فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۹، شمارهٔ ۶۶ (بهار و تابستان ۱۳۹۹) صص. ۷ تا ۴۰

درآمدی بر ریاضیات مالی

محمد جلوداری ممقانی

چکیده

هدف از نگارش این مقاله این است که خوانندگان، زمینه‌هایی از ریاضیات مالی را بشناسند و با آگاهی نسبی وارد این فعالیت علمی شوند. برای این منظور، مفاهیمی اساسی از ریاضیات مالی و خاستگاه آنها را به ساده‌ترین صورت بیان می‌کنیم. بسیاری از حالت‌های پیچیده را می‌توان در منابع همین نوشتار پیدا کرد. مدل‌سازی، شاید از مهم‌ترینِ این مفاهیم باشد. از این‌رو ضمن بیان مفاهیم اصلی مدل‌سازی در ریاضیات مالی، این نوشتار را با وارد کردن ترجمهٔ «اعلامیهٔ مدل‌سازان» به قلم دو نفر از فعالان معروف دانشگاهی و بازار سرمایه، غنی‌تر کرده‌ایم.

۱. سرآغاز

ریاضیات مالی، شاخه‌ای از ریاضیات است که رفتار بازارهای مالی را با طراحی مدل‌های ریاضی و مطالعهٔ آنها شناسایی می‌کند. با اندکی تسامح، می‌توان گفت که این شاخه در نقطهٔ همرسیِ فرآیندهای تصادفی، اقتصاد، مهندسی مالی، آمار، احتمال و محاسبات عددی قراردارد. هرچند ریاضیات مالی به معنای جدید کلمه، در دنیا رشته‌ای نوپا است و عمر آن به ۶۰ سال هم نمی‌رسد اما برخی مفاهیم آن عمری بس طولانی دارند. برای مثال، در اوایل قرن بیستم، لویی بشلیه[۱] (۱۸۷۰–۱۹۴۶) مفاهیمی چون آتی‌ها، اختیارهای استاندارد (وانیلی)، اختیارهای نامتعارف و ترکیب اختیارها را در پایان‌نامهٔ دکتری خود مطالعه کرده‌است [۱]. عقب‌تر که برویم به ارسطو می‌رسیم: ۳۵۰ سال قبل از میلاد. او در بخش ۱۱ی جلد اول

عبارات و کلمات کلیدی. مدل مالی؛ نرخ بهره؛ ورقهٔ قرضهٔ صفر کوپن؛ لم ایتو؛ بازار بلک–شولز.

[۱] Louis Bachelier

(از ۸ جلد) کتاب *سیاست* می‌نویسد: «همچنین خوب است که داستان‌های روش‌هایی را نقل کنیم که افراد با استفاده از آنها ثروت خود را انباشته کرده‌اند، زیرا همهٔ این‌ها برای کسانی که هنرِ به‌دست آوردن ثروت را ارزشمند می‌دانند، سودمند است.» حکایتی هست دربارهٔ تالس ملیطی (قرن ششم قبل از میلاد) و طرح مالی او که جهان‌شمول است ولی چون در فرزانگی، شهرهٔ خاص و عام بوده است، به او نسبت داده می‌شود. او به‌دلیل فقر شدید مالی هم مورد نکوهش بود، چراکه فکر می‌کردند فلسفه کاربردی ندارد که این آدم را به خاک سیاه نشانده است. یک سال در فصل زمستان، تالس با اندک سرمایهٔ خود، محصول روغن زیتون سال آتی همهٔ کارگاه‌های روغن‌کشی شهر خود و شهر مجاور را طی قراردادی پیش‌خرید کرد (این معامله در بازارهای مالی امروزی، *خرید اختیار فروش* نامیده می‌شود). با فرارسیدن فصل برداشت، تالس صاحب کل روغن زیتون منطقه شد و با توجه به هجوم مشتری، روغن را به هر قیمتی که خواست فروخت. این معامله سودی سرشار نصیب تالس کرد. تالس یا خوش‌شانس بود و یا پیشگویی بزرگ و یا هر دو. تالس ثروتمند شد. ارسطو نتیجه می‌گیرد که فیلسوفان اگر بخواهند ثروتمند شوند، می‌توانند اما آنها آمال و آرزوهای دیگری دارند [۲].

دورتر از تالس، حمورابی (۱۸۰۰ قبل از میلاد)، فرمانروای بابل، برای تنظیم روابط تجاری بین ساکنان سرزمین بابل (میان‌رودان و بخش‌هایی از ایلام و خوزستان)، بخش‌هایی از قانون معروف خود (قانون حمورابی) را به مالکیت زمین، استخدام کارگران کشاورزی، تعهدات شهروندی، اجارهٔ زمین، اعتبار و نرخ بهره که یکی از مهم‌ترین مفاهیم ریاضیات مالی است، اختصاص داده است [۳]. در اینجا جدول نرخ‌های بهره سالانه را در دوران‌های مختلف حکمرانی‌های باستانیِ میان‌رودان می‌آوریم [۳]. اشاره به این نکته شاید جالب باشد که در آن دوران، اجداد ما همانند آنچه در زمان ما رایج است، با دو نرخ معامله می‌کردند: نرخ رایج بین خودشان و نرخ دولتی یا قانونی.

تأکید می‌کنیم که مفاهیم مالی در جوامع بشری، از ملزومات اداره و پیشبرد امور اقتصادی در زندگی بوده است و خواهد بود. این مفاهیم به‌موازات گسترش جوامع، توسعه و تعمیم می‌یابند، تجدید محتوی می‌شوند و با کاربردهایی جدید، وارد بازارهای مالی می‌شوند.

۲. بازار مالی

در این بخش، چند مفهوم رایج مالی [۴، ۵، ۱۴، ۱۸] را معرفی می‌کنیم. *معامله* قراردادی است بین دو طرف برای مبادلهٔ دو دارایی که مفاد آن، نحوهٔ مبادله و تسویهٔ حساب را مشخص می‌کند. *بازار مالی*، محل معاملهٔ اوراق بهادار یا دارایی‌های کاغذی است که عمده‌ترین آنها سهام، اوراق قرضه، ارز و مشتقات

جدول ۱. جدول نرخ‌های بهره در حکومت‌های باستانی میان‌رودان

نرخ‌های بهره در میان‌رودان ۴۰۰–۳۰۰۰ قبل از میلاد					
	تاریخ قبل از میلاد	نرخ‌های رایج ٪		ماکسیمم نرخ‌های قانونی ٪	
		گندم	نقره	گندم	نقره
سومر	۳۰۰۰–۱۹۰۰	$۳۳\frac{۱}{۳}$ — ۲۰	۲۵ — ۲۰		
بابل	۱۹۰۰–۷۳۲	$۳۳\frac{۱}{۳}$ — ۲۰	$۳۳\frac{۱}{۳}$	$۳۳\frac{۱}{۳}$	۲۰
	۷۳۲–۶۲۵	$۳۳\frac{۱}{۳}$ — ۲۰	$۳۳\frac{۱}{۳}$	$۳۳\frac{۱}{۳}$	۲۰
	۵۳۹–۶۲۵	$۳۳\frac{۱}{۳}$ — ۲۰	۲۰–۱۰	۲۰	۲۰
	قرن پنجم تا چهارم	۴۰			
آشور:	قرن نهم تا هفتم	۵۰–۳۰	۴۰–۲۰		
پارس:	قرن ششم	۴۰	۴۰		

هستند. بزرگترین بازار مالی دنیا، بورس نیویورک است که حجم معاملات روزانه در آن، به تریلیاردها دلار می‌رسد.

معاملات در همهٔ بازارها، بر قیمت‌های دارایی‌های مورد معامله استوار است. بنابراین دانستن مفهوم *قیمت* دارایی برای معامله‌گران بسیار ضروری است. قیمت یک دارایی به تنهایی قابل پایش نیست و تعیین قیمت دارایی، نیازمند یک دارایی دیگر به نام *پیمانه* است. قیمت یک واحد از داراییِ اول، برابر است با تعداد واحدهایی از داراییِ دوم هرگاه آن واحد و این تعداد، همزمان در بازار، مطلوبیت یکسان داشته باشند. بنابراین عرضه و تقاضا مهم‌ترین عامل قیمت‌گذاری است. قیمت‌ها نسبی هستند و قیمت‌گذاری، فرآیندی همانند تعیین مساحت یا انتگرال‌گیری است. به این ترتیب، هر واحد از داراییِ دوم را یک *واحد قیمت‌گذاری* داراییِ اول می‌نامند. هر دارایی را که قیمتی همواره مثبت داشته باشد، می‌توان به‌عنوان واحد قیمت‌گذاری انتخاب کرد. با این حال، امروزه در همهٔ بازارهای دنیا، واحد قیمت‌گذاری، همان پول رایج کشورها است. از این‌رو معاملات ارزها از عملیات بسیار مهم و اجتناب‌ناپذیر بین بازارها است.

بازارهای مالیِ تخصصی، ممکن است در یکی از زمینه‌های زیر فعال باشند:

بازار سهام: به معاملهٔ سهامی می‌پردازد که مردم عادی در آنها سرمایه‌گذاری می‌کنند. عرضهٔ اول این سهام، در بازار اولیه و معاملات بعدی آنها، در بازار ثانویهٔ همین بازار صورت می‌گیرد. اگر

شما از بازار اولیه سهام شرکتی را خریده باشید، برای فروش آن باید به بازار ثانویه مراجعه کنید. بازار سهام از طریق داد و ستد سهام، به گسترش مالکیت شرکت‌ها بین مردم یاری می‌رساند و پایه‌های استمرار فعالیت شرکت را تقویت می‌کند. بازار خارج از بورس (OTC) نمونه‌ای از یک بازار ثانویه است، مقرارات دست و پاگیر کمتری دارد و معاملات در آن روان‌تر و ارزان‌تر صورت می‌گیرد. *قراردادهای سَلَف* نمونه‌ای از قراردادهای مورد معامله در بازار خارج از بورس هستند.

بازار اوراق قرضه: محل تأمین نقدینگی برای شرکت‌های جدید و شرکت‌ها و مؤسساتی است که با کمبود نقدینگی مواجه‌اند. *ورقهٔ قرضه* (ورقه مشارکت)، ورقهٔ بهادار مدت‌داری است که سرمایه‌گذار در ازای پرداخت وجهی که بر آن نوشته شده است و با نرخ بهره‌ای مشخص، آن را خریداری می‌کند. اوراق قرضه معمولاً پشتوانهٔ دولتی دارند و از کم‌ریسک‌ترین اوراق بهادار هستند. با این حال، به‌دلیل ارتباط با نرخ بهره، پیچیدگی‌های بسیاری دارند. اوراق قرضه‌ای که در طول عمر خود سودی نمی‌پردازند و سود را در آغاز خرید یا هنگام تسویهٔ حساب می‌پردازند، اوراق قرضهٔ *صفرکوپن* نامیده می‌شوند. با استفاده از این اوراق، انواع نرخ‌های بهره از جمله نرخ لایبور و نرخ بهرهٔ آتی تعریف می‌شود. بازار اوراق قرضه، بازار بدهی، بازار اعتبارات و بازار ثابت‌درآمد نیز نامیده می‌شود.

بازار پولی: بخشی از بازار سرمایه که در آن، دارایی‌هایی با نقدشوندگی سریع و با سررسیدهای کوتاه‌مدت (کمتر از یک سال) معامله می‌شود. در این بازار، گواهی‌های سپرده، پذیرش‌های بانکی، اسناد خزانه و اوراق تجاری، داد و ستد می‌شوند.

بازار مشتقات: *مشتقه* نوعی دارایی کاغذی است که ارزش آن به ارزش دارایی دیگری وابسته است و نام مشتقه گویای این وابستگی است. اختیارها، سواپ‌ها، سَلَف‌ها، آتی‌ها، نام‌هایی چند برای مشتقاتی خاص هستند. دنیایی از مشتقات سهام و مشتقات اوراق قرضه و مشتقات نرخ‌های بهره وجود دارد. بازار مشتقات، محل داد و ستد این دارایی‌ها است.

بازار فارکس: بازار تخصصی معاملهٔ ارزها است. این بازار، نقدشونده‌ترین بازارهای جهان است، چراکه نقدشوندگی، مبتنی بر مفهوم ارز که کالای این بازار است، تعریف می‌شود.

