستگاه معادلات دیفرانسیل خودگردان در صفحه

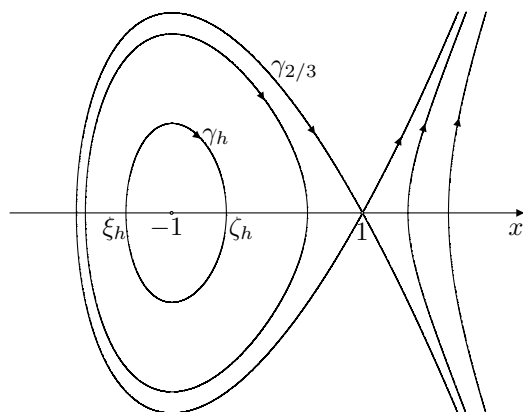
$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (5)$$

را در نظر بگیرید. نقطه $p = (\bar{x}, \bar{y})$ یک نقطه تعادل (یا نقطه بحرانی) دستگاه (5) است هرگاه $P(\bar{x}, \bar{y}) = Q(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. در واقع نقطه تعادل جواب خاصی از یک دستگاه (5) است که برای هر $t \in \mathbb{R}$ ، $\phi_t(p) = p$ ، که در آن $\phi_t(\cdot)$ جریان تولید شده توسط این دستگاه است. نقطه تعادل p پایدار است هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ موجود باشد که اگر $\|q - p\| < \delta$ آن‌گاه $\|\phi_t(q) - p\| < \varepsilon$ به ازای هر $t \geq 0$. p ناپایدار است هرگاه پایدار نباشد. p مجانبی پایدار است هرگاه پایدار باشد و $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که اگر $\|q - p\| < \delta$ آن‌گاه $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(q) = p$. فرض کنید λ و μ مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی میدان برداری دستگاه (5) در نقطه p باشند در این صورت

- (i) اگر $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ و $\lambda, \mu < 0$ ، p یک نقطه تعادل زینی نامیده می‌شود
- (ii) اگر $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ و $\lambda, \mu > 0$ ، نقطه تعادل p گره نامیده می‌شود که پایدار است هرگاه $\lambda < 0, \mu < 0$ و ناپایدار است هرگاه $\lambda > 0, \mu > 0$.
- (iii) نقطه تعادل p یک مرکز است اگر یک همسایگی U داشته باشد که برای هر $q \in U \setminus \{p\}$ ، $P^2(q) + Q^2(q) \neq 0$ ، و جواب‌های گذرنده از q بسته و احاطه کننده p باشند.
- (iv) نقطه تعادل p هذلولوی است اگر قسمت حقیقی مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی ناصفر باشند. حال همیلتونی $H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + x$ با خانواده منحنی‌های بسته

$$\{\Gamma_h\} = \{(x, y); H(x, y) = h, -\frac{2}{3} \leq h \leq \frac{2}{3}\},$$

را مطابق شکل (2) در نظر بگیرید.



شکل ۲: خانواده بیضی‌های همیلتونی (۵)

دستگاه همیلتونی متناظر، با X_H نشان داده می‌شود. وقتی $h \rightarrow -\frac{2}{3}$ بیضی Γ_h منقبض شده به مرکز X_H در $(-1, 0)$ میل می‌کند و اگر $h \rightarrow \frac{2}{3}$ این بیضی به یک مدار هموکلیبیک میل می‌کند. یادآوری می‌کنیم که: نقطه x را متعلق به مجموعه $-\alpha$ حدی (به طور متناظر مجموعه $-\omega$ حدی) مدار نقطه x_0 گویند هرگاه دنباله t_j موجود باشد که اگر $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = -\infty$ ($\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = \infty$)، آنگاه $\lim_{j \rightarrow \infty} \phi_{t_j}(x_0) = x$. یک مدار هموکلیبیک گفته می‌شود هرگاه نقاط $-\alpha$ حدی و $-\omega$ حدی آن نقاط تعادل زینی باشند. یک اختلال X_H به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -1 + x^2 + \varepsilon(\alpha + x)y, \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن α یک ثابت و ε یک پارامتر کوچک است. انتگرال آبلی متناظر با دستگاه (۶) برابر است با

$$I(h) = \alpha I_0(h) + I_1(h), \quad I_j(h) = \oint_{\gamma_h} x^j y dx, \quad j = 0, 1 \quad (7)$$

