فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۸، شمارهٔ ۶۵ (پاییز و زمستان ۱۳۹۸) صص. ۱۷۹ تا ۱۹۱

# کلاه‌هایی برای فکر کردن: شعبده‌بازی ریاضیدانان با کلاه‌ها

سید مسعود حسینی و شهروز جانباز

**چکیده**

در این مقاله، مسئلهٔ بسیار زیبای بازی کلاه‌ها را معرفی و شرایطی را که منجر به نسخه‌های گوناگون این بازی می‌شوند، مطرح می‌کنیم. هدف ما بررسی و تحلیل دو نسخهٔ شناخته‌شده از بازی کلاه‌ها است. برای تحلیل نسخهٔ اولِ بازی کلاه‌ها، استراتژی‌های متفاوتی را بررسی می‌کنیم و با روشی خلاقانه نشان می‌دهیم که یافتن بهترین استراتژی در این بازی به حوزهٔ نظریهٔ کدگذاری وابسته است. برای درک بهتر نسخهٔ دومِ بازی کلاه‌ها، حالت خاصی از آن را بررسی و استراتژی یافتن بهترین نتیجه را در حالت کلی مطرح می‌کنیم.

## ۱. سرآغاز

مفهوم بازی قدمتی به اندازهٔ خلقت دارد. در دنیای میکروسکوپی، باکتری‌ها برای تولید مثل، دست به بازی تقسیم متوالی می‌زنند و در دنیای ماکروسکوپی، درختان و گیاهان بازیِ همکاری با دیگر موجودات را اجرا می‌کنند. بازی در تاریخ تمدن بشری نیز گذشته‌ای دیرینه دارد. انسان برای زندگی و سرگرمی، بازی‌های بسیاری ابداع کرده و توسعه داده است. بازی شکار، بازی کشاورزی، بازی مبادلهٔ کالا به کالا نمونه‌هایی از بازی‌های با محوریت زندگی هستند و بازی‌هایی همانند تخته نرد، گو و شطرنج نمونه‌هایی از بازی‌های فکری هستند که برای سرگرمی ابداع شده‌اند. جالب است که بازی تخته نرد تقریباً ۵۰۰۰ سال پیش در شهر سوخته در ایران، بازی گو تقریباً ۴۰۰۰ سال پیش در چین و بازی شطرنج تقریباً ۱۵۰۰ سال پیش در هندوستان ابداع شده‌اند. هدف اصلی در تحلیل یک بازی، یافتن استراتژی‌ای است که به بهترین

عبارات و کلمات کلیدی. نظریهٔ بازی‌ها؛ بازی کلاه‌ها؛ نظریهٔ کدگذاری؛ کد تکراری؛ کد هَمینگ.

نتیجهٔ ممکن منجر شود. یافتن این استراتژی در برخی از بازی‌ها تقریباً آسان است (همانند بازی نیم) و در برخی دیگر از بازی‌ها بسیار دشوار است (همانند شطرنج).

نظریهٔ کدگذاری شاخه‌ای از ریاضیات است که از مهم‌ترین اهداف آن مخابره و ذخیره‌سازی بدون خطای اطلاعات است. امروزه کاربردهای نظریهٔ کدگذاری بر کسی پوشیده نیست. مکالمات روزمره که با تلفن انجام می‌شود، ارسال تصاویر از فضا توسط کاوشگر وویجر و ذخیره‌سازیِ اطلاعات بر روی دی‌وی‌دی‌ها یا حافظه‌های جانبی، همگی نمونه‌هایی از کاربردهای فراوان این علم نوظهور هستند. مبانی نظریهٔ کدگذاری در سال ۱۹۴۸ توسط کلود شانون و در مقاله‌ای با عنوان «نظریهٔ ریاضیاتیِ از ارتباطات»[۱] ارائه شد. نظریهٔ کدگذاری هماوردگاه بسیاری از شاخه‌های ریاضی همانند جبر، هندسه، ترکیبیات، گراف و دیگر حوزه‌ها است. علاوه بر آن، به‌طور مستقیم و یا غیرمستقیم، از نظریهٔ کدگذاری در حل مسئله‌های گوناگون استفاده می‌شود. یکی از مسائل جالب در این زمینه مسئلهٔ بازی کلاه‌ها است که دیدگاه‌های متفاوتی برای حل آن موجود است اما یافتن بهترین استراتژی به‌کمک نظریهٔ کدگذاری امکان‌پذیر است. برای آشنایی بیشتر با این زمینهٔ پژوهشیِ پویا، می‌توانید [۲] را بخوانید.

## ۲. بازی کلاه‌ها

فرض کنیم ۹ نفر در یک صف ایستاده‌اند و هر کدام کلاهی به رنگ سیاه و یا سفید بر سر دارد. هر نفر در صف، تنها می‌تواند رنگ کلاه‌های افراد جلوی خود را ببیند. بنابراین نفر سوم در صف، تنها می‌تواند رنگ کلاه نفر دوم و نفر اول را ببیند و رنگ کلاه بقیهٔ افراد که پشت سر او هستند را نمی‌بیند. همچنین هیچ‌کدام از این افراد رنگ کلاه خودش را نمی‌داند. از انتهای صف شروع می‌کنیم و رنگ کلاه هر کدام از آنها را یکی پس از دیگری می‌پرسیم. هر نفر در این صف، فقط می‌تواند با کلمهٔ سفید یا سیاه پاسخ دهد و همهٔ افرادی که جلوی او در صف هستند، پاسخ او را می‌شنوند. آیا راهی وجود دارد که این افراد بتوانند بیشترین تعداد پاسخ درست را بدهند؟ لازم به ذکر است که قبل از قرارگرفتن در صف و گذاشتن کلاه بر روی سر این افراد، آنها می‌توانند روی یک استراتژیِ از پیش تعیین شده توافق کنند. به نظر شما بیشترین تعداد پاسخ درست چیست؟

