فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۸، شمارهٔ ۶۵ (پاییز و زمستان ۱۳۹۸)، صص. ۷۷ تا ۱۲۱

تاریخچهٔ بی‌نهایت‌کوچک‌ها و بی‌نهایت‌بزرگ‌ها در حساب دیفرانسیل و انتگرال

ایسرائل کلاینر

مترجم: روح‌الله جهانی‌پور و سعید مقصودی

چکیده

دو مفهوم بی‌نهایت‌کوچک و بی‌نهایت‌بزرگ در حساب دیفرانسیل و انتگرال اهمیت اساسی دارند و در طول تاریخ به صورت‌های گوناگونی ظاهر شده‌اند: بی‌نهایت‌کوچک‌ها، دیفرانسیل‌ها، کمیت‌های ناپدیدشونده، گشتاورها، اندازه‌های خیلی بزرگ و خیلی کوچک، مجموع‌های نامتناهی، سری‌های توانی، حدود و اعداد اَبَرحقیقی. آنها هم از جنبهٔ فنی و هم از جنبهٔ مفهومی برای حساب دیفرانسیل و انتگرال اهمیت بنیادی داشته‌اند؛ یعنی هم به‌منزلهٔ ابزارهای اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال و هم به‌منزلهٔ شالوده‌های بنیادی آن بوده‌اند. در این مقاله، برای این جنبه‌های بی‌نهایت‌کوچک‌ها و بی‌نهایت‌بزرگ‌ها مثال‌هایی ذکر خواهیم کرد که در تاریخ حساب دیفرانسیل و انتگرال طی قرن‌های هفدهم تا بیستم ظاهر شده‌اند. در ضمنِ ارائهٔ این گزارش تاریخی، در جاهای مناسب «نکته‌های آموزشی» را نیز بیان خواهیم کرد.

۱. سرآغاز

کمیّت‌های بی‌نهایت‌کوچک[۱] و بی‌نهایت‌بزرگ[۲] و شکل‌های مختلف آنها در حساب دیفرانسیل و انتگرال اهمیت اساسی دارند و در واقع جزء وجوه تمایز این شاخه، از دیگر شاخه‌های ریاضیات

عبارات و کلمات کلیدی. حساب دیفرانسیل و انتگرال؛ بی‌نهایت‌کوچک؛ بی‌نهایت‌بزرگ؛ حد؛ مشتق؛ انتگرال؛ آنالیز نااستاندارد.

[۱] infinitely small [۲] infinitely large

(مانند جبر) به‌شمار می‌آیند. این مفاهیم در طول تاریخ حساب دیفرانسیل و انتگرال به شکل‌های گوناگون ظاهر شده‌اند: بی‌نهایت‌کوچک‌ها، تقسیم‌ناپذیرها[۱]، دیفرانسیل‌ها، کمیت‌های ناپدیدشونده[۲]، گشتاورها[۳]، اندازه‌های خیلی بزرگ و خیلی کوچک، مجموع‌های نامتناهی، سری‌های توانی، حدود و اعداد اَبَرحقیقی. آنها هم از جنبهٔ فنی و هم از جنبهٔ مفهومی برای حساب دیفرانسیل و انتگرال اهمیت بنیادی داشته‌اند؛ یعنی هم به‌منزلهٔ ابزارهای اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال و هم به‌منزلهٔ شالوده‌های بنیادی آن بوده‌اند. در این مقاله، برای این جنبه‌های بی‌نهایت‌کوچک‌ها و بی‌نهایت‌بزرگ‌ها مثال‌هایی ذکر خواهیم کرد که در تاریخ حساب دیفرانسیل و انتگرال طی قرن‌های هفدهم تا بیستم ظاهر شده‌اند.

تاریخ [ریاضیات] چه چیزی را باید به دانشجو یا مدرس ریاضیات منتقل کند؟ اولین و مهم‌ترین چیز، انگیزه است. در تاریخ به سرچشمه‌های موضوع مورد بحث و به برخی از مفاهیم محوری آن اشاره می‌شود و برای اینکه «مسئلهٔ حاد»ی که ابداع‌کنندهٔ یک ایده، سعی در حل آن داشته است، به‌روشنی در معرض دید قرار گیرد، به اوضاع و احوال زمانهٔ او نیز پرداخته می‌شود. مشخص‌تر بگویم، جورج پولیا، ریاضیدان و آموزشگر مشهور ریاضی، این اصل بنیادی ارنست هِکِل[۴] زیست‌شناس را که می‌گوید: «سیر تکاملِ فردی، خلاصهٔ سیر تکاملِ نژادی است»، در گفتهٔ زیر به‌صورتی مناسب درآورده است [۴۹]:

> «اگر بدانیم که آدمی دانش خود را دربارهٔ حقایق و مفاهیم خاص چگونه کسب کرده است، آن‌وقت بهتر می‌توانیم دربارهٔ شیوهٔ آموزش چنین دانشی [به دانشجویان] قضاوت کنیم.»

این گفته چیزی نیست جز یک برگردان از به‌اصطلاح، «اصل ژنتیک» در آموزش ریاضیات. همان‌طور که پولیا اشاره می‌کند، این اصل را باید راهنمای قضاوت دانست نه جانشین آن. با این نگاه، در ضمنِ ارائهٔ این گزارش تاریخی، در جاهای مناسب «نکته‌های آموزشی» را نیز بیان خواهیم کرد.

پژوهش‌های زیادی دربارهٔ فصل مشترک تاریخ و آموزش ریاضی انجام شده است. منابع زیر، تا اندازه‌ای به جنبه‌هایی از حساب دیفرانسیل و انتگرال یا آنالیز پرداخته‌اند: [۹]، [۱۳]، [۱۷]، [۱۸]، [۱۹]، [۲۰]، [۳۰]، [۳۱]، [۳۳]، [۴۳]، [۴۷]، [۵۳]، [۵۴]، [۵۸]، [۵۹]، [۶۰]. منابع عمومی‌تر دربارهٔ نقش و کاربردهای تاریخ ریاضی در آموزش عبارت‌اند از: [۲۱]، [۲۳]، [۳۴]، [۴۶]، [۴۸]، [۶۱].

ابداع (کشف) حساب دیفرانسیل و انتگرال، یکی از عظیم‌ترین دستاوردهای فکریِ تمدن بشری است. حساب دیفرانسیل و انتگرال به مدت سه قرن ابزار اصلی در تبیین کمّیِ پژوهش‌های علمی بوده است و تعریف (ریاضی) مفاهیمی بنیادی همچون حرکت، پیوستگی، تغییرپذیری و (برخی از

[۱] indivisibles [۲] evanescent quantities [۳] moments [۴] Ernest Haeckel

صورت‌های) بی‌نهایت را دقت بخشیده است؛ اینها همان مفاهیمی هستند که مبنای بسیاری از تفکرات علمی و فلسفی را از دوران باستان تاکنون شکل داده‌اند. بدون حساب دیفرانسیل و انتگرال، علم فیزیک و فناوری نوین وجود نمی‌داشت. مهم‌ترین معادله‌های مکانیک، اخترشناسی و به‌طور کلی علوم فیزیکی، معادله‌های دیفرانسیلی و انتگرالی برآمده از حساب دیفرانسیل و انتگرال قرن هفدهم هستند. آنالیز حقیقی، آنالیز مختلط، هندسهٔ دیفرانسیل و حساب تغییرات از دیگر شاخه‌های مهم ریاضی‌اند که (علاوه بر شاخهٔ معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی) در قرن‌های بعد، از حساب دیفرانسیل و انتگرال نشأت گرفتند. حساب دیفرانسیل و انتگرال در نظریهٔ احتمال، توپولوژی، نظریهٔ گروه‌های لی و جنبه‌هایی از جبر، هندسه و نظریهٔ اعداد هم نقشی اساسی دارد. حقیقت این است که بدون مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال، ریاضیات زمانهٔ ما چیز غیرقابل تصوری می‌بود. علاوه بر این، دستاوردهای بنیادی ریاضیات به‌طور کلی و حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌طور خاص، در شکل گرفتنِ تفسیر مکانیستیِ جدید از طبیعت که در اوایل قرن هفدهم توسط گالیله و دکارت شروع شد و با پرینکیپیا، شاهکار نیوتن به‌سال ۱۶۸۷ و اثر جاودانهٔ لاگرانژ، مکانیک تحلیلی (۱۷۸۸) و مکانیک سماوی لاپلاس (در ۵ جلد، ۱۷۹۹–۱۸۲۵) به‌طرز شگرفی عمق یافت، خود به فلسفه‌های ماشین‌وارگی، علیّت‌گرایی و مادی‌گرایی انجامید که هنوز تأثیر آنها بر ما پابرجا است.

نیوتن و لایب‌نیتس مستقل از هم در طول ثلث پایانیِ قرن هفدهم، حساب دیفرانسیل و انتگرال را ابداع کردند. اما عملاً همهٔ ریاضیدانان برجستهٔ اروپایی در حدود سال‌های ۱۶۵۰ از عهدهٔ حل بسیاری از مسائل در حد حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتیِ امروزی برمی‌آمدند. در عین حال، پس از این ابداع، دو قرن دیگر طول کشید تا بنیان‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال دقیق شود.

اما حساب دیفرانسیل و انتگرال چیست؟ احتمالاً هیچ تعریفی نتواند چیستیِ غنی و چندوجهیِ آن را دربر بگیرد. مهم این است که توجه داشته باشیم که حساب دیفرانسیل و انتگرال سه رکن اساسی دارد: مجموعه‌ای از قاعده‌ها یا الگوریتم‌ها، نظریه‌ای برای تبیین کارآمدیِ آن قاعده‌ها و کاربردهایی (از نظریه و قاعده‌ها) در مسائل بنیادی علوم. ما در این مقاله به برخی از جنبه‌های سیر تکامل این مبحث مهم و به‌ویژه، مواردی که مفهوم بی‌نهایت در آنها ظاهر می‌شود، می‌پردازیم.

۲. متقدّمان نیوتن و لایب‌نیتس در قرن هفدهم

دورهٔ رنسانس (حدود ۱۴۰۰–۱۶۰۰)، دوره‌ای از رشد و تحوّل پر رونق و پر شور در هنر، ادبیات، موسیقی، معماری، علوم و به همان شدت، در ریاضیات بود. در این دوره شاهد برتریِ قاطع حساب اعداد اعشاری، ورود نمادگراییِ جبری، حل معادلات درجه‌سه و درجه‌چهار با رادیکال‌ها، استفادهٔ آزاد (علی‌رغم درک ناقص) از اعداد گنگ، معرفی اعداد مختلط، احیای مجدد مثلثات، تثبیت رابطهٔ

ریاضیات و هنر از طریق ترسیمات مناظر و مرایا و انقلابی در اخترشناسی بوده‌ایم که بعدها معلوم شد اهمیت زیادی برای ریاضیات دارد. تعدادی از این تحوّلات همچون کشف هندسهٔ تحلیلی توسط دکارت و فرما در دهه‌های اولیهٔ قرن هفدهم، جزء پیش‌نیازهای لازم برای ظهور حساب دیفرانسیل و انتگرال بودند.

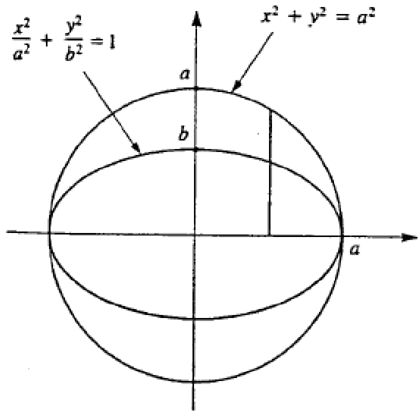
در دورهٔ رنسانس شاهد احیای کامل و پژوهش جدی در آثار ریاضی یونانیان به‌ویژه شاهکارهای ارشمیدس نیز هستیم. محاسبات او دربارهٔ مساحت‌ها، حجم‌ها و مرکزهای ثقل اجسام، الهام‌بخش بسیاری از ریاضیدانان آن دوره بود. برخی از ریاضیدانان این دوره پا را از ارشمیدس فراتر گذاشتند و تلاش کردند تا روشی قاعده‌مند برای محاسبهٔ مرکزهای ثقل اجسام صلب بیابند. اما آنها روش متداول «افنای» یونانیان را به‌کار می‌بردند که نه به کشف نتیجه‌ای راه می‌برد و نه به ابداع الگوریتمی می‌انجامید. به هر حال، طبع آن دوران هم به‌گونه‌ای بود که خیلی از ریاضیدانان بیشتر علاقه‌مند به نتیجه بودند تا اثبات. (کاوالی‌یری[1] در دههٔ ۱۶۳۰ اظهار می‌کند که «مسئلهٔ دقت، یک موضوع فلسفی است نه هندسی.» [۴۰]) آنها برای به‌دست آوردن نتایج‌شان، روش‌هایی جدید برای حل مسئله‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال ابداع کردند. این روش‌ها اغلب مبتنی بر ترکیبی از ایده‌های هندسی، جبری و حسابی بودند. دو نمونه از آنها را ذکر می‌کنیم.

۱.۲. کاوالی‌یری. یکی از ابزارهای (هندسی) اصلی در بررسی مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال، مفهوم تقسیم‌ناپذیرها بود. ایدهٔ این مفهوم –مثلاً در بیان این مطلب که یک سطح از اجتماع تعداد نامتناهی خط (همان تقسیم‌ناپذیرها) تشکیل می‌شود– در افکار اتم‌گرایانهٔ یونانیان تجلّی یافته بود و بخشی از تفکر علمی قرون وسطی نیز به شمار می‌رفت. ریاضیدانان قرن هفدهم، تقسیم‌ناپذیرها را به ابزاری پُرتوان برای بررسی مسائل مساحت و حجم تبدیل کردند.

گالیله و دیگران در اوایل قرن هفدهم از تقسیم‌ناپذیرها در حساب دیفرانسیل و انتگرال استفاده کردند اما کاوالی‌یری بود که در کتاب هندسهٔ تقسیم‌ناپذیرها به‌سال ۱۶۳۵، مفهوم مبهم تقسیم‌ناپذیرها را به هیئت روشی سودمند برای تعیین مساحت و حجم درآورد. روش او مستلزم این است که شکل هندسی را مرکب از تعداد نامتناهی تقسیم‌ناپذیر از بُعد پایین‌تر در نظر بگیریم. بنابراین یک رویه، متشکل از تعداد نامتناهی خط‌های موازی هم‌فاصله و یک جسم صلب، متشکل از تعدادی نامتناهی صفحه‌های موازی هم‌فاصله است. فرآیند یافتن مساحت (یا حجم) یک شکل این طور است که آن شکل را با شکل دیگری با ارتفاع (یا پهنای) برابر و حجم مشخص مقابله می‌کنیم، یعنی یک تناظر یک‌به‌یک بین اجزای تقسیم‌ناپذیر این دو شکل برقرار می‌سازیم و از اصل کاوالی‌یری استفاده می‌کنیم که می‌گوید: اگر اجزای تقسیم‌ناپذیر متناظر، همواره یک نسبت مفروض داشته باشند، آن‌گاه مساحت‌ها

[1] Cavalieri

(یا حجم‌ها)ی آن دو شکل همین نسبت را خواهند داشت. برای مثال، به‌راحتی ثابت می‌شود که نسبت عرض‌های نقاط بیضی $x^۲/a^۲+y^۲/b^۲=۱$ به عرض‌های نقاط متناظر در دایرهٔ $x^۲+y^۲=a^۲$ برابر با b/a است (شکل ۱ را ببینید). بنابراین مساحت بیضی برابر با b/a ضرب در مساحت دایره و در نتیجه برابر با πab است.



شکل ۱

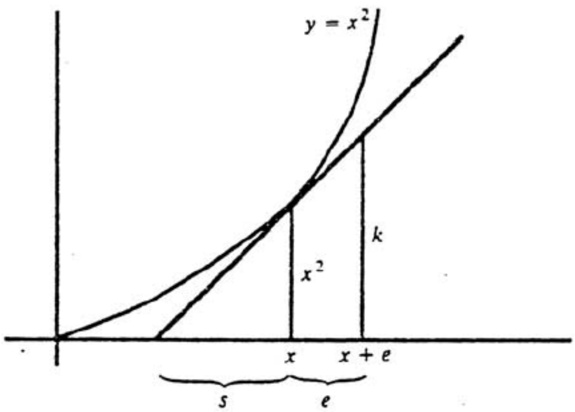
۲.۲. فرما. فرما اولین کسی بود که به‌طور سازمان‌یافته به مطالعهٔ مسئلهٔ یافتن خط مماس پرداخت. او در دههٔ ۱۶۳۰ روشی برای یافتن خط‌های مماس بر خم‌های چندجمله‌ای ابداع کرد. روش او را با یک مثال توضیح می‌دهیم.

فرض کنید می‌خواهیم خط مماس بر سهمی $y=x^۲$ را در نقطهٔ $(x,x^۲)$ پیدا کنیم. فرض کنید $x+e$ نقطه‌ای دیگر روی محور xها و s سایهٔ مماس[۱] بر خم در نقطهٔ $(x,x^۲)$ باشد (شکل ۲ را ببینید). از تشابه مثلث‌ها نتیجه می‌گیریم که $x^۲/s=k/(s+e)$. فرما می‌گوید k «همسنگ»[۲] با $(x+e)^۲$ است (شاید منظورش این بوده که این دو «تا جایی که ممکن است تقریباً برابرند»؛ هرچند این را بیان نمی‌کند). اگر این مطلب را به‌صورت $k\cong(x+e)^۲$ بنویسیم، به‌دست می‌آید $x^۲/s\cong(x+e)^۲/(s+e)$. با حل این رابطه برحسب s، داریم

$$s\cong\frac{ex^۲}{[(x+e)^۲-x^۲]}=\frac{ex^۲}{e(۲x+e)}=\frac{x^۲}{۲x+e}$$

[۱] subtangent [۲] adequal

و در نتیجه $x^۲/s \cong ۲x + e$. توجه دارید که $x^۲/s$ شیب خط مماس بر سهمی در نقطهٔ $(x, x^۲)$ است. در اینجا فرما e را «حذف» می‌کند و ادعا می‌کند که شیب خط مماس برابر با $۲x$ است.



شکل ۲

برخی از معاصران فرما و برجسته‌ترینِ آنها، دکارت، این روش فرما را به‌شدت مورد انتقاد قرار دادند. آنها به معرفی و حذفِ «eیِ مرموز» در پایان کار ایراد می‌گرفتند: وقتی عبارت را بر e تقسیم می‌کنیم، پس یعنی آن را ناصفر می‌گیریم و وقتی آن را حذف می‌کنیم، یعنی آن را صفر در نظر می‌گیریم. آنها به‌حق ادعا می‌کردند که چنین چیزی پذیرفتنی نیست. اما eیِ مرموز فرما باعث شکل‌گیریِ ایده‌ای مهم شد و آن، نموّ «کوچک» یک متغیر بود که تازه ۲۰۰ سال بعد، رسماً به‌صورت مفهوم حد درآمد. با وجود این، فرما روش خود را صرفاً یک روش جبری می‌دانست.