چون جهت Γ_h ساعتگرد است. با استفاده از قضیه گرین به سادگی دیده می‌شود که $I_0(h)$ مساحت ناحیه محصور به Γ_h است، بنابراین $I_0(h) > 0$ برای $h > -\frac{2}{3}$. فرض کنید $(\xi_h, 0)$ و $(\eta_h, 0)$ ($\eta_h < 1 < \xi_h < -1$) نقاط تقاطع Γ_h با محور x ها باشند، با استفاده از (۷) داریم، از طرفی $I_1(h) = 2 \int_{\xi_h}^{\eta_h} x^2 y dx$,

$$H(x, y) = h \Rightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x = h \Rightarrow y \frac{\partial y}{\partial h} = 1 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial h} = \frac{1}{y}.$$

در نتیجه

$$I'_j(h) = \oint_{\gamma_h} x^j \frac{\partial y}{\partial h} dx = \oint_{\gamma_h} \frac{x^j}{y} dx = 2 \int_{\xi_h}^{\eta_h} \frac{x^j}{y} dx, \quad (8)$$

که در آن $y(x, h) \geq 0$ با استفاده از $H(x, y) = h$ تعیین می‌شود. از طرفی

$$I_j(-\frac{2}{3}) = \lim_{h \rightarrow -\frac{2}{3}^+} \int \int_{H \leq h} x^j dx dy = 0 \quad j = 0, 1.$$

در نتیجه با استفاده از (7)، قاعده هوییتال و همچنین قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها، داریم

$$\lim_{h \rightarrow -\frac{2}{3}^+} \frac{I_1(h)}{I_0(h)} = \lim_{h \rightarrow -\frac{2}{3}^+} \frac{I'_1(h)}{I'_0(h)} = \lim_{h \rightarrow -\frac{2}{3}^+} \frac{\zeta_h \int_{\xi_h}^{\eta_h} \frac{dx}{y}}{\int_{\xi_h}^{\eta_h} \frac{dx}{y}} = -1,$$

که در آن $\xi_h < \zeta_h < \eta_h$ و $\lim_{h \rightarrow -\frac{2}{3}^+} \xi_h = \lim_{h \rightarrow -\frac{2}{3}^+} \eta_h = -1$ تابع $P(h)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(h) = \begin{cases} \frac{I_1(h)}{I_0(h)}, & h \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}], \\ -1, & h = -\frac{2}{3}. \end{cases} \quad (9)$$

در نتیجه رابطه (7) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$I(h) = I_0(h)(\alpha + P(h)). \quad (10)$$

در ادامه ثابت می‌کنیم که به ازای $h \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ و بنابراین (10) نتیجه می‌دهد که $I(h)$ حداکثر دارای یک صفر است.

لم 1. $I_0(h)$ و $I_1(h)$ در معادله بیکارد - فوکس زیر صدق می‌کنند:

$$(9h^2 - 4) \frac{d}{dh} \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10h}{3} & 7 \\ 5 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

اثبات. از رابطه (8) و این واقعیت که در طول Γ_h ، $y^2 = 2h + \frac{2}{3}x^2 - 2x$ ، نتیجه می‌شود که

$$I_j(h) = \int_{\gamma_h} \frac{x^j y^2}{y} dx = 2h I'_j(h) - 2 I'_{j+1}(h) + \frac{2}{3} I'_{j+2}(h). \quad (12)$$

از طرفی، از فرمول انتگرال گیری جزء به جزء و این واقعیت که در طول Γ_h ، $dy = (-1 + x^2) dx$ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} I_j(h) &= 2 \int_{\xi_h}^{\eta_h} x^j y dx = 2 \left(\frac{1}{j+1} x^{j+1} y(x, h) \Big|_{\xi_h}^{\eta_h} - \int_{\xi_h}^{\eta_h} \frac{x^{j+1} (-1 + x^2)}{(j+1)y} dx \right) \\ &= \frac{1}{j+1} (I'_{j+1}(h) - I'_{j+2}(h)). \end{aligned} \quad (13)$$

از حذف $I'_{j+2}(h)$ در (۱۲) و (۱۳) به دست می آید:

$$(2j + 5)I_j(h) = 7hI'_j(h) - 4I'_{j+1}(h).$$

که از قرار دادن $j = 0, 1$ نتیجه می شود

$$\begin{aligned} 5I_0(h) &= 7hI'_0(h) - 4I'_1(h), \\ 7I_1(h) &= 7hI'_1(h) - 4I'_2(h). \end{aligned} \quad (14)$$