هر داد و ستدی هزینه‌های جانبی بسیاری دارد که مالیات، عوارض، هزینهٔ بنگاه، هزینهٔ ثبت، هزینهٔ رفت و آمد از جملهٔ آنها است. معامله‌ای که این هزینه‌ها را نداشته باشد، *معامله بدون اصطکاک* نامیده می‌شود. مدل بلک–شولز با فرض بدون اصطکاک بودنِ بازار، ارائه شده است. همچنین لازمهٔ هر داد و ستدی، داشتنِ یک حساب بانکی است. اگر نرخ بهرهٔ بدون ریسکِ پیوستهٔ مرکب، r و B_0 موجودی این حساب در لحظهٔ $t = 0$ باشد، موجودی آن در لحظهٔ t برابر است با $B_t = e^{rt}B_0$.

فعالان بازار مالی را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد: (الف) سوداگران یا ریسک‌پذیران. این افراد در بازار ریسک‌دار معامله می‌کنند که سودی سرشار به جیب بزنند؛ (ب) ریسک‌پوشان یا پوشش‌دهندگان ریسک. آنها معامله می‌کنند تا ریسک معاملهٔ دیگری را خنثی کنند؛ (پ) آربیتراژگران. این‌ها به دنبال فرصت دو قیمت برای یک دارایی هستند تا با خرید آن دارایی از بازارِ ارزان و فروش در بازارِ گران، سودی بدون ریسک به جیب خود سرازیر کنند.

۳. اطلاعات

مدل ریاضی هر فرآیند مالی، مبتنی بر *اطلاعات* است. اینکه مدل ریاضیِ اطلاعات چیست و چگونه به آن می‌رسیم، موضوع این بخش است. اطلاعات، از قیمت‌های مشاهده‌شدهٔ دارایی‌ها به‌دست می‌آید و چون مشاهده، همواره با تصادفی بودن رابطه دارد، می‌توان گفت که اطلاعات مورد نظر این نوشتار، رابطه‌ای نزدیک با نظریهٔ احتمال و *سری زمانی* قیمت‌ها دارد. در این نوشتار، فضای احتمالی را که فرآیندهای مالی بر آن تعریف می‌شوند، با نماد $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ نشان می‌دهیم و آن را *فضای احتمال عینی* بازار می‌نامیم. بنابراین اطلاعات نیز با استفاده از این فضا و البته مفاهیم دیگر تعریف خواهد شد. همواره به یاد خواهیم داشت که گذشت زمان، اطلاعات ما را نسبت به هر پدیدهٔ پویا افزایش می‌دهد. بنابراین یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های اطلاعات، صعودی بودن آن نسبت به زمان است.

تعریف ۱.۳. فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را *پالایش‌شده* می‌نامیم اگر مجموعهٔ جزئی–مرتب $(\mathcal{L}, \leq)$ و خانوادهٔ صعودی از زیرسیگما–میدان‌های $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in \mathcal{L}\}$ از $\mathcal{F}$ موجود باشد. در عمل، $\mathcal{L}$ را برابر $\mathbb{N}_\circ = \mathbb{N} \cup \{\circ\}$، زیرمجموعه‌ای متناهی از $\mathbb{N}_\circ$ که شامل $\circ$ است یا بازه‌ای به‌صورت $[\circ, T]$ انتخاب می‌کنند. $\mathbf{F}$ را یک *پالایه* روی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ می‌نامیم و می‌گوییم فرآیند تصادفی X_t، $\mathbf{F}$– سازگار است اگر به‌ازای هر t داشته باشیم $X_t \in \mathcal{F}_t$. به عبارت دیگر، مقدار X_t به‌محض مشاهدهٔ اطلاعات $\mathcal{F}_t$ به‌دست می‌آید. فضای احتمال پالایش‌شدهٔ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ با پالایهٔ $\mathbf{F}$ را با نماد $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, P)$ نشان می‌دهیم.

چگونگیِ پیوند این تعریف با بازارهای مالی از این قرار است: معمولاً با استفاده از مقادیر مشاهده‌شدهٔ یک متغیر تصادفی مانند $Y : \Omega \to \mathbb{R}$، رفتار یک متغیر تصادفی مجهول مانند X را برآورد (پیش‌بینی) می‌کنند. این کار در تمام ارکان زندگی اجتماعی انسان، اقتصاد، جامعه‌شناسی، هواشناسی و ... رایج است. در ساده‌ترین صورت، باید تابعی مانند $\tilde{X} = f(Y)$ موسوم به *برآوردگر* X را چنان پیدا کنیم که به‌معنایی مشخص، به X نزدیکترین باشد. مثلاً اگر $X \in L^۲(\mathcal{F})$ و $\sigma(X)$ سیگما–میدان تولید شده به‌وسیلهٔ X باشد، این نزدیکی به این معنی است که

$$\|X - \tilde{X}\|_۲ = \min_{Z \in L^۲(\sigma(Y))} \|Z - X\|_۲.$$

در این صورت، $\tilde{X}$ را *برآوردگر کمترین توان دوم* X می‌نامیم. به عبارت دیگر، $\tilde{X}$ عضوی از $L^{2}(\sigma(Y))$ و در میان اعضای آن، از همه به X نزدیکتر است. بنابراین تصویر قائم X بر فضای کامل $L^{2}(\sigma(Y))$ است، یعنی $\tilde{X} = E[X|Y]$ بهترین *پیشگوی* X به شرط آگاهی از Y است.

حال این مفاهیم را در حیطهٔ مالی می‌نگریم. برای این منظور، وارد بحث در زمینهٔ یک دارایی مالی می‌شویم. در آغاز ($t = 0$) قیمت یک واحد آن دارایی را با پرس و جو، محاسبه یا هر روش دیگری پیدا می‌کنیم. عددی به‌دست می‌آوریم مانند S_0. کل اطلاع ما از بازار در لحظهٔ اول، همین عدد است. تابعی ثابت بر فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. بنابر آنچه دیدیم، اگر بخواهیم قیمت دارایی را در لحظهٔ $t = 1$ برآورد کنیم، باید سیگما–میدان $\mathcal{F}_0 = \sigma(S_0)$ را به‌دست آوریم. داریم $\sigma(S_0) = \{\emptyset, \Omega\}$، زیرا S_0 بر Ω ثابت است. بنابراین یک برآورد بسیار خوب از S_1، قیمت دارایی در لحظهٔ $t = 1$، عبارت است از $\tilde{S}_1 = E[S_1|\mathcal{F}_0]$. بنابراین تاکنون بهترین برآورد S_1 را به‌دست آورده‌ایم. با استفاده از این برآورد، زیرسیگما–میدان $\mathcal{F}_1$ از $\mathcal{F}$ را چنان می‌سازیم که شامل تمام اعضای احتمال‌صفر $\mathcal{F}$ باشد و $\tilde{S}_1 \in \mathcal{F}_1$. به این ترتیب، خانواده‌ای از بهترین برآوردهای S_1 نیز به‌دست می‌آید که همگی $\mathcal{F}_1$–اندازه‌پذیر هستند. دنباله‌ای از اعضای این خانواده در نرم L^{2} به S_1 همگرا است. به این ترتیب، سیگما–میدان $\mathcal{F}_1$ و قیمت مجهول $S_1 \in \mathcal{F}_1$ به‌دست می‌آیند. مشابهاً بهترین برآورد $\tilde{S}_2$ از S_2 به‌دست می‌آید، یعنی

$$\tilde{S}_2 = E[S_2|\mathcal{F}_1].$$

حال زیرسیگما–میدان $\mathcal{F}_2$ از $\mathcal{F}$ را چنان می‌سازیم که $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ و $\tilde{S}_2 \in \mathcal{F}_2$ و S_2 را به‌عنوان حد دنباله‌ای از بهترین برآوردهای $\tilde{S}_2 \in \mathcal{F}_2$ در فضای $L^{2}(\mathcal{F}_2)$ به‌دست می‌آوریم. با ادامهٔ این روش، دنبالهٔ صعودی $\{\mathcal{F}_n\}$ از زیرسیگما–میدان‌های $\mathcal{F}$ و دنبالهٔ $\{S_n\}$ برای قیمت‌های دارایی در لحظهٔ nاُم را به‌دست می‌آوریم طوری که $S_n \in \mathcal{F}_n$. با توجه به نحوهٔ ساختن دنباله‌های مذکور، $\mathcal{F}_n$ حامل همهٔ اطلاعات قیمت‌ها تا لحظهٔ nاُم است و نیز

$$S_m = E[S_n|\mathcal{F}_m], \qquad 0 \leq m \leq n.$$

در این نوشتار، اندازهٔ احتمال P *اندازهٔ عینی*، *اندازهٔ آماری* و *اندازهٔ تجربی* بازار نیز نامیده می‌شود و همان احتمالی است که فعالان بازار در محاورات خود از آن استفاده می‌کنند. با این اندازه نمی‌توان محاسبات ریاضی انجام داد و باید به‌دنبال اندازهٔ احتمالی چون Q بگردیم که معادل P باشد و بتوان با استفاده از آن، محاسبات ریاضی انجام داد. بنابر تعریف، اندازه‌های P و Q را بر $(\Omega, \mathcal{F})$ *معادل* می‌نامیم و می‌نویسیم $P \approx Q$ اگر از $P(A) = 0$ بتوان نتیجه گرفت $Q(A) = 0$ و به‌عکس. به عبارت دیگر، P و Q معادل هستند اگر و تنها اگر نسبت به هم مطلقاً پیوسته باشند. چنان‌که بیان شد، در بازارهای مالی، سیگما–میدان $\mathcal{F}_t$ نشانگر همهٔ اطلاعات بازار تا لحظهٔ t است و فرض بر این است که

همهٔ معامله‌گران در بازار از این اطلاعات برخوردارند؛ به عبارت دیگر، بازار از لحاظ اطلاعات، *متقارن* است. اینکه این اطلاعات چگونه تولید می‌شود، به مدل مورد مطالعه بستگی دارد. مثلاً در مدل بلک–شولز با یک دارایی ریسک‌دار، اطلاعات به‌وسیلهٔ حرکت براونی موجود در مدل تولید می‌شود؛ اگر این حرکت براونی W_t باشد، آن‌گاه

$$\mathcal{F}_t = \{W_s^{-1}(B) : 0 \leq s \leq t, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

که در آن، $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ سیگما–میدان مجموعه‌های بُرل $\mathbb{R}$ است.

۴. آربیتراژ

فرصت آربیتراژ، سبد آربیتراژ یا صرفاً *آربیتراژ*، پدیدهٔ ذاتیِ بازار است و مزیّتی است که گاهی نصیب آربیتراژگران می‌شود. در ساده‌ترین صورت، گفته می‌شود که بازار، آربیتراژ دارد اگر در دو جای مختلف آن، یک دارایی دو قیمت متفاوت داشته باشد. بنابراین آربیتراژگران فرصت می‌کنند ارزان بخرند و گران بفروشند و به این ترتیب، جیب خود را از سود بدون ریسک انباشته کنند. آربیتراژ منشأ بازی غیرمنصافانه و موتور محرک بازار است. با این حال، عمر آربیتراژ کوتاه است، زیرا در اثر اقدام فرصت‌جویان، بازار به‌زودی به تعادل می‌رسد و ماشین آربیتراژ از حرکت بازمی‌ایستد و موتور محرک، با خود از درِ ناسازگاری درمی‌آید و خود را تسلیمِ تعادل بازار می‌کند. بنابراین نبود آربیتراژ در بازار از شرایطی است که عمر روند تعادلی بازار را طولانی و بازی منصفانه را بر بازار حاکم می‌کند. قضیه‌های بنیادی اول و دوم ریاضیات مالی هر دو مبتنی بر نبودن آربیتراژ در بازار، صورت‌بندی شده‌اند. به بیان بسیار کلی، قضیهٔ بنیادی اول، نبودن آربیتراژ را معادل می‌داند با وجود اندازهٔ مارتینگلیِ معادل و قضیهٔ بنیادی دوم، بازار بدون آربیتراژ را کامل می‌داند اگر و تنها اگر این اندازه یکتا باشد. بنابراین ظاهراً نظریهٔ مالی محل تلاقی مفهوم آربیتراژ و نظریهٔ احتمال و به‌تبعِ آن، نظریهٔ مارتینگل است.