مثال‌های بالا تصویری گذرا از حدود یک قرن جستجوهای پر تب‌وتاب را در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیش از مطالعات نیوتن و لایب‌نیتس، در اختیار ما می‌گذارند. ریاضیدانان، با جسارتِ تمام، پا در سرزمینی تقریباً بکر –ریاضیات نامتناهی‌ها– گذاردند که اگر آن دوران، دوران سخت‌گیرانه‌تری بود، از پا گذاشتن در آن وحشت داشتند. آنها انبوهی از روش‌های نیرومند اما نادقیق مبتنی بر بی‌نهایت‌کوچک‌ها را برای حل مسائل مساحت، حجم و مماس تولید کردند. خوب! پس برای نیوتن و لایب‌نیتس چه کاری مانده بود؟

۳. نیوتن و لایب‌نیتس: ابداع‌کنندگان حساب دیفرانسیل و انتگرال

در مطالعهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال –جدای از کاربردهای آن– دو وجه عمده، یکی وجه الگوریتمی و دیگری وجه نظری، مورد توجه قرار می‌گیرد که به‌ترتیب، در پاسخ به دو پرسش چگونه و چرا مطرح می‌شوند. بنابراین حساب دیفرانسیل و انتگرال شامل روش‌ها و ابزارهای پرداخت‌شده برای حل مسائل مهم نظری و کاربردی و همچنین مجموعه‌ای از نتایج نظری است که زیربنای آن روش‌ها را تشکیل می‌دهند. نیوتن و لایب‌نیتس پیش از هر چیز، در شکل دادن به جنبهٔ نخست از این دو جنبه از حساب دیفرانسیل و انتگرال سهیم بودند. مشخص‌تر بگویم، این دو

الف) مفاهیم کلی مشتق (فلوکسیون، دیفرانسیل) و انتگرال را ابداع کردند. محاسبهٔ مساحت شکل‌های خمیده‌خط و حجم جسم‌های صلب با استفاده از روش‌های پر دردسر، یک چیز است و پی بردن به اینکه چنین مسائلی را می‌توان در چارچوب مفهومی به نام انتگرال درآورد، کلاً چیزی دیگر است. از همین گونه است تمایز میان یافتن مماس، بیشینه و کمینه و سرعت‌های لحظه‌ای از یک سو و مفهوم مشتق از سوی دیگر.

ب) پی بردند که عمل‌های مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری، وارون یکدیگرند. گرچه چندین ریاضیدان پیش از نیوتن و لایب‌نیتس از قبیل فرما، رُبِروال[۱]، توریچلی[۲]، گریگوری[۳] و به‌ویژه، بارو[۴] به پیوند میان مسئله‌های مماس و مساحت، عمدتاً در حالت‌های خاص اشاره کرده بودند، تبیین آشکار این پیوند در کلی‌ترین شکل آن که امروزه قضیهٔ بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال خوانده می‌شود، از آنِ نیوتن و لایب‌نیتس است.

پ) یک نمادگذاری اختراع و الگوریتم‌هایی ابداع کردند و با این کار، حساب دیفرانسیل و انتگرال را به‌صورت ابزار محاسباتی نیرومند کنونی درآوردند.

ت) دامنهٔ کاربرد روش‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال را گسترش دادند. با اینکه در گذشته فنون حساب دیفرانسیل و انتگرال را عمدتاً برای چندجمله‌ای‌ها و آن هم غالباً چندجمله‌ای‌های درجه‌های پایین به‌کار می‌بردند، اکنون برای همهٔ تابع‌ها چه جبری و چه متعالی، قابل استفاده بودند.

در اینجا بد نیست چند کلمه هم دربارهٔ چگونگیِ پیش‌بینی‌ها و اکتشافات در ریاضیات سخن بگوییم. اگر اصولاً ممکن باشد، به‌ندرت یک نظریه یا حتی یک مفهوم یا نتیجهٔ ریاضی در ذهن یک نفر تنها، به پختگیِ کامل می‌رسد. ایده‌های ریاضی طی زمان شکل می‌گیرند؛ هرچند بیشتر اوقات این سیر تکاملی، پیوسته و هموار نیست و در طی آن، شروعِ نادرست، سعی و خطا، شکست و نیز موفقیت وجود دارد. با این حال، یک فرق بزرگ بین کشفِ مصداق‌های یک مفهوم و آگاهی کامل

[۱] Roberval [۲] Torricelli [۳] Gregory [۴] Barrow

دربارهٔ آن مفهوم وجود دارد. معمولاً این آگاهی با درک اهمیت آن مفهوم و کاربردها و بهره‌گیری از آن همراه است.

در مورد حساب دیفرانسیل و انتگرال، نیوتن و لایب‌نیتس بودند که مفاهیم اساسی مشتق و انتگرال را از مصداق‌های متعدد آنها در آثار پیشینیان خود بیرون کشیدند، اهمیت آنها را با قرار دادن در بطن یک نظام جبری–الگوریتمی نشان دادند و آنها را در موقعیت‌های جدیدِ بسیاری به‌کار بستند. در عین حال، باید گفت که آن دوره، دوره‌ای مساعد برای این تلفیق عظیم هم بود. به‌قول دیرک اشترویک[۱] [۵۷]، تاریخدان برجستهٔ معاصر،

> «روش کلی برای مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری را که نتیجهٔ درک کامل این نکته بود که این دو عمل عکس یکدیگرند، تنها کسی می‌توانست کشف کند که بر روش‌های هندسی یونانیان و کاوالی‌یری و به همان اندازه، بر روش‌های جبری دکارت و والیس اشراف داشت. چنین افرادی فقط بعد از سال ۱۶۶۰ امکان ظهور داشتند و در واقع در هیئت نیوتن و لایب‌نیتس ظاهر شدند.»

۱.۳. نکتهٔ آموزشی. «اکتشافات ریاضی همچون روییدن بنفشه‌های جنگلی در فصل بهار، در زمانی خاص رخ می‌دهند و هیچ انسانی در تأخیر یا تعجیل آنها دخیل نیست.» [۳] این را فارکاش بویویی[۲] به پسرش یانوش[۳]، یکی از کاشفان هندسهٔ نااقلیدسی، می‌گفت. درست همان‌طور که تلفیق ایده‌های ریاضی، زمانی مناسب در تاریخ دارد، وجود چنین زمانی در آموزش ریاضی هم ضروری است. پیشینیانِ نیوتن و لایب‌نیتس چنین تلفیقی را صورت ندادند، زیرا به‌قدر کافی مثال در دسترس نداشتند که آن تلفیق را توجیه کند. مطلب پیش پا افتاده‌ای است ولی ارزش تکرار کردن دارد و آن اینکه: ضروری است پیش از آنکه چیزی را تعریف کنیم، تعمیم دهیم یا اثبات کنیم، مثال‌هایی –مثال‌های زیاد در زمینه‌های گوناگون– برای دانشجو بیان کنیم.

اکنون می‌پردازیم به چند مثال از حساب دیفرانسیل و انتگرال نیوتن و لایب‌نیتس. نخست ملاحظه می‌کنیم که اساس کار آنها مفهوم بی‌نهایت‌کوچک بوده است. این مفهوم به‌طور صوری تعریف نشده بود ولی مراد از آن، کمیتی «بی‌نهایت‌کوچک» بود که از هر کمیت متناهی ناصفر دیگری کوچکتر است.

۲.۳. نیوتن. نیوتن سه روایت مختلف از حساب دیفرانسیل و انتگرال عرضه کرد. گویا در جستجوی بهترین رهیافت به این موضوع بوده است یا شاید هم همان‌طور که برخی گفته‌اند، هر روایت او مناسبِ منظوری بوده است: برای به‌دست آوردن مؤثر نتیجه‌ها و قضیه‌ها، تدارک دیدنِ الگوریتم‌های

[۱] Dirk Struik [۲] Farkas Bolyai [۳] Janos

مفید یا به‌دست آوردن اثبات‌های قانع‌کننده. به این ترتیب نیوتن بی‌نهایت‌کوچک‌ها را به‌کار می‌بُرد که تا اندازهٔ زیادی، یک رهیافت هندسی بود؛ «فلوکسیون‌ها» را به‌کار می‌گرفت که رهیافتی سینماتیک بود؛ و سرانجام، از «نسبت‌های اولیه و غایی» استفاده می‌کرد که رهیافتی «جبری» و دقیق‌ترین رهیافت او بود. البته گاهی در حل مسائل مختلف این سه روش با هم به‌کار برده می‌شدند.

توجه به این نکته مهم است که حساب دیفرانسیل و انتگرالِ نیوتن (و همچنین لایب‌نیتس) حساب دیفرانسیل و انتگرالِ متغیرها و معادله‌هایی بود که این متغیرها را به هم پیوند می‌دادند؛ نه حساب دیفرانسیل و انتگرالِ تابع‌ها. واقعیت این است که مفهوم تابع به‌صورت یک مفهوم روشن ریاضی، تازه در اوایل قرن هیجدهم پدید آمد. نیوتن متغیرهایی را که به‌کار می‌بُرد، «فلوئنت»[۱] می‌نامید. این نامگذاری ناشی از تصوری هندسی و سینماتیک از کمیتی است که پیوسته در حال تغییر است مثل «شارش»[۲] مداوم یک ذره در طول یک خم. این گونه متغیرها به‌طور ضمنی تابعی از زمان در نظر گرفته می‌شوند.

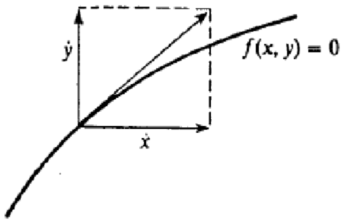
مفهومی اساسی که نیوتن به‌کار می‌بُرد، «فلوکسیون»[۳] بود و آن را با $\dot{x}$ نشان می‌داد. فلوکسیون عبارت است از آهنگ لحظه‌ایِ تغییرات (سرعت لحظه‌ایِ) فلوئنت x (یا با نمادهای امروزی، dx/dt). تعریفی از سرعت لحظه‌ای داده نمی‌شد بلکه بر فهم شهودی آن تکیه می‌شد و هدف نیوتن بیشتر این بود که شیوهٔ محاسبهٔ $\dot{x}$ را نشان دهد.

چون نیوتن حرکت یک نقطه روی خم به معادلهٔ $f(x,y)=۰$ را ترکیبی از حرکت‌های افقی و عمودی با سرعت‌های $\dot{x}$ و $\dot{y}$ در نظر می‌گرفت (شکل ۳ را ببینید) و چون جهت حرکت یک نقطه روی خم، در امتداد مماس بر خم است، پس شیب خط مماس بر خمِ $f(x,y)=۰$ در نقطهٔ (x,y) روی این خم برابر با $\dot{y}/\dot{x}$ است. اما $\dot{y}=dy/dt$ و $\dot{x}=dx/dt$ و لذا (با نمادهای امروزی) $\dot{y}/\dot{x}=dy/dx$. به عبارت دیگر، شیب خط مماس یا همان مشتق، برابر با خارج‌قسمت فلوکسیون‌ها است.

برای مثال، مماس بر خم به معادلهٔ $x^۳-ax^۲+axy-y^۳=۰$ در نقطهٔ دلخواه (x,y) روی خم را محاسبه می‌کنیم. نیوتن o را یک بازهٔ زمانیِ بی‌نهایت‌کوچکی می‌گیرد. پس $\dot{x}o$ و $\dot{y}o$ نموّهای بی‌نهایت‌کوچک x و y هستند (زیرا اگر مثل نیوتن فرض کنیم که سرعت‌های لحظه‌ای $\dot{x}$ و $\dot{y}$ نقطهٔ در حال حرکت (x,y) در طول خم، طی بازهٔ زمانی بی‌نهایت‌کوچک o ثابت باقی می‌ماند، خواهیم داشت مسافت = زمان × سرعت که برابر با $\dot{x}o$ یا $\dot{y}o$ است). نیوتن $\dot{x}o$ و $\dot{y}o$ را گشتاورها می‌نامد و منظورش از «گشتاورِ» یک فلوئنت، مقدار افزایش آن در یک بازهٔ زمانی بی‌نهایت‌کوچک است. بنابراین $(x+\dot{x}o, y+\dot{y}o)$ نقطه‌ای روی خم است که فاصله‌ای بی‌نهایت‌کوچک از (x,y) دارد و به‌قول نیوتن «چنان‌که اگر مختصات نقطه در یک لحظه x و y باشند، در لحظهٔ بعدی $x+\dot{x}o$

---

[۱] fluent [۲] flowing [۳] fluxion



شکل ۳

و $y+\dot{y}o$ خواهند بود.» اگر $(x+\dot{x}o, y+\dot{y}o)$ را در معادلهٔ اولیه جانشانی کنیم و معادله را با حذفِ $x^۳-ax^۲+axy-y^۳$ (که برابر با صفر است) و تقسیم بر o، ساده کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$۳x^۲\dot{x}-۲ax\dot{x}+ay\dot{x}+ax\dot{y}-۳y^۲\dot{y}+۳x\dot{x}^۲o-a\dot{x}^۲o$$
$$+a\dot{x}\dot{y}o-۳y\dot{y}^۲+\dot{x}^۳o^۲-\dot{y}^۳o^۲=۰.$$

سپس نیوتن با ذکر این مطلب که جمله‌های شامل o «بی‌نهایت کوچکتر» از جمله‌های دیگر هستند، آنها را کنار می‌گذارد و معادلهٔ $۳x^۲\dot{x}-۲ax\dot{x}+ay\dot{x}+ax\dot{y}-۳y^۲\dot{y}=۰$ را به‌دست می‌آورد که $\dot{x}$ را به $\dot{y}$ پیوند می‌دهد. به‌کمک این پیوند، می‌توان شیب خط مماس بر خم داده‌شده را در نقطهٔ (x,y) به‌صورت $\dot{y}/\dot{x}=(۳x^۲-۲ax+ay)/(۳y^۲-ax)$ به‌دست آورد. نیوتن متذکر می‌شود که این روش، کاملاً کلی است و او از این طریق می‌تواند شیب خط مماس بر هر خم جبری را به‌دست آورَد.

اما موضوع سر درآوردن از نماد «o» باقی مانده بود: آیا برابر صفر است؟ یا کمیتی متناهی است؟ یا بی‌نهایت‌کوچک؟ معضل نیوتن بی‌شباهت به معضل نیم قرن پیشِ فرما نبود. نیوتن کوشید با مطرح کردن نظریهٔ نسبت‌های غایی که شرح خواهیم داد، موضوع را روشن سازد.

سری‌های توانی یکی از ابزارهای اصلی در حساب دیفرانسیل و انتگرال نیوتن بود. او آنها را به‌منزلهٔ بسط‌های اعشاری نامتناهی در آنالیز می‌انگاشت و بر این ادعا بود که «محاسبه با اعداد و محاسبه با متغیرها دو عمل بسیار شبیه به هم هستند.» [۳۴] از دیدگاه نیوتن، سری‌های توانی چیزی نبودند جز چندجمله‌ای‌های نامتناهی که روی آنها می‌توانستیم همان عمل‌های چندجمله‌ای‌های عادی را انجام دهیم. آن چیزی که برای استفادهٔ نیوتن از سری‌های توانی در حساب دیفرانسیل و انتگرال اهمیت اساسی داشت، قضیهٔ دوجمله‌ای بود که آن را به توان‌های کسری و منفی تعمیم داده بود.

نیوتن روش‌های مبتنی بر سری‌های توانی را برای انتگرال‌گیری از تابع‌های جبری و متعالی «بدرفتار»ی به‌کار گرفت که محاسبهٔ مستقیم انتگرال آنها ناممکن به‌نظر می‌رسید. برای مثال، نیوتن برای انتگرال‌گیری از تابع $\sqrt{۱ - x^۳}$ که در قرن نوزدهم ثابت شد انتگرال آن تعداد متناهی جمله ندارد، عبارت $(۱ - x^۳)^{۱/۲}$ را با استفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای بسط می‌دهد و سپس از سری حاصل، جمله‌به‌جمله انتگرال می‌گیرد.

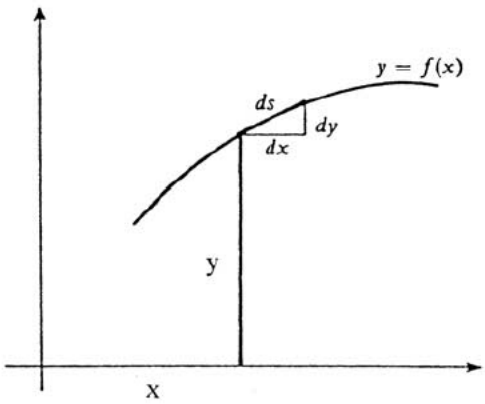
نیوتن نخستین کسی در اروپا بود که بسط‌های سری توانی تابع‌های مثلثاتی را (که ریاضیدانان هندی ۳۰۰ سال قبل‌تر با آن آشنا بودند) به‌دست آورد و از آنها برای یافتن مساحت ناحیهٔ زیر خم‌های چرخزاد[1] و مربع‌ساز[2] استفاده کرد. او همچنین تابع‌های نمایی و لگاریتمی را برحسب سری‌های توانی بسط داد. برای مثال، با توجه به اینکه $۱/(۱+x) = ۱ - x + x^۲ - x^۳ + x^۴ - \cdots$، می‌توانیم از دو طرف، انتگرال بگیریم و به‌دست آوریم $\log(۱+x) = x - x^۲/۲ + x^۳/۳ - x^۴/۴ + \cdots$. هرچند نیوتن هیچگاه مجاز بودنِ این انتگرال‌گیریِ جمله‌به‌جمله را مورد سؤال قرار نداد، به‌نظر می‌رسد از مسئلهٔ همگرایی آگاهی داشته است.

۳.۳. لایب‌نیتس. اندیشه‌های لایب‌نیتس در حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌تدریج تکامل یافتند و او نیز همانند نیوتن، چندین روایت از آنها به نگارش درآورد و این روایت‌ها افکار رو به تکامل او را عیان می‌کنند. آنچه که در همهٔ این روایت‌ها اهمیت اساسی داشت، مفهوم «دیفرانسیل» بود؛ هرچند این مفهوم برای لایب‌نیتس در دوره‌های مختلف معانی بسیار متفاوتی داشته است.

لایب‌نیتس خم را یک چندضلعی با تعداد نامتناهی ضلع و هر ضلع با طول بی‌نهایت‌کوچک در نظر می‌گرفت (به یاد آورید که مفهوم دایره از دیدگاه یونانیان، یک چندضلعی با تعداد نامتناهی ضلع بود). به چنین خمی می‌توان یک دنبالهٔ (گسستهٔ) نامتناهی از طول‌ها مانند $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، ... و یک دنبالهٔ نامتناهی از عرض‌ها مانند $y_۱$، $y_۲$، $y_۳$، ... وابسته کرد که در آن، (x_i, y_i) مختصات نقاطِ خم هستند. تفاضل بین مقدارهای متوالیِ x را دیفرانسیل x می‌نامید و با dx نشان می‌داد؛ مشابهاً برای dy. دیفرانسیل dx کمیتی ثابت و ناصفر است و در مقایسه با x، «بی‌نهایت‌کوچک» است. پس به هر خم، دنباله‌ای از دیفرانسیل‌ها وابسته می‌شود که همان دنبالهٔ تفاضل‌های $x_i - x_{i-۱}$ وابسته به طول‌های $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، ... است. لایب‌نیتس اضلاع چندضلعی سازندهٔ خم را با ds نشان می‌داد (باز تعداد نامتناهی از این گونه بی‌نهایت‌کوچک‌های ds وجود دارد). از اینجا مثلث مشخصه[3] با اضلاع بی‌نهایت‌کوچک dx، dy و ds به‌دست می‌آمد که در رابطهٔ $(ds)^۲ = (dx)^۲ + (dy)^۲$ صدق می‌کرد (شکل ۴ را ببینید). لایب‌نیتس ضلع ds از خم (چندضلعی) را منطبق بر مماس بر خم (در نقطهٔ x) در نظر می‌گرفت. در این باره می‌گوید [۳۷]:

[1] cycloid [2] quadratrix [3] characteristic triangle

«فقط باید به یاد داشته باشیم که یافتن مماس به این معنی است که خطی رسم شود که دو نقطه از خم در فاصلهٔ بی‌نهایت‌کوچک را به‌هم وصل کند؛ یا ضلع چندضلعی‌ای را امتداد دهیم که تعداد نامتناهی گوشه دارد و برای ما در حکم خم است. همواره می‌توان این فاصلهٔ بی‌نهایت‌کوچک را با دیفرانسیل کوچکی مثل ds بیان کرد.»