توجه می کنیم که در طول Γ_h داریم $y^2 dy = (-1 + x^2) y dx$ بنابراین

$$0 = \oint_{\gamma_h} y^2 dy = \oint_{\gamma_h} (-1 + x^2) y dx \Rightarrow I'_2(h) \equiv I_0(h).$$

با قرار دادن $I_0(h)$ به جای $I'_2(h)$ در (۱۴) و با به دست آوردن $I'_1(h)$ و $I'_0(h)$ از این معادله، نتیجه می شود

$$\begin{cases} 7hI'_0(h) - 4I'_1(h) = 5I_0(h) \\ -4I'_0(h) + 7hI'_1(h) = 7I_1(h) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I'_0(h) = \frac{\det \begin{pmatrix} 5I_0 & -4 \\ 7I_1 & 7h \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 7h & -4 \\ -4 & 7h \end{pmatrix}}, \quad I'_1(h) = \frac{\det \begin{pmatrix} 7h & 5I_0 \\ -4 & 7I_1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 7h & -4 \\ -4 & 7h \end{pmatrix}}.$$

که معادله (۱۱) را نتیجه می دهد.

قضیه ۱. تابع $P(h)$ تعریف شده در (۹) به ازای $h \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ اکیداً صعودی است. برهان. از تعریف (۹) بر می آید که

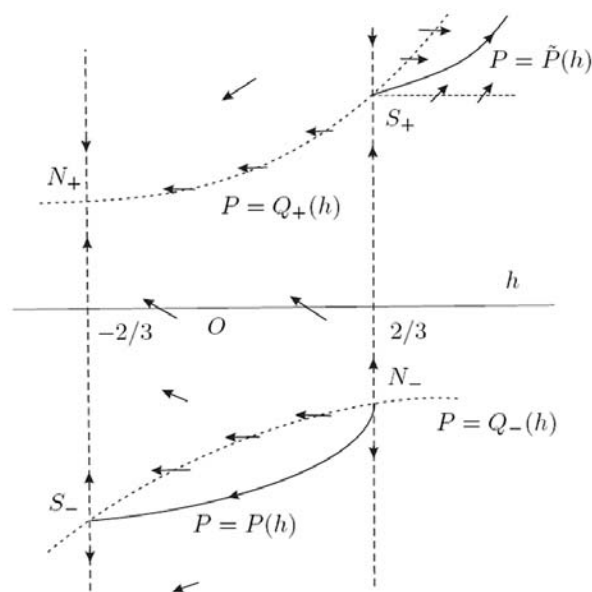
$$P'(h) = \frac{I'_1(h)}{I_0(h)} - \frac{I'_0(h)}{I_0(h)} P(h).$$

با جایگذاری (۱۱) در برابری فوق، نتیجه می شود که

$$P'(h) = \frac{5I_0 - \frac{2}{3}I_1}{(9h^2 - 4)I_0} - \frac{\frac{16}{3}hI_0 + 7I_1}{(9h^2 - 4)I_0} \Rightarrow (9h^2 - 4)P' = -7P^2 + 3hP + 5.$$

این معادله، یک معادله ریکاتی است و معادل با دستگاه زیر است.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = -7P^2 + 3hP + 5 \\ \frac{dh}{dt} = 9h^2 - 4. \end{cases} \quad (15)$$



شکل ۳: رفتار میدان برداری (۱۷) و تابع $P(h)$

این دستگاه دارای خطوط پایایی $\{h = \pm \frac{2}{3}\}$ است (یعنی اگر $\phi^t(\cdot)$ جریان تولید شده توسط (۱۵) و $x \in \{h = \pm \frac{2}{3}\}$ ، آنگاه $\phi^t(x) \in \{h = \pm \frac{2}{3}\}$ و هر ۴ نقطه بحرانی (تعادل) این دستگاه روی این دو خط قرار دارند: یک زمین در $S_-(\frac{2}{3}, -1)$ و یک گره در $N_-(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3})$ واقع در نیم صفحه پایین و یک زمین در $S_+(\frac{2}{3}, 1)$ و یک گره در $N_+(\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$ واقع در نیم صفحه بالا. تعریف (۹) نشان می‌دهد که نمودار تابع $P = P(h)$ منیفلد پایدار S_- است، به این معنی که یک همسایگی U از S_- موجود هست که مجموعه $\{x \in U; \phi^t(x) \in U, t \geq 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \phi^t(x) = S_-\}$ توسط نمودار P نمایش داده می‌شود. در واقع $P = P(h)$ یک جواب دستگاه (۱۵) است که از نقطه $(\frac{2}{3}, -1)$ می‌گذرد و هم‌چنین با افزایش h به سمت گره ناپایدار N_- میل می‌کند. زیرا با توجه به شکل (۳) جهت میدان برداری روی خط $\{(h, P); P = 0\}$ به سمت بالاست ($\frac{dP}{dt} > 0$). از طرف دیگر، از معادله اول (۱۵) نتیجه می‌شود که

$$0 = \frac{dP}{dt} = -7P^2 + 3hP + 5 \implies P = Q_{\pm}(h) = \frac{3h \pm \sqrt{9h^2 + 140}}{14}$$