اکنون مفهوم آربیتراژ و قضیه‌های مذکور را صورت‌بندی می‌کنیم تا بتوانیم بخش‌های بعدی را بدون دغدغهٔ خاطر، ادامه دهیم. فرض کنیم بازار، $N+1$ دارایی دارد با شماره‌های ۰، ۱، ...، N. دارایی با شمارهٔ ۰ را حساب بانکی بدون ریسک می‌گیریم و فرض می‌کنیم موجودیِ آن در لحظهٔ $t=0$ برابر با $S_0^0 = 1$ و در لحظه‌های $0 < t \leq T$، S_t^0 باشد. بقیهٔ دارایی‌ها را ریسک‌دار و قیمت یک واحد از دارایی iاُم، $i = 1, \ldots, N$، را در لحظهٔ t برابر با S_t^i می‌گیریم. بردار قیمت این دارایی‌ها در لحظهٔ t عبارت است از $S_t = (S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^N)$. توجه می‌کنیم که همهٔ مؤلفه‌های این بردار، نامنفی هستند.

تعریف ۱.۴. یک سبد مالی در این بازار، عبارت است از یک $N+1$تایی $h_t = (h_t^0, h_t^1, \ldots, h_t^N)$ که مؤلفهٔ iاُم آن، معرف تعداد واحدهای دارایی iاُم در سبد است. قیمت این سبد را در لحظهٔ t با V_t نشان

می‌دهیم و با ضرب داخلی

$$V_t = h_t.S_t = \sum_{i=0}^{N} S_t^i h_t^i$$

تعریف می‌کنیم. در واقع، V_t ثروت سبد در لحظهٔ t است.

توجه می‌کنیم که مؤلفه‌های سبد می‌توانند اعداد منفی هم باشند که به معنای آن است که دارندهٔ سبد در آن اقلام، بدهی دارد. به‌علاوه V_t فرآیندی تصادفی است.

قبل از ارائهٔ تعریف دقیق آربیتراژ، اشاره می‌کنیم که در این بازار، وام گرفتن، یعنی برداشت از حساب بانکی به هر میزان و نیز فروش امانی، یعنی فروش دارایی بدون داشتن آن، مجاز است.

تعریف ۲.۴. سبد h_t را یک سبد *آربیتراژ* می‌نامیم اگر ثروت آن در روابط

$$P(V_0 > 0) = 0 \quad (۱)$$

$$P(V_T \geq 0) = 1 \quad (۲)$$

$$P(V_T > 0) > 0 \quad (۳)$$

صدق کند.

ملاحظه می‌کنیم که بر اساس این تعریف، در زمان $t = 0$ سرمایه‌گذار با سرمایهٔ $V_0 = 0$ سبد را تشکیل می‌دهد و در سررسید T، به ثروتِ مثبت V_T دست می‌یابد. بازار را *بدون آربیتراژ* می‌نامیم اگر هیچ سبد آربیتراژی نداشته باشد. بنابراین در بازار بدون آربیتراژ، به‌ازای هر سبد، از شرایط (۲) و (۳) باید شرط $P(V_T > 0) < 0$ نتیجه شود. نکته این است که اگر مجاز به انتخاب هر سبد آربیتراژی باشیم، نباید توقع داشته باشیم که بازار، بدون آربیتراژ باشد [۵]. به عبارت دیگر، اگر با انتخاب سبدی بدهی بالا بیاوریم (از بانک وام بگیریم)، می‌توانیم باز هم با وام گرفتن از بانک به امید بُرد و کم کردن بدهیِ قبلی، به بازی بازار ادامه دهیم و بدهیِ بیشتری ایجاد کنیم و قس‌علی‌هذا تا باخت کل ثروت بانک. بنابراین باید در انتخاب سبد، محدودیت‌هایی منظور کنیم و سبد را قابل قبول انتخاب کنیم. مثلاً نتوانیم هر قدر خواستیم، بدهکار شویم.

تعریف ۳.۴. سبد $h_t = (h_t^0, h_t^1, \ldots, h_t^N)$ را *قابل قبول* می‌نامیم اگر $h_0 = 0$ و عدد مثبت a یافت شود که

$$V_t = S_t.h_t \geq -a, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

بنابراین اگر مبلغی بیشتر از a بدهکار باشیم، با الفاظی مانند ورشکسته از بازیِ بازار به کناری نهاده می‌شویم.

اما چه کسانی می‌توانند سبد آربیتراژ تشکیل دهند و بی‌رنج و بی‌نگرانی سود ببرند؟ یک پاسخ نه‌چندان ساده، این است که کسانی که از آینده خبر دارند. به عبارت دیگر، کسانی که اطلاعات بیشتری از وضع بازار دارند. در این صورت، می‌گویند توزیع اطلاعات در بازار، نامتقارن است و رانتی است. اثبات نبودنِ آربیتراژ در بازار، یکی از مسائل مهم ریاضیات مالی است و در حالت کلی نیازمند بهره‌مندی از قضیه‌هایی از آنالیز تابعی، نظریهٔ مارتینگل، نظریهٔ اندازه، نظریهٔ احتمال و توپولوژی است. قبل از بیان صورت اولین قضیهٔ بنیادی ریاضیات مالی، خواننده را به فصل ۹ در [۶] ارجاع می‌دهیم که این قضیه را با استفاده از شرط گسترده‌ترِ *نبودنِ ناهار مجانی با ریسک صفر* که مستلزم شرط نبودنِ آربیتراژ است، صورت‌بندی کرده است.

قضیه ۴.۴. *بازار فوق با فرضِ $T = ۱$ بدون آربیتراژ است اگر و تنها اگر اندازهٔ احتمال معادل Q یافت شود به‌طوری که*

$$S_۰^i = \frac{۱}{۱+r} E^Q[S_۱^i], \qquad i = ۱, \ldots, N$$

که در آن، r نرخ بهرهٔ بانکی ثابت، $B_۰ = ۱$ موجودی حساب بانکی در لحظهٔ $t = ۰$ و E^Q امید نسبت به اندازهٔ احتمال Q است.

اثبات قضیه با این صورت‌بندی، از لم فارکاش نتیجه می‌شود [۵]. بگذارید به همین مقدار در مورد اولین قضیهٔ بنیادی اکتفا کنیم و برویم به دنبال شناخت بازار کامل.

تعریف ۵.۴. هر متغیر تصادفی نامنفی مانند X را یک *مطالبهٔ مشروط* یا به‌اختصار، یک *مطالبه* می‌نامیم. مطالبهٔ مشروط *قابل حصول* نامیده می‌شود اگر انتگرال‌پذیر باشد و سبدی مانند h_t وجود داشته باشد که در سررسید T، داشته باشیم $V_T = X$. به عبارت دیگر، مطالبهٔ مشروطِ قابل حصول، قراردادی است که مطابق مفاد آن، دارندهٔ قرارداد، مبلغ X را در سررسید T دریافت می‌کند.

اختیارها (اروپایی، آمریکایی، آسیایی، وانیلی، برمودایی، نامتعارف) از معروف‌ترین مطالبات مشروط هستند. ویژگی‌ای که مطالبهٔ مشروط کم دارد، نبودنِ جریان نقدی در ارتباط با آن، قبل از سررسید است. بنابراین یکی از مهم‌ترین مسائل مربوط به ریاضیات مالی و فعالان بازارهای مالی، تعیین قیمت مطالبات مشروط است. یکی از روش‌های انجام این کار، تبدیل مطالبه به یک دارایی قابل معامله در بازار است، چراکه حداقل ممکن است دارندهٔ مطالبه بخواهد با فروش آن قبل از سررسید، فعالیت جدیدی را آغاز کند. بنابراین باید بتواند برای آن در زمان‌های $۰ \leq t < T$ قیمتی ارائه دهد. مثلاً چک تاریخ‌دار بدون نامِ حامل، یک مطالبهٔ مشروط است. دارندهٔ چنین چکی، قبل از تاریخ چک نمی‌تواند مبلغ مندرج در آن را وصول کند اما می‌تواند آن را با تنزیل (تخفیف) به دیگری واگذار و مبلغی کمتر از مبلغ چک به‌تناسبِ

زمان تا سررسید، دریافت کند. این کار در بازار ایران، قدمتی به اندازهٔ عمر چک دارد. به این ترتیب، هر برگ چک بدون ارجاع به یک داراییِ پایه، خود تبدیل به یک دارایی می‌شود.

قضیه ۶.۴. *([۷،۵]) در بازار بدون آربیتراژ، قیمت مطالبهٔ قابل حصول در زمان t، $0 \leq t < T$ برابر است با ارزش سبد خودتأمین بازسازی‌کنندهٔ آن در همین زمان.*

بنابراین قیمت مطالبهٔ مشروط با قیمت سبد بازسازی‌کننده در همهٔ زمان‌ها تا سررسید، برابر است و لذا حداقل به‌لحاظ نظری، یک جریان نقدی ایجاد می‌کند. از این‌رو جریان نقدیِ متناظر با تجدید موازنهٔ سبد را *جریان نقدیِ مطالبه* نیز می‌نامیم. سبد را *خودتأمین* می‌نامیم اگر در طول عمر سبد، در ثروت آن تغییری ایجاد نکنیم. در سبدهای گسسته–زمان، ثروت سبد خودتأمین در لحظهٔ t صرف تشکیل سبدی از همان دارایی‌ها می‌شود که باید در بازهٔ زمانی $(t, t+1)$ بدون تغییر نگهداری شود. بنابراین ثروت سبد خودتأمین در معادلهٔ بودجه صدق می‌کند. بازار را *کامل* می‌نامیم اگر هر مطالبهٔ مشروط در آن، قابل بازسازی به‌وسیلهٔ سبدی خودتأمین باشد.

اکنون می‌توانیم دومین قضیهٔ بنیادی ریاضیات مالی را بیان کنیم.

قضیه ۷.۴. *([۶]) بازار بدون آربیتراژ، کامل است اگر و تنها اگر اندازهٔ مارتینگلیِ معادل در قضیهٔ بنیادی اول، یکتا باشد.*

۵. ریسک و بازده

ریسک و بازده از محرک‌های مهم بازار سرمایه هستند. سرمایه‌گذاری در یک پروژهٔ ریسک‌دار، باید بازده بالایی داشته باشد تا سرمایه‌گذار، انگیزه‌ای برای انجام این کار داشته باشد. از این‌رو سرمایه‌گذاری در مناطقی که مستعد بروز جنگ یا بلایای طبیعی هستند، یا صورت نمی‌گیرد و یا بازده بسیار بالایی دارد. به بیان دیگر، احساس ناامنی، ریسک سرمایه‌گذاری را افزایش می‌دهد و لذا سرمایه‌گذاران سرمایهٔ خود را در جاهای امن سرمایه‌گذاری می‌کنند و اگر در جایی ناامن هم سرمایه‌گذاری کردند، انتظار سود بیشتری دارند. لذا شاید بتوان گفت که امنیت، آرزوی بسیاری از سرمایه‌گذاران است. در فضای امن، ریسک سرمایه‌گذاری اندک است اما امنیت سرمایه بالا است. سرمایه‌گذار در این فضا شب را به‌راحتی به صبح می‌رساند ولی در مقایسه با یک سرمایه‌گذار در فضای ناامن، درآمد کمتری هم دارد. مثلاً پس‌انداز در یک بانک معتبر، سرمایه‌گذاریِ (تقریباً) بدون ریسک است. در سرمایه‌گذاریِ ریسک‌دار، ممکن است سرمایه‌گذار همه یا بخشی از سرمایه خود را از دست بدهد و یا اینکه سود سرشاری به جیب بزند. یکی از این نوع سرمایه‌گذاری‌ها، وام‌های با وثیقهٔ پایین است. وام‌گیرنده ممکن است به هر دلیل، از بازپرداخت اصل و فرع وام خودداری کند (نکول کند) و وام‌دهنده را هم دچار نکول نماید. وام‌های بانکی بزرگ در

ایران در این مقوله جای می‌گیرند. سرمایه‌گذاران از لحاظ پذیرش ریسک متفاوت هستند. بعضی دوست دارند ماجراجویی کنند و سرمایهٔ خود را برای کسب سود بیشتر به خطر اندازند؛ این‌ها *ریسک‌پذیر* هستند. بعضی دیگر، هیچ خطری را برای سرمایهٔ خود بر نمی‌تابند؛ اینان *ریسک‌گریز* هستند. بسیاری هم بین این دو حد قرار دارند.