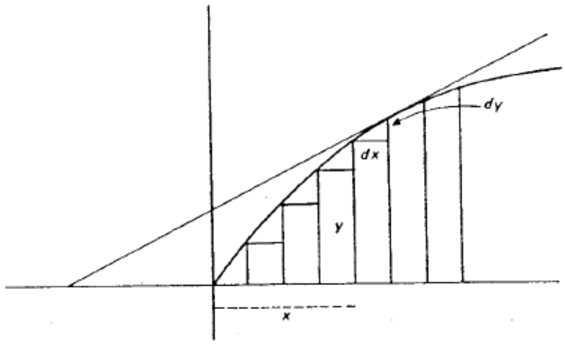
شکل ۴

بنابراین شیب خط مماس بر خم در نقطهٔ (x,y) برابر با dy/dx است که واقعاً خارج‌قسمت دیفرانسیل‌ها است و لایب‌نیتس آن را خارج‌قسمت دیفرانسیلی می‌نامید.

انتگرال لایب‌نیتس، مجموع نامتناهی از مستطیل‌های بی‌نهایت‌کوچک با قاعدهٔ ds و ارتفاع y است (شکل ۵ را ببینید). لایب‌نیتس ملاحظه می‌کند که «مثلث‌های باقیمانده، نسبت به مستطیل‌های مذکور در بالا بی‌نهایت کوچک هستند [و] می‌توان آنها را بدون هیچ دردسری حذف کرد.» [۱۹] این مثلث‌های «باقیمانده» همان مثلث‌های مشخصهٔ لایب‌نیتس هستند و بنابراین می‌توان آنها را حلقهٔ رابط بین مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری تلقی کرد. نماد بسیار الهام‌بخشی که لایب‌نیتس (پس از چند موردِ نه‌چندان موفق) برای انتگرال معرفی کرد، $\int y dx$ است ($\int$ یک S کشیده است و «مجموع» را نشان می‌دهد). لایب‌نیتس هم مثل نیوتن، انتگرال را از طریق پادمشتق‌گیری محاسبه می‌کرد.

لایب‌نیتس مدتی به‌دنبال یافتن قاعده‌های درستِ مشتق‌گیری از حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت بود. وقتی آنها را یافت، «اثباتشان» کار آسانی بود؛ به این ترتیب که

$$d(xy) = (x+dx)(y+dy)-xy = xy+xdy+ydx+(dx)(dy)-xy = xdy+ydx.$$



شکل ۵

لایب‌نیتس جملهٔ $(dx)(dy)$ را با ذکر این نکته که «نسبت به بقیهٔ جمله‌ها بی‌نهایت‌کوچک است»، حذف می‌کند [۱۹].

نمونهٔ دوم از روش‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال لایب‌نیتس، یافتن مماس بر مقطع مخروطی $x^۲ + ۲xy = ۵$ در نقطهٔ (x, y) است. اگر به‌جای x و y به‌ترتیب، $x + dx$ و $y + dy$ قرار دهیم و ملاحظه کنیم که $(x + dx, y + dy)$ نقطه‌ای روی این خم و «بی‌نهایت‌نزدیک» به (x, y) است، آن‌گاه داریم

$$(x + dx)^۲ + ۲(x + dx)(y + dy) = ۵ = x^۲ + ۲xy.$$

با ساده کردن طرفین و حذف جمله‌های $(dx)(dy)$ و $(dx)^۲$ که نسبت به dx و dy قابل اغماض هستند، نتیجه می‌شود که $۲xdx + ۲xdy + ۲ydx = ۰$. با تقسیم طرفین این عبارت بر dx و حل آن برحسب dy/dx، به‌دست می‌آوریم $dy/dx = (-x - y)/x$. البته اگر $x^۲ + ۲xy = ۵$ را به‌صورت $y = (۵ - x^۲)/۲x$ بنویسیم و از این رابطهٔ تابعی مشتق بگیریم، باز همین نتیجه را به‌دست می‌آوریم (به یاد داشته باشید که پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال لایب‌نیتس، به‌لحاظ زمانی پیش از ظهور مفهوم تابع قرار دارد).

در دو مثال بالا مشاهده کردیم که لایب‌نیتس چگونه با گزینش نمادگذاری مناسب توانست بدون اثبات دقیق، خیلی سریع به درستیِ چند نتیجهٔ مهم مجاب شود. اما نمادگذاری لایب‌نیتس نه‌تنها به کار اثبات نتیجه‌ها می‌آمد، بلکه اکتشاف آنها را نیز بسیار آسان می‌کرد. مثلاً چندان روشن نیست که چگونه می‌توان قاعدهٔ مشتق‌گیری از تابع مرکب $f(g(x))$، یعنی همان قاعدهٔ زنجیری را به‌دست آورد. اما اگر قرار دهیم $y = g(x)$ و $z = f(y)$ و نماد دیفرانسیل لایب‌نیتس را به‌کار ببریم و مشتق را

به‌صورت یک خارج‌قسمت در نظر بگیریم، فوراً نتیجه می‌شود که dz/dx (مشتق $f(g(x))$) برابر با $(dz/dy)(dy/dx)$ است. این شکل از قاعدهٔ زنجیری، یک روش اثبات امروزیِ آن را نیز به ذهن متبادر می‌کند که عبارت است از نشاندن Δx، Δy و Δz به‌ترتیب به‌جای dx، dy و dz و گرفتن حد و البته باقی حزم‌اندیشی‌ها.

نتایجی که (با عذاب وجدان؟) در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال سال اول با استفاده از بی‌نهایت‌کوچک‌ها (دیفرانسیل‌ها) به‌دست می‌آیند، جزء میراث‌های لایب‌نیتس هستند. مثلاً با انتگرال‌گیری از قاعدهٔ حاصل‌ضرب لایب‌نیتس، $d(xy) = xdy + ydx$، بی‌درنگ به دستور انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء می‌رسیم؛ به این ترتیب که چون

$$\int d(xy) = \int xdy + \int ydx,$$

پس

$$xy = \int xdy + \int ydx \quad \text{یا} \quad \int xdy = xy - \int ydx .$$

اهتمامی که لایب‌نیتس به وضع یک شیوهٔ نمادگذاری کارآمد در حساب دیفرانسیل و انتگرال داشت، جزء جدانشدنیِ کوشش‌های او در یافتن یک «زبان عمومی[۱] بود که منظورش از آن، یک زبان نمادین بود با این قابلیت که بتواند هر گفتار تعقلی[۲] را به محاسبه‌های معمولی فرو کاهد. همان‌طور که از مثال‌های بالا برمی‌آید، او در انجام این کار برای حساب دیفرانسیل و انتگرال، به‌طرز خارق‌العاده‌ای موفق شد. سی. اچ. ادواردز[۳] در این باره می‌نویسد [۱۹]:

> «در کلِ تاریخ علوم و ریاضیات، حساب دیفرانسیل و انتگرالِ بی‌نهایت‌کوچک‌ها [ابداعی لایب‌نیتس] نمونه‌ای ناب از یک دستگاه نمادگذاری و اصطلاحات است که چنان بی‌عیب و نقص با موضوع خود درآمیخته است که اعمال منطقی اساسی و فرآیندهای آن را بی‌کم‌وکاست می‌نمایاند.»

۴.۳. نکتهٔ آموزشی. برای ما نمادگذاری و استفاده از آنها چیزی عادی تلقی می‌شود. ریاضیات بدون یک شیوهٔ نمادگذاری رشدیافتهٔ مناسب، برای ما غیرقابل فهم می‌شود. با وجود این، لازم است خاطرنشان کنیم که طی این دست‌کم سه‌هزار سال، ریاضیات به‌ندرت بدون استفاده از نمادها رشدی داشته است! در واقع همان‌طور که کی. پِدِرسُن[۴] تاریخدان اظهار می‌کند [۲۸]:

> «یکی از دلایل پی نبردنِ ریاضیدانان [اوایل قرن ۱۷] به رویکردهای کلیِ موجود در روش‌های گوناگون [برای حل مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال] احتمالاً

[۱] universal characteristic [۲] rational discourse [۳] C. H. Edwards [۴] K. Pederson

این واقعیت بوده است که آنها کارهای خود را تا اندازهٔ زیادی به زبان عادی و بدون هیچ‌گونه نمادگذاری خاصی، بیان می‌کردند و بنابراین برای آنها مشکل بود که پیوندهای بین مسئله‌های مورد بحث را صورت‌بندی کنند.»

پس همان‌طور که گفتیم، نمادگذاری مناسب نه‌تنها در اثبات نتایج، بلکه در مرحلهٔ کشف آنها نیز به ما کمک می‌کند. علت اصلی برتریِ حساب دیفرانسیل و انتگرال لایب‌نیتس بر حساب دیفرانسیل و انتگرال نیوتن، در نمادگذاری مناسب او بود که به‌قول خودش، حقایق را بدون هیچ زحمت فکری در اختیار ما می‌گذارد [۷]. سی. اچ. ادواردز سودمندیِ نمادگرایی در آموزش حساب دیفرانسیل و انتگرال را به‌طرز جذابی بیان کرده است [۱۹]:

«گزافه نیست اگر بگوییم که حساب دیفرانسیل و انتگرال لایب‌نیتس مسائلی را در تیررس فهم یک دانشجوی عادی قرار داد که روزگاری حل آنها نیازمند نبوغ افرادی چون ارشمیدس و یا نیوتن بود.»

۴. قرن هیجدهم: اویلر

هرچند دستاوردهای نیوتن و لایب‌نیتس، جایگاه والایی داشت، صورت‌بندی آنها از حساب دیفرانسیل و انتگرال عمدتاً از روش‌ها و مسائلی تشکیل شده بود که پیوندی سست با یکدیگر داشتند و حتی برای جامعهٔ ریاضی کوچک آن زمان، به‌آسانی قابل فهم نبودند. متنی که نخستین بار لوپیتال در سال ۱۶۹۶ با عنوان «آنالیز بی‌نهایت‌کوچک‌ها برای درک خط‌های خمیده» نوشت، به‌طور سازمان‌یافته خواننده را با حساب دیفرانسیل لایب‌نیتس آشنا می‌کرد. در دهه‌های آغازین قرن هیجدهم، حساب دیفرانسیل و انتگرال در اثر کوشش‌های برادران برنویی به‌ویژه یاکوب و یوهان، گسترش بیشتری یافت. طی این دوره، کتاب‌های متعددی منتشر شد اما تمرکز بر خودِ موضوع همچنان مغفول مانده بود. محتوای اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال در آن دوره، هندسهٔ خم‌ها بود: مماس، مساحت، حجم، طول قوس (عنوان کتاب لوپیتال را به یاد بیاورید). البته نیوتن و لایب‌نیتس ابزاری جبری (نمادی) معرفی کردند اما انگیزهٔ آنها از معرفی این ابزار و مسائلی که می‌شد این ابزار را در مورد آنها به‌کار برد، هندسی یا فیزیکی بود و دوباره با خم‌ها پیوند می‌خورد. به‌ویژه (همان‌طور که پیشتر اشاره کردیم) حساب دیفرانسیل و انتگرال در آن دوره، حساب دیفرانسیل و انتگرالِ متغیرهایی بود که با معادله‌ها به هم پیوند می‌خوردند؛ نه حساب دیفرانسیل و انتگرالِ تابع‌ها.

نخستین بار اویلر در حوالی میانهٔ قرن هیجدهم گشایش مفهومیِ بنیادینی در این زمینه انجام داد که هنوز هم با ما عجین است. او مفهوم تابع را هستهٔ مرکزی حساب دیفرانسیل و انتگرال قرار داد و ادعا کرد که موضوع حساب دیفرانسیل و انتگرال، مطالعهٔ خم‌ها نیست بلکه مطالعهٔ تابع‌ها است.

مشتق (کسر تفاضلی) و انتگرال صرفاً تجرید مفاهیم مماس یا سرعت لحظه‌ای از یک سو، و مساحت یا حجم از سوی دیگر، نیستند بلکه مفاهیم بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال هستند که باید مورد کندوکاو قرار گیرند.

اویلر نخستین کسی نبود که مفهوم تابع را تعریف کرد، بلکه اولین فردی بود که حساب دیفرانسیل و انتگرال را شاخه‌ای از ریاضیات دانست که به مطالعهٔ تابع‌ها می‌پردازد و از این‌رو تابع را به مفهومی کلیدی در ریاضیات تبدیل کرد. اما چنین حکمی حتی اگر از سوی کسی مانند اویلر هم صادر می‌شد، نمی‌توانست یک‌شبه دیدگاه‌های ریاضیدانان آن دوره را تغییر دهد. ریاضیدانان قرن هیجدهم به‌سادگی با کلیدی بودنِ مفهوم تابع در ریاضیات، کنار نمی‌آمدند به‌ویژه که به نظرشان، متغیرها کارآمدیِ لازم را داشتند.

۱.۴. نکتهٔ آموزشی. حساب دیفرانسیل و انتگرال بدون تابع! ممکن است بدعت به نظر برسد. البته همان‌طور که نیوتن، لایب‌نیتس و اخلاف بلافصل آنها نشان داده‌اند، یقیناً می‌توان حساب دیفرانسیل و انتگرال را بدون تابع هم تدریس کرد. اما آیا مجاز به چنین کاری هستیم؟ اگر شرایط محیطی اجازه دهد، شاید به‌لحاظ آموزشی تجربه‌ای معنادار باشد: هندسه و سینماتیک را انگیزه بگیریم و متغیرها و معادله‌ها را ابزار؛ ترکیب توانمندی است! البته اگر دانشجو با مفهوم تابع آشنا باشد، از فرض زیربنایی بودنِ تابع، دستاوردهای مفهومی و فنی بسیاری عاید خواهد شد و این کاری بود که اویلر آغاز کرد (یکی از محاسن کار با تابع این است که در تابع، برخلاف معادله، آشکارا بین متغیر مستقل و متغیر وابسته و در نتیجه بین دامنه و بُرد تابع، تمایز می‌گذاریم). البته به‌کارگیریِ تابع در درس‌های پیشرفته‌تر اجتناب‌ناپذیر است.

۲.۴. اویلر دیدگاه‌های خود را دربارهٔ اصالت نقش تابع در حساب دیفرانسیل و انتگرال، در کتابی با عنوان آشنایی با آنالیز بی‌نهایت‌کوچک‌ها[۱] به سال ۱۷۴۸ منتشر کرد. رهیافت او به‌تمامی، جبری بود. در جلد اول از این مجموعهٔ دو جلدی، حتی یک نمودار هم به چشم نمی‌خورد. سری‌های توانی نقشی بنیادی داشتند و ابزاری جبری برای مطالعات آتی در حساب دیفرانسیل و انتگرال به شمار می‌آمدند. البته این جبری‌سازیِ حساب دیفرانسیل و انتگرال، حدود یک قرن بعد، زمانی که کُشی در دههٔ ۱۸۲۰ پژوهش‌های خود را آغاز کرد، به پایان رسید.

مثال‌هایی که در اینجا از کارهای اویلر ارائه می‌کنیم، درک خوبی از هنرنمایی (که نه! جادوگریِ) او در استفاده از روش‌های بی‌نهایت‌کوچک‌ها در ما ایجاد می‌کند.

[۱] Introductio in Analysin Infinitorum

(الف) به روش مرموزی که اویلر برای یافتن بسط سری توانی تابع $\sin nx$ به‌کار می‌برد، توجه کنید: از قضیهٔ دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم تا سمت چپ اتحاد

$$(\cos z + \mathrm{i}\sin z)^n = \cos nz + \mathrm{i}\sin nz$$

را بسط دهیم. سپس بخش موهومی این بسط را با $\sin nz$ برابر قرار می‌دهیم. به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\sin nz &= n(\cos z)^{n-۱}\sin z - [n(n-۱)(n-۲)/۳!](\cos z)^{n-۲}(\sin z)^۳ \\ &+ [n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)/۵!](\cos z)^{n-۵}(\sin z)^۵ - \cdots\end{aligned} \quad (۱.۴)$$

اکنون فرض کنیم n یک عدد طبیعی خیلی بزرگ و z یک عدد حقیقی خیلی کوچک باشد (به نظر می‌رسد اویلر هیچ نیازی نمی‌دیده که بگوید این کمیت‌ها چیستند). در این صورت

$$\cos z = ۱, \sin z = z, n(n-۱)(n-۲) = n^۳, n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴) = n^۵, \ldots$$

(باز هم اویلر هیچ توضیحی دربارهٔ درستیِ این روابط نمی‌دهد؛ هرچند می‌توانیم پی ببریم که در مغزش چه می‌گذشته است). پس معادلهٔ (۱.۴) تبدیل می‌شود به

$$\sin nz = nz - \frac{n^۳z^۳}{۳!} + \frac{n^۵z^۵}{۵!} - \cdots .$$

حال فرض می‌کنیم $nz = x$. اویلر ادعا می‌کند که x متناهی است، زیرا n بی‌نهایت‌بزرگ و z بی‌نهایت‌کوچک است. در پایان، نتیجه می‌گیرد که

$$\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \cdots .$$

تعجب‌برانگیز است!

(ب) اویلر بسط سری توانی تابع‌های نمایی و لگاریتمی را نیز به روشی مشابه به‌دست می‌آورد و با استدلال زیر به‌کمک بسط تابع لگاریتمی، دیفرانسیل (مشتق) $\log x$ را می‌یابد:

$$\begin{aligned}d(\log x) &= \log(x+dx) - \log x = \log(۱ + dx/x) \\ &= \frac{dx}{x} - \frac{(dx)^۲}{۲x^۲} + \frac{(dx)^۳}{۳x^۳} - \cdots = \frac{dx}{x}.\end{aligned}$$

اویلر استدلال می‌کند که چون $(dx)^۲$، $(dx)^۳$، ... در مقایسه با dx بسیار کوچک هستند، می‌توان آنها را از بسط بالا حذف کرد.