که در آن $Q_{\pm}(h)$ دو شاخه هذلولوی هستند که در طول آنها $\frac{dP}{dt} = 0$. این دو شاخه نوار $\{(h, P); -\frac{2}{3} < h < \frac{2}{3}\}$ را به سه ناحیه تقسیم می‌کنند، که در آنها جهت میدان برداری (۱۵) در

ناحیه‌های بالا و پایین به سمت پایین و در ناحیه وسط به سمت بالاست. با محاسبه مستقیم شیب خم $P = P(h)$ در نقطه S_- دیده می‌شود که

$$\frac{dP}{dh} |_{S_-} = \left(\frac{dP}{dt} \cdot \frac{dt}{dh} \right) |_{S_-} = \frac{1}{\lambda}$$

در حالی که شیب $P = Q_-(h)$ در همین نقطه برابر $\frac{5}{3\lambda}$ است. بنابراین منحنی $P = P(h)$ در نزدیکی نقطه S_- در پایین منحنی $P = Q_-(h)$ قرار دارد و لذا در کل بازه $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ نیز در پایین آن باقی می‌ماند، زیرا در زیر $P = Q_-(h)$ جهت میدان برداری (۱۵) رو به پایین است، (شکل ۳) را ببینید). بنابراین به ازای $h \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ، $P' > 0$ زیرا در پایین شاخه $P = Q_-(h)$ ، $\frac{dP}{dt}$ و $\frac{dh}{dt}$ منفی هستند. ■

۳. روش معدل گیری

در این بخش کاربردی از روش معدل گیری در زمینه مطالعه مسئله شانزدهم ضعیف شده هیلبرت در [۳] به طور خلاصه معرفی می‌شود. در برخی موارد استفاده از این روش معادل مطالعه انتگرال‌های آبلی است، ولی در برخی دیگر از موارد یکی از آنها مؤثرتر و مناسب‌تر از دیگری است. ابتدا چند قضیه کلی بدون اثبات ارائه می‌شود، سپس این روش برای مطالعه اختلال درجه دوم از یک دستگاه ناهمبونی برگشت پذیر مرتبه دوم استفاده می‌شود. یک دستگاه را برگشت پذیر گویند هرگاه شکل کلی آن به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - (a+b-2)x^2 + (a+b-2)y^2, \\ \dot{y} &= x - 2(a-b)xy \end{aligned}$$

که در آن a, b, c اعداد حقیقی ثابت هستند.

نظریه معدل گیری در حالت کلی در یک فضای با بعد متناهی دلخواه به کار می‌رود. چون در این قسمت از آن برای مطالعه دستگاه‌های خودگردان در حالت یک بعدی استفاده می‌شود، قضیه (۲) معدل گیری مرتبه اول را ارائه می‌دهد، برای اثبات، [۱۲] را ببینید. تعاریف مورد نیاز در این بخش عبارتند از:

تعریف ۱. مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 h(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0. \quad (16)$$

که در آن $D, x, y, x_0 \in D$ یک زیر مجموعه باز در \mathbb{R} و $t \in [0, \infty)$ ، $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ؛ همچنین توابع f و h متناوب با دوره تناوب T نسبت به t هستند. در این صورت معادله

$$\dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y), \quad y(0) = x_0, \quad (17)$$