مسئلهٔ بالا نمونه‌ای از بازی کلاه‌ها است که نه‌تنها بهترین استراتژی ممکن در آن معین نیست، بلکه بهترین جواب (بیشینهٔ تعداد پاسخ صحیح) نیز مشخص نشده تا بتوان با سعی و خطا استراتژی را با آن تطبیق داد. یک استراتژی برای حل این بازی می‌تواند روش «خودت را قربانی کن» باشد! یعنی هر شخص رنگ کلاه نفر جلویی را بگوید و نفر جلویی با شنیدنِ رنگ کلاه خودش، همان را اعلام کند. با این روش، چهار نفر از این ۹ نفر می‌توانند رنگ کلاه خود را درست حدس بزنند. نتیجهٔ بدی نیست اما آیا

[۱] A Mathematical Theory of Communication

این بهترین نتیجهٔ ممکن است؟ سعی کنید کمی با این مسئله کلنجار بروید. بهتر است بدانید استراتژی‌ای وجود دارد که به‌کمک آن ۸ نفر می‌توانند رنگ کلاه خود را درست حدس بزنند!

شکل‌های مختلفی از بازی‌ها وجود دارند که دو مفهوم کلاه و رنگ در آنها مطرح می‌شوند. این دسته از بازی‌ها را با عنوان کلیِ بازی کلاه‌ها می‌شناسیم. این بازی‌هایی چنان فراگیر شده‌اند که مجلهٔ نیویورک تایمز[1] در سال ۲۰۰۱ موضوعی در این زمینه با عنوان «چرا ریاضیدانان باید به رنگ کلاه خود اهمیت دهند» منتشر کرد. در مقاله‌های موجود، مسئلهٔ بازی کلاه‌ها با بیان‌ها و شرایط متفاوت بررسی شده است اما چند شرط بین همهٔ آنها مشترک است:

- وجود یک تیم با تعدادی مشخص عضو برای شروع بازی؛
- هر عضو از تیم کلاهی بر سر دارد که دارای رنگی معین است؛
- اعضای تیم رنگ کلاه خود را نمی‌دانند و هدف، این است که هر عضو تیم رنگ کلاه خود را به‌درستی حدس بزند. در مورد مشاهدهٔ رنگ کلاه اعضای تیم توسط دیگر افراد تیم، شرایط متفاوتی در مقالات مطرح شده است. در این نوشته، صورتی از مسئله را بیان می‌کنیم که هر فرد رنگ کلاه همهٔ بازیکنان (بجز خودش) را مشاهده کند؛
- استراتژی بازی باید قبل از شروع بازی و قبل از قرار گرفتن کلاه‌ها بر سر بازیکنان، بین اعضای تیم مشخص شود.

با توجه به ویژگی‌های مشترک انواع بازی کلاه‌ها که در بالا ذکر شد، همواره می‌توان عوامل مؤثر در شکل‌های مختلف این بازی را به‌صورت زیر دسته‌بندی کرد:

- تعداد اعضای تیمی که قرار است رنگ کلاه‌های خود را حدس بزنند؛
- تعداد رنگ کلاه‌هایی که قرار است بین بازیکنان تقسیم شود؛
- اطلاعاتی که از مشاهدهٔ رنگ کلاه‌های دیگر اعضای تیم حاصل می‌شود؛
- اطلاعاتی که از شنیدن حدس دیگر اعضای تیم حاصل می‌شود؛
- روش توزیع کلاه‌ها بین اعضای تیم. برای مثال، توزیع تصادفی است و یا غیرتصادفی؛
- حدس تنها یک بازیکن در هر مرحله و یا حدس همزمان همهٔ بازیکنان؛
- امکان پاسخ ندادن و یا حدس نزدن در مقابل اجبار به حدس زدن یک رنگ؛
- تعیین شرایطی که منجر به پیروزی در بازی می‌شود. برای مثال، هدف پیدا کردن استراتژیی باشد که بیشترین تعداد حدس درست زده شود، یا حدس نادرست مطرح نشود و یا موارد متعدد دیگر.

[1] New York Times

با توجه به این مطالب، در ادامه دو شکل متفاوت و شناخته‌شده از بازی کلاه‌ها را بررسی می‌کنیم. برای یافتنِ استراتژی مناسب در حالت اولِ بازی کلاه‌ها (یا پادشاه یا هیچ!) نیاز داریم تا برخی از تعریف‌های مقدماتی نظریهٔ کدگذاری را مرور کنیم.

## ۳. مقدماتی از نظریهٔ کدگذاری

فرض کنیم $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_m\}$ مجموعه‌ای از نمادها و $A^n$ همهٔ $n$تایی‌های مرتب باشد که عضوهای مجموعهٔ $A$ باشد. به هر زیرمجموعه از $A^n$ یک کد می‌گوییم. هدف از کدگذاریِ یک پیام، اضافه کردن تعدادی بیت (افزونگی) به آن است تا بتوان اصل پیام را پس از مخابره و رُخ دادن خطاهای احتمالی در آن، بازیابی کرد. برای مثال، فرض کنید پیام‌های ۰ و ۱ را به‌ترتیب با ۰۰۰ و ۱۱۱ کدگذاری و یکی از آنها (مثلاً ۱۱۱) را ارسال می‌کنیم. اگر تنها یکی از بیت‌های ارسالی دچار خطا شود (مثلاً اگر ۱۰۱ را دریافت کنیم)، آن‌گاه با در نظر گرفتن فراوانی تعداد ۱ یا ۰ در پیام دریافتی، می‌توانیم بفهمیم که کدام‌یک از این بیت‌ها ارسال شده است (بنابراین ۱ ارسال شده است). از آنجا که برای به‌دست آوردن نتایج و قضیه‌ها نیازمند وضع قواعدی هستیم، عموماً مجموعهٔ $A$ یک میدان متناهی در نظر گرفته می‌شود. فرض کنیم $q$ توانی از یک عدد اول و $F_q$ میدانی با $q$ عضو باشد. در این مقاله برای سادگی، $q = ۲$ در نظر گرفته می‌شود و $F_۲ = \{۰, ۱\}$ میدانی دو عضوی است که بیت‌های پایهٔ حوزهٔ دیجیتال، یعنی ۰ و ۱ را در بر دارد. در ادامه برخی از مفاهیم اصلی نظریهٔ کدگذاری را مرور می‌کنیم. اگر با این مفاهیم راحت نیستید نگران نباشید، زیرا برای فهمیدن بازی کلاه‌ها تنها به حالت‌های خاصی از کدها نیاز است.

**تعریف ۱.۳** (کدخطی). یک کد خطی مانند $C$ با طول $n$ روی میدان متناهی $F_q$ زیرفضایی از فضای برداری $F_q^n$ است. در بیشترِ موارد منظور ما از کد، یک کد خطی روی میدانی متناهی است. اگر $q = ۲$، کد حاصل را دودویی می‌نامیم (زیرا مجموعهٔ الفبای ما از دو نماد ۰ و ۱ تشکیل شده است). به هر عضو $c \in C$ یک کدکلمه گفته می‌شود.

چون هر کد خطی یک فضای برداری است، می‌توان برای این فضا یک پایه و یک بُعد در نظر گرفت. برای مثال، کد $C$ را در نظر بگیرید که زیرفضایی از فضای برداری $F_۲^۴$ است:

$$C = \{(۰۰۰۰), (۰۱۰۱), (۱۰۱۰), (۱۱۱۱)\}.$$

این یک کد خطی دودویی با بُعد دو $(\dim_{F_۲}(C) = ۲)$ است و می‌توان مجموعهٔ

$B_C = \{(۰۱۰۱), (۱۰۱۰)\}$. را پایهٔ آن در نظر گرفت.

**تعریف ۲.۳** (فاصلهٔ همینگ). فاصله (فاصلهٔ همینگ) بین دو کلمهٔ $v = (v_۱v_۲\dots v_n)$ و $w = (w_۱w_۲\dots w_n)$ را با $d(v,w)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(v,w) = \sum_{i=۱}^{n} d(v_i, w_i)$$

که در آن،

$$d(v_i,w_i) = \begin{cases} ۱ & v_i \neq w_i \\ ۰ & v_i = w_i \end{cases}$$

**تعریف ۳.۳** (کمترین فاصلهٔ کد). فرض کنیم $C$ یک کد خطی روی میدان $F_q$ باشد. کمترین فاصلهٔ کد $C$ را با $d(C)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(C) = \min\{d(c,c') : c, c' \in C, c \neq c'\}.$$

یکی از ساده‌ترین کدهای خطی، کد تکراری است که در ادامه آن را تعریف می‌کنیم. از این کد برای طراحی استراتژی در بازی کلاه‌ها استفاده خواهیم کرد.

**تعریف ۴.۳** (کد تکراری). کد خطی $\{\overbrace{(\lambda, \lambda, \cdots, \lambda)}^{\text{n تا}} : \lambda \in F_q\}$ را کد تکراری با طول $n$ روی میدان متناهی $F_q$ می‌گوییم و آن را با $L_{rep}$ نشان می‌دهیم. برای مثال، کد تکراری دودویی با طول سه برابر است با $L_{rep} = \{(۰۰۰), (۱۱۱)\}$. از کد اخیر برای کدگذاری پیام‌های ۰ و ۱ در آغاز همین بخش استفاده کرده‌ایم.

برای تعریف دوگان یک کد به یک ضرب داخلی نیاز داریم. فرض کنیم $v = (v_۱v_۲\dots v_n)$ و $w = (w_۱w_۲\dots w_n)$ دو کلمه باشند. ضرب داخلی این دو را با $v \cdot w$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$v \cdot w = v_۱w_۱ + v_۲w_۲ + \cdots + v_nw_n.$$

**تعریف ۵.۳** (دوگان کد). دوگان کد $C$ که با $C^\perp$ نشان داده می‌شود، عبارت است از

$$C^\perp = \{v \in F_q^n : v \cdot c = ۰ \quad \forall c \in C\}.$$

**تعریف ۶.۳** (ماتریس مولد کد). ماتریس مولد کد $C$ که آن را با $G$ نمایش می‌دهیم، ماتریسی است که سطرهای آن پایه‌ای برای کد $C$ تشکیل می‌دهند. ماتریس بررسی توازن کد $C$ که آن را با $H$ نمایش می‌دهیم، ماتریس مولد کد دوگان $C$ (یعنی $C^\perp$) است.

کدهای همینگ یکی از شناخته‌شده‌ترین کدها در نظریهٔ کدگذاری هستند. این کدها به‌دلیل ویژگی‌های جالبی که دارند، همواره مورد توجه بوده‌اند.

**تعریف ۷.۳** (کد همینگ دودویی). فرض کنیم $r \geqslant 2$ یک عدد صحیح باشد. به کد دودویی با طول $n = 2^r - 1$ و با ماتریس بررسی توازن $H$ که ستون‌های آن شامل همهٔ بردارهای ناصفر $F_2^r$ باشد، کد همینگ دودویی می‌گوییم و آن را با $\mathrm{Ham}(r, 2)$ نشان می‌دهیم.

برای مثال، اگر $r = 3$، آن‌گاه ماتریس بررسی توازن کد همینگ $\mathrm{Ham}(3, 2)$ برابر است با

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

و همچنین ماتریس مولد این کد برابر است با:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

می‌توان نشان داد که کد همینگ $\mathrm{Ham}(3, 2)$ دارای ۱۶ کدکلمه است. به‌علاوه از تعریف‌های ۲.۳و۳.۳ نتیجه می‌شود که کمترین فاصلهٔ این کد برابر ۳ است. برای مطالعهٔ بیشتر در زمینهٔ نظریهٔ کدگذاری و پیوند آن با دیگر حوزه‌های ریاضی، می‌توانید [۴] و [۵] را مطالعه کنید.

## ۴. یا پادشاه یا هیچ!

در این حالت از بازی کلاه‌ها با توجه به حدس‌های بازیکنان، ممکن است کل تیم برنده و یا بازنده شود. به همین دلیل، به این حالت از بازی نام «یا پادشاه یا هیچ» داده‌ایم. شرایط بازی از این قرار است:

- یک تیم با $n$ بازیکن وارد اتاقی می‌شوند، هرکدام یک کلاه با رنگی تصادفی از میان $k$ رنگ موجود (با احتمال برابر) دریافت می‌کند. هر بازیکن رنگ کلاه دیگر بازیکنان را می‌بینند اما رنگ کلاه خود را نمی‌تواند ببیند؛
- بازیکنان باید رنگ کلاه خود را حدس بزنند یا در این باره نظری ندهند؛
- اگر بازیکنی اشتباه حدس بزند و یا همهٔ بازیکنان نظر ندهند، تیم بازنده است.
- بازیکنان قبل از شروع بازی می‌توانند استراتژی مشخصی را تعیین کنند و بین خود به اشتراک بگذارند اما درون اتاق هیچ ارتباطی با یکدیگر ندارند.

**«هدف، پیدا کردن استراتژی‌ای است که بیشترین احتمال پیروزی را برای تیم تضمین کند.»**

برای روشن شدن موضوع، این حالت از بازی را با یک مثال بررسی می‌کنیم.

**مثال ۱.۴.** فرض کنیم ۳ $= n$ و ۲ $= k$. دو رنگ ممکن برای کلاه‌ها را آبی و قرمز می‌گیریم و رنگ کلاه سه بازیکن موجود در بازی را نیز با سه‌تایی $(H_۱, H_۲, H_۳)$ نشان می‌دهیم. فرض کنیم در آغاز بازی داشته باشیم (آبی، قرمز، قرمز) $= (H_۱, H_۲, H_۳)$. اگر بازیکنان رنگ کلاه خود را به‌صورت (عبور، عبور، قرمز) حدس بزنند، آن‌گاه تیم آنها پیروز می‌شود، ولی اگر حدس بازیکنان (آبی، آبی، عبور) باشد، تیم آنها به‌دلیل حدس نادرستِ بازیکن دوم، می‌بازد. همچنین اگر حدس آنها (عبور، عبور، عبور) باشد، نیز این تیم بازنده خواهد بود.

**۱.۴. شاید بتوان پادشاه شد!** در این بخش، بازی بالا را با روش‌های گوناگون تحلیل و نتیجهٔ اتخاذ انواع استراتژی‌ها را بررسی می‌کنیم. خواهیم دید که گاهی اوقات از وضعیتی ناامید کننده می‌توان به وضعیتی مطلوب رسید.

۱.۱.۴. روش اول: استراتژی انتخابِ تصادفی. اگر هر کدام از بازیکنان، به تصادف رنگی را حدس بزنند، تیم با چه احتمالی پیروز می‌شود؟ هر بازیکن یا با احتمال $(k + ۱)/۱$ رنگی را درست انتخاب می‌کند و یا با احتمال $(k + ۱)/۱$ عبور می‌کند و رنگی را انتخاب نمی‌کند (توجه کنید که $k$ رنگ متمایز به‌همراه گزینهٔ گذشتن و انتخاب نکردن، مجموعاً منجر به $(k + ۱)$ حالت می‌شود). اگر $p$ نشان‌دهندهٔ پیشامد موفقیت در بازی با استراتژی حدس تصادفی باشد، آن‌گاه احتمال موفقیت در این بازی برابر است با

$$Pr[p] = \Big(\frac{۲}{k+۱}\Big)^n - \Big(\frac{۱}{k+۱}\Big)^n.$$

این احتمال چگونه محاسبه شده است؟ توجه کنید که فرض کردیم که هر کدام از $n$ بازیکن می‌تواند رنگ کلاه خود را حدس بزند و یا نظری ندهد و عبور کند. از طرف دیگر، احتمال درست حدس زدنِ یک بازیکن برابر با $(k+۱)/۱$ و احتمال نظر ندادن او نیز برابر با $(k+۱)/۱$ است. بنابراین در مجموع یک بازیکن با احتمال $(k + ۱)/۲$ انتخابی انجام می‌دهد که نتیجهٔ آن پیروزیِ تیم (پادشاه شدن!) است. چون همهٔ $n$ بازیکن در تیم شرایطی یکسان دارند، بنابر اصل ضرب، احتمال موفقیت تیم برابر با $(۲/(k + ۱))^n$ می‌شود. برای محاسبهٔ احتمال موفقیت کل، باید حالتی را که همهٔ $n$ بازیکن، هیچ انتخابی نکرده و همزمان عبور کرده‌اند نیز در نظر بگیریم. احتمال رخ دادنِ این حالتِ اخیر که منجر به شکست (هیچ شدن!) می‌شود، برابر با $(۱/(k + ۱))^n$ است. اکنون به‌سادگی می‌توانید رابطهٔ احتمال موفقیت را به‌دست آورید!

بنابراین احتمال پیروزی در مثال ۱.۴ (با استراتژیِ «انتخاب تصادفی») برابر با ٪۲۶ $\approx$ ۷/۲۷ است.

۲.۱.۴. روش دوم: استراتژی حدس زدن یک بازیکن. استراتژی ساده دیگر این است که تنها یک بازیکن حدس بزند. برای مثال، نفر اول حدس خود را مطرح کند و سایر بازیکنان حدسی نزنند و عبور کنند. به‌سادگی می‌توان دید که اگر اولین بازیکن هم حدسی نزند، آن‌گاه تیم بازنده می‌شود. بنابراین احتمال پیروز شدن در این روش برابر با $Pr[p] = ۱/k$ است. پس در مثال ۱.۴ احتمال پیروز شدن تیم با استراتژی «حدس زدن یک بازیکن» برابر با $۵۰\% = ۱/۲$ است. با مقایسهٔ نتایج این دو استراتژی ،می‌توان دید که روش اخیر از روش قبلی بهتر است. اکنون طبیعی است که بپرسیم آیا استراتژی دیگری وجود دارد تا احتمال موفقیت تیم را در مثال ۱.۴به بیشتر از ۱/۲ افزایش دهد؟ نشان می‌دهیم که پاسخ این سؤال مثبت است و با استفاده از نظریهٔ کدگذاری، یافتن استراتژیِ بهتر ممکن می‌شود.

۳.۱.۴. روش سوم: استراتژی کد تکراری (سه تایی). رنگ قرمز را با ۰ و رنگ آبی را با ۱ نشان می‌دهیم. با استفاده از کد تکراری دودویی با طول سه، $L_{rep} = \{(۰۰۰), (۱۱۱)\}$، روش زیر را به‌عنوان استراتژی حدس نفر اول مطرح می‌کنیم:

- بازیکنِ اول، سه‌تایی $(?, H_۲, H_۳)$ را در نظر می‌گیرد که در آن، $H_۲, H_۳ \in \{۰, ۱\}$ و $H_۲$ و $H_۳$ به‌ترتیب، رنگ کلاه بازیکن دوم و بازیکن سوم را نشان می‌دهند. حال بازیکن اول بر اساس قاعدهٔ زیر، رنگ کلاه خود را حدس می‌زند (توجه کنید که منظور از حرف «ع»، عبور کردن یا همان نظر ندادن است):

$$? = \begin{cases} ۰ & (۱, H_۲, H_۳) \in L_{rep} \\ ۱ & (۰, H_۲, H_۳) \in L_{rep} \\ \text{ع} & \text{وگرنه} \end{cases}$$

- بازیکن‌های دوم و سوم نیز همانند بازیکن اول عمل می‌کنند.

با اتخاذ این استراتژی، حالت‌هایی که منجر به موفقیت نمی‌شوند، آنهایی هستند که بردار ۰ و ۱ متناظر با رنگ کلاه‌های اولیه، عضوی از $L_{rep}$ باشد. می‌توان نشان داد که احتمال پیروزی به‌کمک «استراتژی کد تکراری» برابر با $۷۵\% = ۶/۸$ است.

**مثال ۲.۴.** در مثال ۱.۴، فرض کنیم سه بازیکن کلاه‌هایی با رنگ‌های (آبی، قرمز، قرمز) را که معادل با سه‌تایی $(H_۱, H_۲, H_۳) = (۰, ۰, ۱)$ است، دریافت کرده‌اند. با استفاده از استراتژی کد تکراری داریم

- بازیکن اول با بررسی سه‌تایی $(?, ۰, ۱)$ متوجه می‌شود که هیچ‌کدام از بردارهای $(۰, ۰, ۱)$ و $(۱, ۰, ۱)$ در $L_{rep}$ نیستند. بنابراین حدسی نمی‌زند و «ع» را انتخاب می‌کند؛
- بازیکن دوم با بررسی سه‌تایی $(۰, ?, ۱)$، همانند بازیکن اول نتیجه می‌گیرد که باید «ع» را انتخاب کند؛

- بازیکن سوم با بررسی سه‌تایی $(?\,,\circ\,,\circ)$ متوجه می‌شود که بردار $(\circ\,,\circ\,,\circ)$ کدکلمه‌ای از کد تکراری $L_{rep}$ است. بنابراین این بازیکن مقدار ۱ را حدس می‌زند.

به این ترتیب، تیم با حدس زدن سه‌تایی (۱ , ع , ع) پیروز می‌شود.

۴.۱.۴. روش چهارم: استراتژی کد همینگ $\mathrm{Ham}(۳,۲)$. در ادامه نشان می‌دهیم که اگر $n = ۷$ و $k = ۲$، به‌کمک کد همینگ $\mathrm{Ham}(۳,۲)$ می‌توان بهترین استراتژی ممکن را برای موفقیت در بازی مورد نظر یافت. همان‌طور که اشاره کردیم، کد همینگ $\mathrm{Ham}(۳,۲)$ دارای ۱۶ کدکلمه است. با توجه به این موضوع، استراتژی زیر را در نظر بگیرید:

- بازیکن $i$اُم، $۱ \leq i \leq ۷$، کد $(H_۱,\dots,H_{i-۱},?,H_{i+۱},\dots,H_۷)$ را مشاهده و حدس خود را به‌صورت زیر مطرح می‌کند:

$$? = \begin{cases} \circ & (H_۱,\dots,H_{i-۱},۱,H_{i+۱},\dots,H_۷) \in \mathrm{Ham}(۳,۲) \\ ۱ & (H_۱,\dots,H_{i-۱},\circ,H_{i+۱},\dots,H_۷) \in \mathrm{Ham}(۳,۲) \\ \text{ع} & \text{وگرنه} \end{cases} \qquad (۱.۴)$$

فرض کنید مانند قبل، رنگ آبی را با ۱ و رنگ قرمز را با ۰ نشان بدهیم. برای درک استراتژی بالا به مثال زیر توجه کنید.

**مثال ۳.۴.** فرض کنیم تعداد اعضای تیم، ۷ و دو کلاه با رنگ‌های آبی و قرمز موجود باشد. فرض کنیم رنگ کلاه این بازیکنان با بردار (۱۱۱۰۱۰۱) نشان داده شود (یعنی رنگ کلاه بازیکن اول، دوم و سوم آبی است، رنگ کلاه بازیکن چهارم قرمز است و الی آخر). توجه کنید که حالت اولیهٔ رنگ کلاه‌ها، یعنی بردار (۱۱۱۰۱۰۱) برابر با هیچ‌یک از ۱۶ کدکلمهٔ کد همینگ $\mathrm{Ham}(۳,۲)$ در تعریف ۷.۳ نیست. با توجه به استراتژی ۱.۴، بازیکنان به‌صورت زیر حدس‌های خود را مطرح می‌کنند:

- بازیکن اول، هفت‌تایی (?۱۱۰۱۰۱) را مشاهده می‌کند و چون بردارهای (۰۱۱۰۱۰۱) و (۱۱۱۰۱۰۱) عضو $\mathrm{Ham}(۳,۲)$ نیستند، رنگی را حدس نمی‌زند و می‌گذرد؛
- بازیکن دوم، هفت‌تایی (۱?۱۰۱۰۱) را مشاهده می‌کند و چون بردار (۱۰۱۰۱۰۱) کدکلمه‌ای از کد همینگ $\mathrm{Ham}(۳,۲)$ است، عدد ۱ را حدس می‌زند؛
- بازیکن سوم، هفت‌تایی (۱۱?۰۱۰۱) را مشاهده می‌کند و چون بردارهای (۱۱۰۰۱۰۱) و (۱۱۱۰۱۰۱) عضو $\mathrm{Ham}(۳,۲)$ نیستند، رنگی را حدس نمی‌زند و می‌گذرد؛
- بازیکن چهارم، هفت‌تایی (۱۱۱?۱۰۱) را مشاهده می‌کند و چون بردارهای (۱۱۱۱۱۰۱) و (۱۱۱۰۱۰۱) عضو $\mathrm{Ham}(۳,۲)$ نیستند، او رنگی را حدس نمی‌زند و می‌گذرد؛

- بازیکن پنجم، هفت‌تایی (۱۱۱۰?۰۱) را مشاهده می‌کند و چون بردارهای (۱۱۱۰۰۰۱) و (۱۱۱۰۱۰۱) عضو $\mathrm{Ham}(۳,۲)$ نیستند، رنگی را حدس نمی‌زند و می‌گذرد.
- بازیکن ششم، هفت‌تایی (۱۱۱۰۱?۱) را مشاهده می‌کند و چون بردارهای (۱۱۱۰۱۱۱) و (۱۱۱۰۱۰۱) عضو $\mathrm{Ham}(۳,۲)$ نیستند، رنگی را نمی‌زند و می‌گذرد؛
- بازیکن هفتم نیز هفت‌تایی (۱۱۱۰۱۰?) را مشاهده می‌کند و چون بردارهای (۰۱۱۰۱۰۰) و (۱۱۱۰۱۰۱) عضو $\mathrm{Ham}(۳,۲)$ نیستند، او نیز رنگی را حدس نمی‌زند و می‌گذرد.

اکنون با بررسی نتایج می‌توان دید که تنها بازیکن دوم، حدسی درست زده است و بقیهٔ بازیکنان حدس نزده‌اند و عبور کرده‌اند. بنابراین بردار حدس بازیکنان به‌صورت (ع۱ععععع) است و تیم، در این بازی موفق می‌شود.

**قضیه ۴.۴.** فرض کنیم $n = ۷$ و $k = ۲$. در این صورت، استراتژی طراحی‌شده به‌کمک کد همینگ $\mathrm{Ham}(۳,۲)$، (۱.۴)، با احتمال $Pr[p] = ۱ - ۱۶/۲^۷ = ۷/۸ = ۸۷۵\%$ منجر به پیروزی تیم می‌شود.

اثبات این قضیه با بررسی حالت‌های گوناگون بردار $H = (H_۱, \ldots, H_۷)$ انجام می‌شود. در واقع، در هر حالت باید تعلق بردار $H$ به کد همینگ $\mathrm{Ham}(۳,۲)$ بررسی شود. در این میان، کمترین فاصلهٔ کد همینگ $\mathrm{Ham}(۳,۲)$ (که برابر با ۳ است) نقشی بسیار مهم ایفا می‌کند. اثبات کامل این قضیه را می‌توانید در [۵] بیابید.

در پایان، باید اشاره کنیم که بازی «یا پادشاه یا هیچ» در همهٔ حالت‌ها، یعنی برای $n$ها و $k$های مختلف، هنوز به‌طور کامل حل نشده است. در ادامه حالت دیگری از بازی کلاه‌ها را معرفی می‌کنیم که با استفاده از مفاهیم مقدماتی ترکیبیات قابل بررسی است.

## ۵. بیشتر بهتر است!

قوانین این بازی نیز مشابه بازی کلاه‌ها در حالت قبل است با این تفاوت که گزینهٔ نظر ندادن (حالت «ع») حذف شده است. به عبارت دیگر، هر بازیکن باید حتماً رنگ کلاه خود را حدس بزند. در این بازی نیز بازیکنان می‌توانند قبل از شروع، بر روی استراتژی معینی به توافق برسند اما درون اتاق هیچ‌گونه ارتباطی با یکدیگر ندارند و از حدس‌های یکدیگر نیز مطلع نمی‌شوند. در این بازی:

**«هدف، پیدا کردن استراتژی‌ای است که بیشترین تعداد حدس درست را تضمین کند.»**

برای روشن شدن موضوع، به مثال ساده اما جالب بعدی توجه کنید. در این بازی نیز همانند قبل، $n$ نشان‌دهندهٔ تعداد بازیکنان و $k$ نشان‌دهندهٔ تعداد کلاه‌های با رنگ متفاوت است (یا همان تعداد رنگ‌ها).

**مثال ۱.۵.** فرض کنیم تیمی دو بازیکن دارد و تعداد کلاه‌های رنگی نیز دو است (یعنی $n = ۲$ و $k = ۲$). با توجه به شرایط جدید در این بازی، می‌توان استراتژی زیر را اتخاذ کرد:

- نفر اول (که رنگ کلاه نفر دوم را می‌داند) رنگ کلاه خود را هم‌رنگ با رنگ کلاه نفر دوم اعلام می‌کند؛
- نفر دوم (که رنگ کلاه نفر اول را می‌داند) رنگ کلاه خود را مخالف رنگ کلاه نفر اول اعلام می‌کند.

به این ترتیب، رنگ کلاه‌ها هرچه باشد، حداقل یک حدس درست زده می‌شود، زیرا اگر هر دو نفر کلاه هم‌رنگ داشته باشند، آنگاه بازیکن اول درست حدس می‌زند و اگر هر دو نفر کلاه غیر هم‌رنگ داشته باشند، آنگاه بازیکن دوم درست حدس می‌زند.

در این بازی بر خلاف بازی قبل، می‌توان استراتژی را یافت که بیشترین تعداد حدس درست را تضمین کرده و نشان داد که هیچ استراتژی دیگری نتیجهٔ بهتر نمی‌دهد. شگفت‌انگیز است. در قضیهٔ بعد این موضوع روشن شده است.

**قضیه ۲.۵.** فرض کنیم تعداد بازیکنان یک تیم برابر با $n$ و تعداد کلاه‌های با رنگ‌های متمایز برابر با $k$ باشد ($n \geq k$). در این صورت، استراتژی‌ای وجود دارد که دست‌کم $\lfloor n/k \rfloor$ حدس درست را تضمین می‌کند. به‌علاوه، هیچ استراتژی‌ای وجود ندارد که تعداد حدس‌های درست را بهبود دهد.

**اثبات.** بدون کم شدن از کلیت، بازیکنان را از ۱ تا $n$ و کلاه‌ها را از ۱ تا $k$ شماره‌گذاری می‌کنیم. استراتژی که بازیکنان بر آن توافق می‌کنند، این طور است که بازیکن $i$اُم رنگی را اعلام می‌کند که مجموع شمارهٔ همهٔ رنگ‌های کلاه‌های دیگر بازیکنان (به‌همراه شمارهٔ رنگی که خودش حدس زده است) به پیمانهٔ $k$ همنهشت با $i$ باشد. نشان می‌دهیم که با این روش، دست‌کم $\lfloor n/k \rfloor$ نفر از بازیکنان درست حدس می‌زنند. رنگ کلاه‌های بازیکنان را با بردار $(k_۱, \ldots, k_n)$ نشان می‌دهیم که در آن، $k_i \in \{۱, \ldots, k\}$. قرار می‌دهیم $\sum_{i=۱}^{n} k_i = t$. بدیهی است که $n \leq t \leq kn$. اکنون فرض کنیم بازیکن $i$اُم مقدار $x_i$ را حدس بزند. در این صورت

$$k_۱ + \cdots + k_{i-۱} + x_i + k_{i+۱} + \cdots + k_n \equiv i \mod k.$$

چون $\sum_{i=۱}^{n} k_i = t$، پس

$$k_۱ + \cdots + k_{i-۱} + x_i + k_{i+۱} + \cdots + k_n \equiv i \Rightarrow x_i + t - k_i \equiv i \mod k.$$

می‌توان دید که اگر نفر $i$اُم درست حدس بزند (یعنی $x_i = k_i$ )، آنگاه $t \equiv i \mod k$. عکس این مطلب نیز درست است؛ یعنی اگر $t \equiv i \mod k$، آنگاه نتیجه می‌شود $x_i = k_i$ و این یعنی بازیکن