(پ) اکنون یکی از اکتشافات هوشمندانهٔ اویلر را شرح می‌دهیم که همان استنتاج فرمول مشهور

$$۱ + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \frac{۱}{۴^۲} + \cdots = \frac{\pi^۲}{۶}$$

است؛ نتیجه‌ای که از چشم لایب‌نیتس و یاکوب برنویی پوشیده مانده بود: ریشه‌های $\sin x$ عبارت‌اند از

$$۰, \pm\pi, \pm۲\pi, \pm۳\pi, \dots .$$

پس اینها ریشه‌های «چندجمله‌ای نامتناهیِ»

$$x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \cdots$$

نیز هستند. این همان بسط سری توانی $\sin x$ است. با تقسیم بر x و حذف ریشهٔ $x = ۰$، نتیجه می‌گیریم که ریشه‌های $۱ - x^۲/۳! + x^۴/۵! - \dots$ عبارت‌اند از $\pm\pi$، $\pm۲\pi$، $\pm۳\pi$، .... اما ریشه‌ها و جملهٔ ثابت چندجمله‌ای نامتناهی حاصل از بسط ضرب نامتناهیِ

$$(۱ - x^۲/\pi^۲)(۱ - x^۲/(۲\pi)^۲)(۱ - x^۲/(۳\pi)^۲)\cdots$$

همان ریشه‌ها و جملهٔ ثابت چندجمله‌ای نامتناهی $۱ - x^۲/۳! + x^۴/۵! - \dots$ هستند. پس این دو چندجمله‌ای با هم برابرند (درست مثل چندجمله‌ای‌های عادی):

$$۱ - \frac{x^۲}{۳!} + \frac{x^۴}{۵!} - = (۱ - x^۲/\pi^۲)(۱ - x^۲/(۲\pi)^۲)(۱ - x^۲/(۳\pi)^۲)\cdots$$

ضریب $x^۲$ را در دو سوی این برابری مقایسه می‌کنیم:

$$-\frac{۱}{۳!} = -\frac{۱}{\pi^۲} - \frac{۱}{(۲\pi)^۲} - \frac{۱}{(۳\pi)^۲} - \cdots .$$

برای اینکه متوجه شوید ضریب $x^۲$ در سمت راست برابری، چگونه به‌دست می‌آید، تصور کنید که این بسط تنها تعدادی متناهی جمله دارد. جمله‌ها را بازآرایی می‌کنیم و سرانجام به‌دست می‌آوریم

$$۱ + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \frac{۱}{۴^۲} + \cdots = \frac{\pi^۲}{۶}.$$

این روش تحلیل صوری و جبری که اویلر و بیشترِ ریاضیدانان قرن هیجدهم آن را به طرز عالی به‌کار می‌بستند، شگفت‌آور است. آنها ایمان داشتند که هرچه دربارهٔ سری‌های همگرا صادق باشد، در مورد سری‌های واگرا هم صادق است، هرچه دربارهٔ کمیت‌های متناهی صادق باشد، در مورد کمیت‌های بی‌نهایت‌بزرگ و بی‌نهایت‌کوچک هم صادق است و هرچه دربارهٔ چندجمله‌ای‌ها صادق باشد، در مورد سری‌های توانی نیز صادق است.

چه چیز ریاضیدانان را وامی‌داشت تا به قدرت نمادها اعتماد کنند و این «اصل تسرّی» بسیار فراگیر را بپذیرند که هر آنچه در یک زمینه از ریاضیات برقرار باشد، در همهٔ زمینه‌های به‌ظاهر مشابه

هم برقرار است؟ اول از همه به این دلیل که کاربرد این روش‌های صوری منجر به نتایجی مهم می‌شد و شهود قوی ریاضیدانان پیشرو در آن دوران، خطاهای احتمالی را به کمترین میزان ممکن می‌رساند. به‌علاوه این روش‌ها اغلب در مورد مسائلی به‌کار گرفته می‌شدند که معقول بودنِ جواب‌های آنها، درستیِ نتیجه‌ها و لذا درستیِ روش‌ها را تضمین می‌کرد. همچنین برخی (از جمله نیوتن) معتقد بودند که ریاضیدانان، کاشفان طرح ریاضی‌وار پرعظمتی هستند که خداوند، عالم را بر اساس آن خلق کرده است. (البته این اعتقاد تا پایان قرن هیجدهم تا اندازه‌ای تضعیف شده بود: نقل است که وقتی لاپلاس یک نسخه از کتاب مکانیک سماوی خود را به ناپلئون تقدیم می‌کند، ناپلئون او را خطاب قرار می‌دهد و می‌گوید: «جناب لاپلاس! به من گفته‌اند شما کتابی به این بزرگی در باب نظام عالم نگاشته‌اید اما حتی یک بار هم نامی از خالق این نظام به میان نیاورده‌اید.» و لاپلاس پاسخ می‌دهد: «قربان! به چنین فرضی نیاز نداشتم.» [۴۰])

۳.۴. نکتهٔ آموزشی. همان‌طور که می‌دانیم سری‌های توانی ابزاری نیرومند در پرداختن به مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال هستند. در واقع سری توانی یک ابزار «فراگیر» است به این معنی که بیشترِ (اگر نه همهٔ) تابع‌هایی را که در حساب دیفرانسیل و انتگرال با آنها سروکار داریم، می‌توان برحسب سری توانی نمایش داد. بنابراین معرفی سری‌های توانی در همان اوایل مطالعهٔ درس حساب دیفرانسیل و انتگرال، آموزنده است. دانشجویان پس از آشنایی با سری‌های توانی می‌توانند

- همانندیِ آنها را با چندجمله‌ای‌ها (البته بااحتیاط) درک کنند. قیاس، ابزاری نیرومند در اکتشاف و اثبات ریاضی است و البته باید کاربرد آن همراه با مراقبت باشد.
- ابزارهایی برای محاسبات و تقریب‌های عددی در اختیار داشته باشند. برای مثال، اگر تابع $\tan^{-۱}(x)$ را برحسب سری توانی بسط دهیم و x را $۱/\sqrt{۳}$ بگیریم، می‌توانیم مقدار π را مثلاً تا ۷۲ رقم اعشار به‌دست آوریم (با فرضِ $x = ۱$، یک سری با آهنگ همگرایی خیلی کند به‌دست خواهیم آورد).
- تعریف تابع‌های متعالی مانند سینوس، کسینوس و لگاریتم را به حالت متغیر مختلط تعمیم دهند.
- نتایج جالبی مانند

$$۱ + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \frac{۱}{۴^۲} + \cdots = \frac{\pi^۲}{۶}$$

یا فرمول اویلر–کُتس[۱] $e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ را به‌دست آورند.

[۱] Euler-Cotes formula

۴.۴. نکتهٔ آموزشی. توسّل به روش‌های ریاضی ناسازگار که در بهترین حالت درستی‌شان مورد تردید بود، در میان ریاضیدانان قرن‌های هفدهم و هیجدهم متداول بود. خودشان هم غالباً متوجه بودند که روش‌هایی که به‌کار می‌گیرند، [به‌لحاظ دقت ریاضی] رضایت‌بخش نیستند، اما این روش‌ها را روا می‌دانستند چون نتایجی درست به بار می‌آوردند. توجیه به‌کار بردنِ برخی مفاهیم تعریف‌نشده صرفاً به این بهانه که نتایجی سودمند از این کار به‌دست می‌آید، به دفعات در تاریخ تحوّل ریاضیات رخ داده است. البته با گذشت زمان، وضوح و درک درست از آن مفاهیم از میان سرگشتگی‌ها پدیدار می‌گشت. گرچه در کتاب‌های درسی معمولاً محصول پایانیِ یک فعالیت ریاضی ارائه می‌شود اما گاهی لازم است که متعلّم بتواند حقایق ریاضی را خودش کشف و ثابت کند. البته روش کشف یک نتیجهٔ ریاضی ممکن است تفاوتی فاحش با روش اثبات آن داشته باشد. مثال‌هایی که از پژوهش‌های فرما، لایب‌نیتس و اویلر ارائه کردیم، به‌اجمال، شیوهٔ اکتشاف ریاضی را توسط برخی از بزرگان این علم به ما نشان می‌دهد. آیا این نمونه‌ها برای استفاده در آموزش ریاضی سودمند نیستند؟

۵. بحث‌های مربوط به مبانی در قرن‌های هفدهم و هیجدهم

حرکت در راستای دقیق کردنِ مبانی حساب دیفرانسیل و انتگرال، در اوایل قرن هفدهم کورمال کورمال آغاز شد و در دههٔ ۱۸۷۰ شکل و شمایل پایانی خود را به‌دست آورد. این کندیِ بیش از حد در تحوّل مبانیِ منطقی، چندان هم در تاریخ ریاضیات غیرعادی نیست. دقت، صوری‌سازی و ارائهٔ منطقیِ یک مفهوم، نتیجه یا نظریه، غالباً نقطهٔ پایانیِ یک فرآیند تحوّل ریاضی است. در مورد حساب دیفرانسیل و انتگرال، ریاضیدانان قرن‌های هفدهم و هیجدهم دستاوردهای قابل توجهی به‌دست آورده بودند که مبتنی بر شهود و استدلال مکاشفه‌ای بود و لذا دلایلی قاطع که استدلال‌های آنها را بر مبانی محکمی استوار سازد، در دست نداشتند. البته این بدان معنا نیست که در طی این دو قرن، هیچ دغدغه‌ای در مورد منطقِ حاکم بر الگوریتم‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال وجود نداشته است، بلکه کوشش‌هایی هرچند ناموفق در این باره صورت گرفته بود.

ریاضیدانان قرن‌های هفدهم و هیجدهم می‌دانستند که موضوعی که در حالِ آفرینش آن هستند، زیربنایی مستحکم ندارد. برای مثال، آنها آگاه بودند که بی‌نهایت‌کوچک‌ها در اصل ارشمیدس صدق نمی‌کنند و لذا باید آنها را به چشم تردید نگریست. اصل ارشمیدس، اصلی بنیادی در نظریهٔ نسبت و تناسب یونانیان و همچنین جبر و هندسهٔ قرن هفدهم بود. این اصل می‌گوید که به‌ازای هر دو عدد حقیقی مثبت مانند a و b عددی طبیعی مانند n موجود است به‌طوری که $na > b$. اما اگر a بی‌نهایت‌کوچک باشد و $b = ۱$، آن‌گاه برای هر عدد طبیعی n داریم $na < ۱$. نیوتن به این نکته توجهی ویژه داشت.

هر وقت بحث دقت در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیش می‌آمد، ریاضیدانان معمولاً مدعی می‌شدند که می‌توانند با بنا کردنِ کل حساب دیفرانسیل و انتگرال بر پایهٔ روش دقیق افنا که یونانیان باستان آن را ابداع کرده بودند، همهٔ دلواپسی‌ها را در این باره برطرف کنند. اما این روش، پیچیده و غیرعملی بود. (به‌یاد آورید که) کاوالی‌یری با وجود اینکه مبحث دقت را به فلاسفه واگذار کرده بود، یک بار خودش (در جایگاه یک فیلسوف) تقسیم‌ناپذیرهای خطی در یک رویهٔ مسطح را به تارهای موازی در یک بافتنی تشبیه کرده بود و تقسیم‌ناپذیرهای مسطح در یک جسم صلب را به صفحه‌های موازی یک کتاب. البته این تعبیرها چیزی بر ارزش روش‌های او نمی‌افزود. فرما معتقد بود که یک فرآیند جبری ساده با تعبیر هندسی روشن برای یافتن خط مماس در دست دارد. نمونه‌ای از دیدگاه‌های ریاضیدانان آن دوران دربارهٔ مبانی حساب دیفرانسیل و انتگرال، در یکی از نوشته‌های هویگنس در میانهٔ قرن هفدهم به‌خوبی بیان شده است [۱۹]:

> «برای اینکه همچون متخصصانِ موضوع [از درستیِ نتایج] اطمینان یابیم، لازم نیست نتایج را تمام و کمال ثابت کنیم یا چنان شالوده‌ای بسازیم که کسی تردید نداشته باشد که با تکیه بر آن، می‌توان اثباتی بی‌نقص ارائه کرد. مسلّم است که نتایج باید همچون تمامی کارهای ارشمیدس به شکلی روشن، عالی و استادانه طرح شوند اما نخستین و مهم‌ترین چیز، خودِ فرآیند اکتشاف است که طالبان علم با دانستن آن مشعوف می‌شوند. بنابراین به نظر می‌رسد که ورای همهٔ اینها، باید آن روشی را دنبال کنیم که به‌کمک آن، این فرآیندِ اکتشاف به موجزترین و روشن‌ترین شکل ممکن درک و ارائه شود.»

۱.۵. نیوتن و لایب‌نیتس هر دو تلاش کردند روش‌های خود را به‌دقت تبیین کنند اما خودشان هم می‌دانستند که توانمندیِ این روش‌ها در حساب دیفرانسیل و انتگرال به معنای تواناییِ آنها در ارائهٔ پشتوانه‌ای منطقی برای فرآیندهای الگوریتمی‌شان نیست. نیوتن اظهار می‌کرد که وجود فلوکسیون‌ها «نیازمند شرحی بسیار کوتاه است نه اثباتی ژرف.» [۱۹] لایب‌نیتس دربارهٔ دیفرانسیل‌ها می‌گفت که «کافی است آنها را به‌سان ابزاری برای مقاصد محاسباتی به‌کار بریم؛ درست همان‌طور که جبردان‌ها از به‌کارگیریِ ریشه‌های موهومی سود می‌برند.» [۱۹] (البته در آن دوره، مشروعیت منطقیِ عددهای موهومی بیش از بی‌نهایت‌کوچک‌ها نبود.)

بجز تعریف فلوکسیون، یکی از نقاط ضعف بنیادی روش نیوتن در حساب دیفرانسیل و انتگرال، فرآیند محاسبهٔ فلوکسیون‌ها با استفاده از کمیت بی‌نهایت‌کوچک o بود (بخش ۲,۳ را ببینید). سؤال این بود که تکلیف این o چیست؟ آیا صفر است؟ اگر چنین است، چطور می‌شود بر آن تقسیم کرد؟ اگر صفر نیست، چطور می‌شود به این موضوع بی‌اعتنا بود و با آن طوری برخورد کرد که انگار صفر

است؟ نیوتن در کتاب پرینکیپیا تلاش کرد این مشکل را با استفاده از نظریهٔ «نسبت‌های اولیه و غایی»، برطرف کند. این نظریه، ابزاری برای پرداختن به حدود نسبت‌های کمیت‌های هندسی به زبان هندسهٔ ترکیبی بود. لم I در کتاب پرینکیپیا از اهمیت مفهوم جدید «تساوی غایی» خبر می‌دهد که نشان از تلاش نیوتن برای تعریف حد است [۷]:

> «کمیت‌ها و نسبت‌های کمیت‌ها اگر در زمانی متناهی به‌طور پیوسته به تساوی میل کنند و پیش از پایان آن زمان، از هر تخمین داده‌شده‌ای به یکدیگر نزدیک‌تر شوند، سرانجام مساوی می‌شوند.»

از میان کاربردهایی که نیوتن برای این مفهوم ارائه می‌کند، یکی این است که: وتری از کمان AB روی یک خم و پاره‌خط نظیر آن، AD، روی خط مماس بر خم در نقطهٔ A داده شده است (شکل ۶). نیوتن ادعا می‌کند که اگر نقطه‌های A و B آن‌قدر به هم نزدیک شوند تا به یکدیگر برسند، «نسبت هر یک از کمان، وتر و مماس به دیگری، نسبت تساوی است.» [۷] سپس جلوتر می‌رود و «نسبت‌های غایی کمیت‌های ناپدیدشونده» -با اصطلاحات امروزی، حد نسبت کمیت‌هایی که به صفر میل می‌کنند، یعنی مشتق- را توضیح می‌دهد [۱۹]:

> «منظور از نسبت غایی کمیت‌های ناپدیدشونده، نسبتی از این کمیت‌ها است که با آن نسبت، کمیت‌ها صفر می‌شوند نه نسبت آنها پیش از صفر شدن یا پس از آن... آن نسبت‌های غایی که کمیت‌ها با آن صفر می‌شوند، دقیقاً نسبت‌های کمیت‌های غایی نیستند، بلکه حدودی هستند که نسبت‌های کمیت‌های نزولیِ بی‌کران، به آنها می‌گرایند و از هر تقریب داده‌شده‌ای به آنها نزدیک‌تر می‌شوند اما هیچ‌گاه از آنها گذر نمی‌کنند و حتی به آنها نمی‌رسند تا اینکه آن کمیت‌ها در بی‌نهایت معدوم می‌شوند.»

برای مثال، وقتی نیوتن می‌خواهد با استفاده از این حساب دیفرانسیل و انتگرالِ پروردهٔ خود، مماس بر خم $y = x^۲ + ۳x + ۲$ را بیابد، به این ترتیب عمل می‌کند: اگر o نموّی کوچک در متغیر x باشد، نموّ نظیر آن در متغیر y برابر است با

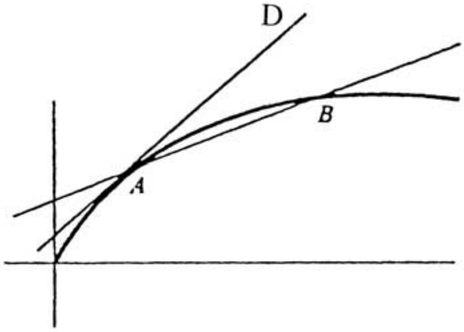
$$[(x + o)^۲ + ۳(x + o) + ۲] - [x^۲ + ۳x + ۲]$$

و بنابراین نسبت این دو نموّ برابر می‌شود با

$$\{[(x + o)^۲ + ۳(x + o) + ۲] - [x^۲ + ۳x + ۲]\} : o$$

که با قدری ساده‌سازی معلوم می‌شود که این نسبت برابر است با $(۲x + ۳ + o)o : o$. در نتیجه با تقسیم بر o، مقدار این نسبت را $(۲x + ۳ + o) : ۱$ به‌دست می‌آوریم. حال اگر o را صفر قرار دهیم،

نسبت غایی کمیت‌های ناپدیدشونده –یعنی کمیت‌هایی که به‌قول نیوتن «به صفر میل می‌کنند»– را برابر با ۱ : $(۲x + ۳)$ خواهیم یافت. با نمادهای امروزی داریم $dy/dx = ۲x + ۳$.



شکل ۶

روشن است که نیوتن خیلی به مفهوم امروزیِ حد نزدیک می‌شود؛ هرچند تعریف‌های او، خوشبینانه بگوییم، خیلی مبهم‌اند. برای مثال، منظور از اینکه «سرانجام مساوی‌اند» چیست؟ آیا «هرگز گذر نمی‌کند» به این معنی است که یک متغیر نمی‌تواند اطراف حد خودش، نوسان کند؟ آیا از اینکه بگوییم «به آنها نمی‌رسند تا اینکه آن کمیت‌ها در بی‌نهایت معدوم می‌شوند» می‌توان مشخص کرد که به حد می‌رسیم یا نه و اگر می‌رسیم، چه وقت؟ نیوتن نه‌تنها به این پرسش‌ها هیچ پاسخی نمی‌دهد، بلکه برای توجیه فرآیندهای الگوریتمی‌اش، به اندازهٔ کافی از این گونه بسترسازی‌ها هم نمی‌کند.

لایب‌نیتس چندین رهیافت برای حل مشکل مربوط به دیفرانسیل‌ها ارائه کرد. گاهی آنها را به‌سان موجوداتی واقعی می‌پذیرفت و به آنها به چشم کمیت‌های بی‌نهایت‌کوچکی می‌نگریست که از هر کمیت حقیقی کوچکترند (یک بار گوشزد کرده بود اندازهٔ dx در مقابل x همانند اندازهٔ یک دانه شن در برابر کل کرهٔ زمین است). گاهی هم به دیفرانسیل‌ها طوری می‌نگریست که گویا «موجوداتی جعلی هستند که برای خلاصه‌نگاری و کلّی‌گویی مناسب‌اند» [۱۹] که البته خلاصه‌نگاری‌ها را باید برآمده از کاربرد روش افنای ائودوکسوس دانست. گهگاه هم فرض می‌کرد دیفرانسیل‌ها کمیت‌هایی متناهی هستند که خطاهای محاسباتی را نشان می‌دهند اما این خطاها را می‌توان تا هر اندازهٔ دلخواه کوچک کرد. او می‌گوید [۷]:

> «اگر کسی دوست نداشت کمیت‌های بی‌نهایت‌کوچک را بپذیرد، می‌تواند آنها را هر اندازه که لازم می‌داند کوچک فرض کند تا خطای ایجادشده [از به‌کارگیریِ آنها] چندان مؤثر نباشد یا از هر مقدار مفروضی کمتر باشد.»

لایب‌نیتس هیچ‌یک از این رویکردها را به‌تفصیل شرح نداد و همیشه مسئلهٔ وجود دیفرانسیل‌ها را به‌کلی متمایز از مسئلهٔ کاربرد آنها در حل مسائل مهم می‌دانست و در این دومی تردید نداشت.

۲.۵. عدم یقین دربارهٔ مبانی منطقیِ حساب دیفرانسیل و انتگرال در سراسر قرن هیجدهم پابرجا بود اما این، مانع از پیشرفت سریع این موضوع نشد. بسیاری از ریاضیدانان آن دوره، همزمان تلاش می‌کردند مشکل مبانی حساب دیفرانسیل و انتگرال را برطرف کنند. این کوشش‌ها پس از آن قوت بیشتری گرفت که اسقف جُرج برکلی[۱] در رساله‌ای به نام «آنالیزدان: خطابه‌ای برای ریاضیدانان کافر»[۲] به سال ۱۷۳۴ انتقادی پرزور و نافذ بر حساب دیفرانسیل و انتگرال نیوتن (و تا اندازه‌ای، لایب‌نیتس) وارد کرد. برکلی از اینکه دانشِ نیوتنی پشتوانه‌ای برای مادی‌گرایی شده بود، رنجیده‌خاطر و حتی ترسیده بود و لذا تلاش می‌کرد حساب دیفرانسیل و انتگرال را که مؤلفهٔ اصلی این دانش به شمار می‌رفت، از اعتبار بیندازد به این امید که بتواند دیدگاه‌های منفی دانشمندان دربارهٔ حقایق دینی را تغییر دهد. برکلی ادعا می‌کرد: «به نظر من، هر آن کس که فلوکسیون‌های دوم و سوم یا تفاضلات دوم و سوم را بپذیرد، فطرت الهی او رو به آلودگی خواهد نهاد.» [۴] انتقاد اصلی و درستِ برکلی بر کاربرد بی‌نهایت‌کوچک‌ها در حساب دیفرانسیل و انتگرال متمرکز بود [۴، ۱۹]:

> «و این نموّهای ناپدیدشونده چیستند؟ نه کمیت‌های متناهی‌اند و نه کمیت‌های بی‌نهایت‌کوچک و نه حتی هیچ. آیا نباید آنها را روح کمیت‌های مرده نامید؟ . . . با اتکا بر این اندیشهٔ غلط اندر غلط، به دانش دست نمی‌یابید چه رسد به حقیقت!»

یکی از پاسخ‌های ارزشمند به انتقاد برکلی، از آنِ دالامبر است که در مقاله‌ای با عنوان «دیفرانسیل» به سال ۱۷۵۴ در دایرةالمعارف[۳] مشهور چاپ شد. دالامبر مفهوم نیوتنیِ مشتق (که همان نسبت غایی بود) را با تعریف صریح مشتق به‌عنوان حد نسبت نموّها، جایگزین کرد: «مشتق‌گیری از یک معادله صرفاً عبارت است از یافتن حد نسبت تفاضلات متناهی دو کمیت موجود در معادله.» [۱۹] از نظر دالامبر [۷]:

> «یک کمیت، حد کمیتی دیگر است اگر دومی بتواند هر اندازه که بخواهیم به اولی نزدیک بشود چنان که تفاضل آنها مطلقاً قابل توجه نباشد.»

توجه کنید که دالامبر از حد کمیت سخن می‌گوید نه حد تابع و نوسان کمیت در پیرامون حد را مجاز نمی‌داند. دالامبر نتایج دیدگاه‌های خود را دربارهٔ حد، استخراج نکرد اما پیشگویانه اعلام کرد که «نظریهٔ حدود، متافیزیک واقعی حساب دیفرانسیل و انتگرال است.» [۴۰] معاصران دالامبر، توجه چندانی به کارهای او نکردند. دالامبر خودش می‌دانست که آنقدر جسارت ندارد که حساب دیفرانسیل و انتگرال

[۱] Bishop George Berkeley [۲] The Analyst: A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician
[۳] Encyclopédie

را بر مبانی محکمی استوار سازد. از این‌رو از شاگردانش می‌خواست «استقامت کنند و به موفقیت خویش ایمان داشته باشند.» [۴۰] اما پژوهش‌های او از این نظر سودمند بودند که توجه ریاضیدانان قارّهٔ اروپا را که تحت سیطرهٔ بی‌نهایت‌کوچک‌ها و دیفرانسیل بود، به مسئلهٔ حد جلب کردند.

اویلر از ناسازگاری‌هایی که در حساب بی‌نهایت‌کوچک‌ها وجود داشت، به‌خوبی آگاه بود و لذا در اثر کلاسیک خود با عنوان مبانی حساب دیفرانسیل[۱] به سال ۱۷۵۵، بخش بزرگی از مقدمه و فصل ۲ کتاب را به تبیین این مشکلات اختصاص داد. او ادعا کرد که کمیت‌های بی‌نهایت‌کوچک همگی برابر با صفرند ولی دو کمیت که هر دو صفرند، می‌توانند نسبت متناهی خوش‌تعریف داشته باشند. اویلر، منبعث از دیدگاه صورتگرایانه‌ای که به ریاضیات داشت، تصریح می‌کرد که صفر، مرتبه‌هایی گوناگون دارد و موضوع بحث حساب دیفرانسیل تعیین مقدارهای متناهیِ نسبت‌های $0/0$ است. او نظرش را این‌گونه مطرح کرد که [۵۷]:

> «بنابراین بی‌نهایت‌کوچک‌ها، بی‌نهایت مرتبه دارند و گرچه همگی صفرند، باید با نگریستن به رابطهٔ دوبه‌دوی آنها که هر کدام، با یک نسبت هندسی بیان می‌شود، میان انواع مرتبه‌ها تمایز گذاشت.»

رویکرد اویلر اساساً فرآیندی شهودی برای یافتن مقدارهای متناهی نسبت‌های $0/0$ بود تا تلاش جدی برای پرداختن به مبانی (به‌کارگیریِ قاعدهٔ لوپیتال را به یاد آورید) و به این موضوع دوم، توجه چندانی نشان نداد.

۳.۵ در سال ۱۷۸۴ آکادمی علوم برلین اعلام کرد که به هر کس که «بتواند روشن کند چگونه این همه قضیه‌های درست را می‌توان از یک مقدمهٔ تناقض‌آمیز [یعنی وجود بی‌نهایت‌کوچک‌ها] استنتاج کرد»، جایزه‌ای اعطا خواهد شد [۲۷]. هوشمندانه‌ترین پاسخ به این پرسش از سوی لاگرانژ داده شد. لاگرانژ نظراتش را دربارهٔ این موضوع در دو کتاب با نام‌های نظریهٔ تابع‌های تحلیلی[۲] به سال ۱۷۹۷ و درس‌هایی در حساب دیفرانسیل و انتگرال تابع‌ها[۳] به سال ۱۸۰۱ منتشر کرد.

لاگرانژ تلاش کرد با جای دادنِ حساب دیفرانسیل در چارچوبی جبری و زدودن هر گونه اشاره به بی‌نهایت‌کوچک‌ها یا حد از آن، مبانی دقیقی برای حساب دیفرانسیل و انتگرال ارائه کند. به نظر او، این دیدگاه، نمایندهٔ اصول درستِ حساب دیفرانسیل و انتگرال بود. او می‌گفت کتاب‌هایش مشتمل‌اند بر «قضیه‌های اصلی حساب دیفرانسیل بدون به‌کارگیریِ کمیت‌های بی‌نهایت‌کوچک یا ناپدیدشونده، حدها و فلوکسیون‌ها و به‌جای اشاره به این موجودات، به هنر تحلیل جبریِ کمیت‌های متناهی پرداخته شده است.» [۴۰]

---
[۱] Institutiones Calculi Differentialis [۲] Théorie des Fonctions Analytiques [۳] Leçons sur le Calcul des Fonctions

فقدان دقت در به‌کارگیریِ بی‌نهایت‌کوچک‌ها، دیگر بر همگان آشکار شده بود (انتقادات برکلی را به یاد بیاورید که لاگرانژ هم از آنها آگاهی داشت). اما در مورد حد، لاگرانژ (و دیگران) به‌سختی می‌توانستند بفهمند که وقتی نسبت $\Delta y/\Delta x$ به حد خود نزدیک می‌شود، چه بلایی بر سرش می‌آید. این معضل را لازار کارنو[۱] در مقاله‌ای در باب مبانی حساب دیفرانسیل و انتگرال با عنوان «اندیشه‌هایی دربارهٔ متافیزیک حساب بی‌نهایت‌کوچک‌ها»[۲] به سال ۱۷۹۷ به‌روشنی بیان کرده است [۵۷]:

> «اشکال بزرگ روش حدود این است که در این روش، با کمیت‌ها به گونه‌ای برخورد می‌شود که گویی از کمیت‌بودن ساقط شده‌اند. گرچه همواره می‌توانیم تصوری خوب از نسبت دو کمیت، مادام که متناهی بمانند، در ذهن داشته باشیم اما به محض اینکه هر دو کمیت یکباره ناپدید می‌شوند، دیگر هیچ تصور روشن و دقیقی از آن نسبت، به ذهن متبادر نمی‌شود.»

نقطهٔ آغاز کارهای لاگرانژ این بود که ثابت کند هر تابع $f(x)$ را می‌توان (بجز احتمالاً برای تعدادی متناهی از مقدارهای x) به‌صورت بسط سری توانی برحسب h نمایش داد:

$$f(x+h) = f(x) + p(x)h + q(x)h^۲ + r(x)h^۳ + \cdots .$$

او می‌خواست این کار را به‌کمک یک فرآیند کاملاً جبری انجام دهد. تیلور (و دیگران) این روشِ به‌اصطلاح، بسط سری تیلور را در اوایل قرن هیجدهم با استفاده از تفاضلات متناهی و یک فرآیند حدگیری به‌دست آورده بودند. لاگرانژ ادعا داشت این بسط را به‌طور جبری و بدون به‌کارگیریِ مفهوم حد، به‌دست آورده است (پژوهش‌های فرما را دربارهٔ خط مماس به یاد آورید).

لاگرانژ ضریب h در بسط $f(x+h)$، یعنی $p(x)$ را «تابع مشتق اول» $f(x)$ می‌نامد و آن را با $f^۱(x)$ نشان می‌دهد. سپس تذکر می‌دهد (و بعداً با روش‌هایی که درستیِ آنها پرسش‌برانگیز است، ثابت می‌کند) که مقدار بسیار کمی آگاهی از حساب دیفرانسیل لازم است تا بفهمیم که $f^۱(x)$ همان مشتق (کسر تفاضلی) تابع $f(x)$ است. بنابراین مشتق $f(x)$ را ضریب h در بسط سری توانیِ $f(x+h)$ تعریف می‌کند و مدعی می‌شود که می‌توان آن را برای هر تابعی به‌طور کاملاً جبری به‌دست آورد.

پس از آن، لاگرانژ نشان می‌دهد که در بسط سری فوق برای $f(x+h)$، به همان روشی که $p(x)$ را از $f(x)$ مشتق کردیم، (با اختلاف یک مضرب ثابت) می‌توان $q(x)$ را از $p(x)$ و $r(x)$ را از $q(x)$ و $\cdots$ به‌دست آورد، یعنی با بسط جبری $f^۱(x+h)$ به سری توانی برحسب h و غیره. اگر تابع مشتق اول $f^۱(x)$ را با $f^{۱۱}(x)$ و تابع مشتق اول $f^{۱۱}(x)$ را با $f^{۱۱۱}(x)$ و غیره نشان دهیم،

---
[۱] Lazare Carnot [۲] Reflections on the methaphysics of the infinitesimal calculus

ادعای لاگرانژ به این معنی است که $q(x) = c_2 f''(x)$، $r(x) = c_3 f'''(x)$ و $\cdots$. لاگرانژ ثابت کرد که $c_n = 1/n!$ و لذا مدعی شد که بسط سری تیلور را با ابزارهای کاملاً جبری به‌دست آورده است.

از دیدگاه ما، طرح لاگرانژ اشکال‌های اساسی دارد. برای به‌دست آوردن بسط تیلور یک تابع به فرآیندهای نامتناهی نیاز است و بسیاری از تابع‌ها را نمی‌توان این گونه بسط داد. به‌علاوه چنان‌که کُشی دو دههٔ بعد نشان داد، حتی اگر تابعی نمایش سری تیلور داشته باشد، ممکن است مقدار این سری، به‌ازای همهٔ مقادیر متغیر در دامنهٔ تعریف تابع، با مقدار تابع برابر نباشد. برای مثال، کُشی تابع f را چنین تعریف کرد که به‌ازای xهای ناصفر $f(x) = e^{-1/x^2}$ و اگر $x = 0$، $f(x) = 0$. در این مورد، سری تیلور f فقط در $x = 0$ تابع را نمایش می‌دهد.

اما نظرات لاگرانژ را باید در بستر زمانیِ خودش ارزیابی کرد. آنالیز جبری‌شده که در آن، سری توانی (که به‌چشم یک چندجمله‌ای نامتناهی نگریسته می‌شد) نقشی اساسی داشت، جریان غالب در قرن هیجدهم بود. همهٔ تابع‌هایی که در عمل به آنها برمی‌خوردند، بسط به سری توانی داشتند و اگر موارد استثنا هم پیش می‌آمد، چندان جدی گرفته نمی‌شد. در واقع نوعی دلبستگی به برنامهٔ لاگرانژ در چارچوب فکری آن دوران مشاهده می‌شود (این دلبستگی هنوز هم در حوزهٔ آنالیز مختلط وجود دارد. برای مثال، این نقیصه‌ای که در مورد برابر نبودنِ مقدار یک تابع با مقدار سری تیلور آن، بیان کردیم، در آنالیز مختلط وجود ندارد).

از نظر ما، سهم اصلی لاگرانژ در شفاف‌سازیِ مبانی حساب دیفرانسیل، تمرکز او بر نمادگذاریِ تابعی برای مشتق بود؛ درست در تقابل با نمادهای فلوکسیونی و دیفرانسیلی. پژوهش‌های او شاید برای نخستین بار منجر به این شد که روشن و صریح بفهمیم که مشتق یک تابع، خودش یک تابع است و به این ترتیب، حساب دیفرانسیل تبدیل به حساب دیفرانسیل تابع‌ها و مشتق‌های آنها شد؛ نه حساب فلوکسیون‌ها [ی نیوتن] و دیفرانسیل‌ها [ی لایب‌نیتس] (بخش ۴ را بخوانید).

۶. حساب دیفرانسیل و انتگرال دقیق می‌شود: کُشی و وایرشتراس

اکنون به دوره‌ای سرنوشت‌ساز در سیر تحوّل تاریخیِ دقت در بنیانگذاریِ حساب دیفرانسیل می‌رسیم که در هیئت پژوهش‌های کُشی، بولتسانو و وایرشتراس نمایان شد. به یاد آورید که حساب دیفرانسیل در قرن هفدهم عمدتاً هندسی و در قرن هیجدهم مبتنی بر جبر بود. اما حساب دیفرانسیل در دوره‌ای که اکنون می‌خواهیم بررسی کنیم و از سال ۱۸۲۱ آغاز می‌شود، بر پایهٔ علم حساب قرار گرفت. ویژگی‌های اصلی متمایز کنندهٔ این دوره عبارت‌اند از:

(الف) خودنماییِ «حد» به‌عنوان مفهوم زیربنایی در حساب دیفرانسیل؛

(ب) به رسمیت شناختنِ نقش مهمی که نامساوی‌ها در تعریف‌ها و اثبات‌ها ایفا می‌کنند؛

(پ) پی بردن به اینکه درستیِ نتایج در حساب دیفرانسیل به دامنهٔ تعریف تابع‌ها هم بستگی دارد (در قرن هیجدهم، صدق قضیه‌های حساب دیفرانسیل را به‌اتکای درستیِ صوریِ محاسبات جبری، همه‌جایی تلقی می‌کردند)؛

(ت) پی بردن به این واقعیت که برای پایه‌ریزیِ منطقیِ حساب دیفرانسیل و انتگرال، باید درک روشنی از ماهیت دستگاه اعداد حقیقی داشته باشیم و این درک باید بر پایهٔ علم حساب باشد نه مفهوم هندسیِ پیوستار اعداد حقیقی.

۱.۶. کُشی. کار اصلی کُشی در دقیق‌سازیِ حساب دیفرانسیل و انتگرال، با چاپ کتابش با عنوان درسی در آنالیز[1] به سال ۱۸۲۱ آغاز شد و با انتشار دو اثر دیگر در سال‌های ۱۸۲۲ و ۱۸۲۹ ادامه یافت. او چند مفهوم بنیادی، یعنی حد، پیوستگی، همگرایی، مشتق و انتگرال را برگزید، همهٔ مفاهیم دیگر را بر پایهٔ مفهوم حد استوار ساخت و با ابزارهایی نسبتاً جدید و دقیق، نتایج اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال را استخراج کرد. اینکه امروزه این مفاهیم در نگاه ما پیش پا افتاده هستند، همه را مدیون برنامهٔ کُشی هستیم؛ پروژه‌ای عظیم که عالی اجرا شد. در واقع بیشترِ مفاهیمی که هم‌اینک اشاره کردیم، یا (به آن صورتی که ما می‌فهمیم) شناخته شده نبودند یا پیش از زمان کُشی، به‌درستی صورت‌بندی نشده بودند.

چه چیز کُشی را بر آن داشت تا این‌گونه از عادات جاافتادهٔ آن دوران به‌کلی دست بکشد؟ دلایل متعددی وجود دارد که بیان می‌کنیم:

(الف) کُشی از پژوهش‌های بنیادی لاگرانژ دربارهٔ حساب دیفرانسیل آگاه بود و از برخی پیشرفت‌های فنی که لاگرانژ فراهم آورده بود، سود می‌جست اما با طرح بزرگ لاگرانژ مبتنی بر اندیشهٔ جبری‌سازیِ حساب دیفرانسیل، به‌شدت مخالف بود. در واقع هدف کُشی این بود که جبر را از مبانی حساب دیفرانسیل حذف کند [۳۷]:

> «در این روشی که من در پیش گرفته‌ام، کوشیده‌ام همان دقتی را به حساب دیفرانسیل ببخشم که از هندسهٔ اقلیدسی انتظار داریم. در این روش، هرگز به استدلال‌هایی که معمولاً در جبر به‌کار می‌روند، استناد نمی‌شود. به نظر من، دلایلی از این دست، هرچند پذیرش همگانی یافته‌اند –بیش از همه در مجاز شمردنِ گذر از سری‌های همگرا به سری‌های واگرا و گذر از کمیت‌های حقیقی به کمیت‌های موهومی– ابزارهایی صرفاً مناسب برای کشف حقیقت هستند و در چارچوب آن دقتی که علوم ریاضی به آن می‌بالد، ضعیف ظاهر می‌شوند. حتی باید دقت کرد که به‌کارگیریِ این روش‌ها،

[1] Cours d’Analyse

متضمن پذیرش کلیّتی بی حد و مرز برای فرمول‌های جبری است؛ در حالی که بیشترِ این فرمول‌ها تحت شرایطی خاص و برای مقدارهایی خاص از کمیت‌های موجود، برقرارند.»

(ب) دو مسئلهٔ عملی خیلی مهم –یکی مسئلهٔ نوسان فنر و دیگری مسئلهٔ انتقال گرما (به‌ترتیب مربوط به قرن‌های هیجدهم و نوزدهم)– پرسش‌هایی در باب مباحث اصلی در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیش آوردند. در مورد مسئلهٔ دوم، فوریه با پژوهش‌هایی که بعداً به نظریهٔ سری‌های فوریه مشهور شد، جامعهٔ ریاضی را تکان داد. فوریه ادعا کرد هر تابع f را که بر بازهٔ $(-l, l)$ تعریف شده باشد، می‌توان روی این بازه، با یک سری برحسب تابع‌های سینوس و کسینوس نمایش داد:

$$f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}(a_n \cos(n\pi x/l) + b_n \sin(n\pi x/l))$$

که در آن، a_n و b_n از دستورهای زیر به‌دست می‌آیند:

$$a_n = \frac{۱}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos(n\pi t/l)dt, \quad b_n = \frac{۱}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin(n\pi t/l)dt.$$

اویلر و لاگرانژ می‌دانستند که برخی از تابع‌ها چنین نمایشی دارند. بنابر «اصل تسرّی» که در قرن هیجدهم و اوایل قرن نوزدهم بر اندیشهٔ ریاضیدانان حاکم بود، این بسط نمی‌توانست برای همهٔ تابع‌ها برقرار باشد: چون تابع‌های سینوس و کسینوس پیوسته و متناوب هستند، پس مجموع این‌گونه تابع‌ها هم باید چنین باشد (به یاد داشته باشید که با مجموع‌های متناهی و نامتناهی به یک شکل برخورد می‌شد). در واقع نتیجه‌ای که فوریه به‌دست آورده بود، تا اندازه‌ای درست بود و کوشش‌های بسیاری لازم بود تا شرایطی فراهم گردد که تحت آنها این نتیجه برقرار باشد. به این منظور، مفاهیم همگرایی، پیوستگی و انتگرال باید دقیق‌سازی می‌شد و کُشی بود که به این کار مبادرت ورزید.

(پ) حوالی پایان قرن هیجدهم، تحوّل اجتماعی بزرگی در جامعهٔ ریاضیدانان فرانسوی رخ داد. در حالی که در گذشته ریاضیدانان غالباً دانشمندانی منتسب به دربار به حساب می‌آمدند، پس از انقلاب فرانسه، بیشترِ آنها از راه تدریس شروع به امرار معاش کردند. کُشی در مؤسسهٔ متنفذ اکول پلی‌تکنیک پاریس که به سال ۱۷۹۵ تأسیس شده بود، مشغول به تدریس شد. آنجا مرسوم بود که هر مدرسی اگر می‌خواست مباحثی را تدریس کند که محتوای آنها در متون استاندارد موجود نبود، می‌بایست جزوه‌ای دربارهٔ موضوعی که درس می‌داد برای دانشجویان می‌نوشت. به همین سبب بود که کُشی کتاب خود با عنوان درسی در آنالیز و به دنبال آن، دو رسالهٔ دیگر را نوشت. ریاضیدانان وقتی می‌خواهند دربارهٔ موضوعی که تدریس می‌کنند، برای دانشجویان مطلبی بنویسند، خیلی بیش از زمانی که برای همکاران خود قلم می‌زنند، در بیان مفاهیم بنیادیِ آن موضوع، دقت به خرج می‌دهند.

لذا این عامل هم ممکن است در تحلیل دقیق کُشی از مفاهیم بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال نقش داشته باشد.

(ت) جدا از دلایل فوق، (دست‌کم از دیدگاه تاریخی) طبیعی است که هر دوره از کنکاش در یک موضوع، دوره‌ای از اندیشیدن دربارهٔ تحکیم مبانی آن را نیز در پی داشته باشد. وضعیت هندسه در یونان باستان، نمونه‌ای تأمل‌برانگیز است. در مورد حساب دیفرانسیل و انتگرال هم پس از حدود ۲۰۰ سال رشد سریع بدون کمترین توجه به مبانی، زمان آن فرارسیده بود که به‌لحاظ منطقی مورد مداقّه قرارگیرد. به‌علاوه در نیمهٔ اول قرن نوزدهم، جدّی‌گرفتنِ دقت، شیوع یافته بود و بولتسانو و آبل (علاوه بر کُشی) در آنالیز، پیکاک[1] و دمورگان در جبر و گاوس در همهٔ شاخه‌های ریاضیات، شارحان این جریان انتقادی جدید بودند.

۲.۶ اکنون طرحی مختصر از کوشش‌های کُشی را برای برطرف کردن مشکلات مربوط به مبانی حساب دیفرانسیل و انتگرال با تمرکز بر مفاهیم حد، پیوستگی، مشتق، انتگرال و همگرایی، ارائه می‌کنیم.

حد: کُشی مفهوم حد را این گونه تعریف می‌کند [۳۷]:

> «اگر مقدارهای متوالی منسوب به یک متغیر، خیلی خیلی به یک مقدار ثابت نزدیک شوند طوری که اختلاف آنها با آن مقدار ثابت هر اندازه بخواهیم کوچک باشد، آن مقدار ثابت را حد مقدارهای دیگر می‌نامیم.»

توجه می‌کنیم که کُشی، برخلاف نیوتن و دالامبر، هیچ اشاره‌ای به این نمی‌کند که وقتی متغیر به حدش نزدیک می‌شود، چه اتفاقی می‌افتد و همچنین نمی‌گوید که متغیر نمی‌تواند پیرامون حدش نوسان داشته باشد. البته گرچه از حد متغیر سخن می‌گوید نه از حد تابع، در ذهنش حد متغیر وابستهٔ تابع f، یعنی $f(x)$ بوده است. هرچند کُشی مفهوم حد را در قالب $\varepsilon-\delta$یِ کنونی بیان نکرده است، در اثبات‌های نتایج متعدد متضمن مفهوم حد، از چنین استدلالی سود می‌برد.

پیوستگی: کُشی (به‌همراه بولتسانو) نخستین فردی بود که اساساً تعریفی جدید برای پیوستگی ارائه کرد [۱۹]:

> «تابع $f(x)$ که متغیر x در آن محدود به دو کران است، تابعی پیوسته نسبت به این متغیر است اگر به‌ازای هر مقدار x بین آن دو کران، مقدار عددیِ عبارت تفاضلیِ $f(x+\alpha)-f(x)$ خیلی خیلی کم شود به شرط آنکه α خیلی خیلی کوچک باشد. به عبارت دیگر، تابع $f(x)$ نسبت به x بین آن دو کران، پیوسته است اگر یک نموّ

[1] Peacock

> بی‌نهایت‌کوچک از آن متغیر، همیشه منجر به نموّی بی‌نهایت‌کوچک در مقدار تابع شود.»

توجه کنید که کُشی در تعریف پیوستگی (و در جاهای دیگر) از بی‌نهایت‌کوچک‌ها استفاده می‌کند. اما از دید او، بی‌نهایت‌کوچک متغیری است که حد آن صفر است و چنان‌که در قرن‌های هفدهم و هیجدهم مرسوم بود، یک ثابت نیست [۳۷]:

> «وقتی قدرمطلق‌های پیاپیِ یک متغیر، بی‌نهایت کاهش می‌یابند طوری که از هر کمیت از پیش داده‌شده‌ای کمتر می‌شوند، آن متغیر را بی‌نهایت‌کوچک می‌نامیم. چنین متغیرهایی حدشان صفر است.»

بنابراین کُشی بی‌نهایت‌کوچک‌ها را چنان به‌کار می‌گرفت که گویی راهی میانبر هستند برای کوتاه‌نویسیِ عبارت‌های پیچیده شامل حدود و لذا تعریف او برای پیوستگی را می‌توان این گونه بازگویی کرد که f پیوسته است اگر وقتی α به صفر میل می‌کند، $|f(x+\alpha)-f(x)|$ نیز به صفر میل کند.

مشتق: تحوّل مفهوم مشتق بازتاب تحوّل کل حساب دیفرانسیل و انتگرال است. دورهٔ رشد و بلوغ حساب دیفرانسیل و انتگرال، البته همراه با خطاها و سرِ هم بندی‌ها، نزدیک به سه سده طول کشید؛ از حوالی سال ۱۶۰۰ آغاز شد و در دههٔ ۱۸۷۰ اساساً به شکل کنونیِ آن درآمد. جودیت گرابینر[۱]، تاریخ‌نگار معاصر ریاضی، به‌خوبی این فرآیند را جمعبندی کرده است [۲۶]:

> «مشتق ابتدا به‌کار گرفته شد، بعد کشف شد، سپس شرح و بسط یافت و سرانجام، تعریف شد.»

در واقع مشتق را فرما و دیگران در نیمهٔ اول قرن هفدهم، به‌عنوان خط مماس به‌کار گرفتند؛ نیوتن و لایب‌نیتس در نیمهٔ دوم همان قرن، آن را به‌ترتیب در قالب مفاهیم فلوکسیون و دیفرانسیل کشف کردند؛ در قرن هیجدهم شرح و بسط بسیار یافت و سرانجام، در قرن نوزدهم تعریف شد. خودِ تعریف مشتق هم در چند مرحله به انجام رسید: لاگرانژ در دههٔ ۱۷۹۰ مشتق را به‌شکل جبری تعریف کرد؛ کُشی در دههٔ ۱۸۲۰ مشتق را برحسب حدود و بی‌نهایت‌کوچک‌ها تعریف کرد و سرانجام، وایرشتراس در دههٔ ۱۸۷۰ بیان اپسیلون–دلتاییِ آن را ارائه داد. تعریف کُشی از این قرار است [۱۹]:

> «اگر تابع $y=f(x)$ که متغیر x آن به دو کران مشخص محدود است، پیوسته باشد و اگر به چنین متغیری، مقداری در بازهٔ محدود به آن دو کران نسبت دهیم، آن‌گاه یک نموّ بی‌نهایت‌کوچک در آن متغیر، نموّی بی‌نهایت‌کوچک در مقدار خودِ تابع ایجاد می‌کند. در نتیجه اگر قرار دهیم $\Delta x = i$، آن‌گاه صورت و مخرج کسرِ تفاضلیِ $[f(x+i)-f(x)]/i$ کمیت‌هایی بی‌نهایت‌کوچک خواهند بود. اما گرچه

[۱] Judith Grabiner

> این دو کمیت همزمان به صفر میل می‌کنند، خودِ این کسر ممکن است به حدی دیگر همگرا شود؛ مثبت یا منفی. این حد اگر وجود داشته باشد، به‌ازای هر مقدار خاص x، مقداری معین دارد اما همراه با تغییرِ x، تغییر می‌کند . . . . شکل تابع جدید که مقدارهایش همان حدود کسر تفاضلی $[f(x+i)-f(x)]/i$ هستند، به شکل تابع داده‌شدهٔ $y=f(x)$ بستگی دارد. برای اینکه این وابستگی را نشان دهیم، نام این تابع جدید را تابع مشتق می‌گذاریم و آن را با نماد y' یا $f'(x)$ نشان می‌دهیم.»

این تعریف گرچه خیلی کلامی است، آنقدر دقیق هست که استانداردهای بالایی را که کُشی در مورد دقت پیش روی خود قرار داده بود، برآورده سازد.

انتگرال: طی قرن هیجدهم، انتگرال به چشمِ مساحت یا پادمشتق نگریسته می‌شد که باید مقدارهای آن در حدود بالایی و پایینی انتگرال حساب می‌شدند. گرچه اندیشیدن دربارهٔ مساحت به‌عنوان حد مجموع نیز متداول بود، این تعبیر فقط برای محاسبهٔ تقریبی انتگرال‌ها به‌کار می‌رفت زمانی که پادمشتق را به‌آسانی نمی‌شد پیدا کرد. در اوایل قرن نوزدهم، پژوهش‌های فوریه دربارهٔ نمایش تابع‌ها به‌صورت بسط سری مثلثاتی که ضرایب آن برحسب انتگرال بودند، به تحلیل دقیق مفهوم انتگرال منجر شد.

کُشی نخستین کسی بود که تعریفی روشن برای انتگرال تابع‌های پیوسته به‌صورت حد مجموع ارائه کرد که اساساً با تعریف کنونیِ آن یکسان است. سپس ثابت کرد که انتگرال این گونه تابع‌ها وجود دارد. به این ترتیب توانست قضیهٔ بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال را بدون توسّل به تعبیر مساحتیِ انتگرال ثابت کند (در قرن هیجدهم و پیش از آن، مساحت، مفهومی بدیهی شمرده می‌شد). کارهای کُشی روی مفهوم انتگرال باعث شد توجه‌ها از انتگرال نامعین (یعنی پادمشتق) به‌سوی انتگرال معین (یعنی حد مجموع) تمرکز یابد.

همگرایی: در قرن‌های هفدهم و هیجدهم، استفادهٔ آزادانه از سری‌های عددی و سری‌های تابعی بدون ملاحظهٔ چندانی دربارهٔ همگرایی آنها، متداول بود. هدف فقط به‌دست آوردنِ نتیجه بود. برای مثال، اویلر خودش می‌دانست که دارد از سری‌های واگرا استفاده می‌کند، اما مادام که در اثر این کار، نتایج جالب و البته درست به‌دست می‌آمد، پریشان‌خاطر نمی‌شد. اما وقتی کار روی سری‌های فوریه آغاز شد، درستیِ خودِ نتایج، مورد تردید واقع شد. آبل در اوایل قرن نوزدهم ادعا کرد که «سری‌های واگرا ساخته و پرداختهٔ دست شیطان هستند و با به‌کارگیریِ آنها هر نتیجه‌ای را که بخواهیم می‌توانیم به‌دست آوریم و به همین دلیل است که این سری‌ها اینقدر مغالطه و پارادکس به‌وجود آورده‌اند.» [۴۰] کُشی سری‌های واگرا را تحریم کرد و در کتاب درسی در آنالیز به سال ۱۸۲۱، نخستین مطالعهٔ سازمان‌یافته از همگرایی سری‌های نامتناهی را ارائه کرد (در سال ۱۸۱۶ گاوس مطالعه‌ای دقیق روی

همگرایی سری‌های اَبَرهندسی انجام داده بود). کُشی همگرایی سری نامتناهی را برحسب وجود حد دنبالهٔ مجموع‌های جزئی آن تعریف کرد و برخی آزمون‌های استاندارد همگرایی مانند آزمون نسبت و آزمون ریشه را به‌دست آورد.

۳.۶. وایرشتراس. پیشنهاده‌های کُشی برای دقیق‌سازی حساب دیفرانسیل و انتگرال، منجر به پیدایش مسائلی تازه شدند که نسل جدیدی از ریاضیدانان را به حل آنها واداشت. دو مشکل زیربنایی در رویکرد کُشی عبارت بودند از:

(الف) تعریف‌های کلامی برای حد و پیوستگی و استفادهٔ مکرر کُشی از زبان بی‌نهایت‌کوچک‌ها. تعریف‌هایی که کُشی برای حد، پیوستگی و بی‌نهایت‌کوچک ارائه کرده بود، متضمن مفهوم شهودیِ حرکت پیوسته بودند. به‌علاوه در صورت‌بندیِ او از تعریف حد و پیوستگی، تمایز بین سورهای عمومی و وجودی و جایگاه آنها پیش از x، ϵ و δ در تعریفِ کنونی حد و پیوستگی، آشکار نبود. این کوتاهی‌ها احتمالاً منشأ دو خطای مهم بوده است: کُشی نتوانست بین پیوستگیِ نقطه‌ای و پیوستگیِ یکنواخت یک تابع و بین همگراییِ نقطه‌ای و همگراییِ یکنواخت یک سری تابعی نامتناهی فرق بگذارد. در برخی از اثبات‌های او، فقط حالت‌های اول این موارد در نظر گرفته می‌شود در حالی که حالت‌های دوم مورد نیاز بوده‌اند.

(ب) توسّل به ابزارهای شهودیِ هندسی در اثبات وجود حدهای گوناگون. چون تعریف‌هایی که کُشی برای مفاهیم بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال ارائه کرد، بر پایهٔ مفهوم حد بودند، اثبات وجود حد دنباله‌ها و تابع‌های گوناگون، اهمیت زیادی داشت. وجود بسیاری از این حدها، نتیجهٔ «ویژگی کمال» اعداد حقیقی است که (به‌تعبیری) می‌گوید هر دنبالهٔ صعودیِ از بالا کراندار در مجموعهٔ اعداد حقیقی، حد دارد. کُشی این نتیجهٔ بنیادی را بر پایهٔ شهود هندسی، بدیهی می‌دانست و از آن در اثبات برخی نتایج زیربنایی مانند وجود انتگرال تابع‌های پیوسته، همگرایی دنباله‌های (به‌اصطلاح) کُشی و قضیهٔ مقدار میانی استفاده کرد.