را معادلهٔ معدل (۱۶) گویند که در آن

$$\bar{f}(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt. \quad (18)$$

قضیهٔ ۲. در مسألهٔ مقدار اولیه (۱۶) فرض کنید که $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial h}{\partial x}$ پیوسته و به‌وسیلهٔ یک ثابت مستقل از ε در $D \times [0, \infty)$ و $(0, \varepsilon_0)$ کراندار باشند،
 (ii) T مستقل از ε است،
 (iii) $y(t)$ روی مقیاس زمانی از مرتبه $\frac{1}{\varepsilon}$ ، متعلق به D است.
 آن گاه گزاره‌های زیر برقرارند.
 (a) روی مقیاس زمانی از مرتبه $\frac{1}{\varepsilon}$ ، اگر $\varepsilon \rightarrow 0$ آنگاه

$$x(t) - y(t) = O(\varepsilon).$$

(b) اگر p یک نقطهٔ تعادل هذلولوی دستگاه معدل (۱۷) باشد، آن گاه (۱۶) یک جواب $-T$ تناوبی $\phi(t, \varepsilon)$ نزدیک به p است که $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi(t, \varepsilon) = p$ و اگر p مجانبی پایدار باشد، آن گاه جواب تناوبی متناظر $\phi(t, \varepsilon)$ در فضای (t, x) برای ε به اندازهٔ کافی کوچک، مجانبی پایدار است و اگر ناپایدار باشد آن گاه $\phi(t, \varepsilon)$ ناپایدار است. ■

حال یک اختلال از یک دستگاه انتگرال‌پذیر مسطح به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$X_\varepsilon : \begin{cases} \dot{x} = P(x, y) + \varepsilon p(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) + \varepsilon q(x, y) \end{cases} \quad (19)$$

که در آن $P, Q, p, q \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. فرض کنید که X دارای عامل انتگرال‌ساز $\mu(x, y) \neq 0$ انتگرال اول H و خانواده بیضی‌های پیوسته

$$\gamma_h \subset \{(x, y) : H(x, y) = h, h_1 < h < h_2\}, \quad (20)$$

باشد. برای مطالعهٔ تعداد سیکل‌های حدی دستگاه (۱۹) باید این دستگاه را به فرم معادلهٔ (۱۶) نمایش دهیم:

قضیهٔ ۳. ([۴]) فرض کنید که به ازای هر (x, y) در مجموعه شامل بیضی‌های $\{\gamma_h\}$ ، $xQ(x, y) - yP(x, y) \neq 0$ و $\rho : (\sqrt{h_1}, \sqrt{h_2}) \times [0, 2\pi) \rightarrow [0, \infty)$ یک تابع پیوسته باشد به طوری که برای هر $R \in (\sqrt{h_1}, \sqrt{h_2})$ و برای هر $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$H(\rho(R, \varphi) \cos \varphi, \rho(R, \varphi) \sin \varphi) = R^2. \quad (21)$$

در این صورت معادله دیفرانسیلی که ارتباط بین ریشه دوم انرژی $R = \sqrt{h}$ و زاویه φ را برای دستگاه (۱۹) توصیف می‌کند به صورت زیر است:

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(xQ - yP)} \left(1 - \varepsilon \frac{xq - yp}{xQ - yP} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (22)$$

که در آن $x = \rho(R, \varphi) \cos \varphi$ و $y = \rho(R, \varphi) \sin \varphi$.

مثال ۱. ([۴]) دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 + \varepsilon p(x, y) \\ \dot{y} = x + xy + \varepsilon q(x, y) \end{cases} \quad (23)$$

که در آن $p(x, y) = a_1x - a_2x^2 + (2a_1 + a_5)xy + a_6y^2$ و $q(x, y) = a_1y + a_2x^2 + a_4xy - a_2y^2$.

توجه کنید که برای $\varepsilon = 0$ ، دستگاه (۲۳) یک دستگاه انتگرال پذیر برگشت پذیر است که دارای انتگرال اول $H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{(1 + y)^2}$ و فاکتور انتگرال $(1 + y)^{-2}$ است. که در آن منظور از انتگرال اول یک تابع غیر ثابت است که در طول جواب‌های دستگاه ثابت باشد و یک فاکتور انتگرال تابع ناصفری چون $R(x, y)$ است به طوری که $\nabla \cdot (R(x, y)(-y + x^2, x + xy)) = 0$. با استفاده از قضیه (۳) و با قراردادن $x = \rho \cos \varphi$ و $y = \rho \sin \varphi$ ، برای $0 < R < 1$ و $\varphi \in [0, 2\pi)$ داریم:

$$H(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = R^2 \Rightarrow \frac{\rho}{1 + \rho \sin \varphi} = R \Rightarrow \rho = \rho(R, \varphi) = \frac{R}{1 - R \sin \varphi}.$$

بنابراین با استفاده از (۲۲)، از دستگاه (۲۳) و جای گذاری $x = \rho \cos \varphi$ ، $y = \rho \sin \varphi$ و $\rho = \frac{R}{1 - R \sin \varphi}$ نتیجه می‌شود

