فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۸، شمارهٔ ۶۵ (پاییز و زمستان ۱۳۹۸) صص. ۱۲۳ تا ۱۴۲

صد سال با مرکزساز عضوهای یک گروه

سید مجید جعفریان امیری و حجت رستمی

چکیده

در این مقاله، تاریخچه‌ای از تعریف و به‌کارگیریِ مرکزساز عضوهای گروه‌ها را در شناسایی ساختار انواع گروه‌ها ارائه می‌دهیم. به‌ویژه به مهم‌ترین کاربردهای مرکزساز عضوها در نظریهٔ گروه‌ها نظیر طبقه‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی اشاره می‌کنیم.

۱. سرآغاز

مطالعهٔ تاریخِ ریاضی علاوه بر ادای دین نسبت به پیشگامان و تلاشگران این حوزهٔ علمی، نحوهٔ تکامل موضوعات ریاضی را نیز آشکار می‌کند. به‌ویژه ریاضی‌خوانان جوان طی مطالعهٔ تاریخ ریاضی با جریان فکری حاکم بر فرآیند کشف قضیه‌های ریاضی آشنا می‌شوند و خود می‌توانند مستقلاً به بازآفرینیِ روند حل مسائل و یادگیری عمیق ریاضی بپردازند. آنری پوانکاره معتقد است که نخستین اندیشه‌های مربوط به نظریهٔ گروه‌ها را باید در کارهای اقلیدس جستجو کرد [۲۵] و میلر سرمنشاء آن را به بابلیان نسبت می‌دهد [۷۰]. اما در عصر حاضر، تحوّل این نظریه بی‌تردید در یک بازهٔ زمانیِ هفتاد ساله از لاگرانژ (۱۷۷۰) تا کُشی (۶-۱۸۴۴) رخ داده است [۲۵]. اولین کاربردهای نظریهٔ گروه‌ها در نظریهٔ معادلات آشکار شد و در پایان این بازهٔ زمانی، به‌عنوان یک دانش مستقل ظاهر شد. حل معادلات چندجمله‌ای، یافتن ریشه‌های آنها و اینکه آیا این ریشه‌ها حقیقی‌اند یا مختلط، چندین قرن یکی از موضوعات مورد علاقهٔ ریاضیدانان بوده است. لاگرانژ به‌فراست دریافت که راه‌حل این معادلات، تقلیل آنها به معادلات کمکی است و قضیه‌ای را ثابت کرد که امروزه در نظریهٔ گروه‌ها به قضیهٔ لاگرانژ معروف است حاکی از اینکه مرتبهٔ هر زیرگروه از یک گروه متناهی، مرتبهٔ گروه را عاد می‌کند [۶۳]. او برای توضیح روش خود، معادله‌های

عبارات و کلمات کلیدی. گروه؛ مرکزساز؛ گروه ساده؛ تاریخ جبر.

درجه‌چهار را در نظر گرفت و لذا برای اولین بار، گروه‌های متقارن درجه‌چهار در نوشته‌های او ظاهر شد و گروه چهارگان کیلی و گروه دوری از مرتبهٔ چهار را به‌عنوان زیرگروه‌هایی از گروه S_4 معرفی کرد اما از این فراتر نرفت. دیگر ریاضیدانانی که بعد از لاگرانژ معادلات چندجمله‌ای را مطالعه کردند، در بسیاری از موارد ناچار به استفاده از مفاهیم نظریهٔ گروه‌ها شدند. افرادی مانند گاوس، واندرموند، روفینی[۱]، آباتی[۲]، آبل، گالوا، برتران، ارمیت و کُشی در گسترش مفاهیم اولیهٔ نظریهٔ گروه‌ها تأثیرگذار بودند. صورت قضیهٔ لاگرانژ، برای اولین بار توسط روفینی بیان شد اما او هم اثباتی کامل برای آن ارائه نکرد (لاگرانژ بعد از روفینی در کتابی که در حوزهٔ نظریهٔ جانشانی نوشت، این قضیه را بیان کرد) اما اثبات کامل آن در سال ۱۸۰۲ و توسط آباتی ارائه شد [۶۳].

گاوس همانند اسلاف خود، از مفاهیم نظریهٔ گروه‌ها (نه به‌صورت رایج امروزیِ آن) در مطالعات خود استفاده کرد. شاید نمودهای اولیهٔ گروه‌های آبلی را بتوان در کارهای گاوس دید. مفاهیمی مانند گروه جمعی اعداد صحیح به پیمانهٔ m، گروه ضربی اعداد صحیح که نسبت به m اول‌اند به پیمانهٔ m، گروه ریشه‌های nاُم واحد که منشأ همگی، نظریهٔ اعداد و تلاش گاوس برای حل قضیهٔ کوچک اویلر است. برای مثال، او با در نظر گرفتن اعداد صحیح غیرضربی به پیمانهٔ p (p عددی اول است)، نشان داد که همهٔ آنها توان‌هایی از یک عدد هستند. به عبارت دیگر، گروه ضربی Z_p^* دوری است [۶۳]. بعدها گالوا قدم‌هایی اساسی‌تر در این راه برداشت و معرفی زیرگروه پایا، گروه‌های ساده و ... از مشارکت‌های مهم گالوا در شکل‌گیریِ مفاهیم آغازین نظریهٔ گروه‌ها به شمار می‌آید. او بدون ارائهٔ هیچ اثباتی، ادعا کرد که کوچکترین مرتبهٔ یک گروه ساده، ۶۰ است. حتی تعریف گروه به‌صورت متداول امروزی، اولین بار توسط گالوا طرح شد و ردپای برخی قضیه‌ها نظیر آنچه به قضیهٔ کُشی معروف است (اگر عددی اول مرتبهٔ یک گروه را عاد کند، گروه عضوی از مرتبهٔ آن عدد اول خواهد داشت) را در کارهای او می‌توان دید؛ هرچند که او اثباتی برای آن ارائه نداد [۶۳]. کُشی اولین فردی بود که تلاش‌هایش موجب بلوغ نظریهٔ گروه‌ها و معرفی آن به‌عنوان یک شاخهٔ مستقل ریاضی شد. قضیهٔ کُشی حدود سی سال پس از ظهور آن در نوشتجات نظریهٔ گروه‌ها، اساس کارهای سیلو شد. تأثیر انکارناپذیر قضیهٔ کُشی در اثبات قضیه‌های سیلو باعث شده است که برخی کُشی را بنیان‌گذار نظریهٔ گروه‌ها بدانند [۲۵، ۷۰]. پژوهش‌های کُشی باعث شد نظریهٔ گروه‌ها به‌سرعت به‌عنوان حوزه‌ای مستقل در ریاضی مورد پذیرش قرار گیرد و ریاضیدانانِ بعد از او، هر کدام به‌اندازهٔ توان خود، در رشد و تکامل آن کوشیدند. بزرگانی همچون کلاین، سیلو، برنساید، ژردان، لی و ... تا اوایل قرن بیستم برای شکل‌گیریِ شاکلهٔ نظریهٔ گروه‌ها کوشیدند و مفاهیمی مهم را وارد نظریهٔ گروه‌ها کردند. آنها مفاهیمی را در نظریهٔ گروه‌ها تعریف کردند که در شکل گیریِ این نظریه نقشی تعیین‌کننده داشتند. خوانندهٔ علاقه‌مند به مطالعهٔ سرگذشت نظریهٔ گروه‌ها با شرح و تفصیل بیشتر، می‌تواند به [۲، ۳، ۱، ۲۵، ۶۳] رجوع کند.

[۱] Ruffini [۲] Abatti

در طول قرن بیستم، برخی از زیرساختارهای گروه شناسایی شدند که در مطالعهٔ هرچه بهتر و فراگیرترِ گروه نقشی شایسته بازی کردند. زیرگروه‌های فراتینی، فیتینگ، نرمال‌ساز، مرکز، مرکزساز، مشتق و نرمال از شناخته شده‌ترین‌ها به شمار می‌روند. در این نوشته، به مطالعهٔ مرکزساز خواهیم پرداخت.

مطالعهٔ مرکزسازهای عضوهای یک گروه یا ساختار جبری، به روش‌های گوناگون مورد توجه بسیاری از پژوهشگران حوزهٔ جبر بوده است. نتایجی از به‌کارگیریِ روش شمارش مرکزسازهای یک ساختار جبری را می‌توان در [۳۲، ۴۶] ملاحظه کرد. برخی از پژوهشگران حوزهٔ نظریهٔ گروه‌ها با تعمیم مفهوم مرکزساز، به مطالعهٔ ویژگی‌های یک گروه اقدام کرده‌اند. به خوانندهٔ علاقه‌مند پیشنهاد می‌کنیم جنبه‌های این تعمیم‌ها را در [۶، ۵، ۷، ۲۸، ۲۷، ۴۳، ۵۵، ۷۱، ۷۴، ۷۳، ۷۵، ۸۶] مطالعه کند. رویکرد ما در این مقاله، تاریخ‌نگاریِ صِرف نیست، بلکه در جاهایی به‌ناچار (و گاهی به‌اختیار) صورت برخی قضیه‌ها و تعریف‌ها را ارائه می‌دهیم و از این‌رو بخش‌هایی از نوشتهٔ حاضر، ظاهری تخصصی به خود خواهد گرفت.