بیش از همه، وایرشتراس و ددکیند در صدد برآمدند برای رفع این اختلاط ناخوشایند صورت‌بندی‌های حسابی–جبری و استدلال‌های شهودیِ هندسی راه علاجی بیابند. ددکیند بیانی روشن از اوضاع و احوال غالب در آن زمان دارد [۱۶]:

> «اولین بار که مجبور شدم اصول حساب دیفرانسیل را تدریس کنم، زمانی بود که مدرس مدرسهٔ پلی‌تکنیک زوریخ بودم. اشتیاقم برای این کار حتی بیش از آن دوره‌ای بود که حساب، مبنای درستِ علمی نداشت. هنگام توضیح مفهوم میل کردنِ یک کمیت متغیر به یک مقدار حدیِ ثابت و به‌ویژه در اثبات این قضیه که هر کمیتی که به‌طور پیوسته رشد کند اما از همهٔ کران‌ها فراتر نرود، یقیناً باید به یک مقدار حدی

نزدیک شود، به شهود هندسی متوسّل شدم. حتی هنوز هم معتقدم توسّل به شهود هندسی در نخستین مواجهه با حساب دیفرانسیل، از دیدگاه آموزشی بسیار سودمند است و اگر نخواهیم زمان زیادی را از دست بدهیم، اجتناب‌ناپذیر است. اما هیچ‌کس منکرِ نیست که این شیوهٔ ارائهٔ حساب دیفرانسیل، اصلاً علمی نیست. این احساس نارضایتی در خودِ من آنقدر زیاد بود که مصمم شدم تا وقتی مبانی کاملاً دقیق و حسابیِ ناب برای اصول آنالیز بی‌نهایت‌کوچک‌ها نیافته‌ام، تمرکزم را بر اندیشیدن دربارهٔ حل این مشکل، از دست ندهم. قول مشهوری است که حساب دیفرانسیل به کمیت‌های پیوسته می‌پردازد؛ اما هنوز هیچ‌جا شرحی از این مفهوم پیوستگی داده نشده است. حتی در دقیق‌ترین تقریرهای حساب دیفرانسیل هم اثبات‌ها بر پایهٔ مفهوم پیوستگی نیست، بلکه کم و بیش آگاهانه، یا بر مفاهیم هندسی و مفاهیمی که ریشه در هندسه دارند، متکی هستند یا به قضیه‌هایی وابسته‌اند که هرگز بر اساس روش‌های ناب حسابی ثابت نشده‌اند. مثلاً قضیهٔ پیش‌گفته یکی از این گونه قضیه‌ها است و با پژوهش‌های عمیق‌تر در این باره متقاعد شدم که این قضیه یا هر قضیه‌ای را که هم‌ارز با آن باشد، می‌توان به‌نوعی، مبنایی مناسب برای تحلیل بی‌نهایت‌کوچک‌ها دانست. فقط می‌ماند منشأ درست آن را در مبانی علم حساب کشف کنیم و همزمان تعریفی واقعی از ماهیت مفهوم پیوستگی به‌دست دهیم.»

همین اندیشهٔ اثبات قضیه‌ها به روش‌های ناب حسابی، منجر به آن چیزی شد که به «حسابی‌سازیِ آنالیز» مشهور است. از آغاز پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال و حتی در زمان کُشی، دیدگاه هندسی در مطالعهٔ اعداد حقیقی حاکم بود و صورت‌بندیِ روشنی از ویژگی‌های اعداد حقیقی وجود نداشت و چون اعداد حقیقی هم در زیربنا و هم در روبنای آنالیز حضور داشتند، اثبات‌های بسیاری از قضیه‌ها ناگزیر هندسی و شهودی بودند. ددکیند و وایرشتراس از روشن‌بینیِ هوشمندانه‌شان بود که فهمیدند اگر تعریفی دقیق بر پایهٔ علم حساب برای اعداد حقیقی ارائه کنند، یکی از موانع اصلی در دقیق‌سازی مبانی حساب دیفرانسیل و انتگرال برطرف خواهد شد.

کار اساسی دیگری که مانده بود انجام شود، ارائهٔ تعریف دقیق جبری، به‌جای تعبیر شهودی و «سینماتیکیِ» کُشی، برای مفهوم حد بود و این کار را وایرشتراس انجام داد که تعریف «استاتیکیِ» حد را برحسب نامساوی‌هایی شامل ϵ و δ ارائه کرد ــ همان تعریفی که امروزه (دست‌کم در چارچوب صوری و دقیق‌مان) به‌کار می‌بریم. طنز ماجرا اینجا است که نامساوی‌ها که در قرن هیجدهم به‌منظورِ تخمین زدن به‌کار می‌رفتند و ϵ که برخی از آن برای نشان دادن مقدار خطا استفاده می‌کردند، در دستان وایرشتراس به ابزارهایی برای بیان منتهای دقت تبدیل شدند.

صورت‌بندی ϵ–δییِ وایرشتراس، بینهایت کوچک‌ها را که کُشی و پیشینیان او بیش از دو سده (اگر سهم یونانیان باستان را هم در نظر بگیریم، دو هزاره) به‌کار می‌بردند، از صحنه کنار زد. طی چند دهه بعد، نشان داده شد که پیوستار اعداد حقیقی را می‌توان به‌طور منطقی به گردایهٔ گسستهٔ اعداد صحیح مثبت تبدیل کرد. اینک حسابی‌سازی آنالیز کامل شده بود. از دیدگاه افلاطون، خداوند همه چیز را هندسی آفریده بود و از دیدگاه ژاکوبی، همه چیز را حسابی. اما این صدرنشینیِ منطقیِ حساب، دیر نپایید و در دههٔ ۱۸۸۰ ددکیند و فرگه، علم حساب را بر مبنای نظریهٔ مجموعه‌ها و منطق بازسازی کردند که آن خود روایت دیگری دارد.

۴.۶. نکتهٔ آموزشی. اینکه در تدریس حساب دیفرانسیل و انتگرال، چه مطالبی و به چه شیوه‌ای باید تدریس شود، از مباحثی است که همواره محل مناقشه بوده است. ما چند تذکر کلی – خواهش– داریم که ملهم از گزارش‌های تاریخی هستند. چنان‌که پیش‌تر اشاره کردیم، حساب دیفرانسیل و انتگرال ملغمه‌ای از الگوریتم‌ها، نظریه و کاربردها است. پس بالأخره یک جایی باید دانشجویان را با توانایی‌های فنی، هماهنگیِ منطقی و سودمندیِ آن آشنا کنیم. حساب دیفرانسیل و انتگرال، پاسخ به پرسشی با پیشینهٔ دو هزار ساله است و آن اینکه پیوستگی و تغییر چیست؟ حساب دیفرانسیل و انتگرال از دستاوردهای ادراکیِ درجهٔ یک اندیشهٔ بشری است. ماهیت این اندیشه‌ها باید به تدریس ما نشاط ببخشد. ایده‌های اصلی را باید از میان صدها فرمول و دستور بیرون کشید و برجسته ساخت.

هیلبرت بازهٔ زمانیِ تکامل یک نظریهٔ ریاضی را متشکل از سه دوره می‌دانست: طبیعی، صوری و بحرانی. در مورد حساب دیفرانسیل و انتگرال، دورهٔ طبیعی در قرن هفدهم، دورهٔ صوری در قرن هیجدهم و دورهٔ بحرانی در قرن نوزدهم بود. تحوّل یک اندیشهٔ ریاضی، اغلب در چهار مرحله صورت می‌گیرد: کشف (ابداع)، کاربرد، درک و توجیه (رجوع کنید به توضیح مفهوم مشتق در بخش ۱,۱,۶). مهم است که حین تشریح هر مفهوم یا نظریه‌ای، ترتیب این مراحل را در ذهن داشته باشیم.

بحث دقت در تدریس حساب دیفرانسیل و انتگرال هم از دغدغه‌های جاری است. جی. اف. سیمونز توصیهٔ خوبی در این زمینه دارد [۵۳]:

> «دقت ریاضی مثل لباس است. باید به‌قواره باشد؛ اگر خیلی گشاد یا خیلی تنگ باشد، راحتی را از بین می‌برد و آزادیِ حرکت را سلب می‌کند.»

دقت، یک مفهوم مطلق نیست. دیدگاه ریاضیدانان دربارهٔ مؤلفه‌های تشکیل‌دهندهٔ یک برهانِ پذیرفتنی، تغییر یافته است و لذا دیدگاه دانشجویان نیز باید تغییر یابد. آغاز درس حساب دیفرانسیل و انتگرال با مفهوم حد، به‌لحاظ منطقی سازنده است اما از نظر آموزشی، مخرّب. به‌طور کلی، به‌کارگیریِ دقت به‌خاطر دقت، دانشجویان را از درس زده می‌کند. دانشجو باید متقاعد شود که در دست داشتنِ تعریف‌ها

و اثبات‌های دقیق آن مفاهیم و نتایجی که شهودی به نظر می‌رسند، سودمند است. برای مثال، بیان تعریف صوریِ پیوستگی و اثبات دقیق قضیهٔ مقدار میانی برای دانشجویی که پیوستگی را به روش «طبیعی» با حرکت دادنِ پیوستهٔ قلم بر نمودار تابع روی کاغذ آموخته است، کار چندان باارزشی نیست. برای اینکه نیاز به استانداردهای دست‌بالای دقت را به دانشجو گوشزد کنیم، باید برای برخی مفاهیم به‌ظاهر معقول و همه‌پسند (مثل اینکه هر تابع پیوسته بجز در تعداد متناهی نقطه، مشتق‌پذیر است) مثال نقض بیاوریم. در نبودِ چنین مثال‌های نقضی، مشروع و گاهی مطلوب است که تعریف‌ها را به تناسبِ حال، شهودی –البته نه در هم و بر هم– ارائه کنیم و هر گاه (اگر) لازم شد، آنها را اصلاح کنیم. این درسی است که از تاریخ می‌گیریم و خللی در آن راه ندارد.

۷. قرن بیستم: آنالیز نااستاندارد رابینسون

سال ۱۹۶۰، یعنی حدود یک قرن پس از آنکه وایرشتراس بی‌نهایت‌کوچک‌ها را برای همیشه از ریاضیات رانده بود و همه چنین می‌اندیشیدیم، آبراهام رابینسونِ منطق‌دان، آنها را در هیبت اشیایی ریاضی که در چارچوب «آنالیز نااستاندارد» به‌دقت تعریف شده بودند، به صحنهٔ زندگی بازگرداند (نمونه‌ای دیگر از احیای مفاهیم از یاد رفته، سری‌های واگرا است که چنان‌که گفتیم، کُشی و آبل در اوایل قرن نوزدهم آنها را غیرمجاز می‌دانستند اما در پایان همان قرن، پوانکاره و استیلتیِس آنها را به‌عنوان سری‌های مجانبی به‌دقت بازتعریف کردند).

در حالی که آنالیز استاندارد، یعنی همان حساب دیفرانسیل و انتگرالی که از وایرشتراس (و دیگران) به ارث برده‌ایم، بر پایهٔ میدان مرتب کامل (و لذا ارشمیدسی) اعداد حقیقی بنا شده است، اساس آنالیز نااستاندارد، میدان مرتب اما ناکامل $\mathbb{R}^*$ است که از اعداد «اَبَرحقیقی» تشکیل یافته است. $\mathbb{R}^*$ میدان توسیعیِ $\mathbb{R}$ است که در آن، می‌توان بی‌نهایت‌کوچک‌ها را به‌دقت تعریف کرد: $\epsilon \in \mathbb{R}^*$ بی‌نهایت‌کوچک است اگر به‌ازای هر $a \in \mathbb{R}$ مثبت داشته باشیم $-a < \epsilon < a$. بنابراین صفر، تنها بی‌نهایت‌کوچک حقیقی است و وارون یک بی‌نهایت‌کوچک ناصفر، یک عدد اَبَرحقیقی نامتناهی است. رابینسون می‌گوید که آنالیز نااستاندارد «تا اندازه‌ای ملهم از مدل‌های به‌اصطلاح نااستاندارد حساب بود که نخستین بار، اسکولم به سال ۱۹۳۴ به وجود آنها اشاره کرد.» [۵۰] پژوهش‌های اسکولم و رابینسون بخشی از زیرشاخهٔ جدید منطق ریاضی به نام نظریهٔ مدل‌ها بودند. رابینسون در این باره می‌نویسد [۵۰]:

> «در پاییز سال ۱۹۶۰ متوجه شدم که مفاهیم و روش‌های منطق ریاضی معاصر می‌توانند چارچوبی مناسب برای ارائهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال با استفاده از اعداد بی‌نهایت‌کوچک و بی‌نهایت‌بزرگ فراهم کنند.»

طنز ماجرا اینجا است که در قرن نوزدهم بی‌نهایت‌کوچک‌ها را کنار گذاشتند چون معلوم شده بود از نظر منطقی، پذیرفتنی نیستند در حالی که در قرن بیستم با تکیه بر منطق!، موجودات پذیرفتنیِ ریاضی به حساب آمدند. رابینسون خیلی شادمان بود از اینکه منطق ریاضی پشتوانهٔ آنالیز نااستاندارد است. گودل بر کار رابینسون ارج بسیار نهاد، چراکه بین منطق و ریاضیات پیوندی بنیادی ایجاد کرده بود و ریاضیدان معاصر سیمون کوشن[۱] هم به تقلید از گودل گفته است: «رابینسون با ارائهٔ نظریهٔ مدل‌ها، پیوندی ژرف میان منطق و ریاضیاتِ جاری ایجاد کرد.» [۱۴]

رابینسون در پژوهش‌هایش بر روی آنالیز نااستاندارد متأثر از تاریخ نیز بود. او بُنمایه‌های آنالیز نااستاندارد را در کارهای لایب‌نیتس، اویلر و کُشی مرسوم می‌دید و در واقع معتقد بود که به‌کمک نظریهٔ دقیقی که برای بررسی بی‌نهایت‌کوچک‌ها ارائه کرده است، «می‌توان همهٔ اندیشه‌های لایب‌نیتس را به‌طور کامل محقَق کرد.» [۵۰] در این باره بعداً بیشتر خواهیم گفت.

چنان‌که دیدیم، تلاش لایب‌نیتس برای مستدل کردن نتایج پژوهش‌هایش دربارهٔ بی‌نهایت‌کوچک‌ها بر دو پایه استوار بود: یکی اثربخشی (یعنی نتایجی که به‌دست می‌آیند، درست باشند) و دیگری منطقی بودن (یعنی نتایج را بتوان با استفاده از روش افنا دقیق ساخت). او تلاش کرد توسّل به بی‌نهایت‌کوچک‌ها را در چارچوب اصل تسرّی که اصلی مبهم بود، توجیه کند. این اصل (به زبان امروزی) می‌گوید ویژگی‌های اعداد حقیقی برای اعداد اَبَرحقیقی هم برقرارند (البته روشن است که نه همهٔ ویژگی‌ها؛ مثلاً ویژگی ارشمیدسی برقرار نیست). رابینسون متوجه شد که [۵۰]

> «آنچه [در زمان لایب‌نیتس] مغفول مانده بود، وجود یک زبان صوری بود که به‌کمک آن بتوان احکامی را که فرض می‌شد هم برای اعداد متناهی و هم برای دستگاه اعداد وسعت‌یافته شامل بی‌نهایت‌کوچک‌ها و بی‌نهایت‌بزرگ‌ها برقرارند، به‌دقت تبیین کند و محدودیت‌های آنها را روشن سازد.»

اما کارهای رابینسون را خارج از این برنامه باید مورد ارزیابی قرار داد. به‌ویژه لازم بود
الف) یک میدان ناارشمیدسی اعداد اَبَرحقیقی تعریف (ساخته) شود که شامل اعداد حقیقی باشد و چارچوبی برای تعریفِ دقیقِ بی‌نهایت‌کوچک‌ها فراهم آورد.
ب) «اصل گذار» صورت‌بندی شود. این اصل بیانی صوری برای اصل تسرّی لایب‌نیتس ارائه می‌کند و آن ویژگی‌هایی را که از اعداد حقیقی به اعداد اَبَرحقیقی گذرپذیر هستند، دقیق می‌سازد.
کایزلر[۲] که با نوشتن کتاب‌های درسی، بی‌نهایت‌کوچک‌های رابینسون را به کلاس درس حسابان آورد، می‌گوید [۳۵]:

---
[۱] Simon Kochen [۲] Keisler

«دلیل اینکه پیش از رابینسون، کس دیگری به نتایج پژوهش‌های او دست نیافته بود، این است که اصل گذار برای اعداد اَبَرحقیقی، نوعی اصل است که تا همین اواخر هم در ریاضیات ناشناخته بود.»

برای جامهٔ عمل پوشاندن به برنامهٔ فوق دو رویکرد وجود دارد: یکی رویکرد اصل‌موضوعی و دیگری، رویکرد سازنده. در رویکرد اول، اصول زیر را وضع می‌کنیم:

الف) وجود یک میدان توسیعی مرتب و سره از $\mathbb{R}$ به نام $\mathbb{R}^*$ و در نتیجه وجود بی‌نهایت‌کوچک‌ها در $\mathbb{R}^*$.

ب) یک اصل گذار که به‌کمک آن بتوانیم همهٔ گزاره‌های «مقدماتی» (یعنی آنهایی که برحسب عضوها کمّی‌سازی شده‌اند نه بر پایهٔ زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$) را از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}^*$ منتقل کنیم. به بیان دقیق‌تر، همهٔ اعمال و رابطه‌های متناهی‌وار در $\mathbb{R}$ باید به $\mathbb{R}^*$ گسترش‌پذیر باشند و صدق یک گزارهٔ مقدماتی در $\mathbb{R}$ باید صدق آن را در $\mathbb{R}^*$ نتیجه دهد.

برای مثال، تابع با ضابطهٔ $\sqrt{1-x^2}$ که در آن $x \in \mathbb{R}$ و $-1 \leq x \leq 1$ را می‌توان به تابع با ضابطهٔ $f^*(a) = \sqrt{1-a^2}$ روی $\mathbb{R}^*$ گسترش داد (یعنی در اینجا $a \in \mathbb{R}^*$) و از آنجا که $1 - x^2 \geq 0$ اگر و تنها اگر $-1 \leq x \leq 1$، پس با فرضِ $a \in \mathbb{R}^*$ داریم $1 - a^2 \geq 0$ اگر و تنها اگر $-1 \leq a \leq 1$.

گزارهٔ «به‌ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$ اگر $b > 0$، آن‌گاه عددی صحیح و مثبت مانند n موجود است به‌طوری که $nb > a$» یک گزارهٔ مقدماتی نیست و لذا نمی‌توان آن را به $\mathbb{R}^*$ گسترش داد. به‌تعبیرِ منطق جدید، رابینسون یک زبان صوری فراهم می‌آورد که تنها آن ویژگی‌هایی را می‌توان با آن زبان بیان کرد که بین $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^*$ گذرپذیر باشند.

۱.۷. درست همان‌گونه که می‌توان آنالیز استاندارد را بر اساس توصیف اصل‌موضوعیِ $\mathbb{R}$ به‌عنوان یک میدان مرتب کامل بنیان گذاشت، آنالیز نااستاندارد را هم می‌توان بر مبنای توصیف اصل‌موضوعیِ بالا برای $\mathbb{R}^*$، بنا نهاد. در واقع می‌توان همهٔ نتایج در حساب دیفرانسیل و انتگرال استاندارد را با ابزارهای نااستاندارد و با استفاده از بی‌نهایت‌کوچک‌ها به‌دست آورد (همان کاری که لایب‌نیتس، اویلر و دیگران کرده بودند). روش اصلیِ انجام این کار چنین است: اگر بخواهیم قضیه‌ای را در $\mathbb{R}$ ثابت کنیم (یعنی یک قضیهٔ عادی در حساب دیفرانسیل و انتگرال)، با استفاده از اصل گذار آن را به گزاره‌ای در $\mathbb{R}^*$ ترجمه می‌کنیم، سپس با استفاده از روش‌های نااستاندارد آن را ثابت می‌کنیم که معمولاً این کار آسان‌تر است، زیرا می‌توان بی‌نهایت‌کوچک‌ها را در برهان به‌کار گرفت و سرانجام، به $\mathbb{R}$ برمی‌گردیم (تأویل حرف آدامار در این باره این است که کوتاه‌ترین مسیر بین دو واقعیت در دامنهٔ حقیقی، از دامنهٔ اَبَرحقیقی می‌گذرد). مرحلهٔ پایانیِ کار، با استفاده از قضیهٔ بخش استاندارد صورت

می‌گیرد. این قضیه می‌گوید به‌ازای هر عدد اَبَرحقیقی مانند a دقیقاً یک عدد حقیقی بی‌نهایت نزدیک به a وجود دارد که آن را با $st(a)$ نشان می‌دهیم (دو عدد اَبَرحقیقی بی‌نهایت نزدیک هستند اگر تفاضل آنها بی‌نهایت‌کوچک باشد). برای مثال، می‌توان نشان داد که به‌ازای هر تابع (استاندارد) مانند $f(x)$ تعریف متداول مشتق f معادل است با اینکه $f^{\prime}(x) = st[(f(x+\varepsilon) - f(x))/\varepsilon]$ که در آن، ε یک بی‌نهایت‌کوچک است.