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \frac{a_1R + a(\varphi)R^2 + b(\varphi)R^3}{1 - R \sin \varphi} + O(\varepsilon^2),$$

که در آن

$$\begin{aligned} a(\varphi) &= (-2a_1 + 3a_2 + a_5) \sin \varphi + (a_4 + a_6) \cos \varphi - (4a_2 + a_5) \sin^2 \varphi \\ &\quad - (a_2 + a_4 + a_6) \cos^2 \varphi, \\ b(\varphi) &= a_1 + a_2 - (a_1 + 2a_2) \cos^2 \varphi - a_4 \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned}$$

حال با انتگرال گیری، تابع معدل به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned} \bar{f}(R) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a_1R + a(\varphi)R^2 + b(\varphi)R^3}{1 - R \sin \varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2(R\sqrt{1 - R^2})} [2a_2R^3 + (6a_2 + a_5 - 2a_1)R^2\sqrt{1 - R^2} \\ &\quad - (10a_2 + 2a_5)R^3 - (2a_5 + 8a_2)\sqrt{1 - R^2} + 8a_2 + 2a_5]. \end{aligned}$$

توجه کنید که $R \in (0, 1)$. با جای‌گذاری $\xi = \sqrt{1 - R^2}$ در \bar{f} از $\bar{f}(\xi) = 0$ نتیجه می‌شود:

$$\bar{f}(\xi) = \frac{1}{2(\xi\sqrt{1-\xi^2})} \left(2a_2\xi^4 - (6a_2 + a_5 - 2a_1)\xi^2 + (6a_2 + 2a_5)\xi^2 + (a_5 - 4a_2 - 2a_1)\xi \right) = 0$$

بنابراین، طبق قاعدهٔ دکارت^۱ که بیان می‌کند حداکثر تعداد ریشه‌های مثبت یک چندجمله‌ای، یکی کمتر از تعداد ضرایب ناصفر آن است و هم‌چنین چون 0 یکی از ریشه‌های $\bar{f}(\xi)$ است، بنابراین، حداکثر تعداد ریشه‌های $\bar{f}(\xi)$ برای $R \in (0, 1)$ برابر $2 - 1 - 1 = 0$ است. بنابراین دستگاه (۲۳) حداکثر دارای ۲ سیکل حدی برای ε به اندازهٔ کافی کوچک است.

۴. روش مبتنی بر اصل شناسه

در این بخش یک روش برای مطالعهٔ تعداد صفرهای انتگرال آبلی معرفی می‌شود که از اصل شناسه استفاده می‌کند. پترف^۲ در یک سری از مقالات [۷]–[۱۱] از این روش برای مطالعه اختلال همیلتونی بیضوی مرتبهٔ ۳ و مرتبهٔ ۴ استفاده کرد، بنابراین در بعضی متون این روش، روش پترف نامیده می‌شود. در این روش با توسیع انتگرال آبلی $I(h)$ به صورت یک تابع تحلیلی و تک مقدار در صفحه مختلط با استفاده از اصل شناسه یک کران بالا برای تعداد صفرهای تابع توسعه یافته می‌یابیم. واضح است که این کران یک کران بالا برای انتگرال آبلی تابع حقیقی مقدار $I(h)$ است. از این روش برای مطالعه همیلتونی

$$H(x, y) = \frac{y^2}{3} - \frac{x^3}{3} + x,$$

با خانواده پیوسته بیضی‌های

$$\{\gamma_h\} = \{(x, y) : H(x, y) = h, -\frac{2}{3} \leq h \leq \frac{2}{3}\}, \quad (24)$$

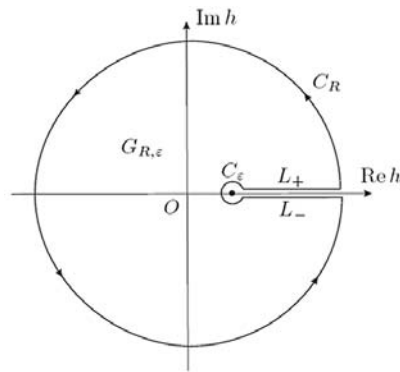
و انتگرال آبلی $I(h) = \oint_{\gamma_h} f(x, y) dy - g(x, y) dx$ ، ولی برای اختلال با چندجمله‌ای از درجهٔ دلخواه n استفاده می‌کنیم. نتیجه اصلی این بخش، قضیهٔ زیر است:

قضیهٔ ۴. هر $I(h)$ غیربدهی یعنی انتگرال آبلی چندجمله‌ای ۱ – فرم از درجهٔ حداکثر n روی بیضی (۲۴)، حداکثر دارای $n - 1$ صفر برای $h \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ است.