۲. پیشگامان مطالعهٔ مرکزساز عضوهای گروه

فرض کنید G یک گروه باشد و $a \in G$. مجموعهٔ

$$C_G(a) = \{g \in G : ga = ag\}$$

مرکزساز a در G است. به‌آسانی می‌توان دید که $C_G(a)$ زیرگروهی از G است. مرکزساز هر زیرمجموعه مانند A از G عبارت است از $\cap_{a\in A} C_G(a)$ و با نماد $C_G(A)$ نشان داده می‌شود. حالت خاصِ $C_G(G)$ را مرکز گروه می‌نامیم و آن را با نماد $Z(G)$ نشان می‌دهیم. در ادامه منظور از مرکزساز، همان مرکزساز یک عضو گروه است. پژوهش در زمینهٔ مرکزسازها به انگیزه‌های گوناگون در نظریهٔ گروه‌ها انجام می‌گیرد؛ از جمله شناسایی گروه‌ها توسط برخی از ویژگی‌های ساختاریِ مرکزسازها مانند آبلی بودن یا دوری بودن، به‌دست آوردنِ اطلاعاتی از گروه با دانستن تعداد مرکزسازهای آن و دست‌یابی به بهترین کران بالا برای مرتبهٔ یک مرکزساز برحسب مرتبهٔ گروه. در قسمتی از این مقاله، به تأثیر شگرف ساختار مرکزساز عضوهای مرتبهٔ ۲ در یکی از بزرگترین پروژه‌های تاریخ نظریهٔ گروه‌ها، یعنی شناسایی گروه‌های سادهٔ متناهی می‌پردازیم. نگارندگان این مقاله بر پایهٔ جستجوهایی که انجام داده‌اند، دریافتند اولین ریاضیدانی که به مرکزساز عضوهای یک گروه توجه کرده است، سیپولای ایتالیایی است که در سال ۱۹۰۹ آن را زیرگروه اساسی نامید. نخست قصد داریم خیلی جزئی به زندگی‌نامهٔ علمی این ریاضیدان که یکی از سرآمدان ریاضیات ایتالیا است، بپردازیم. دومین شخص تأثیرگذار در شناخت مرکزساز، لوییس ویزنر کانادایی است که اولین بار مفهوم CA–گروه را مطرح کرد؛ یعنی گروهی که مرکزساز عضوهای نابدیهی آن، آبلی است.

۱.۲. میشله سیپولا. سیپولا[۱] در سال ۱۹۰۹ مفهومی را وارد نظریهٔ گروه‌ها کرد که طی یکصد سال بعد از تعریفش، نقشی بسیار مهم در شناساییِ ساختارهای گروهی و طبقه‌بندی آنها داشت. سیپولا یکی از برجسته‌ترین ریاضیدانان ایتالیا در اوائل قرن بیستم بود. او در ۲۸ اکتبر ۱۸۸۰ در پالرموی ایتالیا به دنیا آمد. تحصیلات دانشگاهی‌اش را از اسکولا نُرماله[۲] شهر پیزا آغاز کرد. او در آن دانشگاه از محضر استادانی بزرگ همچون لویجی بیانچی[۳] و اولیسّه دینی[۴] بهره برد و به‌واسطهٔ حضور در سمینارها و سخنرانی‌های بیانچی، به نظریهٔ اعداد و نظریهٔ گروه‌ها علاقه‌مند شد. سپس برای گذراندنِ دورهٔ دکتری، به دانشگاه پالرمو رفت و در سال ۱۹۰۲ تحت راهنمایی گابریل تورلّی[۵] موفق به اخذ درجهٔ دکتری از این دانشگاه شد. موضوع رسالهٔ او تعیین مجانبی اعداد اول[۶] بود. او همزمان در سمینارهایی که توسط دیگر ریاضیدان نامی آن زمانِ ایتالیا، فرانسسکو گربالدی، برگزار می‌شد و در آن گربالدی سعی می‌کرد دانشجویان را با تحوّلات روز دنیای ریاضی آشنا سازد، شرکت می‌جست. در سال ۱۹۰۴ سیپولا در کسوت معلم ریاضی دبیرستان مشغول به کار شد. محل خدمت او شهر کوچک کورلئونه[۷] در ۳۵ کیلومتری جنوب پالرمو بود. فضای آرام محل زندگی‌اش باعث شد علی‌رغم مشغلهٔ فراوانی که تدریس برایش به همراه داشت، بتواند به پژوهش‌های خود ادامه دهد. حاصل این دوران از زندگی سیپولا که تا سال ۱۹۱۱ ادامه داشت، چندین مقاله بود. بین سال‌های ۱۹۰۹ تا ۱۹۱۲ او مفهوم زیرگروه‌های اساسی[۸] یک گروه را معرفی کرد که مقالات مرتبط با این مفهوم در مجلهٔ رندیکونتی دِلا آکادمیا دِلا ساینز دی ناپولی[۹] به چاپ رسید. او به همراه دانشجویش در کاتانیا، گاسپار میگنوس[۱۰] (۱۹۵۱–۱۸۷۵)، زیرگروه‌های اساسی گروه تصویری عام از بُعد ۲ روی میدان متناهی را تعیین کردند. در سال ۱۹۱۱ به‌عنوان استاد دانشگاه کاتانیا واقع در شهر کاتانیا در ساحل شرقی سیسیل منصوب شد. در سال ۱۹۱۶ گاتانو اسکورزا[۱۱] به او ملحق شد. اسکورزا برخی از کارهای سیپولا را از حالت گروه‌های متناهی به گروه‌های نامتناهی تعمیم داد. سیپولا در سال ۱۹۲۳ به دانشگاه پالرمو انتقال یافت و تا آخر عمر در سال ۱۹۴۷ جایگاه استادیِ آن دانشگاه را برای خود حفظ کرد. از نگاه گایدو زاپا[۱۲] و جیووانی زاخر[۱۳] که اولی در نظریهٔ گروه‌ها و دومی در نظریهٔ اعداد شهرت دارد، سیپولا کسی بود که جبر و نظریهٔ اعداد را در ایتالیا توسعه داد.

۲.۲. لوییز ویزنر. حدود شانزده سال بعد از سیپولا و در سال ۱۹۲۵ لویس ویزنر[۱۴] به مطالعهٔ گروه‌هایی که مرکزساز عضوهای نابدیهی آن آبلی است، پرداخت. او این گروه‌ها را CA- گروه نامید و ثابت کرد چنین گروهی حل‌پذیر یا ساده است [۹۰]. او در سال ۱۸۹۹ در کانادا به دنیا آمد و در سال ۱۹۲۳ از دانشگاه کلمبیا مدرک دکتری خود را زیر نظر کول فرانک[۱۵] که خود شاگرد کلاین بود، دریافت

[۱] Michele Cipolla [۲] Scuola Normale [۳] Luigi Bianchi [۴] Ulisse Dini [۵] Gabriele Torelli [۶] Asymptotic determinations of primes [۷] Corleone [۸] fundamental subgroups [۹] Rendiconti della Accademia delle Scienze di Napoli [۱۰] Gaspare Mignosi [۱۱] Gaetano Scorza [۱۲] Guido Zappa [۱۳] Giovanni Zacher [۱۴] Luis Weisner [۱۵] Cole Frank

کرد. عنوان رسالهٔ او گروه‌هایی که زیرگروه‌های بیشین آنها مستقل هستند، بود. او پس از اخذ مدرک در دانشگاه نیوبرونشویک[1] در مقام استاد مشغول به کار شد و تا آخر عمرش آن جایگاه را حفظ کرد. ویزنر به‌واسطهٔ معرفی روش ویزنر در ریاضی معروف است. روش ویزنر، برای یافتن توابع مولد توابعی خاص با استفاده از نظریهٔ نمایش گروه‌ها و جبرهای لی به‌کار می‌رود و در سال ۱۹۵۵ معرفی شد [۴۷].

۳.۲. ریچارد براوئر. ریچارد براوئر در ۱۰ فوریهٔ سال ۱۹۰۱ در خانواده‌ای مرفه در برلین آلمان متولد شد. پدرش ماکس براوئر یک تاجر عمده‌فروش چرم بود که صاحب دو پسر و یک دختر بود. پسر بزرگش، آلفرد، هفت سال از ریچارد بزرگتر و ریاضیدان بود و در علاقه‌مندیِ ریچارد به ریاضی، نقشی مهم داشت. ریچارد در سال ۱۹۲۵ دکترایش را در دانشگاه برلین گرفت و در آنجا یک سمت آموزشی را پذیرفت و تا سال ۱۹۳۳ در دانشگاه برلین ماند تا زمانی که همهٔ یهودی‌ها در دوران هیتلر از سمت‌های دانشگاهی برکنار شدند . او فوراً در ایالات متحده آمریکا جایگاهی در دانشگاه کنتاکی گرفت و همان سال آلمان را به قصد کار با هرمان وایل در مؤسسهٔ مطالعات پیشرفتهٔ پرینستون، ترک کرد. بعدها پژوهش‌های این دو نفر روی نظریهٔ پل دیراک دربارهٔ اسپین الکترون در مکانیک کوانتومی، منجر به کسب جایزه برای آنان شد. براوئر سپس به کار جُرج فروبنیوس علاقه‌مند شد که در سال ۱۸۹۶ سرشت‌های گروه را معرفی کرده بود. او کار فروبنیوس را جلو برد و نظریهٔ سرشت‌های مدولار را گسترش داد که دیدگاهی نو در مطالعهٔ سرشت‌های گروه و گسترش جبر بود. او سپس در سال‌های ۱۹۳۵–۱۹۴۸ در دانشگاه تورنتو خدمت کرد و سپس از آنجا به دانشگاه میشیگان رفت. براوئر درجهٔ استادی خود را سال ۱۹۵۲ در گروه ریاضی دانشگاه هاروارد دریافت کرد و تا زمان بازنشستگی به سال ۱۹۷۱ در آنجا ماند. در اواخر دهه ۱۹۵۰ او شروع به تدوین یک روش برای طبقه‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی کرد؛ امری مهم که توجه‌اش را در بقیهٔ عمر معطوفِ آن کرد. در سال ۱۹۵۱ در نخستین گام در این راستا، گروه‌های خطیِ تصویریِ خاص را شناسایی کرد و در ۱۹۵۵ مقاله‌ای مشترک با دانشجوی دکتری‌اش، فاولر، با عنوان گروه‌های دارای مرتبهٔ زوج چاپ کرد که نقشی اساسی در اثبات قضیهٔ مشهور مرتبهٔ فرد فیت–تامپسون داشت. در این مقاله، براوئر نشان داد که تنها تعداد متناهی گروه ساده وجود دارد که شامل یک برگشت با مرکزسازهای معین هستند. براوئر تقریبا ۳۰ دانشجوی دکتری فارغ‌التحصیل کرد. برخی از تعریف‌ها و قضیه‌هایی که به نام براوئر هستد، عبارت‌اند از جبر براوئر، گروه براوئر، همریختی براوئر، تناظر براوئر، قضیهٔ براوئر–سوزوکی، قضیهٔ براوئر–اویلر، سرشت براوئر و قضیهٔ براوئر دربارهٔ سرشت‌های الحاقی. او سرانجام در ۱۷ آوریل سال ۱۹۷۷ در ماساچوست آمریکا درگذشت [۴۱].

۴.۲. میکیو سوزوکی. سوزوکی در دوم اکتبر سال ۱۹۲۶ در چیبای ژاپن به دنیا آمد. در آوریل ۱۹۴۵ وارد دانشگاه توکیو شد و دورهٔ کارشناسی را در آن دانشگاه به پایان رساند. سپس در آوریل ۱۹۴۸

[1] New Brunswick

برای دورهٔ کارشناسی ارشد در دانشکدهٔ تحصیلات تکمیلی همان دانشگاه پذیرش گرفت و تحت هدایت شوکیچی ایاناگا شروع به تحصیل کرد. یکی از کسانی که عمیقاً او را تحت تأثیر قرار داد، کنکیچی ایواساوا بود. در ژانویهٔ سال ۱۹۵۲ تا ماه می همان سال، او با دریافت بورس مطالعاتی، به دانشگاه ایلینویز رفت. در ماه می همان سال با درجهٔ دکتری از دانشگاه توکیو مدرک دکتری خود را اخذ کرد. سپس تابستان همان سال را در دانشگاه میشیگان سپری کرد. آر. براوئر در آن موقع استاد دانشگاه میشیگان بود و جی والتر و دبلیو فیت، دانشجوهای دکتریِ او بودند. او از سال ۱۹۵۳ تا ۱۹۵۵ دانشیار پژوهشی در دانشگاه ایلینویز بود. از سپتامبر سال ۱۹۵۵ تا ماه می سال ۱۹۵۷ او همین سمت را در دانشگاه هاروارد داشت. در سال ۱۹۵۸ با مرتبهٔ دانشیاری به‌عنوان عضو هیئت علمی دانشگاه ایلینویز مشغول به کار شد و سپس در سال ۱۹۵۹ به درجهٔ استادی رسید. سوزوکی در دههٔ پنجاه میلادی کار ویزنر را گسترش داد. او ثابت کرد که اگر G یک CA- گروه سادهٔ غیرآبلی باشد، آن‌گاه مرتبهٔ G زوج است [۸۳]. این نتیجه به قضیهٔ CA-گروه سوزوکی معروف است. مقالهٔ سوزوکی در سال ۱۹۵۲ توسط ویراستار مجله دریافت شد اما در سال ۱۹۵۷ به چاپ رسید. سوزوکی داور مقاله را می‌شناخت و او کسی نبود جز ریچارد براوئر. ظاهراً براوئر از برخی مباحث این مقاله سر در نمی‌آورد و به همین علت، برای مدت مدیدی آن را کنار گذاشت تا اینکه سوزوکی دو سال بعد نسخه‌ای اصلاح‌شده از مقاله را ارسال کرد که خیلی زود منتشر شد [۴۲]. در آن زمان، اهمیت مقاله چندان به چشم نیامد، زیرا چه از نظر خودِ سوزوکی و چه از نظر دیگران، این یک تمرین ساده در نظریهٔ گروه‌ها به حساب می‌آمد. اما نتیجه و روشی که در اثبات قضیهٔ اصلی مقاله به‌کار رفته بود، تأثیری عمیق بر کار دیگران گذاشت [۴۲]. او در سال ۱۹۶۰ دسته‌ای جدید از گروه‌های ساده را یافت که گروه‌های سادهٔ سوزوکی نام گرفتند و با نماد $Sz(q)$ نمایش داده می‌شوند. سپس در سال ۱۹۶۷ یک گروه سادهٔ پراکنده را کشف کرد که به گروه سوزوکی از مرتبهٔ ۴۴۸,۳۴۵,۴۹۷,۶۰۰ معروف شد. سوزوکی در سال ۱۹۷۴ جایزهٔ آکادمی علوم ژاپن را دریافت کرد. در سال ۱۹۸۷ کنفرانس نظریهٔ گروه‌ها و ترکیبیات در ژاپن و به‌مناسبت ۶۰اُمین سال تولد او برگزار گردید و در سال ۱۹۹۷ و در ۷۰اُمین سال تولدش، دوباره در ژاپن تکرار شد. در سال ۱۹۹۱ از دانشگاه کیل آلمان دکترای افتخاری دریافت کرد. او در ۳۱ می سال ۱۹۹۸ و در سن ۷۱ سالگی دقیقاً در سالروز مرگ گالوا درگذشت. چند ماه قبل از مرگش، پزشکان سرطان ریه را در او تشخیص داده بودند. او ماه‌های آخر عمرش را به ژاپن برگشت تا در کشورش چشم از جهان فرو بندد [۴۲].

۵.۲. تامپسون، فیت و هال. دو سال پس از انتشار قضیهٔ CAی سوزوکی، جان تامپسون از دانشگاه شیکاگو درجهٔ دکتریِ خود را اخذ کرد. در رساله‌اش [۸۵] روش‌هایی جدید برای ساخت زیرگروه‌های بیشین حاوی زیرگروه‌های سیلو ارائه داد ([۸۰]). کمی بعد متوجه ارتباط کار فیت با نظریهٔ سرشت استثنایی شد که سوزوکی در رسالهٔ دکتری‌اش معرفی کرده بود. پژوهش‌های فیت [۳۳، ۳۴، ۳۵] و

روش‌هایی که تامپسون در رساله‌اش خلق کرده بود، راهی برای حل یک مسئلهٔ بزرگتر ارائه می‌دادند و بدین ترتیب همکاری تامپسون و فیت شکل گرفت. آن دو به همراه مارشال هال ابتدا ثابت کردند که هر گروه از مرتبهٔ فرد که مرکزساز هر عضو نابدیهی آنها پوچ‌توان باشد، حل‌پذیر هستند. سپس تامپسون و فیت مسئله را در حالت کلی حل کردند که اثبات حدس برنساید بود، یعنی نشان دادند که هر گروه از مرتبهٔ فرد، حل‌پذیر است و این مقاله به‌تنهایی یک شماره از مجله پاسیفیک[۱] را به خود اختصاص داد. این کار جایزهٔ «کُل در جبر»[۲] را در سال ۱۹۶۵ برای آن دو به ارمغان آورد و یکی از تأثیرگذارترین مقالات تاریخ نظریهٔ گروه‌ها شد [۸۰]. فیت خود در یادنامه‌ای که برای سوزوکی نوشت، به تأثیرپذیری خود از این مقاله اذعان کرده است [۱۵]. البته خودِ تامپسون با گسترش و ادامهٔ این کار، توانست گروه‌های سادهٔ مینیمال را شناسایی کند که برای همین کار، مدال فیلدز را در سال ۱۹۷۰ دریافت کرد. بعداً سوزوکی قضیهٔ فیت–تامپسون را تعمیم داد و ثابت کرد که اگر G گروهی ساده باشد که مرکزساز هر عضو نابدیهیِ آن آبلی باشد، آن‌گاه $G \cong PSL(۲, ۲^n)$. علاوه بر سوزوکی، افرادی دیگر مانند براوئر و جی. ای. وال نیز به‌طور مستقل این قضیه را ثابت کردند و از این‌رو آن را قضیهٔ براوئر–سوزوکی–وال می‌نامند. هر سه اثبات، به‌طور عمیقی به راه‌حل و نتایج [۷۷] از ال. ردی وابسته بود [۴۲]. لازم به ذکر است که صورت این قضیه در هیچ‌یک از کارهای وال، براوئر و سوزوکی به این شکل که آورده شد، عنوان نشده است، بلکه به‌قول وال که در پاسخ به نامهٔ سولومون و کی. هارادا نوشته شد، این موضوع از فحوای آن قابل دریافت است [۴۲]. صورت اصلی قضیه از قرار زیر است:

قضیه ۱.۲. فرض کنیم G یک گروه از مرتبهٔ زوج باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) اگر دو زیرگروه دوری A و B از مرتبهٔ زوج از G اشتراک نابدیهی داشته باشند، آن‌گاه زیرگروه دوری C از G چنان موجود است که شامل هر دوی A و B است؛

ب) $G = [G, G]$.

در این صورت، $G \cong PSL(۲, q)$ که در آن، q توانی از یک عدد اول است.

۳. مطالعهٔ گروه‌ها با استفاده از ویژگی‌های ساختاریِ مرکزساز

سوزوکی در سال ۱۹۵۹ مرکزساز برگشت‌های گروه‌های ساده را در نظر گرفت. هر عضو مرتبهٔ ۲ در یک گروه را یک برگشت می‌نامیم. او در بخش اول از [۸۴] ثابت کرد که اگر G یک گروه ساده باشد که مرکزسازِ هر برگشتِ آن آبلی است، آن‌گاه $G \cong PSL(۲, ۲^n)$. پیش از آن، فیت نشان داده بود که این ویژگی، گروه $SL(۲, ۲^n)$ را به‌طور کامل می‌شناساند [۳۶، ۳۷].

[۱] Pacific J. Mathematics [۲] Cole in Algebra

ریچارد براوئر در سال ۱۹۵۴ و در سخنرانی خود در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در آمستردام گفت که ممکن است بتوان گروه‌های سادهٔ متناهی را برحسب مرکزسازهای برگشت‌های آنها شناسایی کرد. اساس این سخن او قضیهٔ براوئر–فاولر با این مضمون بود که تنها تعدادی متناهی از گروه‌های سادهٔ متناهی وجود دارند که شامل مرکزساز هر برگشت خود هستند. او کمی پیش از آن، همراه شاگردان و برخی همکارانش تلاشی را برای اثبات این مطلب که گروه‌های سادهٔ گوناگون به‌وسیلهٔ مرکزساز برگشت‌هایشان قابل شناسایی هستند، آغاز کرده بود. تا سال ۱۹۶۰ اندیشهٔ طبقه‌بندی گروه‌های ساده با استفاده از مرکزسازهای برگشت‌ها کاملاً پذیرفته شده بود و اساس طبقه‌بندیِ گروه‌های ساده در نظر گرفته می‌شد [۱۶]. براوئر بزرگترین زیرگروه نرمال از مرتبهٔ فرد در هر گروه G را با $O(G)$ نمایش داد و گُرنشتاین آن را هستهٔ G نامید و با استفاده از این مفهوم، تعریف مهم دیگری را در نظریهٔ گروه‌ها ارائه داد: او هر زیرگروه K از گروه G را ۲–مؤلفهٔ G نامید اگر $\frac{K}{O(K)}$ شبه‌ساده باشد (گروه L را شبه‌ساده گویند اگر $L=[L,L]$ و گروه $\frac{L}{Z(L)}$ ساده باشد). بر پایهٔ این تعریف و با استفاده از مرکزسازهای برگشت‌ها، گُرنشتاین و والتر تمرکز خود را روی ۲–مؤلفه‌های مرکزساز برگشت‌ها گذاشتند. این امر سرانجام آنان را به تعریف سرنوشت‌ساز دیگری هدایت کرد: گروه سادهٔ G را از مشخصهٔ فرد می‌نامیم اگر برای یک برگشت t در G، $C_G(t)$ دارای یک ۲–مؤلفه باشد و G را از مشخصهٔ زوج می‌نامیم اگر برای هر برگشت t در G داشته باشیم $F^\star(C_G(t)))=O_۲(C_G(t))$ که در آن، $F^\star(H)$ زیرگروه فیتینگ تعمیم‌یافتهٔ گروه H است. سرانجام، حل مسئله‌ای که جوزف. ای. گالیان[۱] آن را ادیسهٔ صد و پنجاه سالهٔ ریاضی نامید، با ارائهٔ آخرین جزئیات آن توسط اشباخر در سال ۲۰۰۴ به پایان رسید [۴۰]. گرچه گُرنشتاین در سال ۱۹۸۳ اعلام کرد که شناسایی گروه‌های ساده را به پایان رسانده است، ولی او برخی حالت‌ها را در نظر نگرفته بود. طبقه‌بندیِ گروه‌های سادهٔ متناهی، یکی از مهم‌ترین مسائل نظریهٔ گروه‌ها از زمان پیدایش آن بود که در طی بیست و پنج سال آخرِ روند حل آن، بیش از سیصد ریاضیدان در آن مشارکت داشتند و بیش از پنج هزار صفحه از مجلاّت ریاضی را به خود اختصاص داد [۴۰]. بسیاری از ابزارهای ریاضی طی این فرآیند عظیم حل مسئله، معرفی شدند و بازیگران بسیاری در آن به ایفای نقش پرداختند که شاید یکی از مهم‌ترینِ آنها را بتوان مرکزسازهای برگشت‌های گروه‌ها دانست.

۱.۳. F–گروه‌ها و زیررده‌های آنها. در این بخش، نخست F–گروه و بعضی از زیررده‌های مهم آن را تعریف می‌کنیم و سپس برخی از نتایجی که را در این زمینه به‌دست آمده است، مرور می‌کنیم. فرض کنیم G یک گروه (نه لزوماً متناهی) باشد. (الف) G یک F–گروه است اگر برای هر دو عضو غیرمرکزی مانند $x,y\in G$ که $C_G(x)\leq C_G(y)$، داشته باشیم $C_G(x)=C_G(y)$. (ب) G یک AC–گروه است اگر مرکزساز هر عضو غیرمرکزی آن در G آبلی باشد. (ج) G یک I–گروه است اگر مرتبهٔ مرکزساز همهٔ

---

[۱] Joseph. A. Gallian

عضوهای غیرمرکزیِ آن با هم برابر باشند. (د) G یک CH-گروه است اگر برای هر دو عضو غیرمرکزی مانند $x, y \in G$ که $C_G(x) \leq C_G(y)$، داشته باشیم $|C_G(x)| = |C_G(y)|$. دلفی و همکاران [۳۰] نشان دادند که $CA \subset CH \subset F$. ایتو [۵۱] ۱۹۵۳ در سال ردهٔ F-گروه‌ها را مورد بررسی قرار داد. یک زیرردهٔ مهم از F-گروه‌ها، ردهٔ I-گروه‌ها است. ایتو ثابت کرد هر I-گروه، حاصل‌ضرب مستقیم یک گروه آبلی و یک گروه از مرتبهٔ توانی از یک عدد اول است. قبلاً اشاره کردیم که به مرکزساز هر عضو گروه، زیرگروه اساسی می‌گفتند. ایتو در همان مقاله، A-گروه اساسی (گروهی که هر زیرگروه اساسی سرهٔ نابدیهی آن، آبلی باشد) را تعریف و ویژگی‌هایی از این دسته از گروه‌ها را ثابت کرد. البته این تعریف با تعریف CA- گروه‌های ویزنر، همپوشانی زیادی داشت. ساختار A-گروه‌ها حدود دو دهه بعد، توسط آر. اشمیت که به‌تازگی از رسالهٔ دکتریِ خود در دانشگاه گوته در فرانکفورت با عنوان گروه‌های متناهی با زیرگروه‌های مدولار از بُعد ۲ و زیر نظر رینهولد بئر دفاع کرده بود، تعیین شد. او از نظریهٔ مشبکه برای مطالعهٔ این گروه‌ها بهره برد و آنها را $\mathcal{M}$ -گروه نامید.

نظریهٔ مشبکه در اواخر قرن نوزدهم و در دو حوزهٔ مجزا متولد شده بود. بسیاری از ساختارهای مورد استفاده در منطق دارای ساختار مشبکه هستند. کارهای بول و شرودر ریشه در این حوزه دارند. دیگر جریان، به جبر و برخی از شاخه‌های مهم آن مربوط می‌شود. این جریان با کار ددکیند و پژوهش‌های او روی ایدآل‌ها در میدان‌های جبری آغاز شد. البته ددکیند مشبکه را توزیع‌پذیر در نظر گرفت ولی بعدها بِرکُف این شرط را از تعریف مشبکه کنار گذاشت. از مشبکه به‌عنوان ابزاری برای استخراج برخی قضیه‌های ساختاری استفاده شده است. آر. بئر، جی فون‌نویمان و برخی دیگر، از روش‌های نظریهٔ مشبکه در اثبات قضیه‌هایی در نظریهٔ گروه‌ها بهره بردند. در دوره‌ای امید به نقش سازندهٔ این نظریه در نظریهٔ گروه‌ها زیاد بود و مارشال هال، فصل‌هایی از کتاب نظریهٔ گروه‌های خود را به مشبکه اختصاص داد و سوزوکی کتابی در این زیمنه و پیوند آن با نظریهٔ گروه‌ها به رشته تحریر در آورد. سوزوکی در مقدمهٔ این کتاب نوشت اگر G یک گروه ساده باشد، آنگاه می‌توان G را با مشبکهٔ زیرگروه‌های $G \times G$ تعیین کرد. او سپس ابراز امیدواری کرد که بتوان از نظریهٔ مشبکه به‌منظور طبقه‌بندیِ گروه‌های ساده بهره برد. اما این آرزو با ورود نظریهٔ سرشت به موضوع طبقه‌بندیِ گروه‌های ساده، هرگز جامهٔ عمل نپوشید و بعد از آن بود که نظریهٔ گروه‌ها و نظریهٔ مشبکه، دو شاخهٔ متمایز از ریاضی شدند و به بالندگی خود ادامه دادند. هرچند امروزه دوباره با برخی جریان‌های پژوهشی، امید به نزدیکی این دو موضوعِ پویا، زنده شده است [۳۹]. اشمیت نخستین بار مشبکهٔ مرکزسازها را تعریف و از آن برای مطالعهٔ گروه‌های متناهی استفاده کرد. او ردهٔ $\mathcal{M}$-گروه‌های متناهی را تعیین کرد. این رده از گروه‌ها بعداً با نمادهای CA-گروه یا AC-گروه (چون پیشتر CA-گروه به دسته‌ای دیگر از گروه‌ها اطلاق شده بود که بسیار جزئی با این دستهٔ اخیر تفاوت دارند) معرفی شدند. بعداً اشمیت و به پیروی از او، واسیلوا[۱] نشان دادند که برخی گروه‌های ساده را با

[۱] Vasil'eva

استفاده از مشبکهٔ مرکزسازشان می‌توان شناسایی کرد [۸۸]. وی. ام. بوسارکین[۱] با الهام از طبقه‌بندی $\mathcal{M}$-گروه‌های اشمیت، $\mathcal{M}_۲$-گروه‌های ساده متناهی، یعنی گروه‌های سادهٔ متناهی را که هر مرکزساز سره آنها آبلی یا $\mathcal{M}_۱$ باشد، شناسایی کرد [۲۶]. ال. اف. کوزوینتسکی گروه‌های غیرپوچ‌توانی را مشخص کرد که مرکزساز هر عضو غیرمرکزی آنها زیرگروهی بیشین هستند [۶۶] و وی. آر. مایر[۲] گروه‌های سادهٔ متناهی را شناساند که مرکزساز هر عضو غیرمرکزی از مرتبهٔ فرد، آبلی باشد [۶۹]. با استفاده از قضیهٔ ساختاری $\mathcal{M}$-گروه‌های اشمیت، اف. ربمن موفق شد ساختارF-گروه‌ها را به‌دست آوَرَد و کار ایتو را تکمیل نماید. مطالعهٔ F-گروه‌ها و زیرخانواده‌های آنها در سال‌های بعد از ربمن نیز ادامه یافت و توسط دانشمندانی نظیر مان[۳]، ایشیکاوا[۴] و در سال‌های اخیر، دلفی و همکاران، مورد توجه قرار گرفت [۳۰]. اس. دلفی[۵]، هرزوگ و ای. جابارا[۶] رده‌ای ازF-گروه‌ها موسوم به CH-گروه‌ها را مورد مطالعه قرار دادند [۳۰]. دولفی و همکارانش همانند ربمن، از قضیهٔ ساختاری اشمیت بهره بردند. آنها هر سه نتیجه را به‌صورت زیر با هم تلفیق کردند:

قضیه ۱.۳. فرض کنیم G یک گروه غیرآبلی باشد. G یک CA -گروه (F، CH-گروه) است اگر و تنها اگر در یکی از حکم‌های زیر صدق کند:

(الف) G دارای زیرگروهی آبلی و نرمال از شاخص p باشد؛

(ب) $\frac{G}{Z(G)}$ یک گروه فروبنیوس با هسته و مکمل فروبنیوس $\frac{K}{Z}$ و $\frac{L}{Z}$ باشد به‌طوری که K و L آبلی باشند؛

(پ) $\frac{G}{Z(G)}$ گروه فروبنیوس با هسته و مکمل فروبنیوس $\frac{K}{Z(G)}$ و $\frac{L}{Z(G)}$ باشد به‌طوری که $K = PZ(G)$ که در آن، به ازای $p \in \pi(G)$، P یک p-زیرگروه سیلوی G بوده، P یک CA-گروه (F- گروه، CH- گروه) $Z(P) = P\bigcap Z(G)$ و $L = HZ(G)$ که در آن، H یک p'-زیرگروه آبلی G است؛

(ت) $\frac{G}{Z(G)} \cong S_۴$ و اگر $\frac{V}{Z(G)}$ چهارگروه کلاین و نرمال $\frac{G}{Z(G)}$ باشد، آنگاه V غیرآبلی است؛

(ث) $G = P \times A$، که در آن P یک CA-گروه غیرآبلی از مرتبه توانی از یک عدد اول و A یک گروه آبلی است.

(ج) $\frac{G}{Z(G)} \cong PSL(۲, p^n)$ یا $PGL(۲, p^n)$ و $G' \cong SL(۲, p^n)$ است که p عدد اول و $p^n > ۳$ است؛

(چ) $\frac{G}{Z(G)} \cong PSL(۲, ۹)$ یا $PGL(۲, ۹)$ و G' با پوشش شور[۷] $PSL(۲, ۹)$ یکریخت است.

[۱] V. M. Busarkin [۲] V. R. Maier [۳] Mann [۴] Ishikawa [۵] S. Dolfi [۶] E. Jabara [۷] Schur Cover

اخیراً با استفاده از این قضیه گروه‌هایی که مرکزساز همهٔ عضوهای غیرمرکزی آنها دوری است، توسط نویسندگان متن حاضر مورد شناسایی قرار گرفته‌اند [۵۲].

۲.۳. گروه‌های متناهی با یک CC-زیرگروه. فرض کنیم G یک گروه متناهی و M زیرگروهی سره از G باشد. M را یک CC-زیرگروه از G گوییم اگر برای هر $M \ni x \neq ۱$ داشته باشیم $C_G(x) \leq M$. به نظر می‌رسد فروبنیوس نخستین کسی بود که حدوداً صد سال پیش، گروه‌های شامل CC-زیرگروه‌ها را (ولی نه به‌نام CC-زیرگروه) مطالعه کرد. توجه کنید که در هر گروه فروبنیوس، مکمل و هستهٔ آن CC-زیرگروه هستند. قبل از اینکه نتایج مهم به‌دست آمده در زمینهٔ CC-زیرگروه‌ها بیان کنیم، برای درک بهترِ این نتایج، لازم است بعضی نمادها و اصطلاحات به‌کار رفته در آنها را معرفی کنیم. همواره G یک گروه متناهی و π مجموعه‌ای متناهی از اعداد اول است. $x \in G$ را یک π-عضو گوییم اگر هر شمارندهٔ اولِ مرتبهٔ x، در π باشد و زیرگروه H از G را یک π-زیرگروه گوییم اگر هر عضو H یک π-عضو باشد. همچنین منظور از $\pi(G)$ مجموعهٔ همهٔ شمارنده‌های اولِ $|G|$ است. گروه G را یک $C_{\pi\pi}$-گروه گوییم اگر مرکزساز هر π-عضو آن، یک π-زیرگروه باشد و G را یک πCC-گروه نامیم اگر G شامل CC-زیرگروهی مانند M باشد به‌طوری که $\pi(M) = \pi$. زیرگروه H از G را یک TI-زیرگروه نامیم اگر برای هر $g \in G$ داشته باشیم $H^g = H$ یا $H \cap H^g = ۱$ که در آن، $H^g = g^{-۱}Hg$.

استفادهٔ دیگری که از مرکزساز عضوها برای شناخت و طبقه‌بندیِ گروه‌ها شده است، دربارهٔ گروه‌های شامل یک CC-زیرگروه است. مطالعهٔ چنین گروه‌هایی نزدیک به پنجاه سال طول کشید و در سال ۲۰۰۴ طبقه‌بندی کامل آنها اعلام شد. اندیشه‌های آغازین مربوط به این موضوع، به سال ۱۹۵۹ بازمی‌گردد. در آن سال، فیت ساختار گروه‌های G را که شامل یک CC-زیرگروه M می‌شدند که TI-زیرگروه نیز بودند و از شرط $G \neq N_G(M) \neq M$ و شرط‌هایی دیگر نیز برخوردار بودند، مطالعه کرد. ام. سوزوکی در سال ۱۹۶۲ قدم‌هایی مهم در این راستا برداشت [۸۲]. او ثابت کرد که:

الف) یک گروه حل‌ناپذیر G از نوع $C_{۲۲}$، از نوع CN (پوچتوان بودنِ مرکزساز هر برگشت) است؛

ب) اگر G یک $C_{۲۲}$ ساده غیرآبلی باشد، آنگاه $G \cong Sz(q)$، $q = ۲^{۲m+۱}$ یا G یکریخت با $PSL(۲,۹)$، $PSL(۳,۷)$، $PSL(۲,۲^n)$ یا $PSL(۲,p)$ است که در آن، p عدد اول فرما یا مرسن است؛

ت) اگر G یک گروه ساده غیرآبلی از نوع C_{pp}، $p \in \pi(G)$، باشد، آنگاه $G \cong PSL(۲,q)$ که در آن، $q \in \{۵,۷,۸,۹,۱۷\}$ یا $Sz(q)$ که در آن، $q \in \{۸,۳۲\}$.

سوزوکی در سال ۱۹۶۳ ثابت کرد که اگر G یک CC-زیرگروه M از مرتبهٔ زوج داشته باشد، آنگاه G یا گروه فروبنیوس است (M هسته یا مکمل فروبنیوس) و یا G یکی از گروه‌های $L_۲(q)$، $Sz(q)$،

$q = ۲^n$ و M یا ۲-زیرگروه سیلوی T است و یا $M = N_G(T)$. دبلیو. فیت و جی. جی. تامپسون در سال ۱۹۶۲ نشان داد که اگر M یک CC-زیرگروه از G باشد که $|M| = ۳$، آن‌گاه ساختار G معلوم است. به‌ویژه اگر G ساده باشد، آن‌گاه $G \cong A_۵$ یا $G \cong PSL(۲,۷)$. یک گروه فروبنیوس دارای این ویژگی است که هسته و مکمل آن CC-زیرگروه هستند. بنابراین به نظر آراد و هرفورت، شاید او اولین نفری بوده باشد که متوجه چنین زیرگروهی شده است! ولی این مفهوم را می‌توان در یکی از مقالات فیت نیز یافت [۳۵]. مارسل هرزوگ (که خود دانشجوی فیت بود) در سال ۱۹۶۵ نخستین بار نماد CC-زیرگروه را در [۴۴] معرفی کرد. هرزوگ گروه‌های شامل یک CC-زیرگروه M را که دارای شرایط زیر هستند، مورد مطالعه قرار داد:

الف) $N_G(M) \neq M$؛

ب) $|N_G(M)| \neq [|M| - ۱].|M|$؛

پ) $۳||M|$؛

ت) M دوری نیست.

او نتیجه گرفت که G یا یک گروه فروبنیوس با هستهٔ M است و یا $PSL(۲,۳^n)$، $n \geq ۲$. در همان سال، هرزوگ شرایط دیگری را برای CC-زیرگروه M در نظر گرفت و نتایجی را در این زمینه به‌دست آورد. البته مهم‌ترین کار هرزوگ، رده‌بندی گروه‌های ساده با این شرط است که مرتبهٔ آنها بر سه عدد اول بخش‌پذیر باشد [۴۵]. در سال ۱۹۷۱، ال. آر. فلچر ساختار هر گروه با یک CC-زیرگروه از مرتبهٔ $۳^۲$ را به‌طور کامل مشخص کرد. به‌ویژه او ثابت کرد که اگر G ساده باشد، آن‌گاه با گروه $PSL(۳,۴)$ یکریخت است و CC-زیرگروه آن آبلی مقدماتی است. در ادامه مفهوم $C_{\pi\pi}$-گروه‌ها مطرح شد و در سال ۱۹۶۲، $C_{۲۲}$-گروه‌ها توسط سوزوکی مطالعه شد. هایمن روی $C_{۳۳}$-گروه‌ها کار کرد. سپس πCC-گروه‌ها، یعنی گروه‌های G که شامل یک CC-زیرگروه M با $\pi = \pi(M)$ باشند، تعریف شد. برای درک بیشتر این موضوع، کافی است گروه $A_۵$ و $PSL(۲,۷)$ را در نظر بگیریم که اولی $C_{۲۲}$، $C_{۳۳}$، $C_{۵۵}$، $۲CC$، $۳CC$ و $۵CC$- گروه است و دومی، یک $C_{۲۲}$، $C_{۳۳}$، $C_{۷۷}$، $۳CC$ و $۷CC$- گروه است اما $۲CC$-گروه نیست. آراد در ۱۹۷۶، $۳CC$-گروه‌هایی را طبقه‌بندی کرد که در آن، ۳-زیرگروه سیلوی آن CC-زیرگروه است. قضیهٔ کلی بعدی درباره πCC-گروه‌ها توسط آراد و هرزوگ در سال ۱۹۷۷ ارائه شد. آنها ساختار πCC-گروه‌هایی را که شامل یک CC-زیرگروه M باشند به‌طوری که $۳||M|$، مورد شناسایی قرار دادند. در راستای رسیدن به هدف نهایی، زد. آراد به‌تنهایی یا با همکاری برخی دیگر از پژوهشگران نظریهٔ گروه‌ها مقاله‌هایی منتشر کرد (در سال ۱۹۷۶ [۸]، در سال‌های ۱۹۷۷ و ۱۹۸۰ به‌همراه چیلاگ در [۹، ۱۱]، در سال ۱۹۷۷ به‌همراه هرزوگ [۱۴]). از جمله در [۱۲] به‌همراه دبیلیو هرفورت، گروه‌های

موضعاً متناهی شامل یک πCC-زیرگروه را که ۲ یا ۳ عضو π باشد، طبقه‌بندی کرد. افراد دیگری نیز پژوهش‌های مهمی در این زمینهٔ انجام دادند که فهرست برخی از آنها را می‌آوریم:

- ان. ایوری[۱] و اچ. یاماکی[۲] در سال‌های ۱۹۹۳ و ۱۹۹۶ [۴۸، ۴۹]؛
- جی. اس. ویلیامز[۳] در سال ۱۹۸۰ در [۹۱]؛
- ای. اس. کندراتف[۴] در سال‌های ۱۹۸۹ و ۱۹۹۰ [۶۴]؛
- ای. اس. کندراتف و وی. دی. مازاروف[۵] در سال ۲۰۰۰ [۶۵]؛
- ام. اس. لوچیدو[۶] در سال‌های ۱۹۹۹ و ۲۰۰۲ [۶۷، ۶۸].

از جمله اس. دولفی، ای. جابارا و ام. اس. لوچیدو در سال ۲۰۰۴ فهرستی کامل از C_{55}-گروه‌ها را ارائه کردند [۳۱]. سرانجام، در سال ۲۰۰۴ آراد و هرفورت گروه‌های حاوی یک CC-زیرگروه را شناسایی کردند [۱۰].

۳.۳. مرکزسازهای با اندازهٔ نسبتاً بزرگ. در سال ۱۹۵۵ براوئر و فاولر [۲۴] در بررسی گروه‌های از مرتبهٔ زوج نشان دادند که اگر G گروهی از مرتبهٔ زوج بزرگتر از ۲ و با مرکز از مرتبهٔ فرد باشد، آن‌گاه $x \in G \setminus Z(G)$ وجود دارد به‌طوری که $|C_G(x)| > |G|^{\frac{1}{3}}$. با الهام از این نتیجه، برترام در سال ۱۹۸۴ [۲۲] ثابت کرد که هر گروه حل‌پذیر غیرآبلیِ متناهی G دارای مرکزسازی سره با مرتبهٔ بزرگتر از $|G|^{\frac{1}{4}}$ است. او نشان داد که نمای $\frac{1}{4}$ را می‌توان به $\frac{1}{3}$ بهبود بخشید، اگر G یک گروه ابرحل‌پذیر، فَراآبلی یا از مرتبهٔ $p^{\alpha}q^{\beta}$ باشد که در این حالت اخیر، p و q اعداد اول متمایز هستند. او بعداً به‌همراه مارسل هرزوگ کمی جلوتر رفت و ثابت کرد که این شرایط را می‌توان بهتر کرد: آنها G را یک گروه تجزیه‌پذیر به حاصل‌ضرب دو زیرگروه در نظر گرفتند. در ادامه حدس زدند که در هر گروه حل‌پذیر غیرآبلیِ متناهی G مرکزساز از مرتبهٔ بزرگتر از $|G|^{\frac{1}{2}}$ وجود دارد [۲۳]. سرانجام، آی. ام. ایزاکس[۷] و جی. کوزی[۸] به‌طور مستقل، حدس برترام-هرزوگ را تأیید کردند [۵۰].

۴. مطالعهٔ گروه‌های متناهی بر اساس تعداد مرکزساز عضوها

شناسایی گروه‌هایی که دارای تعدادی معین مرکزساز متمایز هستند، به اوایل دههٔ ۹۰ میلادی و به کار بلکاسترو و شرمن [۲۱] برمی‌گردد. آنها برای گروه متناهی G، تعریف کردند

$$\mathrm{Cent}(G) = \{C_G(a) : a \in G\}.$$

روشن است که گروه G آبلی است اگر و تنها اگر $|\mathrm{Cent}(G)| = 1$. همچنین برای هر گروه غیرآبلی G می‌توان نشان داد که $|\mathrm{Cent}(G)| \geq 4$. گروه G را n-مرکزساز گویند اگر $|\mathrm{Cent}(G)| = n$.

[۱] N. Iiyori [۲] H. Yamaki [۳] J. S. Williams [۴] A. S. Kondratiev [۵] V. D. Mazurov [۶] M. S. Lucido
[۷] I. M. Isaacs [۸] J. Cossey

بلکاسترو و شرمن در سال ۱۹۹۲ گروه‌های ۴ و ۵-مرکزساز را مورد مطالعه قرار دادند. هرچند پیش از آنها اشمیت [۷۹] تعداد مرکزسازهای هر CA-گروه را بر اساس روش‌های نظریهٔ مشبکه تعیین کرده بود، به احتمال قوی، بلکاسترو و شرمن از این نتایج آگاه نبوده‌اند. پس از آنها علی‌رضا اشرفی طی چند مقاله در سال‌های بین ۲۰۰۰ تا ۲۰۰۷ به مطالعهٔ گروه‌های متناهی با استفاده از تعداد مرکزساز عضوهای آنها پرداخت. از جمله نتایج او، شناسایی گروه‌های متناهی با دقیقاً شش مرکزساز در [۱۷، ۱۸] است. یکی از این نتایج در مقالهٔ اول، پاسخ به سؤالی بود که بلکاسترو شرمن طرح کرده بودند. در [۲۱] بلکاسترو و شرمن، مسئله را به این شکل مطرح کردند که آیا گروهی غیر از D_{2p} و Q_8 وجود دارد که در آن، نسبتِ تعداد مرکزسازهای عضوهای گروه به مرتبهٔ گروه از $\frac{1}{2}$ بزرگتر باشد. اشرفی نشان داد که تعداد چنین گروه‌هایی کم نیست و با تغییراتی در صورت پرسش، آن را به یک حدس تبدیل کرد (حدس ۴٫۲ در [۱۷]). بر پایهٔ این حدس، اگر مرتبهٔ یک گروه از $\frac{3}{4}$ تعداد مرکزسازهای آن بیشتر نباشد، آن گروه با یکی از گروه‌های دووجهی از مرتبهٔ ۱۰، گروه متقارن از مرتبهٔ ۶ یا حاصل‌ضرب مستقیم گروه متقارن از مرتبهٔ ۶ در خودش، یکریخت خواهد بود. این حدس در دو مرحله، ابتدا تحت شرایطی توسط نویسندگان این متن، محسن امیری و حلیمه مددی در [۵۳] و در نهایت، در [۵۸] به‌طور کامل تأیید شد. اشرفی در [۱۹] به‌همراه طائری گروه‌های ۷-مرکزساز را که تعداد مرکزسازهای آنها با تعداد مرکزسازهای عامل مرکزی‌شان برابر بود، شناسایی کردند. این گروه‌ها سپس توسط عبداللهی، جعفریان امیری و محمدی حسن‌آبادی تعیین شدند [۴]. در همین مقاله آنها گروه‌های ۸-مرکزساز را نیز تعیین کردند. در سال ۲۰۱۵، نویسندگان این مقاله به‌همراه حلیمه مددی (اس. جی. بایشیا[1] [۲۰] نیز به‌طور مستقل)، ساختار گروه‌های ۹-مرکزساز این گروه‌ها را شناسایی کردند و سرانجام در سال ۲۰۱۷، ساختار گروه‌های ۱۰-مرکزساز مشخص شد [۵۴، ۶۱].

در سال ۲۰۰۹ زرین تعداد مرکزسازهای برخی گروه‌های ساده را تعیین کرد و با استفاده از آن به حدسی از اشرفی پاسخ داد [۹۳]. او در سال ۲۰۱۱ و ۲۰۱۲ با استفاده از شمارش مرکزسازها معیارهایی برای حل‌پذیریِ گروه‌های متناهی ارائه کرد [۹۲، ۹۴] و به مطالعهٔ گروه‌های متناهی با استفاده از مرکزساز در [۹۷، ۹۶] و گروه‌های نامتناهی در [۹۵] ادامه داد. نویسندگان متن حاضر، در سلسله مقالاتی به بررسی ساختار گروه‌های متناهی پرداخته‌اند. در [۵۹] کران پایینی برای تعداد مرکزسازهای هر گروه متناهی داده شده است و گروه‌های غیرآبلی با کمترین تعداد مرکزساز در بین گروه‌های هم‌مرتبه، رده‌بندی شده‌اند. همچنین در [۵۶] به‌همراه حلیمه مددی، تعداد مرکزسازهای هر F-گروه G که $|\frac{G}{Z(G)}| = p^4$ به‌ازای هر عدد اول p، به‌دست آمده است. در [۶۲] تعداد مرکزسازهای هر گروه که عامل مرکزی آن با گروه‌های سادهٔ $PSL(2,q)$ که در آن، q توانی از یک عدد اول است، $Sz(q)$ که در آن، $q = 2^{2m+1}$ و $m > 2$ و $PSL(3,3)$ یکریخت است، تعیین شده است. در واقع این تعمیمی از نتایج زرین در [۹۳] است.

[1] S. J. Baishya

همچنین در [۵۷] تعمیمی از CA-گروه‌ها ارائه شده و مورد شناسایی توسط نویسندگان متن حاضر قرار گرفته است. در واقع اگر CA-گروه‌ها را گروه‌هایی با یک مرکزساز غیرآبلی در نظر بگیریم، در مقالهٔ اخیر گروه‌هایی با دو مرکزساز غیرآبلی مطالعه و نتایجی دربارهٔ گروه‌های تا ۷ مرکزساز غیرآبلی ارائه شده است. سرانجام، نویسندگان متن حاضر در [۶۰] به شمارش مرکزسازهای عضوهایی که مرتبهٔ آنها فرد است، توجه کردند و در کنار نتایج دیگر، محکی برای حل‌پذیری یک گروه متناهی ارائه دادند. روش شمارش مرکزسازهای عضوهای گروه در شناخت خودریختی‌های گروهی در [۷۲] به‌کار گرفته شده است. همچنین رابطهٔ بین تعداد مرکزسازهای عضوهای زیرگروه‌های یک گروه‌ها با تعداد مرکزسازهای آن گروه، موضوع پژوهش در [۷۸] است.

تشکر و قدردانی: نویسندگان از داوران محترم برای مطالعهٔ دقیق این مقاله و ارائهٔ پیشنهادهای سودمند که منجر به بهبود نگارش مقاله شد، کمال تشکر را دارند.

مراجع

[۱] قریشی، سید محسن، نظریهٔ گروه‌ها: سرگذشت و سرنوشت، ریاضی و جامعه، سال ۳ (۱۳۹۷)، شماره (۱)، ۱۷-۹.

[۲] لم، ت. ی.، صد سال نمایش نظریهٔ گروه‌ها (بخش اول)، ترجمه علیرضا جمالی، نشر ریاضی، سال ۱۰ (۱۳۷۸)، شماره (۱۹)، ۳۲-۲۱.

[۳] لم، ت. ی.، صد سال نمایش نظریهٔ گروه‌ها (بخش دوم)، ترجمه علیرضا جمالی، نشر ریاضی، سال ۱۰ (۱۳۷۸)، شماره (۲۰)، ۶۴-۵۵.

[4] Abdollahi, A., Jafarian Amiri S. M., Mohammadi Hassanabadi, A., Groups with specific number of centralizers, *Houston J. Math.*, **33** (2007), no. 1, 43–57.

[5] Abdollahi A., Mohammadi Hassanabadi, A., Non-cyclic graph associated with a group, *J. Algebra Appl.*, **8** (2009), no. 2, 243–257.

[6] Abdollahi A., Mohammadi Hassanabadi, A., Noncyclic graph of a group, *Comm. Algebra*, **35** (2007), no. 7, 2057–2081.

[7] Abdollahi, A., Zarrin, M., Non-nilpoten graph of a group, *Comm. Algebra*, **38** (2010), no. 12, 4390–4403.

[8] Arad, Z., A classification of groups with a centralizer condition, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **15** (1976), no. 1, 81-–85.

[9] Arad Z., Chillag, D., On finite groups containing a CC-subgroup, *Arch. Math. (Basel)*, **29** (1977), no. 3, 225–234.

[10] Arad Z., Herfort, W., Classification of finite groups with a CC-subgroup, *Comm. Algebra*, **32** (2004), no. 6, 2087–2098.

[11] Arad Z., Chillag, D., Finite groups containing a nilpotent Hall subgroup of even order, *Houston J. Math.*, **7** (1981), no. 1, 23-–32.

[12] Arad Z., Herfort, W., A classification of locally finite and profinite groups with a centralizer condition, *Comm. Algebra*, **10** (1982), no. 16, 1749–1764.

[13] Arad Z., Herfort, W., The history of the classification of groups containing a CC-subgroup, *Contemp. Math.*, **402** (2006), 1–12.

[14] Arad, Z., Herzog, M., A classification of groups with a centralizer condition II: Corrigendum and addendum, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **17** (1) (1977), 157–160.

[15] Aschbacher, M., Bender, H., Feit و W., Solomon, R., Michio Suzuki (1926–1998), *Notices Amer. Math. Soc.*, **46** (1999), no. 5, 543–551.

[16] Aschbacher, M., Daniel Gorenstein (1923-1992), *Biographical Memoir of National Academy of Sciences*, (2016), 1–17.

[17] Ashrafi, A. R., On finite groups with a given number of centralizers, *Algebra Colloq.*,**7** (2) (2000), 139–146.

[18] Ashrafi, A. R., Counting the centralizers of some finite groups, *Korean J. Comput. Appl. Math.*, **7** (1) (2000), 115–124.

[19] Ashrafi A. R., Taeri, B., On finite groups with a certain number of centralizers, *J. Appl. Math. Comp.*, **7** (2005), 217–227.

[20] Baishya, S. J., On finite groups with specific number of centralizers, *Int. Elec. J. Algebra*, **13** (2013), 53–62.

[21] Belcastro, S. M., Sherman, G. J., Counting centralizers in finite groups, *Math. Mag.*, **5** (1994), 111–114.

[22] Bertram, E. A., Large centralizers in finite solvable groups, *Israel J. Math.*, **47** (4) (1984), 335–344.

[23] Bertram, E. A., Herzog, M., Finite groups with large centralizers, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **32** (3) (1985), 399-414.

[24] Brauer, R., Fowler, K., On groups of even order, *Ann. Math*. **62** (1955), 565–583.

[25] Burns, J. E., The foundation period in the history of group theory, *Amer. Math. Monthly*, **20** (5) (1913), 141–148.

[26] Busarkin, V. M., Structure of strongly isolated subgroups of finite groups, *Algebra Logika*,**4** (2) (1965), 33–50 .

[27] Casolo, C., Finite groups in which subnormalizers are subgroups, *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, **82** (1989), 25–53.

[28] Casolo, C., Subnormalizers in finite groups, *Comm. Algebra*, **18** (11) (1990), 3791–3818.

[29] Cossey, J., Finite soluble groups have large centralisers, *Bull. Aust. Math. Soc.*, 35 (1987), 291–298.

[30] Dolfi, S., Herzog M., Jabara, E., Finite groups whose noncentral commuting elements have centralizers of equal size, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **82** (2010), 293–304.

[31] Dolfi, S., Jabara, E., Lucido, S., C55-Groups, *Sib. Math. J.*, **45** (6) (2004), 1053–1062.

[32] Dutta, J., Basnet, D. K., Nath, R. K., A note on n-centralizer finite rings, arXiv:1512.00973, 2015.

[33] Feit, W., On the structure of Frobenius groups, *Canad. J. Math.*, **9** (1957), 587–596.

[34] Feit, W., On groups which contain Frobenius groups as subgroups, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **1**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1959, 22–28.

[35] Feit, W., On a class of doubly transitive permutation groups, *Illinois J. Math.*, **4**(1960), 170–186.

[36] Feit, W., A characterization of the simple groups $SL(2,2^a)$, *Amer. J. Math.*, **82** (1960), 281–300.

[37] Feit, W., Correction: A characterization of the simple groups $SL(2,2^a)$, *Amer. J. Math.*, **84** (1962), 201–204.

[38] Foruzanfar, Z., Mostaghim, Z., On 10-Centralizer Groups of Odd Order, *ISRN Algebra*, Volume 2014, Article ID.: 607984 (4 pages).

[39] Freese, R., A Review of Subgroup Lattices of Groups, by Roland Schmidt, Wed. Feb. 28 13:55:46 HST 1996, http://www.math.hawaii.edu/ ralph/schmidt/sch-protter/sch-protter.html.

[40] Gallian, J. A., Classification of finite simple groups completed, *MAA Focus*, **1** (1981), 3–7.

[41] Green, J. A., Richard Dagobert Brauer, *Bull. London Math. Soc.*, **10** (1978), no. 3, 317–342.

[42] Harada, K., Michio Suzuki, in Groups and Combinatorics in memory of Michio Suzuki, special issue, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **32** (2001), 1–39.

[43] Heineken, H., On E-groups in the sense of Peng, *Glasg. Math. J.*, **31** (1989), 231–242.

[44] Herzog, M., On finite groups which contain a Frobenius group, *J. Algebra*, **6** (1967), 192–221.

[45] Herzog, M., On finite simple groups of order divisible by three primes only, *J. Algebra*, **10** (1968), 383–388.

[46] Hoseiniravesh, M., Rajabzadeh Moghaddam, M. R., Derakhshandeh, M. F., Lie algebras with few centralizers, *Comm. Algebra*, **45** (2017), no. 7, 2867-2874.

[47] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cipolla.html, accessed April 17, 2017.

[48] Iiyori, N., Yamaki, H., Prime Graph Components of the Simple Groups of Lie Type over the Field of Even Characteristic, *J. Algebra*, **155** (1993), no. 2, 335–343.

[49] Iiyori, N., Yamaki, H., Corrigendum to: prime graph components of the simple groups of Lie type over the field of even characteristic, *J. Algebra*, **181** (1996), 659–660.

[50] Isaacs, I. M., Solvable groups contain large centralizers, *Israel J. Math.*, **55** (1986), no. 1, 58–64.

[51] Ito, N., On finite groups with given conjugate type, I, *Nagoya J. Math.*, **6** (1953), 17–28.

[52] Jafarian Amiri, S. M., Rostami, H., Finite groups all of whose proper centralizers are cyclic, *Bull. Iranian Math. Soc.*, **43** (2017), no. 3, 755–762.

[53] Jafarian Amiri, S. M., Amiri, M., Madadi M., Rostami, H., Finite groups have even more centralizers, *Bull. Iranian Math. Soc.*, **41** (2015), no. 6, 1423–1431.

[54] Jafarian Amiri, S. M., Amiri, M., Madadi, M., Rostami, H., On 9-centraliser groups, *J. Algebra Appl.*, **14** (2015), no. 1, 1550003 (13 pages).

[55] Jafarian Amiri, S. M., Amiri, M., Madadi, M., Rostami, H., On the probability of generating nilpotent subgroups in a finite group, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **93** (2016), 447–453.

[56] Jafarian Amiri, S. M., Amiri, M., Madadi, M., Rostami, H., On F-groups with central factor of order p^4, *Math. Slovaca*, **67** (5) (2017), 1147–1154.

[57] Jafarian Amiri, S. M., Rostami, H., Groups with a few nonabelian centralizers, *Publ. Math. Debrecen*, **87** (2015), no. 3-4, 429–437.

[58] Jafarian Amiri, S. M., Amir M., Rostami, H., Finite groups determined by the number of element centralizers, *Comm. Algebra*, **45** (2017), no. 9, 3792–3797.

[59] Jafarian Amiri, S. M., Rostami, H., Centralizers and the maximum size of the pairwise non-commuting elements in finite groups, *Hacett. J. Math. Stat.*, **46** (2017), no. 2, 193–198.

[60] Jafarian Amiri, S. M. Rostami, H., Finite groups in which every centralizer of the noncentral element of odd order is abelian, *J. Algebra Appl.*, **18** (2019), no. 6, 1950108 (7 pages).

[61] Jafarian Amiri, S. M., Madadi, M., Rostami, H., Groups with exactly ten centralizers, *Bull. Iranian Math. Soc.*, **44** (2018), 1163–1170.

[62] Jafarian Amiri, S. M. Rostami, H., Centralizers in a group whose central factor is simple, *J. Algebra Appl.*, **17** (2018), no. 8, 1850149.

[63] Kleiner, I., The evolution of group theory: A brief survey, *Math. Mag.*, **59** (1986), no. 4, 195–215.

[64] Kondrat'iev, A. S., Prime graph components of finite simple groups, *Math. USSR Sb.*, **67** (1990), no. 1, 235–247. Translation from *Mat. Sb.*, **180** (1989), no. 6, 787–797.

[65] Kondrat'iev,, A. S., Mazurov, V. D., Recognition of alternating groups of prime degree from the orders of their elements, *Sibirsk Mat. Zh.*, **41**, no. 2, 359–369 (Russian). Translation in *Sib. Math. J.*, **41** (2000), no. 2, 294–302.

[66] Kosvintsev, L. F., Finite groups with maximal element centraliers, *Math. Notices Acad. Sci. USSR*, **13** (1973), no. 4, 577-580.

[67] Lucido, M. S., Prime graph components of finite almost simple groups, *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, **102** (1999), 1–22.

[68] Lucido, M. S., Addendum to prime graph components of finite almost simple groups, *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, **107** (2002), no. 1–2, 189–190.

[69] Maier, V. R., Finite groups in which elements of odd order have abelian centralizers, *Sib. Math. J.*, **16** (1963), no. 3, 423–430.

[70] Miller, G. A., Group theory in the history of mathematics, *Sci. Monthly*, **47** (1938), no. 2, 124–127.

[71] Mousavi, L., n-Cyclicizer groups, *Bull. Iranian Math. Soc.*, **37** (2011), 161–170.

[72] Nasrabadi, M. M., Gholamian, A., On Finite n-Acentralizer Groups, *Comm. Algebra*, **43** (2015), no. 2, 378–383.

[73] Peng,T. A., On groups with nilpotent derived groups, *Arch. Math.*, **20** (1969), 251–253.

[74] Peng,T. A., Finite soluble groups with an Engel condition, *J. Algebra*, **11** (1969), 319–330.

[75] Rajabzade Moghaddam, M. R., Rostamyari, M. A., 2-Engelizer subgroup of a 2-Engel transitive groups, *Bull. Korean Math. Soc.*, **53** (2016), no. 3, 657–665.

[76] Rebmann, J., F-Grouppen, *Arch. Math.*, **22** (1971), 225–230.

[77] Redei, L., Ein Satz über die endlichen einfachen Gruppen, *Acta. Math.*, **84** (1950), 129–153.

[78] Saeedi, F., Farrokhi, M., Finite groups with a given number of relative centralizers, *Comm. Algebra*, **46** (2018), no. 1, 378–385.

[79] Schmidt, R., Zentralisatorverbande endlicher Gruppen, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **44** (1970), 97–131.

[80] Scott, L., Solomon, R., Thompson, J., Walter, J., Zelmanov, E., Walter Feit (1930-2004), *Notices Amer. Math. Soc.*, **52** (2005), no. 7, 728–735.

[81] Suzuki, M., *Structure of a Group and the Structure of its Lattice of Subgroups*, Springer-Verlag, Berlin, 1956.

[82] Suzuki, M., On a class of doubly transitive groups, *Ann. of Math.*, **75** (1962), 105–145.

[83] Suzuki, M., The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (1957), 686-695.

[84] Suzuki, M., On characterizations of linear groups, I, II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **92** (1959), 191–219.

[85] Thompson, J. G., Normal p-complements for finite groups, *J. Algebra*, **1** (1964), 43–46.

[86] Tolue, B., The non-centralizer graph of a finite group, *Math. Rep.*, **17** (2015), no. 3, 265–275.

[87] Vasil'eva, A. V., Centralizer lattices of finite simple groups, *Sib. Math. J.*, **18** (1977), no. 2, 251–270 .

[88] Vasil'eva, A. V., Characterization of the group $PSL(2, q)$ by its centralizer lattice, *Algebra Logika*, **15** (1976), no. 5, 509–53.

[89] Weisner, L., Group-theoretic origin of certain generating functions, *Pacific J. Math.*, **5** (1955), 1033–1039.

[90] Weisner, L., Groups in which the normalizer of every element except the identity is abelian, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **31** (1925), 413–416.

[91] Williams, J. S., Prime graph components of finite groups, *J. Algebra*, **69** (1981), 487–513.

[92] Zarrin, M., Criteria for the solubility of finite groups by its centralizers, *Arch. Math.*, **96** (2011), 225–226.

[93] Zarrin, M., On element centralizers in finite groups, *Arch. Math.*, **93** (2009), 497–503.

[94] Zarrin, M., On solubility of groups with finitely many centralizers, *Bull. Iranian Math. Soc.*, **39** (2013), 517–521.

[95] Zarrin, M., On non-commuting sets and centralisers in infinite groups, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **93** (2016), no. 1, 42–46.

[96] Zarrin, M., On noncommuting sets and centralizers in finite groups, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **10** (2015), 1–5.

[97] Zarrin, M., Derived length and centralizers of groups, *J. Algebra Appl.*, **14** (2015), no. 8, 1550133.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۶/۱۰/۲۵؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۷/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۸/۲۱

سید مجید جعفریان امیری: دانشگاه زنجان، دانشکده علوم، گروه ریاضی
رایانامه: sm_jafarian@znu.ac.ir

حجت رستمی: آموزش و پرورش استان زنجان، پژوهشگاه تعلیم و تربیت ملاصدرا، دبیرخانه کشوری ریاضی
رایانامه: h.rostami5991@gmail.com