چگونه می‌توان این کار را با تعریفی که لایب‌نیتس برای شیب ارائه می‌کند، مقایسه کرد؟ لایب‌نیتس شیب خم $y = f(x)$ در نقطهٔ (x, y) را dy/dx تعریف می‌کند که در آن، dx دیفرانسیل x و $dy = f(x+dx) - f(x)$ دیفرانسیل متناظر آن برای y است. پس بنابر تعریف لایب‌نیتس، $f^{\prime}(x) = (f(x+dx) - f(x))/dx$ ولی چنان‌که دیدیم، صورت‌بندی نااستاندارد این تعریف عبارت است از $f^{\prime}(x) = st[(f(x+\varepsilon) - f(x))/\varepsilon]$. برای مثال، در مرحلهٔ پایانیِ محاسبهٔ مشتق تابع $f(x) = x^{۲}$، لایب‌نیتس $۲x + dx$ را با $۲x$ یکی می‌گیرد در حالی که رابینسون می‌نویسد $st(۲x + dx) = ۲x$. همین یکی گرفتنِ (ضمنیِ) عددهای اَبَرحقیقی با بخش استاندارد آنها و به‌ویژه یکی گرفتنِ بی‌نهایت‌کوچک‌ها با صفر، منجر به مشکلات منطقی در حساب دیفرانسیل و انتگرال لایب‌نیتس شده بود. در آنالیز نااستاندارد رابینسون، قضیهٔ بخش استاندارد جایگزین به‌کار گیریِ حد می‌شود.

اما رابینسون از کجا می‌دانست که اصول موضوع اعداد اَبَرحقیقی، سازگارند؟ پاسخ این است: با ساختن یک «مدل» برای آنها و استنتاج اصل‌های موضوع به‌عنوان قضیه‌هایی در آن مدل. این روش ساخت، مشابه همان روش ساختن اعداد حقیقی به‌عنوان رده‌های هم‌ارزیِ دنباله‌های کُشی است. رابینسون اعداد اَبَرحقیقی را رده‌های هم‌ارزیِ دنباله‌های دلخواه –همهٔ دنباله‌های– اعداد حقیقی تعریف و رابطهٔ هم‌ارزی را هم برحسب عمل «فراضرب» بیان می‌کند. چون روش او متضمن مفاهیم بسیار فنی در منطق ریاضی است، تاکنون چندین ساده‌سازی برای آن پیشنهاد شده است.

چه چیز باعث شد آنالیز نااستاندارد جا بیفتد و مورد پذیرش جامعهٔ ریاضی قرار گیرد؟ رابینسون روش‌های خود را در توپولوژی، هندسهٔ دیفرانسیل، نظریهٔ اندازه، آنالیز مختلط و نظریهٔ گروه‌های لی به‌کار برد. این روش‌ها در آنالیز تابعی، معادلات دیفرانسیل، احتمال، بخش‌هایی از فیزیکِ ریاضیاتی و اقتصاد نیز به‌کار گرفته شده‌اند. تاخت و تاز این موضوع در این بازهٔ زمانی کوتاه، شگفت‌انگیز است. البته بدگویان استدلال می‌کنند که اساساً چیز جدیدی در این موضوع نیست، زیرا بنابر اصل گذار و قضیهٔ بخش استاندارد، هر نتیجه‌ای که با روش‌های نااستاندارد اثبات‌پذیر باشد، دست‌کم به‌لحاظ نظری، یک برهان استاندارد نیز دارد. خوب! به همان صورت می‌شود ادعا کرد که هر نتیجهٔ هندسی را که به روش‌های هندسهٔ ترکیبی اثبات‌پذیر باشد، می‌توان به‌طور تحلیلی هم ثابت کرد. آیا این باعث

بی‌ارزش شدنِ هندسهٔ ترکیبی می‌شود؟ نکتهٔ مهم این است که به‌کمک روش‌های نااستاندارد، نتایج جدیدی کشف یا برای اولین بار ثابت شده‌اند. شیوه‌های جدید نگریستن به یک مفهوم را باید تشویق کرد.

۲.۷. گرچه بی‌نهایت‌کوچک‌های رابینسون در بطن بی‌نهایت‌کوچک‌های لایب‌نیتس جای دارند، رابینسون آنالیز نااستاندارد را پشتیبان حساب دیفرانسیل و انتگرال لایب‌نیتس (و اویلر) می‌دانست. در واقع او قائل بود که باید تاریخ حساب دیفرانسیل و انتگرال را بازنویسی کرد.

نظریه‌ای که رابینسون ارائه کرد، نه‌تنها نشان داد که آنالیز در قرن‌های هفدهم و هیجدم بر پایهٔ یک مفهوم تیره و موهومی به نام بی‌نهایت‌کوچک بنا نشده بود –وگرنه چطور می‌توانست آن همه نتایج توانمند به بار آورد؟– بلکه فعالیت‌های آنالیزدانان معاصر را با این احساس اطمینان همراه ساخت که بی‌نهایت‌کوچک‌ها را می‌توان با اتکا به این نظریه به‌دقت استنباط کرد.

اما بسیاری از تاریخدانان ریاضیات، با اعتباربخشیِ ساختار رابینسون به بی‌نهایت‌کوچک‌های قرن‌های هفدهم و هیجدهم به‌شدت مخالف هستند و می‌پرسند کدام‌یک از این مفاهیم پیچیده‌ای که در آنالیز نااستاندارد رابینسون وجود دارد، در بی‌نهایت‌کوچک‌های لایب‌نیتس به چشم می‌خورَد؟ خوب! همان‌گونه می‌شود پرسید کدام‌یک از تعبیرهای $\varepsilon - \delta$یی وایرشتراس در نسبت‌های غایی نیوتن به چشم می‌خورَد؟ یا اینکه چطور برخی معتقدند تعریف ائودوکسوس برای ضرب نسبت‌ها، پیش‌درآمدِ نظریهٔ گروه‌ها بوده است؟ بازسازی‌های تاریخی را باید با احتیاط فراوان مورد بررسی قرار داد. ای. تی. بل[۱] به ریاضیدانان و تاریخدانان ریاضی گوشزد می‌کند که «از پس‌بینی، چیزهایی می‌فهمیم که موقع پیش‌بینی از درک آنها عاجز بوده‌ایم.» [۳]

بجز مسئلهٔ «بازسازی»، آنالیز نااستاندارد پرتو نوری بر اندیشه‌های لایب‌نیتس (و دیگران) دربارهٔ وجود بی‌نهایت‌کوچک‌ها افکند. البته معنای امروزیِ وجود در ریاضیات کاملاً متفاوت با تلقی هم‌عصران لایب‌نیتس است. ما (دست‌کم بیشترمان) وجود بی‌نهایت‌کوچک‌ها را به‌واسطهٔ وجود $^*\mathbb{R}$ پذیرفته‌ایم: بی‌نهایت‌کوچک‌ها چیزی نیستند جز عضوهای $^*\mathbb{R}$. اما ریاضیدانان پیش از قرن نوزدهم و در واقع بسیاری از ریاضیدانان قرن نوزدهم، با چنین تعبیری از وجود بیگانه بودند. در آن دوران، عدد موهومی $\sqrt{-۱}$، نقطهٔ ایدآل (نقطه‌ای در بی‌نهایت) و عددهای ایدآل کومِر[۲] همه را به چشم اشیایی «خیالی» (غیرواقعی) می‌نگریستند که برای برآورده شدنِ اهدافی ویژه، فراهم آمده‌اند؛ در حالی که برای ما، این اشیاء معنای متافیزیکیِ خود را از دست داده‌اند. آیا نباید بی‌نهایت‌کوچک‌ها را هم با همان چوب راند؟ آیا تعبیر لایب‌نیتس که بی‌نهایت‌کوچک‌ها را «استعاره‌هایی برای خلاصه‌نگاری و کلی‌گویی» می‌دانست، با نگرش فوق سازگار نیست؟

---
[۱] E. T. Bell [۲] Kummer

۳.۷. نکتهٔ آموزشی. آیا باید حساب دیفرانسیل و انتگرال را با روش‌های آنالیز نااستاندارد تدریس کرد؟ پاسخ این سؤال تا اندازهٔ زیادی به اهداف ما در تدریس بستگی دارد. جنبه‌های مطلوب یک نظریهٔ ریاضی به‌طور کلی عبارت‌اند از وضوح مفاهیم و توانایی در تبیین شهودیِ آنها، زیبایی و سادگیِ آن نظریه و راحتی در به‌کار بردنِ ابزارهای فنی. بر این مبانی، آنالیز نااستاندارد را می‌توان کاملاً توصیه کرد.

به نظر می‌رسد استفادهٔ غیررسمی از بی‌نهایت‌کوچک‌ها دست‌کم به‌اندازهٔ استفاده از حدود، جاذبه داشته باشد. فیزیکدانان و مهندسان مدت طولانی پس از آنکه از ریاضیات نفی بلد شدند، از بی‌نهایت‌کوچک‌ها استفاده کرده‌اند و ریاضیدانان هنوز هم مطمئن از وجودِ یک پشتوانهٔ دقیق منطقی، به‌طور غیررسمی از آن استفاده می‌کنند چنان‌که همهٔ ما با عبارت «فلان کمیّت آنقدر کوچک است که می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد» آشنا هستیم. همان‌طور که مفهوم حد بر پایهٔ اعداد حقیقی استوار است، تعریفِ رسمیِ بی‌نهایت‌کوچک هم بر پایهٔ اعداد اَبَرحقیقی استوار است. فرقش این است که اعداد حقیقی خیلی «واقعی‌تر» از اعداد اَبَرحقیقی هستند و شهود قابل ملاحظه‌ای که از اعداد حقیقی داریم، ناشی از مدل هندسی آنها، یعنی نقاط واقع بر خط حقیقی است. با وجود این، مدل‌های هندسی برای خط اَبَرحقیقی هم ارائه شده است [۳۵].

کسانی هم هستند که با تدریس حساب دیفرانسیل و انتگرال نااستاندارد به‌شدت مخالف‌اند. ارت بیشاپ[۱]، منطق‌دان ساختگرا، این کوشش‌ها را «بی‌ریشه کردن معانی» می‌داند و می‌افزاید که «تخریب واقعی آنجا رخ می‌دهد که آن همه معانی شگفت‌انگیز [در حساب دیفرانسیل و انتگرال استاندارد] را از درونمایه تهی و دچار تیرگی می‌کنیم.» [۱۹]

به نظر می‌رسد آنقدر شواهد تاریخی فراهم شده باشد که مدرسان دست‌کم از مفاهیم و روش‌های مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال نااستاندارد آگاهی یابند و در آموزش‌های آتی دانشجویان رشتهٔ ریاضی، جایگاهی هم برای آنها در نظر بگیرند. بیش از دو هزار سال کسانی همچون ارشمیدس، لایب‌نیتس، نیوتن، اویلر و کُشی روش‌های بی‌نهایت‌کوچک‌ها را با موفقیت فراوان به‌کار بردند اما آنالیز نااستاندارد رابینسون اگر نگوییم پشتوانهٔ منطقیِ این روش‌ها است، نقطهٔ اوج شکوفاییِ آنها است و گواهی است بر اینکه (به قول لین استین[۲]) «مبانی معرفت‌شناختیِ آنالیز ریاضی هنوز بدور از استحکام است.» [۵۵]

مراجع

[1] Andersen, K., Cavalieri's method of indivisibles, *Archive for History of the Exact Sciences*, **31** (1985), 291–367.

[۱] Errett Bishop [۲] Lynn Steen

[2] Baron, M. E., *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Dover, New York, 1987.

[3] Bell, E. T., *The Develoment of Mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1945.

[4] Bell, J. L., Infinitesimals, *Synthesis*, **75** (1988), 285–315.

[5] Bos, H. J. M., Differentials, higher order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus, *Archive for History of the Exact Sciences*, **14** (1974), 1–90.

[6] Bottazzini, U., *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[7] Boyer, C. B., *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover, New York, 1959.

[8] Boyer, C. B., Cavalieri, limitis and discarded infinitsimals, *Scripta Mathematica*, **8** (1941), 79–91.

[9] Bressoud, D., *A Radical Approach to Real Analysis*, Mathematical Association of America, Washington, DC., 1994.

[10] Cajori, F., Indivisibles and “ghosts of departed quantities” in the history of mathematics, *Scientia*, **37** (1925), 301–306.

[11] Cajori, F., Grafting of the theory of limits on the calculus of Leibniz, *American Mathematical Monthly*, **30** (1923), 223–234.

[12] Cajori, F., Discussion of fluxions: from Berkeley to Woodhouse, *American Mathematical Monthly*, **24** (1917), 145–154.

[13] Calinger, R. (ed.), *Vita Mathematics: Historical Research and Integration with Teaching*, Mathematical Association of America, Washington, DC., 1996.

[14] Dauben, J. W., Abraham Robinson and nonstandard analysis: History, philosophy, and foundations of mathematics, in Aspray, A., Kitcher, P. (eds.), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, University of Minnesota Press, 177–200.

[15] Davis, M., Hersh, R., Nonstandard analysis, *Scientific American*, **226** (1972), 78-86.

[16] Dedekind, R., *Essays on the Theory of Numbers*, Dover, New York, 1963.

[17] Dudley, U. (ed.), *Readings from Calculus*, Mathematical Association of America, Washington, DC., 1993.

[18] Dunham, W., Journey *Through Genesis: The Great Theorems of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1990.

[19] Edwards, C. H., *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[20] Eves, H., *Great Moments in Mathematics*, 2 vols., Mathematical Association of America, Washington, DC., 1983.

[21] Fauvel, J. (ed.), The use of history in teaching mathematics, special issue of *For the Learning of Mathematics*, **11** (1991), no. 2.

[22] Fauvel, J. (ed.), *History in the Mathematics Classroom: The IREM Papers*, vol. 1, The Mathematical Association, London, 1990.

[23] Fauvel, J., van Mannen, J., (eds.), *History of Mathematics Education: The ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[24] Fraser, C., The calculus as algebraic ananlysis: some observations on mathematical analysis in the 18th century, *Archive for History of the Exact Sciences*, **39** (1989), 317–335.

[25] Grabiner, J. W., Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus, *American Mathematical Monthly*, **90** (1983a), 185–194.

[26] Grabiner, J. W., The changing concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrss, *Mathematics Magazine*, **56** (1983b), 195–206.

[27] Grabiner, J. W., *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*, MIT Press, Cambridge, Mass, 1981.

[28] Grattan-Guinness, I. (ed.), *From the Calculus to Set Theory: 1630-1910*, Duckworth, London, 1980.

[29] Grattan-Guinness, I., *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1970.

[30] Hairer, E., Wanner, G., *Analysis by Its History*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[31] Harnik, V., Infinitesimals from Leibniz to Robinson: Time to bring them back to school, *Mathematical Intelligencer*, **8** (1986), no. 2, 41–47, 63.

[32] Kalman, K., Six ways to sum a series, *College Mathematics Journal*, **24** (1993), 402–421.

[33] Katz, V. J. (ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*, Mathematical Association of America, Washington, DC., 2000.

[34] Katz, V. J., *A History of Mathematics*, 2nd ed., Addison-Wesley, New York, 1998.

[35] Keisler, J., *Elemantary Calculus: An Infinitesimal Approach*, 2nd ed., Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1986.

[36] Keisler, J., *Foundations of Infinitesimal Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1976.

[37] Kitcher, P., *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, New York, 1983.

[38] Kitcher, P., Fluxions, limitis, and infinite littleness: A study of Newtons's presentation of the calculus, *Isis*, **64** (1973), 33–49.

[39] Kline, M., Euler and infinite series, *Mathematics Magazine*, **56** (1983), 307–314.

[40] Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.

[41] Lakatos, I., Cauchy and the continuum: The significance of non-standard analysis for the history and philosophy of mathematics, *Mathematical Intelligencer*, **1** (1978), 151–161.

[42] Langer, R. E., Fourier series: The gensis and evolution of a theory, *American Mathematical Monthly*, **54** (1947), 1–86.

[43] Laubenbacher, R., Pengelley, D., *Mathematical Expeditions: Chronicles by the Explorers*, Springer-Verlag, New York, 1999.

[44] Laugwitz, D., On the historical development of infinitesimal mathematics (I and II), *American Mathematical Monthly*, **104** (1997), 445–455, 660–669.

[45] MacKinnon, N. (ed.), Use of the history of mathematics in the teaching of the subject, special issue of *Mathematical Gazzette*, **76** (1992).

[46] May, K. O., History in the mathematical curriculum, *American Mathematical Monthly*, **81** (1974), 899–901.

[47] NCTM, *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, 2nd. ed., National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia, 1989.

[48] Pimm, D., Why the history and philosophy of mathematics should not be rated X, *From the Learning of Mathematics*, **3** (1982), 12–15.

[49] Polya, G., *Mathematical Discovery*, combined ed., John Wiley & Sons, New York, 1962.

[50] Robinson, A., *Non-standard Analysis*, North-Holand, Amsterdam, 1966.

[51] Roy, R., The discovery of the series formula for π by Leibniz, Gregory, and Nilakantha, *Mathematics Magazine*, **63** (1990), 291–306.

[52] Simmons, G. F., *Calculus Gems: Brief Lives and Memorable Mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1992.

[53] Simmons, G. F., *Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1972.

[54] Stahl, S., *Real Analysis: A Historical Approach*, John Wiley & Sons, NEw York, 1999.

[55] Steen, L. A., New Models of the Real-Number Line, *Scientific American*, **225** (1971), 92–99.

[56] Stillwell, J., *Mathematics and Its History*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[57] Struik, D. J., *A Concise History of Mathematics*, 4th. edn., Dover, New York, 1989.

[58] Swetz, F., et al. (eds.), *Learn from Masters*, Mathematical Association of America, Washington, DC., 1995.

[59] Toeplitz, O., *The Calculus: A Genetic Approach*, The University of Chicago Press, Chicago, 1963.

[60] Vilenkin, N. Y., *In Search of Infinity*, translated from Russian by A. Shenitzer, Birkhäuser, Boston, 1995.

[61] Wilder, R. L., History in the mathematics curriculum: Its status, quality, and function, *American Mathematical Monthly*, **79** (1972), 479–495.

[62] Young, R. M., *Excursions in Calculus*, Mathematical Association of America, Washington, DC., 1992.

روح‌الله جهانی‌پور: دانشگاه کاشان، دانشکدهٔ علوم ریاضی

رایانامه: jahanipu@kashanu.ac.ir

سعید مقصودی: دانشگاه زنجان، گروه ریاضی

رایانامه: s_maghsodi@znu.ac.ir