ابتدا چند لم را بدون اثبات بیان و سپس قضیه (۴) را با استفاده از این لم‌ها ثابت می‌کنیم. فرض کنید $D = \mathbb{C} \setminus \{h \in \mathbb{R}, h \geq \frac{2}{3}\}$ ، ناحیهٔ همبند سادهٔ $G = G_{R,\varepsilon} \subset D$ با مرز ساده و بستهٔ $\partial G = C_{R,\varepsilon}$ به صورت $C_{R,\varepsilon} = \{C_R\} \cup \{C_\varepsilon\} \cup \{L_\pm\}$ تعریف می‌شود که در آن

1) Descarte's rule 2) G.S. Petrov

$C_R = \{h \in \mathbb{C}, |h| = R \gg 1\}$, $C_\varepsilon = \{h \in \mathbb{C}, |h - \frac{\nu}{\mu}| = \varepsilon \ll 1\}$ و مرزهای بالایی و پایینی برش $\{h \geq \frac{\nu}{\mu}\}$ هستند، شکل (۴) را ببینید.



شکل ۴. ناحیه $G_{R,\varepsilon}$ و مرزهای آن

لم ۲. ([۸]) $I(h)$ را می‌توان به ناحیه D به عنوان یک تابع تحلیلی تک - مقدار توسعه داد و مجدداً از نماد $I(h)$ برای نمایش تابع توسعه یافته استفاده می‌کنیم. به علاوه، برای h در همسایگی بینهایت $I_1(h) \sim h^{\frac{\nu}{\mu}}$ و $I_0(h) \sim h^{\frac{\nu}{\mu}}$

لم ۳. ([۹]) $Im I_1(h) \neq 0$, $Im I_0(h) \neq 0$ برای $h \in L_+ \cup L_-$.

لم ۴. ([۴]) $I_0(h) \neq 0$ برای $h \in G \setminus \{-\frac{\nu}{\mu}\}$.

لم ۵. ([۴]) $Im(\frac{I_1(h)}{I_0(h)}) \neq 0$ برای $h \in L_+ \cup L_-$.

اثبات قضیه ۴. با استفاده از لم ۱.۲.۹ در ([۴]) انتگرال آبلی $I(h)$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$I(h) = Q_0(h)I_0(h) + Q_1(h)I_1(h),$$

که در آن $I_j(h) = \oint_{\gamma_h} x^j y dx$, $j = 0, 1$ و Q_0 و Q_1 چندجمله‌ای‌هایی حقیقی هستند با $deg Q_0 \leq [\frac{n-1}{\mu}] = n_0$, $deg Q_1 \leq [\frac{n}{\mu}] - 1 = n_1$. توجه کنید که $n_0 + n_1 = n - 2$. از لم (۴) نتیجه می‌شود که $h = -\frac{\nu}{\mu}$ تنها صفر $I_0(h)$ است و طبق فرمول (۹)، $\lim_{h \rightarrow -\frac{\nu}{\mu}+} \frac{I_1(h)}{I_0(h)} = -1$. بنابراین به جای تعداد صفرهای $I(h)$ در فرم بالا، تعداد صفرهای تابع زیر مورد بررسی قرار خواهد

گرفت،

$$F(h) = Q_{\circ}(h) + \frac{I_{\gamma}(h)}{I_{\circ}(h)}Q_{\gamma}(h).$$

توجه شود که صفر بدیهی $I(h)$ در $h = -\frac{1}{\mu}$ برای $F(h)$ را می‌توان حذف کرد. حال برای بررسی تعداد صفرهای $F(h)$ در $G_{R,\varepsilon}$ ، برای R و $\frac{1}{\varepsilon}$ مثبت و به اندازه کافی بزرگ، از اصل شناسه استفاده می‌کنیم. ثابت می‌شود که عدد دوران F هنگامی که h روی مرز $G_{R,\varepsilon}$ می‌چرخد حداکثر $n - 1$ است.

اگر C یک مسیر بسته ساده باشد و تابع f در درون و روی C تحلیلی و ناصفر باشد، در این صورت تعداد صفرهای f در درون C برابر با تغییرات شناسه f در طول C (تقسیم بر 2π) است. به این مقدار، عدد دوران یا پیش f روی C گویند.