مطالعهٔ ریسک از جنبه‌های گوناگون اهمیت دارد. *دفع یا پوشش ریسک*[۱] شامل پیدا کردن روش‌هایی است که با استفاده از آنها، ریسک سرمایه‌گذاری حذف یا کمینه می‌شود. یکی از هدف‌های ریاضیات مالی به‌ویژه در معاملات کاغذی، پیدا کردن این روش‌ها است. یکی از این روش‌ها، خلق دارایی‌های جدید و یکی دیگر، بیمه است. دارایی‌های موسوم به ابزارهای مالی یا *مشتقات* و یا مطالبات مشروط، دارایی‌هایی هستند که بهای آنها به قیمت یک یا چند دارایی دیگر موسوم به دارایی یا دارایی‌های *پایه*، وابسته است. اختیارها، آتی‌ها، سَلَف‌ها، سواپ‌ها از این گونه دارایی‌ها هستند. پوشش دلتا و پوشش گاما از روش‌های شناخته‌شدهٔ دفع ریسک در مدل بلک–شولز هستند. بیمه نیز یکی دیگر از روش‌های پوشش ریسک است. مثلاً وام‌دهنده ممکن است خود را در مقابل نکول وام‌گیرنده پیش یک شرکت، بیمه کند. نکتهٔ مهم این است که در بازارهای مالی ممکن است ابزارهای مالی، مستقل از دارایی‌های پایهٔ معامله، تبدیل به دارایی پایه برای یک ابزار مالی دیگر شوند. مثلاً CDO ها که نقشی ویژه در بحران مالی ۲۰۰۷ داشتند، از این نوع ابزارها هستند.

با این حال، تعریف ریسک از این گزاره‌ها حاصل نمی‌شود. ریسک در هر زمینه‌ای از زندگی انسان، تعریف خاص خود را دارد [۱۴]. در ریاضیات مالی تعریف زیر شاید مناسب باشد.

تعریف ۱.۵. ریسک سرمایه‌گذار عبارت است از انحراف بازده مورد انتظار E از بازده واقعی R وقتی این انحراف منفی باشد، یعنی $E - R < 0$.

۶. مدل‌های مالی

مدل مالیِ یک دارایی، دستگاهی از روابط ریاضی بین پارامترهایی است که بر قیمت دارایی تأثیر می‌گذارند و رفتار تقریبی آن را تعیین می‌کنند. مدل مالی در واقع نقشهٔ رفتار دارایی از زمان ترسیم به بعد است. شبیه الگوی خیاطی یا نقشهٔ مهندسی ساختمان است. خیاط (و نه کس دیگری) برای تهیهٔ الگوی خیاطی، اطلاعات متقاضی (اندازه‌های نسبتاً دقیق و تعیّنی) را جمع‌آوری و آنها را بر کاغذ الگو پیاده می‌کند. سپس الگوی آماده‌شده را بارها و بارها وارسی می‌کند تا از رخداد خطا جلوگیری کند. سرانجام، الگوی نهایی را بر پارچه پیاده می‌کند، پارچه را می‌بُرد و برای دوخت آماده می‌کند. نتیجهٔ کارِ خیاط، لباسی است که تحویل مشتری می‌دهد. کار مدل‌ساز مالی قدری ظریف‌تر و همراه با پیچیدگی‌های فراوان است.

[۱] hedging

او باید اطلاعات بازار را دربارهٔ دارایی جمع‌آوری کند. در این راه، نخست با پدیدهٔ گذشت زمان مواجه می‌شود؛ قیمت ممکن است از لحظه‌ای به لحظهٔ دیگر تغییر کند (در حالی که اندازه‌های مشتری خیاطی این ویژگی را ندارد). پس از آن، عرضه و تقاضا، اوضاع سیاسی و نیازمندی و مطلوبیت‌های مردم به این دارایی، پدیده‌های اجتماعی، حوادث طبیعی و ... بر قیمت آن دارایی تأثیر می‌گذارد. بنابراین هر اطلاعی که در مورد قیمت دارایی به‌دست آید، هم تابعی از زمان و هم تصادفی است. هیچ‌کدام از این اطلاعات، تجدیدپذیر نیستند، زیرا گذشت زمان این امکان را سلب می‌کند. او این اطلاعات قیمت را برای ساعت‌ها، روزها، ماه‌ها و شاید سال‌ها گردآوری می‌کند. با ترسیم این اطلاعات در صفحه‌ای که محور افقی آن محور زمان است و مقایسهٔ نمودارهای حاصل با نمودارهای موجود، مدل خود را انتخاب می‌کند. نتیجهٔ کار مدل‌ساز، ارائهٔ پیشنهاد برای سرمایه‌گذاری، پیش‌بینی رفتار آتی دارایی و ایجاد امکان مقایسهٔ انواع دارایی‌ها با قیمتی در حدود قیمت دارایی مورد نظر، و در نتیجه برقراری رقابت در بازار است.

تعریف ۱.۶. *تعهدهای بدهیِ وثیقه‌دار* یا CDO ها ابزارهایی مالی هستند که بانک‌ها با استفاده از آنها وام‌ها را دسته‌بندی می‌کنند و به‌صورت محصولی مالی در بازار ثانویه به فروش می‌رسانند. وام‌های خرید ماشین، بدهی کارت اعتباری، رهن‌ها و بدهی‌های شرکتی، از این قبیل هستند [۴،۱۰].

مدل‌های مالی با توجه به نحوهٔ در نظر گرفتنِ دامنهٔ متغیر زمان در آنها، به دو دستهٔ زمان‌گسسته و زمان‌پیوسته تقسیم می‌شوند. لویی بشیلیه در رسالهٔ دکتری خود که در سال ۱۹۰۰ از آن دفاع کرد، نخستین مدل قیمت سهام زمان‌پیوسته در بورس پاریس را به‌صورت حرکت براونیِ حسابی:

$$S_t = S_\circ + \sigma W_t$$

ارائه داد که در آن، W_t یک حرکت براونی است. اکنون صورت ضربی این مدل، یعنی

$$S_t = S_\circ e^{\mu t + \sigma W_t}$$

موسوم به حرکت *براونی هندسی*، مبنای مدل معروف بلک–شولز است [۱۲]. پل ساموئلسون[۱]، حرکت براونی هندسی را در سال ۱۹۶۵ به‌عنوان فرآیند قیمت دارایی پایهٔ اختیار معرفی کرد [۱۵]. در هر دو مورد، مشاهده می‌کنیم که بخش نوسانیِ قیمت که حامل ریسک سرمایه‌گذاری است، شامل یک عامل حرکت براونی است. از این‌رو فرض می‌کنند که اطلاعات بازار به‌وسیلهٔ حرکت براونی تولید می‌شود، یعنی

$$\mathcal{F}_t = \{W_s^{-1}(B) : \circ \leq s \leq t, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

برای هر $\circ \leq t \leq T$.

[۱] Paul Samuelson

ورود مدل‌های زمان‌گسسته به نظریهٔ مالی، پس از معرفی مدل بلک–شولز انجام شد. به بیانی نادقیق، کاکس، راس و رابینشتاین[۱] مدل دوجمله‌ایِ زمان‌گسسته را برای بازاری با دو دارایی سهام و حساب بانکی معرفی و ثابت کردند که این مدل، به مدل بلک–شولز همگرا است [۲۱،۲۲].

۱.۶. بیانیهٔ مدل‌سازان. با توجه به شرایطی که تحلیل‌گران کمّی با طراحی مدل‌های رایانه‌ای از CDO ها و انتشار و فروش آنها بر بازار مسکن آمریکا تحمیل کردند و موجبات بحران مالی ۲۰۰۷ را فراهم آوردند، هدف از انتشار این بیانیه و اشارهٔ مستقیم آن به CDO ها روشن می‌شود. مقالهٔ [۱۱] نیز به نقش CDO ها و تحلیل‌گران مالی در پیدایش این بحران، اشاره‌هایی مستقیم دارد. در اینجا هدف ما تأکید بر این نکته است که آنهایی که با مدل و مدل‌سازیِ مالی سروکار دارند، باید بارها و بارها این متن را مطالعه و از آن برای ادامهٔ کار یا انصراف، درس بگیرند. منافع جامعه مقدم بر منافع افراد است. جزئیات کار مدل‌سازِ مالی در «بیانیهٔ مدل‌سازان» بیان شده است که در سال ۲۰۰۹ توسط امانوئل دِرمن[۲] و پل ویلموت[۳] صادر شد. در اینجا ترجمهٔ این متن را به‌دلیل اهمیت آن می‌آوریم. برای دیدن متن اصلی به [۹] مراجعه کنید.

«کابوسی در حال پرواز بر فراز بازارها است. کابوس نبود نقدینگی، کابوس اعتبارات مسدود، کابوس شکست‌های پیاپی مدل‌های مالی. با آغاز ریزش رهن‌های کم‌اعتبار در ۲۰۰۷، بازارهای مالی در وضعیت جدیدی قرار گرفته‌اند که با ویژگی‌هایی مانند تحرّکات ناگهانی، شیوع واگیردار این کابوس از بازاری به بازار دیگر و ناهنجاری‌های تقریباً غیر قابل تصوّر، مشخص می‌شوند. (چه کسی فکر می‌کرد که گستره‌های سواپ انواع اسناد خزانه منفی شود؟) مدل‌های ارزیابی شناخته‌شده همگی به‌طور فزاینده‌ای غیر قابل اعتماد شده‌اند. کجاست آن مدیر ریسک که زیان‌های خود را به یک سونامی که در هر قرن یک بار اتفاق می‌افتد، تشبیه نکرده باشد؟ برای دفع این کابوس، در شهر نیویورک جمع شدیم و متن زیر را تنظیم کردیم:

در نظریهٔ مالی، نحوهٔ مدیریت صندوق‌های سرمایه‌گذاری، از اوراق ساده مانند دلار و ین، سهام و اوراق قرضه گرفته تا اوراق پیچیده مانند آتی‌ها و اختیارها، CDO های کم‌اعتبار و سواپ‌های نکول اعتباری را مطالعه می‌کنیم. مدل‌های مالی برای برآورد ارزش منصفانهٔ اوراق بهادار، برآورد ریسک آنها و برای نشان دادن نحوهٔ کنترل این ریسک، ساخته می‌شوند. یک مدل چگونه می‌تواند قیمت ورقه را بیان می‌کند؟ و چگونه مدل‌های مربوط به CDO های کم‌اعتبار شکستی سخت خوردند؟

فیزیک به‌علت موفقیت چشم‌گیر در پیشگوییِ رفتار پدیده‌های مادی با استفاده از وضعیت فعلی آنها، بسیاری از مدل‌سازان مالی را تحت تأثیر قرار داده است. فیزیکدان‌ها، گیتی را با تکرار مکرر یک آزمایش برای کشف نیروها و قوانین ریاضیِ تقریباً سحرآمیز حاکم بر آنها، مطالعه می‌کنند. گالیله توپ‌ها را از بالای برج مایل پیزا رها کرد، تیم‌های بزرگی در آزمایشگاه سِرن واقع در ژنو، بارها و بارها پروتون‌ها را با

[۱] Cox-Ross-Rubinstein [۲] Emanuel Derman [۳] Paul Wilmott

پروتون‌ها برخورد دادند. اگر قانونی پیشنهاد شود و پیش‌بینی‌های آن، تجربه‌ای را نقض کند، کنار گذاشته می‌شود. این روش به‌درستی کار می‌کند. قانون‌های فیزیک اتمی تا ده رقم بعد از ممیز دقیق هستند.

اما داستان علوم مالی و اقتصاد که دربارهٔ دنیای ذهنی ارزش پولی مطالعه می‌کنند، متفاوت است. نظریهٔ مالی بسیار تلاش کرده است که با تقلید از فیزیک، قوانین خود را کشف کند اما بازار از مردمی تشکیل شده است که تحت تأثیر حوادث، احساس‌های زودگذر در مورد حوادث و انتظار آنها از احساس‌های سایر مردم، قرار دارند. حقیقت این است که در این نظریه، هیچ قانون بنیادی‌ای وجود ندارد و حتی اگر چنین قانونی وجود می‌داشت، راهی برای تحقیق درستی آن از طریق انجام آزمایش‌های مکرر وجود نداشت.

به‌سختی می‌توان نمونه‌ای از یک مدل نشان داد که مانند مدل‌های CDO ها خوش‌ساخت و گمراه‌کننده باشد. مقاله‌های پژوهشی دربارهٔ CDO ها، نظریهٔ احتمال مجرّد را برای مطالعهٔ تغییرات همزمان قیمت هزاران رهن به‌کار می‌برند. رابطهٔ بین این همه رهن می‌تواند بسیار پیچیده باشد. مدل‌سازانی که اکنون نظریهٔ توهّم‌آمیز خود را ساخته‌اند، لازم است آن را قابل استفاده نشان دهند؛ آنان متهم‌اند که همهٔ دینامیک مجهول را به زیر فرشِ مدل جارو و آشغال‌ها را به حال خود رها کرده‌اند و تنها چیزی که باقی گذاشته‌اند، عددی است موسوم به همبستگی نکول. از عالی تا مضحک: کل نااطمینانی فقط به یک پارامتر تقلیل یافته است که وقتی معامله‌گر آن را وارد مدل کند، ارزش CDO را به‌دست می‌آورد. این اعتماد بیش از حد به احتمال و آمار، محدودیتی بسیار جدّی است. آمار، توصیفی توخالی ارائه می‌دهد؛ درست برعکس فیزیک که تأثیر ژرف علت و معلولی می‌گذارد و به‌آسانی نمی‌تواند به دینامیک پیچیدهٔ نکول دست یابد.

مدل‌ها از ابزارهای سطح پایین برای تقریب فکر هستند. آنها شهود ما را از قیمت‌های آتی ورقه به قیمت امروز آن منتقل می‌کنند. شهودی اندیشیدن دربارهٔ قیمت‌های آتی مسکن، نرخ‌های نکول و همبستگی‌های نکول، آسان‌تر از اندیشیدن دربارهٔ قیمت‌های CDO ها است. مدل‌های CDO حدس شما را در مورد قیمت‌های آتی مسکن، نرخ‌های نکول، رهن و یک همبستگی نکول ساده‌انگارانه، به خروجی مدل تبدیل می‌کنند: قیمت جاری CDO.

تجربه در عرصهٔ مالی به ما آموخته است که باید در مورد استفاده از ریاضیات در بازارهای مالی، بسیار فروتن و در مورد نظریه‌های جاه‌طلبانه که در تلاش هستند تا سرانجامِ رفتار انسان را مدل‌سازی کنند، بسیار بیمناک باشیم. سادگی را دوست داریم اما خاطرنشان می‌کنیم که مدل‌های ما ساده‌اند ولی دنیا ساده نیست.

متأسفانه معلمان مالی، این درس‌ها را فرانگرفته‌اند. تنها با نگاهی به کتاب‌های درسی مالی در مدارس بازرگانی درمی‌یابیم که قطعاتی از اصول موضوع ریاضی، منظومه‌ای از قضیه‌ها، لم‌ها و نتایج را پشتیبانی می‌کنند. چه کسی می‌تواند تصوّر کند که سطح علمیِ کتاب درسی‌ای که به رابطهٔ مردم و پول می‌پردازد، چنین نازل باشد؟ بر همگان روشن است که در علوم مالی، هیچ اصل موضوعی درست نیست

و علوم مالی با هیچ تعبیری نمی‌تواند اقلیدسی شود. چنان‌که ارسطو نوشته است، کوشش‌های متفاوت، نیازمند درجه‌های متفاوتی از دقت هستند. اندیشهٔ مالی به علوم طبیعی تعلق ندارد و عشق پنهان آن، زیبایی ریاضی و دقت بسیار بالای آن است.

مدل‌ها و ریاضیات هر دو مورد نیاز هستند. بدون آنها نمی‌توان در مالی و اقتصاد فکر کرد. اما نباید فراموش کرد که مدل‌ها کل گیتی نیستند. هر موقع که مدل چیزی را می‌سازیم که با انسان سروکار دارد، انگار سعی می‌کنیم که خواهرخواندهٔ سیندرلا را مجبور کنیم که کفش‌های بلورین و زیبای او را بپوشد. این کار بدون دور ریختنِ بخش‌های اساسی کفش ممکن نمی‌شود و دور ریختنِ این بخش‌ها به‌منظور زیبایی و تناسب مدل، به‌جای نمایش ریسک واقعی، بر آن پرده می‌کشد. مهم‌ترین سؤال دربارهٔ هر مدل مالی این است که تا چه اندازه می‌تواند نادرست باشد و برخلاف فرضیاتش، تا چه حد سودمند است. باید از مدل آغاز کرد و سپس روی آن را با عقل سلیم و تجربه پوشاند.

بسیاری از دانشمندان بر این باور هستند که در یک روز فراموش‌نشدنی، مدلِ «درست» را پیدا می‌کنند. اما مدلی درست وجود ندارد، زیرا جهان در پاسخ مدل‌هایی که ما به‌کار می‌بریم، تغییر می‌کند. پیشرفت در مدل‌سازیِ مالی، شناور و موقت است. بازارها تغییر می‌کنند و مدل‌های جدید ضرورت می‌یابند. بنابراین بهترین راه تقویت شهود، بدون خودفریبی، این است که مدل‌هایی بسازیم که ساده باشند، فرض‌هایی صریح و متغیرهایی اندک داشته باشند. تمام مدل‌ها، آشغال‌ها را به زیر فرش جارو می‌کنند. مدل خوب، نبودنِ آشغال‌ها را نمایان می‌سازد. در این رابطه، معتقدیم مدل قیمت‌گذاری اختیارهای بلک–شولز که معمولاً به‌طور غیر منصفانه‌ای لجن مال می‌شود، الگوی مدل‌ها است: روشن است، زیرا مبتنی بر مهندسی واقعی است و نحوهٔ ساختن اختیار، مبتنی بر سهام و اوراق قرضه است و قیمت آن تحت شرایط ایده‌ال بدون رانش، تعریف می‌شود. روش ارزیابی آن مشابه پیدا کردن قیمت یک ظرف سالاد میوه با استفاده از قیمت میوه، شکر، دستمزد و کرایهٔ حمل و نقل است. دنیای بازارها با محیط ایده‌ال موردنیاز بلک–شولز دقیقاً همخوان نیست اما مدل بلک–شولز مدلی قدرتمند است، زیرا امکان می‌دهد که معامله‌گرِ باهوش، این ناهمخوانی را به‌صورت کیفی تنظیم نماید. هنگام استفاده از مدل، می‌دانید که چه چیزی را باید فرض و دقیقاً چه چیزی را باید حذف کنید.

ساختن مدل‌های مالی، چالش برانگیز و ارزشمند است: لازم است قوّه‌های تخیّل کمّی و کیفی، علم و هنر خود را ترکیب کنیم و برای پیدا کردنِ الگویی مورد استفاده قرار دهیم که رفتار بازارهای دارایی‌های کاغذی را تقریب می‌زند. بزرگترین خطر، ارتکاب گناه دیرینهٔ شیفته شدن است. بازارهای مالی زنده‌اند ولی مدل هرقدر هم زیبا باشد، دست‌ساز است. هر اندازه تلاش کنید، نمی‌توانید در آن روح زندگی بدمید. خَلط مدل با دنیای واقعی، پذیرفتن فاجعه‌ای در آینده است که محرکش، اعتقاد به تبعیت انسان از قواعد ریاضی است. مدل‌سازان جهان متحد شوید! شما جز توهّم چیزی برای از دست دادن ندارید.»

۲.۶. سوگند بقراط مدل‌سازان.

(۱) به خاطر خواهم داشت که دنیا را من نساخته‌ام و دنیا در معادلات من صدق نمی‌کند؛

(۲) هرچند من از مدل‌ها برای برآورد قیمت استفاده می‌کنم، تحت تأثیر بی‌اندازهٔ ریاضیات واقع نخواهم شد؛

(۳) هرگز حقیقت را قربانی زیبایی نخواهم کرد مگر اینکه علت را توضیح دهم؛

(۴) هرگز به کسانی که مدل من را به‌کار می‌برند، دلداری دروغین در مورد دقت آن نخواهم داد، بلکه فرضیات و اشتباهات آن را تصریح خواهم کرد؛

(۵) درک می‌کنم که ممکن است کار من بر جامعه و اقتصاد تأثیرهایی ژرف بگذارد که بیشتر آنها از توانایی من خارج هستند.

۷. مدل دوجمله‌ای کاکس-راس-رابینشتاین

مدل دوجمله‌ایِ کاکس-راس-رابینشتاین در [۲۱] معرفی شده و مورد مطالعه قرار گرفته است. این مدل در [۲۳،۵] نیز به‌طور مفصل معرفی شده است. هرچند این مدل بسیار ساده است، می‌توان بسیاری از مفاهیم بازارهای مالی را با استفاده از آن تعریف کرد. کاکس و راس اولین کسانی بودند که با استفاده از مدل دوجمله‌ای، قیمت ریسک خنثای اختیار خریدِ اروپایی را محاسبه کردند. بازاری را در نظر می‌گیریم که دو دارایی دارد: سهام و حساب بانکی. فرض می‌کنیم قیمت سهم و موجودیِ حساب بانکی در زمان $n = ۰$ به‌ترتیب $S_۰$ و $B_۰$ باشد و قیمت‌ها در زمان‌های $k = ۱, \dots, n$ تحوّل یابند. بنابراین اگر r نرخ بهرهٔ بانکی باشد، آن‌گاه

$$B_k = e^{rk} B_۰, \qquad k = ۱, \dots, n.$$

همچنین فرض می‌کنیم قیمت سهم با پرتاب سکه تعیین شود که در هر پرتاب، احتمال رو شدنِ شیر p و لذا احتمال رو شدنِ خط $۱ - p$ است. به این ترتیب پرتاب سکه، قیمت سهم را در مرحلهٔ kاُم به‌صورت

$$S_k = \begin{cases} S_{k-۱} u & \text{با احتمال } p \\ S_{k-۱} d & \text{با احتمال } ۱ - p \end{cases}$$

مشخص می‌کند که در آن، d و u اعدادی مثبت و ثابت هستند و $d < u$. بنابراین S متغیری تصادفی است. پرسش این است که این بازار چه ویژگی‌هایی دارد؟ محتوای قضیهٔ زیر پاسخی کوتاه به این پرسش است.

قضیه ۱.۷. *([۲۳،۵]) مدل دوجمله‌ای، بدون آربیتراژ است اگر و تنها اگر*

$$d < e^r < u \tag{۱.۷}$$

بنابراین شرایط اولین قضیهٔ بنیادی ریاضیات مالی با انتخاب مناسب d، u و r برقرار می‌شود.

قضیه ۲.۷. *([۲۳،۵]) هر مطالبهٔ مشروط در این بازار قابل بازسازی است، یعنی سبدی مالی وجود دارد که ارزش مطالبه برابر است با ارزش این سبد. بنابراین بازار کاکس-راس-رابینشتاین کامل است.*

اکنون که بازار، بدون آربیتراژ و کامل است، می‌پرسیم اندازهٔ مارتینگلیِ معادل و سبد بازسازی‌کنندهٔ مطالبه‌ای داده‌شده چیست؟ پاسخ در رابطهٔ (۱.۷) نهفته است. با توجه به شرط‌های (۱.۷)، اعداد مثبت $q_۱$ و $q_۲$ وجود دارند که

$$q_۱ + q_۲ = ۱ \tag{۲.۷}$$

و

$$q_۱ d + q_۲ u = e^r. \tag{۳.۷}$$

حال اگر $n = ۱$ سررسیدِ مطالبهٔ X و سبد بازسازی کنندهٔ آن (b, s) باشد، آن‌گاه

$$X = be^r B_\circ + sS_۱ = \begin{cases} be^r B_\circ + sS_\circ u & \text{با احتمال } p \\ be^r B_\circ + sS_\circ d & \text{با احتمال } ۱ - p \end{cases}$$

با استفاده از این روابط، اعداد $q_۱$ و $q_۲$ به‌صورت

$$q_۱ = \frac{u - e^r}{u - d}, \qquad q_۲ = \frac{e^r - d}{u - d}$$

و مؤلفه‌های سبد (b, s) برحسب مبلغ مطالبه، به‌صورت

$$b = \frac{X_u - sS_\circ u}{e^r}, \qquad s = \frac{X_u - X_d}{S_\circ(u - d)}$$

به‌دست می‌آیند که در آن، X_u و X_d معرّف ارزش مطالبهٔ مشروط یا معادلاً، ارزش سبد بازسازی‌کنندهٔ آن در لحظهٔ $n = ۱$ هستند. ملاحظه می‌کنیم که اعداد $q_۱$ و $q_۲$ مثبت هستند و مجموع آنها ۱ است. بنابراین یک اندازهٔ احتمال تعریف می‌کنند که آن را با Q نشان می‌دهیم. خوب! این کارها به چه منظوری انجام می‌شود؟ پاسخ این است که برای تعیین قیمت مطالبه در لحظهٔ $n = \circ$ یا تبدیل مطالبه به یک دارایی. قضیهٔ زیر این خواست را برآورده می‌کند.

قضیه ۳.۷. *در بازار بدون آربیتراژ، اگر $\pi(N, X)$ ارزش مطالبه در سررسید N با ارزش V_N سبد بازسازی‌کنندهٔ خودتأمین برابر باشد، آن‌گاه ارزش مطالبه در مراحل قبلی برابر است با تنزیل ارزش مورد انتظار سبد، به آن مرحله نسبت به اندازهٔ احتمال Q.*

در مثال بالا،

$$\pi(\circ, X) = e^{-r}E^Q[\pi(\text{۱}, X)] = e^{-r}E^Q[V_\text{۱}] = bB_\circ + sS_\circ(u + d - e^r)e^{-r}.$$

این نحوهٔ محاسبه را می‌توان الگوی محاسبهٔ مؤلفه‌های سبد بازسازی‌کنندهٔ مطالبه در هر مرحله‌ای قرار داد و با استقرای معکوس، به قیمت مطالبه در همهٔ مراحل قبل از سررسید، دست یافت. ادامهٔ این بحث به بازارهای زمان‌پیوسته، فقط در حضور مفاهیمی از حسابان تصادفی امکان‌پذیر است.

۸. مفاهیمی از حسابان تصادفی

حسابان تصادفی از مهم‌ترین ابزارهای ساخت و مطالعهٔ مدل‌های بازارهای مالی است. مفهوم اصلی مورد بحث در این حسابان، انتگرال تصادفی و به‌دنبال آن، معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی است. *فرمول ایتو*[۱] که در لمی به همین نام ظاهر می‌شود، پیشرو مفاهیم این حسابان است. تقریباً هیچ قضیهٔ پیشرفته در ریاضیات مالی را نمی‌توان بی یاری این فرمول ثابت کرد. در این بخش، به دورهٔ این مفاهیم می‌پردازیم.

۱.۸. انتگرال تصادفی. مبحث مدل‌های مالی زمان‌پیوسته با انتگرال تصادفی و معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی آغاز می‌شود. جایگاه طبیعی معرفی این مفاهیم، کتاب‌های حسابان تصادفی یا آنالیز تصادفی است [۸، ۱۶، ۱۷، ۲۴، ۲۵]. اما یکی از مهم‌ترین محل‌های کاربرد آنها، ریاضیات مالی است. بنابراین کتاب‌های ریاضیات مالی به این موضوع می‌پردازند و بسته به نیاز خود، آن را معرفی می‌کنند و یا به مراجع معتبر ارجاع می‌دهند [۵، ۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰]. فرض کنیم X_t و Y_t فرآیندهایی تصادفی بر فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشند. هرچند ممکن است تعریف انتگرال Y نسبت به X، یعنی

$$\int_s^t Y_u dX_u, \qquad \circ \leq s \leq t \leq T < \infty$$

از الگوی تعریف انتگرال ریمان–استیلت‌یس یا حتی انتگرال لبگ پیروی کند، نتیجه به دلایل گوناگون بسیار غیرمنتظره و شگفت‌انگیز است. مثلاً اگر انتگرال، طبق الگوی ریمان–استیلت‌یس تعریف شود، همگرایی از چه نوعی خواهد بود؟ نقاط مورد نظر از زیربازه‌های یک افراز چگونه انتخاب شوند؟ آیا نتیجه بدون ابهام است؟ چه شرایطی بر X و Y حاکم باشد تا انتگرال موجود باشد؟ این سؤال‌ها و سؤال‌هایی

[۱] Ito’s formula

دیگر و نیز حیطهٔ کاربرد انتگرال تصادفی در ریاضیات مالی، ما را به انتخاب فرآیندهای مناسب X و Y فرامی‌خوانند. به‌ازای حرکت براونی $X = B$ و عدد طبیعی n و افراز

$$۰ = t_۰ < t_۱ < \cdots < t_n = T,$$

اگر حد مجموع‌های

$$\sum_{i=۰}^{n-۱} Y_{t_i}(B_{t_{i+۱}} - B_{t_i})$$

وقتی $n \to \infty$ در میانگین مرتبهٔ دوم به $I(Y, B, T)$ همگرا باشد، می‌گوییم *انتگرال ایتوی* Y نسبت به B وجود دارد و برابر است با

$$\int_۰^T Y_u dB_u = I(Y, B, T).$$

توجه به نکته‌های زیر بسیار آموزنده است: اول اینکه مقدار یک انتگرال تصادفی، متغیری تصادفی است. دوم اینکه اگر در تعریف انتگرال، حد بالای انتگرال در بازهٔ $[۰, T]$ تغییر کند، تحت شرایطی مناسب، یک فرآیند تصادفی به‌دست می‌آید. در مورد انتگرال ایتو، این فرآیند نسبت به پالایهٔ تولید شده توسط فرآیند حرکت براونی، یک مارتینگل است. در واقع،

$$E\Big[\int_۰^t Y_u dB_u\Big] = ۰$$

به‌ازای هر $t \in [۰, T]$. از این‌رو انتگرال ایتو مانند ماشین تولید مارتینگل عمل می‌کند. سوم اینکه اگر در تعریف انتگرال ایتو در Y_{t_i} به‌جای t_i که انتهای چپ بازهٔ $[t_i, t_{i+۱}]$ است، هر عدد دیگری از این بازه را قرار دهیم، مقدار انتگرال حاصل با مقدار انتگرال ایتو متفاوت خواهد بود. مثلاً انتگرال حاصل از مجموع

$$\sum_{i=۰}^{n-۱} Y_{t'_i}(B_{t_{i+۱}} - B_{t_i})$$

که در آن، t'_i نقطهٔ وسط بازهٔ $[t_i, t_{i+۱}]$ است و شرایط همگرایی، همان شرایط همگرایی تعریف انتگرال ایتو است، *انتگرال استراتونویچ* بر بازهٔ $[۰, T]$ نامیده و با

$$\int_۰^T Y_u \circ dB_u$$

نشان داده می‌شود. برای مثال، داریم

$$\int_۰^T B_u \circ dB_u = \frac{B_T^۲}{۲}, \qquad \int_۰^T B_u dB_u = \frac{B_T^۲}{۲} - \frac{T}{۲}.$$

همچنین تحت شرایط مناسب،

$$E\Big(\int_{\circ}^{T} Y_u dB_u\Big)^{۲} = \int_{\circ}^{T} Y_u^{۲} du.$$

در مورد انتگرال تصادفی تا این حد بسنده می‌کنیم تا جایی برای مفاهیم اساسی دیگر نگه داریم.

۲.۸. معادلات دیفرانسیل تصادفی. معادلات دیفرانسیل از زمان نیوتن (۱۶۴۲–۱۷۲۶) تاکنون برای مدل‌سازی ریاضی (به‌طور کلی) تغییر و حرکت به‌کار رفته است. مسلماً بسیاری از پدیده‌های امروزی برای نسل‌های گذشته ناشناخته بوده و موجودیت نداشته‌اند و لذا مدل‌سازی و مطالعه نشده‌اند. از مهم‌ترین پدیده‌هایی که عمدتاً در قرن بیستم و اکنون در قرن بیست و یکم، به جمع پدیده‌ها و حرکت‌های متغیر پیوسته است، قیمت‌های دارایی‌های کاغذی است. ماهیت این پدیده‌ها امکان مدل‌سازی ریاضیِ تغییرات آنها را با استفاده از معادلات دیفرانسیل معمولی سلب و دریچه‌ای به‌سوی مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل تصادفی گشوده است. به بیان کلی‌تر، یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی، نمایش صوریِ یک معادلهٔ انتگرال تصادفی است. در واقع، معادلهٔ انتگرال

$$Y_t = Y_{\circ} + \int_{\circ}^{t} b(s, Y_s)ds + \int_{\circ}^{t} \sigma(s, Y_s)dX_s \qquad (۱.۸)$$

را که در آن، X و σ فرآیندهایی معلوم، b تابعی داده شده، $Y_{\circ}$ یک متغیر تصادفی و Y فرآیند مجهول است، به‌صورت معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی

$$dY_t = b(t, Y_t)dt + \sigma(t, Y_t)dX_t \qquad (۲.۸)$$

می‌نویسیم. یک *جواب* معادله، فرآیندی چون Y_t است که با شرط اولیهٔ $Y_{\circ}$ آغاز می‌شود و در معادلهٔ (۲.۸) صدق می‌کند. در ریاضیات مالی، تنوع معادلات دیفرانسیل تصادفی به علت محدودیت انتخاب فرآیندهای X_t، $\sigma(t, Y)$، تابع b و متغیر تصادفی b محدود است. در اینجا معمولاً فرآیند X_t از خانواده حرکت‌های براونی، فرآیندهای لوی یا فرآیندهای پواسن یا ترکیبی از آنها انتخاب می‌شود. به‌علاوه، انتخاب عوامل باید طوری باشد که ماهیت قیمت دارایی حفظ شود. در حال حاضر، نظریهٔ معادلات دیفرانسیل تصادفی و حل عددی آنها، از مباحث پژوهشیِ جذاب دانشگاهی و بازارهای مالی است.

معادلهٔ (۲.۸) با انتخاب حرکت براونی W_t به‌جای X_t، به

$$dY_t = b(t, Y_t)dt + \sigma(t, Y_t)dW_t$$

تبدیل می‌شود که به *معادلهٔ انتشار ایتو* و جواب آن، به *انتشار ایتو* معروف است. در این معادله، توابع b و σ تعیّنی‌اند و به‌ترتیب، *ضریب رانش* و *ضریب انتشار* نامیده می‌شوند. اگر در این معادله، $Y_t = S_t$

معرف قیمت یک دارایی در لحظهٔ $t \in [\circ, T]$ باشد و ضرایب رانش و انتشار به‌ترتیب، $b(t, S_t) = bS_t$ و $\sigma(t, S_t) = \sigma S_t$ باشند که b و σ اعدادی ثابت هستند، آن‌گاه مدلی از قیمت دارایی به‌صورت

$$dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{۳.۸}$$

حاصل می‌شود. اگر $S_\circ$ که قیمت اولیه داراییِ داده‌شده است، مثبت باشد جواب این معادله،

$$S_t = S_\circ e^{(b - \frac{۱}{۲}\sigma^۲)t + \sigma W_t} \tag{۴.۸}$$

خواهد بود که همواره مثبت است. این جواب که یک *حرکت براونی هندسی* نامیده می‌شود، فرآیندی لُگ‌نرمال است و به‌وسیله پل ساموئلسون به‌جای نسخهٔ

$$dS_t = bdt + \sigma dW_t$$

که بشیلیه پیشنهاد کرده بود، مطرح شد. حل معادلهٔ (۳.۸) و رسیدن به جواب (۴.۸) با استفاده از لم ایتو انجام می‌شود که موضوع بحث بخش بعدی است.

۹. فرمول ایتو

فرمول ایتو که نتیجه‌ای از لم ایتو است، از مهم‌ترین ابزارهای مورد استفاده در ریاضیات مالی است و به‌جرأت می‌توان گفت که ریاضیات مالی بدون فرمول ایتو راه به جایی نمی‌برد.

لم ۱.۹ (ایتو). *فرض کنیم*

$$dY_t = b(t, Y_t)dt + \sigma(t, Y_t)dW_t$$

یک فرآیند ایتو و $F(t, y)$ تابعی حقیقی‌مقدار باشد که نسبت به t به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر و نسبت به y دوبار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر است. در این صورت، فرآیند $F(t, Y_t)$ نیز یک فرآیند ایتو است و داریم

$$dF(t, Y_t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, Y_t)dt + \frac{\partial F}{\partial y}(t, Y_t)b(t, Y_t)dY_t + \frac{۱}{۲}\frac{\partial^۲ F}{\partial y^۲}(t, Y_t)(dY_t)^۲.$$

برای اثبات و مشاهدهٔ تعمیم‌هایی از این لم رجوع کنید به [۲۵،۲۴،۱۸،۵]. در اینجا عامل $(dY_t)^۲$ با استفاده از قواعد ضرب

$$dt.dt = \circ, \qquad dt.dW_t = \circ, \qquad dW_t dW_t = dt$$

محاسبه می‌شود. بنابراین فرمول ایتو را می‌توان به‌شکل

$$dF(t,Y_t)=\Big(\frac{\partial F}{\partial t}(t,Y_t)+\frac{\partial F}{\partial y}(t,Y_t)b(t,Y_t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(t,Y_t)(\sigma(t,Y_t))^2\Big)dt$$
$$+\frac{\partial F}{\partial y}(t,Y_t)\sigma(t,Y_t)dW_t$$

نیز نوشت. فرمول ایتو و تعمیم‌های آن، کاربردهای فراوانی در ریاضیات مالی دارد که حل برخی معادلات دیفرانسیل تصادفی از جملهٔ آنها است. مثلاً با استفاده از این فرمول، جواب (۴.۸) را برای معادلهٔ (۳.۸) به‌دست می‌آوریم. برای این کار، در لم ایتو قرار می‌دهیم $F(t,S_t)=\ln S_t$ و نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,S_t)=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}(t,S_t)=\frac{1}{S_t},\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(t,S_t)=-\frac{1}{(S_t)^2}.$$

بنابراین در این مورد، فرمول ایتو به‌صورت

$$d\ln S_t=\Big(\frac{1}{S_t}bS_t-\frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}(\sigma S_t)^2\Big)dt+\frac{1}{S_t}\sigma S_t dW_t=(b-\frac{1}{2}\sigma^2)dt+\sigma dW_t$$

درمی‌آید و با انتگرال‌گیری از دو طرف، جواب معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی مورد نظر به‌دست می‌آید.

۱۰. بازار بلک-شولز

مهم‌ترین مسئلهٔ ریاضیات مالی، قیمت‌گذاری مطالبات مشروط و به‌تبعِ آن، پوشش ریسک سرمایه‌گذاری در دارایی‌هایِ کاغذی است. هرچند امروزه دامنهٔ این‌گونه مطالبات بسیار گسترده شده است، در اوایل دههٔ ۱۹۷۰، این مطالبات به اختیارهای خرید و فروش محدود بودند. داستان از آنجا آغاز شد که فیشر بلک[۱]، میرون شولز[۲] و رابرت مرتون[۳] در سال ۱۹۶۹ بر آن شدند که مدل‌های قیمت‌گذاری دارایی‌ها و مشتقات را مطالعه کنند. بلک و شولز موفق شدند در سال ۱۹۷۳ قیمت اختیار خرید سهمی را محاسبه کنند که مدل قیمت آن، یک حرکت براونی هندسی بود [۱۳]. همزمان مرتون نیز نظریهٔ منطقی قیمت‌گذاریِ اختیار را مطرح کرد [۲۶]. برای این کار، بلک و شولز بازار ایده‌الی ساختند با دو دارایی: سهم و حساب بانکی با یک نرخ بهرهٔ ثابت r. در این بازار، چنان‌که گفته شد، قیمت سهم از یک حرکت براونی هندسی با معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی

$$dS_t=\mu S_t dt+\sigma S_t dW_t \qquad (1.10)$$

[۱] Fischer Black [۲] Myron Scholes [۳] Robert Merton

و شرط اولیهٔ تعیّنی $S_\circ$ که در آن، W_t یک حرکت براونی استاندارد است، تبعیت می‌کند و موجودیِ حساب بانکی از معادلهٔ دیفرانسیل معمولی

$$dB_t = rB_tdt \tag{۲.۱۰}$$

و شرط اولیهٔ تعّینی $B_\circ = ۱$ به‌دست می‌آید. ضریب ثابت μ، *رانش* و ضریب ثابت و مثبت σ، *تلاطم* قیمت سهم نامیده می‌شود. علاوه بر این فرض‌ها، آنان فرض کردند که بازار *بدون اصطکاک* است، یعنی هزینهٔ معاملات وجود ندارد، مالیات پرداخت نمی‌شود، معاملات در هر زمانی قابل انجام است، وام به هر میزان قابل دریافت و امانت‌فروشی به هر اندازه قابل انجام است، نرخ بهرهٔ وام برای وام‌دهنده و وام‌گیرند همان نرخ بهرهٔ بانکی است، سهام طی عمر خود هیچ سودی تقسیم نمی‌کند و اختیار مورد مطالعه، اروپایی است. اما در این بازار کوچک با این همه محدودیت، چه امکانی برای سرمایه‌گذاری وجود دارد؟ پاسخ این است که فعلاً هیچ امکانی. اینکه سبدی از سهم و حساب بانکی تشکیل دهیم و منتظر بنشینیم که قیمت‌های سهام تغییر کند و سبد را با همان دارایی‌ها تجدید موازنه بکنیم، سرمایه‌گذاری محسوب نمی‌شود. بنابراین باید با وارد کردن مفهوم اختیار، ابزار مشتقه و مطالبهٔ مشروط، دارایی‌های جدیدی خلق کرد.

تعریف ۱.۱۰. منظور از یک *اختیارِ خرید* (فروش) اروپایی روی یک دارایی پایه (سهم)، قراردادی با سررسید T برای خرید (فروش) یک سهم به قیمت توافقی در این سررسید است که دارندهٔ آن حق دارد بدون اینکه الزامی داشته باشد، قرارداد را اجرا کند یا اجرا نکند.

بنابراین دارندهٔ اختیار خرید، زمانی قرارداد را اجرا می‌کند که رای او سود داشته باشد وگرنه اجرا نمی‌کند و قرارداد منقضی می‌شود. اگر $S(T)$ قیمت سهم در سررسید باشد، مبلغ این سود برابر است با

$$C_T = \max(S_T - K, \circ).$$

این مبلغ را *قیمت اختیار خرید* یا *عایدیِ اختیار خرید* در سررسید نیز می‌نامند. عایدی حاصل از اجرای اختیار فروش اروپایی در سررسید T یا *قیمت اختیارِ فروش* این اختیار در سررسید مذکور، عبارت است از

$$P_T = \max(K - S_T, \circ).$$

هدف این است که اختیارهای مذکور را به دارایی‌هایی در بازار بلک–شولز تبدیل کنیم، یعنی برای هر $t \in [\circ, T]$ مبلغ‌های C_t و P_t را محاسبه کنیم. بلک و شولز این وظیفهٔ سنگین را در [۱۳] برای اختیار خرید به‌خوبی انجام دادند:

قضیه ۲.۱۰ (برابریِ خرید و فروش). *در بازار بدون آربیتراژ با نرخ بهرهٔ پیوستهٔ مرکب r، فرض کنیم C_t و P_t به‌ترتیب، قیمت‌های اختیارهای اروپایی خرید و فروش یک سهم با سررسید T و قیمت توافقی K باشند. در این صورت،*

$$P_t + S_t = C_t + Ke^{-r(t-t)}. \qquad (۳.۱۰)$$

بنابراین بازار بلک–شولز به‌طور قابل توجهی با اضافه شدن دارایی‌های اختیار، گسترش می‌یابد. اما در این بازار، سرمایه‌گذار چه کاری می‌تواند بکند؟ یک پاسخ ساده این است که سهم بخرد و بفروشد منتها برای جلوگیری از زیان، اختیار هم به سبد خود اضافه کند. سرمایه‌گذاری را در نظر بگیرید که مقداری سهم فروخته و باید آنها را در زمان T تحویل دهد. بنابراین نگران افزایش قیمت در این زمان است. چارهٔ کار را در این می‌بیند که تعدادی اختیار خرید با سررسید T بخرد و سبد خود را گسترش دهد. اگر قیمت‌ها افزایش یابد، او در بخش اختیار سبد خود، سود و در بخش سهام خود، ضرر می‌کند و بنابراین اگر هوشمندانه عمل کند، ممکن است علاوه بر جبران ضرر، سود هم بکند و اگر قیمت سهام کاهش یابد، با اجرا نکردنِ اختیار و تحویل سهم با قیمت کمتر، سود می‌بَرد. معامله‌ای دو سر سود در بازار گسترش‌یافته. حال پرسش این است که تعداد برگه‌های اختیار مورد خرید چقدر باشد تا سرمایه‌گذار، نه سود کند و نه ضرر؟

قضیه ۳.۱۰. *([۵]) فرض کنیم $C_t = F(t, S_t)$ قیمت اختیار خرید یک سهم به قیمت S_t در لحظهٔ t باشد. بازار بلک–شولز تنها وقتی بدون آربیتراژ است که تابع $F(t, S_t)$ در معادلهٔ بلک–شولز*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,y) + \frac{\partial F}{\partial y}(t,y)ry + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(t,y)\sigma^2 y^2 = rF(t,y) \qquad (۴.۱۰)$$

با شرط نهایی

$$C_T = F(T, S_T) = \begin{cases} S_T - K & S_T \geq K \\ 0 & S_T \leq K \end{cases}$$

صدق کند.

توجه کنید که در معادلهٔ (۴.۱۰) ضریب μ، یعنی بازده کوتاه‌مدت دارایی، وجود ندارد. بنابراین در بازار بلک–شولز، قیمت اختیار در هر لحظه مانند t، تابعی از قیمت توافقی K، سررسید T، قیمت سهم S_t، تلاطم σ و نرخ بهرهٔ بانکی r است؛ یعنی

$$C_t = C(t, T, K, S_t, \sigma, r).$$

اکنون می‌توانیم به پرسش قبل از این قضیه پاسخ دهیم که در واقع در دلِ یکی از اثبات‌های این قضیه نهفته است. در این اثبات، دیده می‌شود که برای اجتناب از آربیتراژ، به‌ازای هر برگهٔ اختیار باید تعداد $\frac{\partial F}{\partial y}(t, S_t)$ سهم در سبد مالی قرار دهیم.

برای حل معادلهٔ بلک–شولز، چند روش پیشنهاد شده است. اول اینکه چون این یک معادلهٔ *سهموی* و از جنس معادلهٔ گرما است، برای حل آن، از تبدیل فوریه استفاده کنیم [۳۱]. در روش دیگر، از *قضیهٔ نمایش فاینمن–کاتس* استفاده می‌شود که نقطهٔ اوج تعامل معادلات دیفرانسیل تصادفی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است. اما برای دسترسی به آن، قضیه‌ای دیگر به‌نام *قضیهٔ گیرسانوف* باید بیان شود. محتوای قصیهٔ گیرسانوف بسیار عمیق و پُرمعنی است. در ساده‌ترین صورت، این قضیه می‌گوید

قضیه ۴.۱۰ (قضیهٔ گیرسانوف). *فضای احتمال پالایش‌شدهٔ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, P)$، فرآیند وینر W_t نسبت به P، فرآیند مرتبهٔ دوم و $\mathbf{F}-$ سازگار ϕ موسوم به هستهٔ گیرسانوف و فرآیند L_t که در معادلهٔ*

$$dL_t = \phi(t) L_t dW_t, \quad L_\circ = ۱, \quad \circ \leq t \leq T$$

صدق می‌کند را در نظر می‌گیریم و اندازهٔ مارتینگلیِ معادل Q را روی $\mathcal{F}_t$ با رابطهٔ $\frac{dQ}{dP} = L_T$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، روی فضای احتمال پالایش‌شدهٔ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F})$، فرآیند W'_t با تعریفِ

$$dW'_t = dW_t - \phi(t) dt$$

نسبت به Q یک فرآیند وینر است و معادلهٔ $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ به

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW'_t \tag{۵.۱۰}$$

تبدیل می‌شود. به‌علاوه قیمت‌های نسبی $\frac{S_t}{B_t}$ و $\frac{F(t,S_t)}{B_t}$ نسبت به Q مارتینگل هستند.