$i$اُم درست حدس زده است. بنابراین با توجه به رابطهٔ $n \leq t \leq kn$ و بنابر اصل لانه کبوتری، دست‌کم $\lfloor n/k \rfloor$ رابطه از $n$ معادلهٔ زیر برقرار است:

$$\begin{cases} t \equiv ۱ & \mod k \\ t \equiv ۲ & \mod k \\ \vdots & \\ t \equiv n & \mod k \end{cases}$$

بنابراین دست‌کم $\lfloor n/k \rfloor$ بازیکن درست حدس می‌زنند. اکنون نشان می‌دهیم که نمی‌توان نتیجهٔ به‌دست آمده از استراتژی بالا را بهبود داد. برای اثبات این موضوع، از میانگین‌گیری استفاده می‌کنیم. اگر بازیکنی یک ترتیب رنگی ویژه از کلاه‌های افراد را مشاهده کند، آن‌گاه حداکثر می‌تواند یکی از $k$ حالت ممکن را طبق روش ذکر شده به‌درستی انتخاب کند (البته ممکن است درست انتخاب نکند اما در اینجا حداکثر حالت‌ها را در نظر می‌گیریم). از طرفی، $k^{n-۱}$ حالت متفاوت برای قرار دادنِ سایر کلاه‌ها روی سر بقیهٔ افراد وجود دارد. بنابراین از میان همهٔ حالت‌های موجود، هر بازیکن حداکثر می‌تواند $k^{n-۱}$ حدس درست مطرح کند. همچنین تیم مورد نظر، $n$ بازیکن دارد و تعداد کل حالت‌هایی که می‌توان روی سر این افراد کلاه قرار داد، برابر با $k^n$ است. بنابراین با استفاده از میانگین‌گیری، حداکثر $nk^{n-۱}/k^n = n/k$ حدس درست مطرح می‌شود. □

## ۶. مؤخّره

در این مقاله، حالت‌هایی خاص از مسئلهٔ کلاه‌ها بررسی شد اما بسیاری از حالت‌های این مسئلهٔ همچنان حل‌نشده باقی مانده است که برای آشنایی بیشتر با چنین مسائلی، می‌توانید [۳] را مطالعه کنید. در ادامه به چند مورد از مسائلی که همچنان حل‌نشده باقی مانده‌اند، اشاره می‌کنیم.

- در حالت اول از مسئله بازی کلاه‌ها (ارائه شده در بخش ۴)، فرض کنیم کلاه‌هایی با دو رنگ متمایز در اختیار داریم و تعداد بازیکنان نیز برابر با $n$ است. در این صورت، تنها اگر $n \in \{۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$ و یا به‌ازای یک $t$، رابطهٔ $n = ۲^t - ۱$ برای $n \geq ۲$ برقرار باشد، بهترین استراتژی برای پیروزی یافت شده است. بنابراین این حالت از مسئلهٔ کلاه‌ها برای دیگر مقادیر $n$ همچنان حل‌نشده است.
- در حالت اول از مسئلهٔ بازی کلاه‌ها، اگر کلاه‌هایی با سه رنگ متمایز (بجای دو رنگ) در اختیار داشته باشیم، جز برای حالت $n = ۳$ سایر حالت‌های مسئله همچنان حل‌نشده است.

در حالت کلی، اگر $k$ رنگ متفاوت برای کلاه‌ها موجود و تعداد بازیکنان نیز برابر با $n$ باشد، تاکنون چشم‌انداز امیدوارکننده‌ای برای حل مسئله یافت نشده است.

حالا ببینید آیا می‌توانید بهترین استراتژی را برای رسیدن به ۸ پاسخ صحیح در اولین نمونه از مسئلهٔ بازی کلاه‌ها بیابید؟ در واقع، کافی است بازیکنان بر روی این استراتژی توافق کنند که نفر آخر در صف، زوج یا فرد بودنِ یک رنگ از کلاه‌ها را با گفتن رنگی معین مشخص کند. برای مثال، اگر تعداد کلاه‌های سیاه، فرد بود با صدای بلند اعلام کند «سیاه» و اگر تعداد کلاه‌های سیاه، زوج بود با صدای بلند اعلام کند «سفید». تحلیل بازی و رسیدن به عدد ۸ با خودتان!

## مراجع


[1] Bushi, J., Caughman, J. S., *Optimal Strategies for Hat Games*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2012.

[2] Butler, S., Hajiaghayi, M. T., Kleinberg, R. D., Leighton, T., *Hat Guessing Games*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.

[3] Guo, W., Kasala, S., Rao, M. B., Tucker, B., *The Hat Problem and Some Variations*, Department of Mathematics and Statistics, McMaster University, 2004.

[4] Ling, S., Xing, C., *Coding Theory: A First Course*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[5] Moser, S. M., Chen, P., *A Student's Guide to Coding and Information Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[6] Uem, T. V., *The Hat Game and Covering Codes*, Amsterdam University of Applied Sciences, 2016.


تاریخ ارسال:۱۳۹۶/۶/۱۴؛ تاریخ بازنگری:۱۳۹۷/۳/۳۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۴/۲

سید مسعود حسینی: دانشگاه صنعتی مالک اشتر، مجتمع علوم کاربردی، گروه ریاضی کاربردی و رمز
تارنما: `http://alum.sharif.ir/~smasoudhosseini/`
رایانامه: `smasoudhosseini@alum.sharif.edu`

شهروز جانباز: دانشگاه صنعتی مالک اشتر، مجتمع علوم کاربردی، گروه ریاضی کاربردی و رمز
رایانامه: `shjanbaz@mut-es.ac.ir`