از لم (۲) نتیجه می‌شود که با تغییر h در طول C_R و در جهت مثلثاتی تابع $F(h)$ حداکثر $\max(n_{\circ}, n_{\gamma} + \frac{1}{\mu}) = \alpha$ دور در اطراف صفر می‌چرخد، چون عدد حقیقی مثبت M موجود است که هرگاه $h \rightarrow \infty$ ، $|F(h)| < M|h|^{\alpha}$. از طرف دیگر هرگاه متغیر h در طول برش L_{\pm} حرکت کند، تعداد چرخش‌های $F(h)$ در اطراف \circ توسط تعداد صفرهای $Im(F(h))$ تخمین زده می‌شود. بنا بر لم (۵) تعداد صفرهای $Im(F(h))$ برای $h \in L_{+} \cup L_{-}$ حداقل $2n_{\gamma}$ است زیرا

$$Im(F(h)) = Im\left(\frac{I_{\gamma}(h)}{I_{\circ}(h)}\right)Q_{\gamma}(h).$$

و چون هر دور کامل از $F(h)$ متناظر با حداقل ۲ صفر برای $Im(F(h))$ است، لذا تعداد دورهای کامل $F(h)$ روی این دو حاشیه حداکثر $n_{\gamma} + 1$ می‌باشد (کمتر از یک نصف دور به هر کدام از لبه‌ها اضافه شده) و در نهایت، هنگامی که h در طول C_{ε} ساعتگرد حرکت می‌کند، تعداد دورهای کامل F وقتی $\varepsilon \rightarrow 0$ ، به سمت صفر میل می‌کند، زیرا وقتی $h \rightarrow \frac{1}{\mu}$ ، به سمت یک عدد ثابت میل می‌کند (وقتی $h \rightarrow \frac{1}{\mu}$ آن‌گاه بیضی Γ_h به سمت حلقه زینی Γ می‌رود و انتگرال‌های I_{γ}, I_{\circ} روی این حلقه اعداد حقیقی معینی هستند). با جمع‌بندی بحث فوق، نتیجه می‌شود که تعداد دورهای کامل $F(h)$ حداکثر برابر است با $n - 1 = \max(n_{\circ} + n_{\gamma} + 1, 2n_{\gamma} + \frac{1}{\mu})$. توجه کنید که عدد دوران باید عددی صحیح باشد. ■

مراجع

- [1] Arnold V.I., Loss of stability of self-oscillations close to resonance and versal deformations of equivariant vector fields, *Funct. Anal. Appl.* 11(1977) 85-92.
- [2] Arnold V.I., Ten problems, *Adv. Soviet Math.* 1(1990) 1-8.
- [3] Buica A., Llibre J., Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree, *Bull. Sci. Math.* 128(2004)7-22.

- [4] Christopher C., Li C., Limit Cycles of Differential Equations, Advanced course in Mathematics, Birkhäuser Verlag, (2000).
- [5] Iliev I. D., On second order bifurcation of limit cycles, J. London Math. Soc. 58(1998)353-366.
- [6] Iliev I. D., Perturbations of quadratic centers, Bull. Sci. Math. 122(1998) 107-161.
- [7] Petrov G. S., Number of zeros of complete elliptic integrals, English transl., Funct. Anal. Appl. 18(1984)148-149.
- [8] Petrov G. S., Elliptic integrals and their nonoscillation, English transl., Funct. Anal. Appl. 20(1986) 37-40.
- [9] Petrov G. S., The Chebyshev property of elliptic integrals, English transl., Funct. Anal. Appl. 22(1988) 72-73.
- [10] Petrov G. S., Non-oscillations of elliptic integrals, English transl., Funct. Anal. Appl. 24(1990) 205-210.
- [11] Petrov G. S., On the non-oscillations of elliptic integrals, English transl., Funct. Anal. Appl. 31(1997) 262-265.
- [12] Sanders J. A., Verhulst F., Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems, Appl. Math. Sci. 59, Springer, (1985).

[۱۳] دانیار الهی، حمیدرضا ظهوری زنگنه، ارتباط مسأله شانزدهم هیلبرت با انتگرال‌های آبلی و چند روش برای بررسی یکنوایی دو انتگرال آبلی، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۳۲(۱۳۸۳) ۳۸-۴۴.

علی عطاییگی علمی
 حمیدرضا ظهوری زنگنه hamidz@cc.iut.ac.ir
 دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان