فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۸، شمارهٔ ۶۵ (پاییز و زمستان ۱۳۹۸)، صص. ۱۶۱ تا ۱۷۷

توزیع‌های پایدار و مدل‌سازی داده‌های با دُم سنگین

مهدی شمس

چکیده

در این مقاله، توزیع‌های پایدار، ویژگی‌های آنها و برخی از کاربردهای آنها مورد بحث و کنکاش قرار می‌گیرد. وجود و یکتاییِ شاخص پایداری در این توزیع‌ها و همچنین ناوردایی توزیع‌های پایدار چندمتغیره تحت تبدیلات آفین بررسی می‌شود.

۱. سرآغاز

نظریهٔ توزیع‌های پایدار یک‌متغیره در دههٔ ۱۹۲۰ توسط لوی و خین‌چین معرفی شد و توسعه یافت [۴]. پس از آن، نتایج این نظریه در علوم دیگر از جمله در فیزیک، نجوم، اقتصاد، مخابرات و الکترونیک به‌کار گرفته شدند. اخیراً توزیع‌های پایدار در مدل‌های مالی کاربردهای فراوانی یافته است که در این زمینه، مطالعهٔ [۱۲، ۱۴، ۱۸] سودمند است. هلتس‌مارک توزیع‌های پایدار را در مدل‌سازی میدان‌های الکتریکی القایی در یک نقطهٔ ثابت به‌کار برد [۹]. کُنُلی و کروگر در پیوند با درآمد یک کنسرت موسیقی ملی، خانوادهٔ توزیع‌های پایدار را برای برآورد پارامتر وزنیِ دُم توزیع به‌کار بردند [۴]. همچنین از توزیع‌های پایدار می‌توان در طیف‌نما برای تعبیر نوار طیف نوری مربوط به اجرام شبه‌ستاره‌ای [۱۵] و تشعشعات ناگهانی و متناوب خورشیدی که باعث آشفتگی در میانگینِ نوسانات درجهٔ حرارت زمین می‌شود، استفاده کرد [۲۰]. روش‌های مونت کارلوی زنجیر مارکوف بیزی و استنباط بیزی در توزیع‌های پایدار به‌ترتیب، در [۱] و [۲] بررسی شده است. توزیع‌های پایدار در نظریهٔ صف‌بندی نیز کاربرد دارند که برای نمونه، می‌توانید به [۱۶، ۱۷، ۱۹] مراجعه کنید. مطالب بیشتر دربارهٔ نظریهٔ توزیع‌های پایدار را می‌توان در بیشتر کتاب‌های پیشرفته دربارهٔ نظریهٔ احتمال از جمله [۶، ۸، ۲۵] یافت.

عبارات و کلمات کلیدی. توزیع پایدار؛ شاخص پایداری؛ تبدیل آفین؛ انتگرال‌های تصادفی پایدار؛ فرآیند پایدار.

ساختار مقاله چنین است که در بخش دوم، توزیع‌های پایدار معرفی می‌شود. هر توزیع پایدار شامل پارامترهایی مانند شاخص پایداری، پارامتر مکان، پارامتر مقیاس، پارامتر چولگی است. در این بخش، پس از بررسی این پارامترها که در ساختار شکل توزیع نقشی اساسی ایفا می‌کنند، برخی از توزیع‌های پایدار مشهور مانند توزیع نرمال، توزیع کُشی و توزیع لوی معرفی می‌شوند. لازم به ذکر است که تابع چگالی بقیه توزیع‌های پایدار را می‌توان با بسط به سری‌ها تقریب زد که در این بخش به این مطلب نیز می‌پردازیم. پس از آن، دربارهٔ ویژگی تک‌مُدی بودنِ این توزیع‌ها مطالبی را بیان می‌کنیم. در پایان این بخش، به روش شبیه‌سازی متغیرهای تصادفی پایدار اشاره می‌کنیم. در بخش سوم، ناوردایی توزیع‌های پایدار نسبت به تبدیلات آفین و تعمیم آن در حالت چندمتغیره و در بخش چهارم، وجود و یکتایی شاخص پایداری مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲. توزیع‌های پایدار

فِلِر [۶] توزیع‌های پایدار را به این صورت تعریف می‌کند: فرض کنیم X، $X_۱$، $X_۲$، ... دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با تابع توزیع ناتباهیدهٔ F باشد و $S_n = X_۱ + \cdots + X_n$. گوییم توزیع F (یا خودِ متغیر تصادفی X) پایدار (اکیداً پایدار) است اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ عددهای $c_n > ۰$ و γ_n موجود باشند به‌طوری که $S_n \overset{d}{=} c_n X + \gamma_n$ ($S_n \overset{d}{=} c_n X$) که در آن، $\overset{d}{=}$ به معنی هم‌توزیع بودنِ متغیرهای تصادفی است. در برخی متن‌ها به‌جای پایدار، از پایدار جمعی یا پایدار لوی نیز یاد می‌شود. تعریف‌های دیگری نیز برای توزیع‌های پایدار ارائه شده است که قضیهٔ زیر معادل بودنِ آنها را نشان می‌دهد.

قضیه ۲.۱. ([۱۳]) حکم‌های زیر با پایداریِ متغیر تصادفی X معادل هستند:

(الف) برای هر $a, b \in \mathbb{R}^+$ و هر جفت متغیرهای تصادفی مستقل $X_۱$ و $X_۲$ که با X هم‌توزیع هستند، عددهای $c \in \mathbb{R}^+$ و $\gamma \in \mathbb{R}$ وجود دارند به‌طوری که $aX_۱ + bX_۲ \overset{d}{=} cX + \gamma$؛

(ب) برای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$ و متغیرهای تصادفی مستقل $X_۱$، $X_۲$، ...، X_n که با X هم‌توزیع هستند، عددهای $c_n \in \mathbb{R}^+$ و $\gamma_n \in \mathbb{R}$ وجود دارند به‌طوری که

$$X_۱ + \cdots + X_n \overset{d}{=} c_n X + \gamma_n;$$

(پ) دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع مانند $\{Y_i\}$، دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت مانند $\{b_i\}$ و دنباله‌ای از اعداد حقیقی مانند $\{a_i\}$ وجود دارند به‌طوری که $\frac{۱}{b_n}\sum_{i=۱}^{n} Y_i + a_n \overset{d}{\to} X$ که در آن، $\overset{d}{\to}$ به‌معنای همگرایی در توزیع است؛

(ت) نمایش کانونی تابع مشخصه به‌صورت

$$\varphi_X(t) = \exp\{\mathrm{i}\mu t - \sigma^\alpha \mid t \mid^\alpha [۱ - \mathrm{i}\beta \mathrm{sgn}(t)\psi_\alpha]\}$$

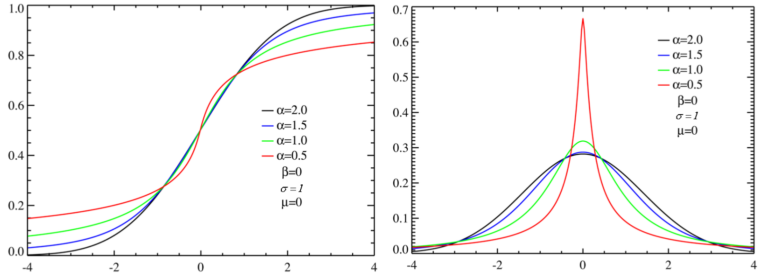
است که در آن،

$$\psi_\alpha = \begin{cases} \tan(\frac{\pi\alpha}{۲}) & \alpha \neq ۱ \\ -\frac{۲}{\pi}\ln|t\,| & \alpha = ۱ \end{cases} \qquad (۱.۲)$$

و $\alpha \in (۰, ۲]$ شاخص پایداری یا نمای مشخصهٔ متغیر تصادفی X، $\sigma \in \mathbb{R}^+ \cup \{۰\}$ پارامتر مقیاس، $\mu \in \mathbb{R}$ پارامتر مکان و $\beta \in [-۱, ۱]$ پارامتر چولگی است. می‌نویسیم $X \sim S(\mu, \sigma, \alpha, \beta)$.

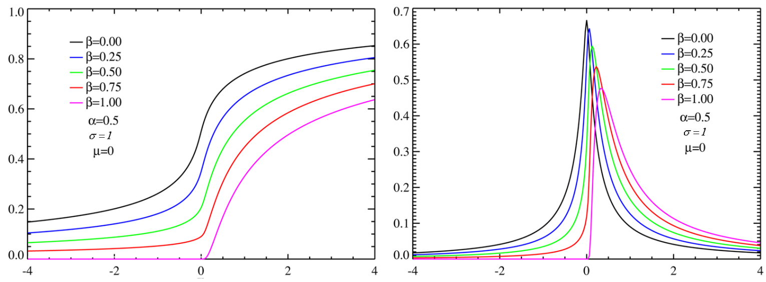
اگر متغیر تصادفی X پایدار با شاخص پایداریِ $\alpha \neq ۱$ باشد، $X - \mu$ اکیداً پایدار است و در حالتی که $\alpha = ۱$ شرط لازم و کافی برای اکیداً پایدار بودنِ X این است که $\beta = ۰$. قسمت (الف) و (ب)ی قضیهٔ ۱.۲ بیانگر این است که خانوادهٔ توزیع‌های پایدار مستقل، نسبت به عمل پیچش بسته است و قسمت (پ) بیان می‌کند که این توزیع‌ها یک تعمیم کلی از قضیهٔ حد مرکزی هستند، یعنی توزیع‌های پایدار تنها توزیع‌هایی هستند که به‌صورت حد مجموع متغیرهای تصادفی مستقلِ هم‌توزیعِ استاندارد شده به‌دست می‌آیند. منظور از استاندارد شدن، وجود دنباله‌های $\{a_i\}$ و $\{b_i\}$ است که در شرط قسمت (پ)ی قضیهٔ ۱.۲ صدق کنند. اگر مجموع‌ها دارای دُم سبک باشند، حد آنها توزیع نرمال دارد و اگر دارای دُم سنگین باشند، یعنی $P(|X| > x) = x^{-\alpha}L(x)$ که در آن، $L(x)$ یک تابع با تغییرات آهسته در بی‌نهایت است، آن‌گاه حد آنها توزیع پایدار با شاخص پایداریِ $\alpha \in (۰, ۲)$ است. از این‌رو هر توزیع با دُم به‌اندازهٔ کافی سنگین، دارای مجموع‌های نرمال‌شدهٔ همگرا به یک توزیع پایدار است. به‌ویژه اگر Y_iها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با واریانس متناهی باشند، با اختیارِ $b_n = \sigma\sqrt{n}$ و $a_n = -\mu\sqrt{n}/\sigma$، یکی از صورت‌های قضیهٔ حد مرکزی به‌دست می‌آید.

در قسمت (ت)ی قضیهٔ ۱.۲ می‌توان نشان داد که شرط لازم و کافی برای متقارن بودنِ توزیع حول μ این است که $\beta = ۰$. بنابراین تابع مشخصهٔ توزیع پایدار نرمال، $\varphi_X(t) = \exp(\mathrm{i}\mu t - \frac{۱}{۲}\sigma^۲t^۲)$ و تابع مشخصهٔ یک توزیع پایدار غیرنرمالِ متقارن، $\varphi_X(t) = \exp(\mathrm{i}\mu t - \sigma^\alpha|\,t\,|^\alpha)$ است. در حالتی که توزیع پایدار متقارن است، با قرار دادنِ $\alpha = ۱$ و $\alpha = ۲$ به‌ترتیب، توزیع کُشی و نرمال به‌دست می‌آید. همچنین به‌ازای $\alpha = \frac{۱}{۲}$ و $\beta = ۱$ توزیع لوی به‌دست می‌آید. در شکل ۱، تابع چگالی و تابع توزیع چند توزیع پایدار متقارن برای شاخص پایداری $\alpha = \frac{۱}{۲}, ۱, \frac{۳}{۲}, ۲$ و به‌ازای پارامتر مکانِ $\mu = ۰$، پارامتر مقیاسِ $\sigma = ۱$ و پارامتر چولگیِ $\beta = ۰$ و در شکل ۲، تابع چگالی و تابع توزیع چند توزیع پایدار چوله برای $\beta = ۰, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}, ۱$ و به‌ازای پارامتر مکانِ $\mu = ۰$، پارامتر مقیاسِ $\sigma = ۱$ و شاخص پایداریِ $\alpha = \frac{۱}{۲}$ ثابت رسم شده است. با توجه به شکل ۱، هرچه منحنی تابع چگالی تیزتر باشد، دُم‌ها



(ب) (آ)

شکل ۱. تابع چگالی و توزیع چند توزیع پایدار متقارن



(ب) (آ)

شکل ۲. تابع چگالی و توزیع چند توزیع پایدار نامتقارن

سنگین‌تر هستند. همچنین با کاهش α، احتمالات دُمی افزایش می‌یابد [۷]. اگر در توزیع پایدار نامتقارن، $\beta > ۰$، آن‌گاه توزیع چوله به راست می‌شود و دُم راست از دُم چپ توزیع سنگین‌تر می‌شود، یعنی برای هر عدد حقیقی مثبت به‌اندازهٔ کافی بزرگ x، $P(X > x) > P(X < -x)$. به‌علاوه تابع چگالی یک توزیع پایدار نامتقارن با پارامتر چولگیِ $|\beta| < ۱$، دارای دو دُم سنگین است. در این حالت اگر $x \to \infty$، به‌ازای ثابت‌های مثبت A و B داریم $f(x) \sim Ax^{-(\alpha+۱)}$ و $f(-x) \sim Bx^{-(\alpha+۱)}$ که این دُم‌های سنگین بیان‌کنندهٔ نقاط دور افتاده در داده‌های توزیع پایدار هستند [۲۱]. همچنین تابع چگالی یک توزیع پایدار نامتقارن با پارامتر چولگیِ $|\beta| = ۱$ فقط دارای یک دُم سنگین است و دُم دیگر برای $\alpha < ۱$ از بین می‌رود و برای $۱ \leq \alpha < ۲$ دُم‌های توزیع نسبت به دُم‌های توزیع نرمال سریع‌تر به سمت صفر میل می‌کنند [۱۳]. همان‌طور که در شکل ۱ دیده می‌شود، توزیع نرمال و کُشی هر دو متقارن و زنگوله‌ای شکل‌اند با این تفاوت که توزیع کُشی دُم‌های سنگین‌تری دارد. با توجه به شکل ۲، توزیع

لوی یک توزیع چوله به راست است و دُم‌های آن نسبت به توزیع کُشی سنگین‌تر هستند. برای درک این مطلب، در جدول ۱ احتمال‌های دُم این سه توزیع پایدار با هم مقایسه شده‌اند. لازم به ذکر است که همهٔ

c	$P(X > c)$		
	نرمال	کُشی	لوی
۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۱/۰۰۰۰
۱	۰/۱۵۸۷	۰/۲۵۰۰	۰/۶۸۲۷
۲	۰/۰۲۲۸	۰/۱۴۷۶	۰/۵۲۰۵
۳	۰/۰۰۱۳۴۷	۰/۱۰۲۴	۰/۴۳۶۳
۴	۰/۰۰۰۰۳۱۶۷	۰/۰۷۸۰	۰/۳۸۲۹
۵	۰/۰۰۰۰۰۰۲۸۶۶	۰/۰۶۲۸	۰/۳۴۵۳

جدول ۱. مقایسهٔ احتمال‌های دُم سه توزیع پایدار

متغیرهای تصادفی مربوط به توزیع‌های پایدار از نوع پیوسته هستند که بجز توزیع‌های پایدار با شاخص پایداریِ $\alpha = \frac{۱}{۲}, ۱, ۲$، به‌دست آوردن تابع چگالی آنها به‌صورت بسته، ناممکن است ولی تابع چگالی این توزیع‌ها را می‌توان با استفاده از تبدیل وارون فوریه به‌صورت بسط تیلور نوشت.

چنان‌که می‌دانید، با در دست داشتنِ تابع مشخصهٔ متغیر تصادفی پیوستهٔ X، یعنی $\varphi_X(t)$، می‌توان تابع چگالی (و به‌طور مشابه تابع توزیع و تابع جرم احتمال برای حالت گسسته) X را از دستور

$$f_X(x) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(u) e^{-\mathrm{i}ux} du$$

محاسبه کرد. برای نمونه، در حالتی که $\alpha \neq ۲$، تابع چگالی متناظر برابر است با

$$f_X(x) = \frac{۱}{\pi} \int_{۰}^{+\infty} \cos\left(xt - \beta \tan(\tfrac{\pi\alpha}{۲}) t^{\alpha}\right) e^{-t^{\alpha}} dt.$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، تابع انتگرالده تعدادی نامتناهی نوسان دارد و دوره‌های نوسان یکنواخت نیست. همچنین با توجه به ویژگی

$$f(x; \mu, \sigma, \alpha, \beta) = f(-x; -\mu, \sigma, \alpha, -\beta),$$

بدون از دست رفتن کلیت، تابع چگالی تنها برای $x > ۰$ تقریب زده می‌شود و بنابراین برای این مقادیر در [۵] ثابت می‌شود که

$$f(x; ۰, ۱, \alpha, \beta) \approx \begin{cases} \frac{۱}{\pi x} \sum_{k=۱}^{\infty} (-x^{-\alpha})^k \frac{\Gamma(k\alpha+۱)}{k!} \sin \frac{k\pi(\beta-\alpha)}{۲} & ۰ < \alpha < ۱ \\ \frac{۱}{\pi x} \sum_{k=۱}^{\infty} (-x)^k \frac{\Gamma(k/\alpha+۱)}{k!} \sin \frac{k\pi(\beta-\alpha)}{۲\alpha} & ۱ < \alpha \leqslant ۲ \end{cases}$$

اگر در قسمت (ت)ی قضیهٔ ۱.۲ در حالت $\alpha = ۱$ پارامترهای ψ_α و μ به‌ترتیب با

$$\mu' = \mu + \beta|c|\ln(|c|)/\pi \quad \text{و} \quad \psi'_\alpha = -\ln\left(t/|c|\right)/\pi$$

تعویض شوند، نسبت به تابع چگالی بالا این مزیت وجود خواهد داشت که با تغییر متغیرهای $\tau = t/|c|$ و $y = (x-\mu')/|c|$، طوری استانداردسازی شوند که

$$f(x; \mu', \sigma, \alpha, \beta)dx = f(y; ۰, ۱, \alpha, \beta)dy.$$

تابع چگالی توزیع پایدارِ متقارن برای $x \neq ۰$ به دو صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$f_۱(x; ۰, ۱, \alpha, ۰) \approx \frac{\alpha}{\pi} \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{k-۱}}{|x|^{k\alpha+۱}} \frac{\Gamma(k\alpha)}{(k-۱)!} \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{۲}\right),$$

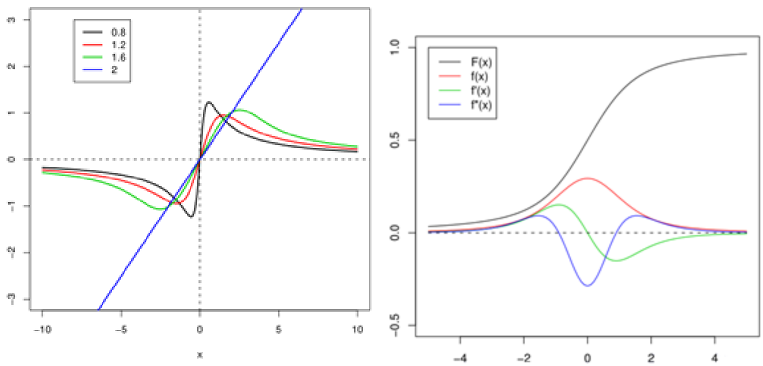
$$f_۲(x; ۰, ۱, \alpha, ۰) \approx \frac{۱}{\alpha\pi} \sum_{k=۰}^{\infty} (-۱)^k \frac{\Gamma((۲k+۱)/\alpha))}{(۲k)!} x^{۲k}$$

که سری اول (دوم) به‌ازای $\alpha < ۱$ ($۱ \le \alpha \le ۲$) همگرا و به‌ازای $۱ < \alpha < ۲$ ($\alpha < ۱$) واگرا است. از سوی دیگر، تابع چگالی یک توزیع پایدار را می‌توان به‌صورت قسمت حقیقی یک انتگرال نیز بیان کرد:

$$\begin{aligned} f(x; \mu, \sigma, \alpha, \beta)dx &\approx \frac{۱}{\pi} Re\left[\int_۰^{\infty} e^{\mathrm{i}t(x-\mu)} e^{-(\sigma t)^\alpha(۱-\mathrm{i}\beta\psi_\alpha)} dt\right] \\ &\approx \frac{۱}{\pi} Re\left[\int_۰^{\infty} e^{\mathrm{i}t(x-\mu)} \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-q_\alpha t^\alpha)^n}{n!} dt\right] \\ &\approx \frac{۱}{\pi} Re\left[\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-q_\alpha)^n}{n!} \left(\frac{\mathrm{i}}{x-\mu}\right)^{\alpha n+۱} \Gamma(\alpha n+۱)\right] \end{aligned}$$

به‌طوری که $q_\alpha = \sigma^\alpha(۱-\mathrm{i}\beta\psi_\alpha)$ و $x \neq \mu$ [۱۵]. برای مشاهدهٔ تقریب‌های دیگر برای تابع چگالی توزیع‌های پایدار، [۱۱، ۲۲] را مطالعه کنید.

یکی از ویژگی‌های مهم توزیع‌های پایدار، تک‌مُدی بودن (زنگوله‌ای‌شکل بودنِ) آنها است به این معنی که nاُمین مشتق تابع چگالی آنها دقیقاً n ریشه دارد. تعریف اولیهٔ تک‌مُدی بودن را خین‌چین در سال ۱۹۳۸ بیان کرد [۱۰]: تابع توزیع $F(x)$ را تک‌مُدی گوییم اگر $a \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به‌طوری که $F(x)$ در $x < a$ محدب و در $x > a$ مقعر باشد.



(ب) (آ)

شکل ۳. (آ) ویژگی تک‌مُدی بودن توزیع‌های پایدار (ب) تابع امتیاز برای چند توزیع پایدار

مسئلهٔ تک‌مُدی بودنِ توزیع‌های پایدار، نخست توسط وینتنر [۲۳] مطرح شد. او نشان داد که توزیع‌های پایدارِ متقارن، تک‌مُدی هستند. اثبات تک‌مُدی بودنِ این توزیع‌ها در حالت کلی توسط یامازاتو [۲۴] انجام شد که ثابت کرد توزیع‌های تقسیم‌پذیرِ نامتناهی، تک‌مُدی هستند. البته تاکنون هیچ نتیجهٔ تحلیلی برای یافتن موقعیت مُد توزیع پیدا نشده است اما با روش‌های عددی می‌توان مُد توزیع‌های پایدار را پیدا کرد. در شکل ۳ (آ) به‌ازای $\alpha = ۱/۳$ و $\beta = ۰$ ویژگی تک‌مُدی بودن این توزیع‌ها مشاهده می‌شود. همچنین در شکل ۳ (ب) به‌ازای $\alpha = ۰/۸, ۱/۲, ۱/۶, ۲$ و $\beta = ۰$ تابع امتیاز، یعنی $g(x) = -f'(x)/f(x)$ رسم شده است.

پایداریِ توزیع را می‌توان با معادله‌ای برحسب تابع مشخصهٔ φ نیز تعریف کرد: با استفاده از قسمت (ب)ی قضیهٔ ۱.۲، F پایدار است اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، عددهای $c_n > ۰$ و γ_n موجود باشند که $\varphi_{S_n}(t) = \varphi_{c_n X + \gamma_n}(t)$ و یا $\varphi^n(t) = \varphi(c_n t) e^{\mathrm{i}t\gamma_n}$ و یا $n \ln \varphi(t) = \ln \varphi(c_n t) + \mathrm{i}t\gamma_n$.

برای مثال، توزیع $N(\mu, \sigma^۲)$ با تابع مشخصهٔ $\varphi(t) = e^{\mathrm{i}\mu t - \frac{۱}{۲}\sigma^۲ t^۲}$ پایدار است، زیرا

$$n \ln \varphi(t) = \ln \varphi(c_n t) + \mathrm{i}t\gamma_n$$

اگر و تنها اگر

$$\mathrm{i}\mu t n - \frac{n}{۲}\sigma^۲ t^۲ = \mathrm{i}\mu t c_n - \frac{۱}{۲}\sigma^۲ t^۲ c_n^۲ + \mathrm{i}t\gamma_n$$

اگر و تنها اگر

$$\frac{\sigma^۲ t^۲}{۲}(c_n^۲ - n) + \mathrm{i}t(n\mu - c_n\mu - \gamma_n) = ۰$$

و با توجه به اینکه تساوی اخیر باید برای هر t برقرار باشد، داریم $c_n = \sqrt{n}$ و $\gamma_n = (n - \sqrt{n})\mu$. پس برای هر $n \in \mathbb{N}$، $c_n = \sqrt{n} \in \mathbb{R}^+$ و $\gamma_n = (n - \sqrt{n})\mu \in \mathbb{R}$ وجود دارند به‌طوری که $X_۱ + \cdots + X_n \overset{d}{=} c_n X + \gamma_n$ و در پی آن، طبق قسمت (ب)ی قضیهٔ ۱.۲، توزیع نرمال پایدار است. همچنین متغیر تصادفی $X - \mu$ که دارای توزیع $N(۰, \sigma^۲)$ است، یک توزیع اکیداً پایدار است.

اگر توزیع F پایدار باشد و $\mathbb{E}(X) = \mu$ و $\mathbb{V}ar(X) = \sigma^۲ < \infty$، ضرایب c_n و γ_n را می‌توان از طریق معادله‌های $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(c_n X + \gamma_n)$ و $\mathbb{V}ar(S_n) = \mathbb{V}ar(c_n X + \gamma_n)$ و یا $n\mu = c_n\mu + \gamma_n$ و $n\sigma^۲ = c_n^۲\sigma^۲$ محاسبه کرد که همان ضرایب توزیع نرمال در مثال بالا، یعنی $c_n = \sqrt{n}$ و $\gamma_n = (n - \sqrt{n})\mu$ به‌دست می‌آید. بنابراین همان‌گونه که در بخش ۴ نیز اشاره خواهد شد، تنها توزیع پایدار با واریانس متناهی، توزیع نرمال است.

توزیع کُشی $C(\mu, \sigma)$ با تابع چگالی $f(x) = \frac{\sigma}{\pi}\frac{۱}{\sigma^۲ + (x-\mu)^۲}$ و تابع مشخصهٔ $\varphi(t) = e^{\mathrm{i}\mu t - \sigma|t|}$ نیز پایدار است، زیرا $n \ln \varphi(t) = \ln \varphi(c_n t) + \mathrm{i}t\gamma_n$ اگر و تنها اگر

$$-n\sigma|t| + \mathrm{i}n\mu t = -\sigma|c_n t| + \mathrm{i}c_n\mu t + \mathrm{i}t\gamma_n$$

اگر و تنها اگر

$$\sigma|t|(c_n - n) + \mathrm{i}t(\gamma_n + c_n\mu - n\mu) = ۰$$

که تساوی اخیر به‌ازای هر t برقرار است اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، $c_n = n$ و $\gamma_n = ۰$. لذا توزیع کُشی اکیداً پایدار است. همچنین از اینکه در این توزیع $\beta = ۰$، نتیجه می‌گیریم توزیع کُشی یک توزیع اکیداً پایدارِ متقارن است. مشابهاً توزیع لوی $\mathrm{Levy}(\mu, \sigma)$ با تابع چگالی

$$f(x) = \sqrt{\frac{\sigma}{۲\pi}}\frac{۱}{(x-\mu)^{۳/۲}} e^{-\frac{\sigma}{۲(x-\mu)}}$$

که در آن، $x > \mu$ پایدار است [۱۳]. در پایان این بخش، تذکر می‌دهیم که برای شبیه‌سازیِ متغیرهای تصادفی با توزیع‌های پایدار، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم [۳، ۱۳]:

(الف) برای شبیه‌سازیِ متغیر تصادفی نرمال $N(\mu, \sigma^۲)$، دو متغیر تصادفی مستقل

$$X_۱ = \mu + \sigma\sqrt{-۲\ln U_۱}\cos(۲\pi U_۲),\ X_۲ = \mu + \sigma\sqrt{-۲\ln U_۱}\sin(۲\pi U_۲)$$

که در آن، U_1 و U_2 متغیرهای تصادفی مستقل $U(0,1)$ هستند، مناسب است؛
(ب) برای شبیه‌سازیِ متغیر تصادفی کُشی $C(\mu,\sigma)$، متغیر تصادفی

$$X = \sigma \tan\left(\pi U - \frac{\pi}{2}\right) + \mu$$

که در آن، $U \sim U(0,1)$ مناسب است؛
(پ) برای شبیه‌سازیِ متغیر تصادفی لوی $\mathrm{Levy}(\mu,\sigma)$، متغیر تصادفی $X = \frac{\sigma}{Z^2} + \mu$ که در آن، $Z \sim N(0,1)$ مناسب است؛
(ت) گیریم Θ و W به‌ترتیب، دو متغیر تصادفی مستقل $U(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ و نمایی با پارامتر $\lambda = 1$ باشند. در این صورت به‌ازای $\alpha \neq 1$ و $-1 \leq \beta \leq 1$ و با فرضِ $\theta_0 = \arctan\left(\beta \tan(\pi\alpha/2)\right)/\alpha$، متغیر تصادفی

$$Z = \begin{cases} \frac{\sin \alpha(\theta_0 + \Theta)}{\sqrt[\alpha]{\cos \alpha\theta_0 \cos \Theta}} \left[\frac{\cos(\alpha\theta_0 + (\alpha-1)\Theta)}{W}\right]^{(1-\alpha)/\alpha} & \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \beta\Theta\right)\tan\Theta - \beta \ln\left(\frac{W \cos\Theta}{1 + \frac{2}{\pi}\beta\Theta}\right)\right] & \alpha = 1 \end{cases}$$

شبیه‌ساز متغیر تصادفی پایدار است. به‌ویژه اگر توزیع، پایدارِ متقارن باشد، باید $\theta_0 = 0$ و بنابراین متغیر تصادفی

$$Z = \begin{cases} \frac{\sin \alpha\Theta}{\sqrt[\alpha]{\cos \Theta}} \left[\frac{\cos(\alpha-1)\Theta}{W}\right]^{(1-\alpha)/\alpha} & \alpha \neq 1 \\ \tan\Theta & \alpha = 1 \end{cases}$$

شبیه‌ساز یک متغیر تصادفی پایدارِ متقارن است [۱۳].

۳. ناوردایی نسبت به تبدیل‌های آفین

در این بخش، ناوردایی توزیع‌های پایدار یک‌متغیره را نسبت به تبدیل‌های آفین بررسی می‌کنیم و در بخش بعدی، آن را به حالت چندمتغیره تعمیم می‌دهیم.

گزاره ۱.۳. اگر X یک توزیع پایدار با شاخص پایداریِ α، پارامتر مکانِ μ، پارامتر مقیاسِ σ و پارامتر چولگیِ β باشد و گروه تبدیل‌های آفین $G = \{g_{a,b}(x) = ax + b \,:\, a \neq 0, b \in \mathbb{R}\}$ روی X عمل کند، آن‌گاه $g_{a,b}(X) = aX + b$ دارای توزیع پایدار با شاخص پایداریِ α، پارامتر مکانِ $\mu' = a\mu + b + \Omega_\alpha$، پارامتر مقیاسِ $\sigma' = |a|\sigma$ و پارامتر چولگیِ $\beta' = \beta\mathrm{sgn}(a)$ خواهد بود که

در آن،

$$\Omega_\alpha=\begin{cases}\circ & \alpha\neq ۱\\ -\frac{۲}{\pi}\beta\sigma\ln|a| & \alpha=۱\end{cases}\qquad(۱۰۳)$$

اثبات. با توجه به قسمت (ت)ی قضیهٔ ۱۰۲، داریم

$$\begin{aligned}\varphi_{g_{a,b}(X)}(t)&=e^{\mathrm{i}tb}\phi_X(at)\\&=\exp\{\mathrm{i}t\,(a\mu+b)-(|a|\sigma)^\alpha\,|t|^\alpha[۱-\mathrm{i}\beta\mathrm{sgn}(a)\mathrm{sgn}(t)\psi'_\alpha]\}\end{aligned}$$

که در آن،

$$\begin{aligned}\psi'_\alpha&=\begin{cases}\tan\left(\frac{\pi\alpha}{۲}\right) & \alpha\neq ۱\\ -\frac{۲}{\pi}\ln|t|-\frac{۲}{\pi}\ln|a| & \alpha=۱\end{cases}\\&=\psi_\alpha+\begin{cases}\circ & \alpha\neq ۱\\ -\frac{۲}{\pi}\ln|a| & \alpha=۱\end{cases}\\&=\psi_\alpha+\frac{\Omega_\alpha}{\beta\sigma_a}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\varphi_{g_{a,b}(X)}\left(t\right)&=\exp\left\{\mathrm{i}t\mu'-\mathrm{i}t\Omega_\alpha-\sigma'^\alpha\,|t|^\alpha\left[۱-\beta'\mathrm{sgn}(t)\Psi_\alpha-\mathrm{i}\frac{\mathrm{sgn}\left(a\right)\mathrm{sgn}\left(t\right)\Omega_\alpha}{\sigma a}\right]\right\}\\&=e^{\mathrm{i}t\mu'-\sigma'^\alpha|t|^\alpha[۱-\beta'\mathrm{sgn}(t)\Psi_\alpha]}\times e^{-\frac{\mathrm{i}\gamma}{\sigma a}}\end{aligned}$$

که در آن،

$$\begin{aligned}\gamma&=\left[\sigma\,at-\sigma^\alpha\,|a|^\alpha\,\mathrm{sgn}\left(a\right)|t|^\alpha\,\mathrm{sgn}\left(t\right)\right]\Omega_\alpha\\&=\begin{cases}\circ & \alpha\neq ۱\\ \left[\sigma\,at-\sigma\,at\right]\left(-\frac{۲}{\pi}\beta\sigma\,a\ln|a|\right) & \alpha=۱\end{cases}\end{aligned}$$

پس با توجه به تابع مشخصهٔ متغیر تصادفی $g_{a,b}\left(X\right)$، یعنی

$$\varphi_{g_{a,b}(X)}\left(t\right)=e^{\mathrm{i}t\mu'-\sigma'^\alpha|t|^\alpha\left[۱-\mathrm{i}\beta'\mathrm{sgn}(t)\Psi_\alpha\right]}$$

و به‌کارگیریِ قسمت (ت)ی قضیهٔ ۱۰۲، حکم اثبات می‌شود. □

نتیجه ۲.۳. اگر X یک توزیع پایدار با شاخص پایداریِ α، پارامتر مکانِ μ، پارامتر مقیاسِ σ و پارامتر چولگیِ β باشد و گروه

$$G_۱ = \{g_{۱,b}(x) = x + b : b \in \mathbb{R}\} \, (G_۲ = \{g_{a,۰}(x) = ax : a \neq ۰\})$$

روی X عمل کند، آن‌گاه $g_{۱,b}(X) = X + b$ ($g_{a,۰}(X) = aX$) دارای توزیع پایدار با شاخص پایداریِ α، پارامتر مکانِ $\mu'_۱ = \mu + b$ ($\mu'_۲ = a\mu + \Omega_\alpha$)، پارامتر مقیاسِ $\sigma'_۱ = \sigma$ ($\sigma'_۲ = |a|\sigma$) و پارامتر چولگیِ $\beta'_۱ = \beta$ ($\beta'_۲ = \beta\mathrm{sgn}(a)$) است که در آن، Ω_α در (۱.۳) مشخص شده است.

مشابه گزارهٔ قبل، می‌توان نشان داد که مجموع دو متغیر تصادفی مستقل پایدار، پایدار است. فرض کنیم $X_۱$ ($X_۲$) دارای توزیع پایدار با شاخص پایداریِ α، پارامتر مکانِ $\mu_۱$ ($\mu_۲$)، پارامتر مقیاسِ $\sigma_۱$ ($\sigma_۲$) و پارامتر چولگیِ $\beta_۱$ ($\beta_۲$) باشد. اگر $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند، آن‌گاه $X_۱ + X_۲$ دارای توزیع پایدار با شاخص پایداریِ α، پارامتر مکانِ $\mu = \mu_۱ + \mu_۲$، پارامتر مقیاسِ $\sigma = \sigma_۱^\alpha + \sigma_۲^\alpha$ و پارامتر چولگیِ $\beta = (\beta_۱\sigma_۱^\alpha + \beta_۲\sigma_۲^\alpha)/(\sigma_۱^\alpha + \sigma_۲^\alpha)$ است. به‌استقرا می‌توان نشان داد اگر X_i ($i = ۱, \ldots, n$) متغیرهای تصادفی مستقل با شاخص پایداریِ α، پارامتر مکانِ μ_i، پارامتر مقیاسِ σ_i و پارامتر چولگیِ β_i باشند، آن‌گاه برای ثابت‌های دلخواه t_i ($i = ۱, \ldots, n$) متغیر تصادفی $Y = \sum_{i=۱}^n t_i X_i$ دارای توزیع پایدار با شاخص پایداریِ α، پارامتر مکانِ

$$\mu(\mathbf{t}) = \begin{cases} \sum_{i=۱}^n t_i\mu_i & \alpha \neq ۱ \\ \sum_{i=۱}^n t_i\mu_i - \frac{۲}{\pi}\sum_{i=۱}^n \beta_i t_i \sigma_i \ln|t_i| & \alpha = ۱ \end{cases}$$

پارامتر مقیاسِ $\sigma(\mathbf{t}) = \sqrt[\alpha]{\sum_{i=۱}^n |t_i\sigma_i|^\alpha}$ و پارامتر چولگیِ $\beta(\mathbf{t}) = \sum_{i=۱}^n \frac{\beta_i \mathrm{sgn}(t_i)|t_i\sigma_i|^\alpha}{(\sigma(\mathbf{t}))^\alpha}$ خواهد بود که در آن، $\mathbf{t} = (t_۱, \ldots, t_n)'$. به‌ویژه اگر X_iها متقارن باشند، می‌توان نتیجه گرفت که $\sum_{i=۱}^n t_i X_i$ نیز متقارن است و $\mu(\mathbf{t}) = \sum_{i=۱}^n t_i\mu_i$. همچنین اگر X_iها هم‌توزیع باشند، یعنی برای هر $i = ۱, \ldots, n$، $\mu_i = \mu$، $\sigma_i = \sigma$ و $\beta_i = \beta$، نتیجه می‌گیریم که $\sum_{i=۱}^n X_i$ دارای توزیع پایدار با شاخص پایداریِ α، پارامتر مکانِ $n\mu$، پارامتر مقیاسِ $\sqrt[\alpha]{n}\sigma$ و پارامتر چولگیِ β است.

در پایان این بخش، اشاره می‌کنیم که توزیع‌های پایدار چندمتغیره همانند حالت یک‌متغیره تعریف می‌شوند: فرض کنیم $\mathbf{X}$، $\mathbf{X}_۱$، $\mathbf{X}_۲$، … دنباله‌ای از بردارهای تصادفی kبُعدی مستقل هم‌توزیع باشد. بردار تصادفی kبُعدی $\mathbf{X}$ پایدار است اگر برای هر $n \geq ۲$، ثابتی مانند $c_n > ۰$ و بردار kبُعدی $\mathbf{d}_n$ وجود داشته باشند چنان‌که

$$\mathbf{X}_۱ + \ldots + \mathbf{X}_n \stackrel{d}{=} c_n\mathbf{X} + \mathbf{d}_n.$$

مشابهاً بردار kبُعدی $\mathbf{X}$ اکیداً پایدار است اگر برای هر n، $\mathbf{d}_n = ۰$. همچون حالت یک‌متغیره، $\mathbf{X}$ پایدار است اگر برای هر $a, b \in \mathbb{R}^+$ و هر جفت متغیر تصادفی مستقل مانند $\mathbf{X}_۱$ و $\mathbf{X}_۲$ که با $\mathbf{X}$ هم‌توزیع هستند، $c \in \mathbb{R}^+$ و $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشند به‌طوری که $a\mathbf{X}_۱ + b\mathbf{X}_۲ \overset{d}{=} c\mathbf{X} + \mathbf{d}$.

۴. بررسی وجود و یکتایی شاخص پایداری

در توزیع‌های پایدار، همواره $c_n = n^{۱/\alpha}$ که در آن، شاخص پایداری α در محدودهٔ $۰ < \alpha \leq ۲$ قرار دارد و مقداری منحصر به فرد است. برای نشان دادن این مطلب، بدون از دست رفتنِ کلیّت، فرض می‌کنیم توزیع F متقارن است، زیرا اگر F پایدار باشد، ضریب c_n در آن، با همین ضریب در توزیع متقارن $F_۰$ که مربوط به متغیر تصادفی $X_۱ - X_۲$ است، یکسان خواهد بود. بنابراین وجود و یکتاییِ شاخص پایداری در توزیع‌های پایدار را با فرض متقارن بودنِ F بررسی می‌کنیم.

نخست با تقسیم مجموع S_{m+n} به دو مجموع مستقل S_m و $S'_n = S_{m+n} - S_m$ و با استفاده از پایداریِ توزیع F به‌دست می‌آوریم $S_m \overset{d}{=} c_m X$، $S'_n \overset{d}{=} c_n X$ و $S_{m+n} \overset{d}{=} c_{m+n} X$. در نتیجه

$$c_{m+n} X \overset{d}{=} c_m X_۱ + c_n X_۲. \qquad (۱.۴)$$

به‌استقرا می‌توان نشان داد که

$$S_{mn} \overset{d}{=} c_{mn} X \overset{d}{=} c_n X_۱ + \cdots + c_n X_m = c_n S_m \overset{d}{=} c_n c_m X$$

و از این‌رو برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ داریم $c_{mn} = c_n c_m$. دوباره با استفاده از این رابطه و استقرا می‌توان نشان داد که اگر $n = r^s$، آن‌گاه $c_n = c_r^s$، یعنی

$$c_{r^s} = c_r^s. \qquad (۲.۴)$$

اکنون با قرار دادنِ $s = m + n$ داریم

$$\begin{aligned}
P(X > t) &= P(c_s X > c_s t) = P(c_m X_۱ + c_n X_۲ > c_s t) \\
&= P\Big(\frac{c_m}{c_n} X_۱ + X_۲ > \frac{c_s}{c_n} t\Big) \\
&\geq P\Big(\Big\{\frac{c_m}{c_n} X_۱ \geq ۰\Big\} \cap \Big\{X_۲ \geq \frac{c_s}{c_n} t\Big\}\Big) \\
&= P\Big(X_۱ \geq ۰\Big) P\Big(X_۲ \geq \frac{c_s}{c_n} t\Big) \\
&= \frac{۱}{۲} P\Big(X_۲ \geq \frac{c_s}{c_n} t\Big)
\end{aligned}$$

که نامساوی اخیر به‌دلیل تقارن X_1 حول صفر است. بنابراین برای هر $t > 0$،

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty P(X > t)\, dt \geq \frac{1}{2}\frac{c_n}{c_s}\int_0^\infty P\Big(X_2 \geq \frac{c_s}{c_n}t\Big)\, d\left(tc_s/c_n\right) = \frac{c_n}{2c_s}\mathbb{E}(X).$$

چون $\mathbb{E}(X)$ برای هر $s > n$ متناهی است، $\frac{c_n}{c_s} \leq 2$ که با اختیارِ $n = r^s$ و $m = (r+1)^s - r^s$، به‌دست می‌آوریم

$$\left(\frac{c_r}{c_{r+1}}\right)^s = \frac{c_r^s}{c_{r+1}^s} = \frac{c_{r^s}}{c_{(r+1)^s}} = \frac{c_n}{c_s} \leq 2.$$

بنابراین $c_r \leq c_{r+1}$ (یعنی c_r یک تابع صعودی نسبت به r است). پس $c_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ جواب منحصر به فرد معادلهٔ $c_{mn} = c_n c_m$ است. بنابراین به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، یک α وجود دارد که $c_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$.
اکنون باید نشان دهیم که این α یکتا است و $2 \leq \alpha$. برای اثبات یکتایی α، با فرضِ $c_u = u^{\frac{1}{\beta}}$، نشان می‌دهیم $\alpha = \beta$. بنابر (۲.۴)، داریم

$$\begin{cases} n = r^j \Rightarrow c_n = n^{\frac{1}{\alpha}}, \\ s = \rho^k \Rightarrow c_s = s^{\frac{1}{\beta}}. \end{cases}$$

اما به‌ازای هر $s = \rho^k$، می‌توان عدد صحیح $n = r^j$ را طوری یافت که $n = r^j < s \leq rn = r^{j+1}$.
بنابراین $c_s = s^{\frac{1}{\beta}} \leq r^{\frac{1}{\beta}} n^{\frac{1}{\beta}} = r^{\frac{1}{\beta}} (c_n^\alpha)^{\frac{1}{\beta}} = r^{\frac{1}{\beta}} c_n^{\frac{\alpha}{\beta}}$. ادعا می‌کنیم که $\alpha \leq \beta$. اگرنه داریم $c_s^{\frac{\beta}{\alpha}} \leq r^{\frac{1}{\alpha}} c_n$ یا $c_s^{\frac{\beta}{\alpha}-1} \leq r^{\frac{1}{\alpha}} c_n/c_s < 2r^{\frac{1}{\alpha}}$. به عبارت دیگر، $c_s < \sqrt[\frac{\beta}{\alpha}-1]{2r^{\frac{1}{\alpha}}}$ که این نشان می‌دهد $c_s = s^{\frac{1}{\beta}}$ کراندار است و این نتیجه با فرض اولیه تناقض دارد. مشابهاً ثابت می‌شود $\beta \leq \alpha$ و در پی آن $\alpha = \beta$.

چنان‌که دیدیم، در توزیع نرمال داریم $\alpha = 2$. بنابر (۱.۴)،

$$\mathbb{V}ar(c_{m+n}X) = \mathbb{V}ar(c_m X_1 + c_n X_2)$$

و یا $c_{m+n}^2 \sigma^2 = c_m^2\sigma^2 + c_n^2\sigma^2$. اگر $\sigma^2 < \infty$، آن‌گاه $c_{m+n}^2 = c_m^2 + c_n^2$ و بنابر (۲.۴)، $c_{(m+n)^2} = c_{m^2} + c_{n^2}$ و یا $(m+n)^{\frac{2}{\alpha}} = m^{\frac{2}{\alpha}} + n^{\frac{2}{\alpha}}$ که نتیجه می‌دهد $\alpha = 2$. بنابراین اگر F پایدار با واریانس متناهی باشد، آن‌گاه $\alpha = 2$. معادلاً اگر F پایدار باشد و $\alpha \neq 2$، آن‌گاه باید واریانس نامتناهی باشد. بنابراین اگر واریانس توزیع F متناهی باشد، یا توزیع F پایدار نیست و یا $\alpha = 2$. بر این اساس، می‌توانیم نشان دهیم که $\alpha \leq 2$. گیریم $\alpha > 2$. به‌دلیل تقارنِ توزیع F داریم $S_n \overset{d}{=} c_n X$ و بنابراین برای هر $\varepsilon > 0$،

$$P(|S_n| > tc_n) = P(|c_n||X| > tc_n) = P(|X| > t) = 2P(X > t) \leq 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

با اختیارِ $\varepsilon = \frac{۱}{۴}$، نتیجه می‌گیریم $t > ۰$ وجود دارد که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $P(|S_n| > tc_n) < \frac{۱}{۴}$.
اگر قرار دهیم $K_n = \max_{j=۱}^{n} |X_j|$ و $D_n = S_n - K_n$، چهار جفت $(\pm D_n, \pm K_n)$ هم‌توزیع هستند و از این‌رو بنابر نامساوی فوق، برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\begin{aligned}
\frac{۱}{۴} \geq P(|S_n| > tc_n) \geq & P(S_n > tc_n) \\
&= P(K_n + D_n > tc_n) \\
&\geq P(K_n > tc_n, D_n \geq ۰) \\
&= \frac{۱}{۲}(P(K_n > tc_n, D_n \geq ۰) + P(K_n > tc_n, D_n \leq ۰)) \\
&\geq \frac{۱}{۲} P(K_n > tc_n) \\
&\geq \frac{۱}{۲}[۱ - P(|X_۱| \leq tc_n, \ldots, |X_n| \leq tc_n)] \\
&\geq \frac{۱}{۲}[۱ - (F(tc_n) - F(-tc_n))^n]
\end{aligned}$$

و در پی آن، با استفاده از اینکه برای هر $۰ < x < ۱$، $x \leq e^{(x-۱)}$ می‌توان به‌آسانی ثابت کرد که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\frac{۱}{۲} \leq (F(tc_n) - F(-tc_n)))^n \leq e^{-n(۱-F(tc_n)+F(-tc_n))} \leq e^{-۲n(۱-F(tc_n))}$$

و یا $n(۱ - F(tc_n)) < \frac{\ln ۲}{۲} = M_۰$. بنابراین دنبالهٔ $\{n\,(۱ - F(tc_n))\}$ کراندار است. اما برای هر $x > t$ وجود دارد n و α چنان‌که $\frac{x}{t} = n^\alpha = c_n$. بنابراین برای هر $x > t$،

$$x^\alpha\,(۱ - F(x)) < \frac{M_۰}{n} c_n^\alpha t^\alpha = M_۰ t^\alpha = M.$$

از سوی دیگر،

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^۲) = \int_۰^\infty P(X^۲ > y)\,dy = ۲ & \int_۰^\infty P(X > \sqrt{y})\,dy \\
&= ۴\int_۰^\infty x^\alpha\,(۱ - F(x))\,\frac{۱}{x^{\alpha-۱}}\,dx \\
&\leq ۴M \sum_{k=۱}^{\infty} \int_{۲^{k-۱}}^{۲^k} x^{۱-\alpha} dx \\
&= \frac{۴M}{۲-\alpha} \sum_{k=۱}^{\infty} \left[۲^{k(۲-\alpha)}(۱ - ۲^{\alpha-۲})\right] < \sum_{k=۱}^{\infty} ۲^{k(۲-\alpha)}.
\end{aligned}$$

پس $\infty > \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(2-\alpha)} > \mathbb{E}(X^2)$ و لذا $\sigma^2 < \infty$ که با پایداریِ توزیع F در تناقض است. بنابراین $\alpha \leq 2$.

ساختار اثبات وجود و یکتاییِ شاخص پایداری، به ما این امکان را می‌دهد که پایدار نبودن برخی از توزیع‌ها را به‌آسانی بررسی کنیم. برای روشن شدن این موضوع به دو مثال زیر اکتفا می‌کنیم.

مثال ۱.۴. توزیع گاما (و در نتیجه نمایی و کای دو) پایدار نیست، زیرا با توجه به ساختار تابع مشخصهٔ آن، یعنی $\varphi(t) = (1 - \frac{\mathrm{i}t}{\beta})^{-\alpha}$، اگر این توزیع پایدار باشد، بنابر (۱.۴)، برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ داریم $(n+m)^{\frac{1}{\alpha}} X \stackrel{d}{=} n^{\frac{1}{\alpha}} X_1 + m^{\frac{1}{\alpha}} X_2$. پس

$$\varphi_X(t(n+m)^{\frac{1}{\alpha}}) = \varphi_{X_1}(tn^{\frac{1}{\alpha}})\varphi_{X_2}(tm^{\frac{1}{\alpha}})$$

و یا

$$\Big(1 - \mathrm{i}t\frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{\beta}\Big)^{-\alpha}\Big(1 - \mathrm{i}t\frac{m^{\frac{1}{\alpha}}}{\beta}\Big)^{-\alpha} = \Big(1 - \mathrm{i}t\frac{(m+n)^{\frac{1}{\alpha}}}{\beta}\Big)^{-\alpha}.$$

معادلاً

$$-\frac{\mathrm{i}t}{\beta}(n^{\frac{1}{\alpha}} + m^{\frac{1}{\alpha}}) - \frac{t^2}{\beta^2}(nm)^{\frac{1}{\alpha}} = -\frac{\mathrm{i}t}{\beta}(m+n)^{\frac{1}{\alpha}}$$

و این برای هر t برقرار است اگر $(m+n)^{\frac{1}{\alpha}} = m^{\frac{1}{\alpha}} + n^{\frac{1}{\alpha}}$ و $mn = 0$. معادلهٔ دوم نتیجه می‌دهد که $m = 0$ یا $n = 0$ که با مثبت بودنِ m و n در تناقض است.

مثال ۲.۴. توزیع پواسن با میانگین λ پایدار نیست، زیرا

$$n \ln \varphi(t) = \ln \varphi(c_n t) + \mathrm{i}t\gamma_n \Leftrightarrow n(e^{\mathrm{i}t} - 1) = e^{\mathrm{i}tc_n} - 1 - \mathrm{i}(t/\lambda)\gamma_n$$
$$\Leftrightarrow n(\cos t + \mathrm{i}\sin t - 1) = \cos c_n t + \mathrm{i}\sin c_n t - 1 - \mathrm{i}(t/\lambda)\gamma_n$$

که این معادل است با برقراریِ همزمانِ

$$n \sin t = \sin c_n t - (t/\lambda)\gamma_n \quad \text{و} \quad n\cos t - \cos c_n t = n - 1.$$

چون $c_n > 0$ و γ_n صادق در این دو معادله وجود ندارد، توزیع پواسن پایدار نیست.

تشکر و قدردانی

نویسنده از جناب پروفسور نولان به خاطر راهنمایی‌های ایشان تشکر و قدردانی دارد.

مراجع

[1] Buckle, D. J., *Stable Distributions and Portfolio Analysis: A Bayesian Approach via MCMC*, Ph. D. thesis, Imperial College, London, 1993.

[2] Buckle, D. J., Bayesian inference for stable distributions, *Journal of the American Statistical Association*, **90** (1995), 605–613.

[3] Chambers, J., Mallows, C., Stuck, B., A method for simulating stable random variables, *Journal of the American Statistical Association*, **71** (1976), 340–344. Correction in ibid. **82** (1987), 704.

[4] Connolly M., Krueger, A. B., *Rockonomics: the economics of popular music*, NBER, Working Paper 11282, National Bureau of Economic Research, 2005.

[5] Fan, Z., Estimation problems for distributions with heavy tails, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **123** (2004), 13–40.

[6] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 2, 2nd edn., John Wiley & Sons, New York, 1971.

[7] Gawronski, W., On the Bell-Shape of stable distributions, *Annals of Probability*, **12** (1984), 230–242.

[8] Gnedenko, B. V., Kolmogorov, A. N., *Limit Distributions for Sum of Independent Random Variables*, Addison-Wesley, New York, 1954.

[9] Holtsmark, J., Über die vebreitering von spektrallinier, *Ann. Physik*, **58** (1919), 577–630.

[10] Khinchin, A. Y., *Limit Laws for Sums of Independent Random Variables*, ONTI, Moscow, 1938.

[11] Menn, C. and Rachev, S., Calibrated FFT-based density approximations for a-stable distributions, *Computational Statistics and Data Analysis*, **50** (2006), 1891–1904.

[12] Nolan, J. P., *Modeling financial data with stable distributions*, Working Paper, 2005.

[13] Nolan, J. P., *Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data*, Birkhauser, Boston, 2013.

[14] Ortobelli, S., Rachev, S. T., Fabozzi, F. J., Risk management and dynamic portfolio selection with stable paretian distributions, *Journal of Empirical Finance*, **17** (2010), 195–211.

[15] Peach, G., Theory of the pressure broadening and shift of spectral lines, *Advances in Physics*, **30** (1981), no. 3, 367–474.

[16] Resnick, S., Samorodnitsky, G., Performance decay in a single server exponential queueing model with long range dependence, *Operations Research*, **45** (1997), 235–243.

[17] Resnick, S., Samorodnitsky, G., Steady-state distribution of the buffercontent for M/G/ input fluid queues, *Bernoulli*, **7** (2001), no. 2, 191–210.

[18] Reuss, A., Olivares, P., Seco, L., Zagst, R., Risk management and portfolio selection using stable regime switching models, *Applied Mathematical Sciences*, **10** (2016), no. 12, 549–582.

[19] Rishmawi, S., *Fitting concentration data with stable distributions*, Ph.D. thesis, American University, Washington, DC., 2005.

[20] Scafetta, N., Bruce, J. W., Is climate sensitive to solar variability? *Physics Today*, **60** (2008), 50–51.

[21] Skorokhod, A. V., Asymptotic formulas for stable distribution Laws, *Select. Trans. Math. Statist. Prob.*, **1** (1961), 157–161.

[22] Wang, L., Zhang, J. H., Simpson's rule based fit method to compute densities of stable distributions, The Second International Symposium on Optimization and Systems Biology, Lijiang, China 2008, 381–388.

[23] Wintner, A., On a Class of Fourier Transforms, *American Journal of Mathematics*, **58** (1936), 45–90.

[24] Yamazato, M., Unimodality of infinitely divisible distributions of class L, *Annals of Probability*, **6** (1978), 523–531.

[25] Zolotarev, V. M., *One-dimensional stable distributions*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۶/۳/۱۱؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۶/۶/۲۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۷/۱۲

مهدی شمس: دانشگاه کاشان، دانشکدهٔ علوم ریاضی، گروه آمار
رایانامه: mehdishams@kashanu.ac.ir