برای مشاهدهٔ اثبات این قضیه، می‌توانید به یکی از [۵، ۱۸، ۲۴، ۲۵] مراجعه کنید. هستهٔ گیرسانوف برای بازار بلک–شولز عبارت است از

$$\phi = -\frac{\mu - r}{\sigma}.$$

نسبتِ $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$ موسوم به *قیمت بازاری* ریسک، فزونی عایدیِ سرمایه‌گذاری در واحد تلاطم است. تبدیل

$$W_t \to W'_t + \int_\circ^t \phi(t) dt$$

تبدیل گیرسانوف نامیده می‌شود. اکنون می‌توانیم قضیهٔ نمایش فاینمن–کاتس را بیان کنیم.

قضیه ۵.۱۰ (نمایش فاینمن-کاتس). *معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,y)+\frac{\partial F}{\partial y}(t,y)\mu y+\frac{۱}{۲}\frac{\partial^۲ F}{\partial y^۲}(t,y)\sigma^۲ y^۲=rF(t,y) \qquad (۶.۱۰)$$

با شرط نهاییِ

$$F(T,x)=\begin{cases} x-K & x\geq K\\ ۰ & x\leq K\end{cases}$$

و معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی

$$dS_u=\mu S_u du+\sigma S_u dW_u \qquad (۷.۱۰)$$

با شرط اولیهٔ $S_t=x$ *داده شده است. اگر* $E^Q_{t,x}$ *امید شرطی به شرط* $S_t=x$ *نسبت به* Q *باشد و* $e^{-rt}\sigma S_t E^Q_{u,s}[\frac{\partial F}{\partial y}(t,S_t)]$ *متعلق به فضای* $L^۲$ *باشد، آن‌گاه*

$$F(t,x)=e^{-r(T-t)}E_{t,x}[F(T,S_T)].$$

برای مشاهدهٔ اثبات این قضیه، می‌توانید به یکی از [۵، ۱۸، ۲۴، ۲۵] مراجعه کنید. با استفاده از این قضیه، فرمول اختیار خرید اروپایی بلک-شولز روی دارایی پایهٔ یک سهم به‌دست می‌آید. فرض کنیم

$$N(u)=\frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{u}e^{-\frac{x^۲}{۲\sigma^۲}}dx$$

تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار σ باشد. در این صورت، در بازار بلک-شولز قیمت اختیارِ خرید یک سهم که در $dS_u=\mu S_u du+\sigma S_u dW'_u$ صدق کند، با سررسید T و قیمت توافقی K در لحظهٔ t، عبارت است از

$$C_t=C(t,T,S_t,K,r,\sigma)=S_tN(d_۱)-Ke^{-r(T-t)}N(d_۲)$$

که در آن،

$$d_۱=\frac{\ln\frac{S_t}{K}+(r+\frac{\sigma^۲}{۲})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_۲=d_۱-\sigma\sqrt{T-t}.$$

این فرمول منشأ مفاهیم و تحوّلات بسیاری در بازارهای مالی بوده و هست و مثلاً برخی نظریه‌های پوشش ریسک، از این مفاهیم سرچشمه می‌گیرد. مفاهیم دلتا، گاما، رو، تتا و وگای اختیار، موسوم به *یونانی‌ها* یا

حساسیت‌های اختیار، همگی با استفاده از این فرمول تعریف و تعبیر می‌شوند و عبارت هستند از

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^۲ C}{\partial S^۲}, \quad \rho = \frac{\partial C}{\partial r}, \quad \theta = \frac{\partial C}{\partial t}, \quad \mathcal{V} = \frac{\partial C}{\partial \sigma}.$$

کتاب‌ها و مقاله‌های بسیاری در زمینهٔ بلک–شولز، یونانی‌ها و پوشش ریسک، در بازار کتاب وجود دارد که می‌توان برای تکمیل اطلاعات به آنها مراجعه کرد [۵، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۴، ۳۰].

دیری نگذشت که مرتون با انتشار مقالهٔ بنیادیِ [۲۷]، شرط‌های مدل بلک–شولز را به‌شدت تقلیل و فرمول بلک–شولز و کارهای قبلی خود را تعمیم داد و راه را برای ورود فرآیندهای جهشی از جمله فرآیندهای پواسن و لوی به دایره محرک‌های قیمت دارایی پایه، هموار کرد [۲۸، ۲۹].

۱۱. نرخ‌های بهره

به‌جرأت می‌توان گفت که بهره و به‌تبعِ آن، نرخ بهره مهم‌ترین مفاهیم بازارهای مالی و پولی است، چراکه در همهٔ زمینه‌های فعالیت این بازارها، نقش ایفا می‌کند. سرمایه‌گذاری در این بازارها برای کسب سود انجام می‌شود و میزان سود را نرخ بهره تعیین می‌کند. ساده‌ترین تعریف سود عبارت است از کرایهٔ استفاده از پول. اینکه این کرایه چگونه محاسبه می‌شود، به عوامل بسیاری بستگی دارد که عرضه و تقاضا و تورم از جملهٔ آنها است. این کرایه وقتی به درصد بیان شود، *نرخ بهره* نامیده می‌شود. نرخ بهره شاخص خوبی از سلامت یک اقتصاد است. نرخ‌های بهرهٔ بسیار بالا یا بسیار پایین، از نشانه‌های ناسالمیِ اقتصاد به‌شمار می‌آیند. ساده‌ترین کاربرد نرخ بهره در تعریف ارزش فعلی پول نهفته است. اینکه A تومانِ الان، در سال آینده چقدر ارزش دارد، دست‌کم به نرخ بهره‌ای بستگی دارد که یک بانک به پس‌اندازهای یک‌ساله پرداخت می‌کند. اگر نرخ بهرهٔ سالانه r درصد باشد، ارزش فعلی مبلغ مذکور می‌شود

$$P_v = \frac{۱}{۱ + r} A \qquad (۱.۱۱)$$

که کمتر از مبلغ سال آتی یعنی A است. به عبارت دیگر، کسی که الان مبلغ P_v تومان وام می‌گیرد، باید سال آینده در همین موقع، مبلغ

$$A = (۱ + r) P_v \qquad (۲.۱۱)$$

تومان بپردازد. فرمول (۱.۱۱) تنزیل مبلغ A تومان به زمان حاضر است. ساده‌ترین نتیجه این است که نرخ‌های بهره رابطه‌ای تنگاتنگ و مستقیم با مباحث مربوط به وام و قرض و قرضه دارند. به عبارت دیگر، وام مولد نرخ بهره است.

۱.۱۱. اوراق قرضه. اوراق قرضه ابزارهای تأمین مالی شرکت‌ها و دولت‌ها برای راه‌اندازی، ادامه و توسعهٔ فعالیت هستند که معمولاً در بازار اوراق قرضه (بورس) معامله می‌شوند. در حال حاضر، حجم بازار اوراق قرضه به بیشتر از ۱۰۰ تریلیون دلار و حجم معاملات روزانهٔ آن، به بیشتر از ۷۰۰ میلیارد دلار رسیده است [۳۱]. بنابراین اوراق قرضه با تمام تفاوت‌هایی که با اوراق سهام دارند، نقش برجسته‌ای در توسعه و پایداری مؤسسات منتشرکنندهٔ آنها ایفا می‌کنند و لذا تأثیر به‌سزایی بر زندگی اجتماعی آدمی دارد. از این‌رو در ریاضیات مالی، مطالعهٔ اوراق قرضه و درک سازوکار این ورقه‌ها اهمیت بسیاری دارد. هرچند اوراق قرضه در بسیاری از کشورهای جهان منتشر می‌شود، بیشترین استنادات و ارجاعات، اوراق قرضهٔ دولت ایالات متحده را در بر می‌گیرد. این اوراق قرضه از پشتوانهٔ دولت آمریکا برخوردارند و لذا اوراق بدون ریسک هستند [۱۴،۴].

اوراق قرضه از لحاظ تنوع در نحوهٔ پرداخت سود، سررسید و ناشر، بسیار متنوع هستند. این ورقه‌ها به دو دستهٔ کوپن‌دار (پرداخت کنندهٔ سود) و صفرکوپن (بدون پرداخت سود) تقسیم می‌شوند. با این حال، این اوراق رابطهٔ ساختاری دارند که در قضیهٔ زیر بیان می‌شود.

قضیه ۱.۱۱. *هر ورقهٔ کوپن‌دار را می‌توان با سبدی از ورقه‌های صفرکوپن بازسازی کرد.*

بنابراین مطالعهٔ ورقه‌های صفرکوپن، برای دریافت اطلاعات در مورد ورقه‌های کوپن‌دار کفایت می‌کند. اثبات این قضیه پس از بیان چند تعریف ارائه می‌شود.

تعریف ۲.۱۱. *ورقهٔ قرضهٔ کوپن‌دار* قراردادی است بین سرمایه‌گذار (خریدار) و ناشر که در آن، تعهدات و شرایط دو طرف قید می‌شود. از جمله اینکه خریدار، ورقه را به مبلغی که روی آن درج شده است و *مبلغ اسمی* یا اصل نامیده می‌شود، برای زمانی مشخص موسوم به *سررسید*، خریداری می‌کند و فروشنده متعهد می‌شود که در زمان‌هایی مشخص، به خریدار سودی را که در قرارداد مشخص شده است، پرداخت کند و در سررسید، با پرداخت اصل و آخرین قسط سود، تسویه‌حساب نماید.

تعریف ۳.۱۱. *ورقهٔ قرضهٔ صفرکوپن* ورقهٔ قرضه‌ای است با مبلغ اسمی ۱ واحد پول که طی عمرش، سودی پرداخت نمی‌کند و لذا در زمان خرید، با مبلغی کمتر از مبلغ اسمی خریداری می‌شود. ورقهٔ قرضه صفرکوپن، *ورقهٔ قرضهٔ تنزیلی* نیز نامیده می‌شود. ورقهٔ قرضهٔ صفرکوپن با سررسید T را T–ورقه می‌نامیم.

قضیهٔ ۱.۱۱ نشان می‌دهد که هرچند ممکن است در بازار داد و ستد، اوراق قرضهٔ صفرکوپن چندان رایج نباشد، وابستگیِ مطالعات نظریِ اوراق قرضهٔ کوپن‌دار به آنها، بر اهمیت آنها افزوده است. برای مطالعهٔ این اوراق، فرض می‌کنیم به‌ازای هر سررسید $T > 0$ ورقهٔ قرضهٔ صفرکوپن وجود دارد. بنابراین تعداد نامتناهیِ شمارش‌ناپذیر ورقهٔ قرضهٔ صفرکوپن وجود دارد. $P(t,T)$ قیمت ورقهٔ قرضهٔ صفرکوپن

با سررسید T در زمان $t \leq T$ است، $P(t,t) = ۱$ به‌ازای هر $t \leq T$ و تابع $P(t,T)$ نسبت به T به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر است.

اکنون به اثبات قضیهٔ ۱.۱۱ می‌پردازیم. فرض کنیم K مبلغ اسمی و $T_۰$ زمان انتشار ورقهٔ قرضهٔ کوپن‌داری باشد که در زمان‌های $T_۱$، $T_۲$، ...، T_n به‌ترتیب، مبلغ‌های $p_۱$، $p_۲$، ...، p_n را به‌عنوان کوپن می‌پردازد. در زمان $t < T_۱$ سبدی از T_i–ورقه‌ها، $i = ۱, ۲, \ldots, n$، تشکیل می‌دهیم که برای هر $۱ \leq i < n$ تعداد p_i و برای $i = n$ تعداد $K + p_n$ ورقه در بر دارد. ارزش این سبد در زمان $t < T_۱$ برابر است با

$$V(t) = \sum_{۱}^{n} p_i P(t,T_i) + KP(t,T_n). \qquad (۳.۱۱)$$

$T_۱$–ورقه در لحظهٔ $T_۱$ منقضی می‌شود و دارندهٔ ورقه، مبلغ $p_۱$ واحد پول از سبد برداشت می‌کند و سبد برای زمان‌های $T_۱ < t < T_۲$ بازیابی می‌شود. این فرآیند برای T_iهای دیگر نیز تکرار و در سررسید با برداشت مبلغ $K + p_n$ واحد پول، سبد تهی و عمر ورقه تمام می‌شود.

ورقه‌های قرضه در تعریف انواع نرخ‌های بهره، نقشی کلیدی ایفا می‌کنند. نرخ‌های بهرهٔ ساده، مرکب، نرخ‌های بهرهٔ شناور مثلاً نرخ‌های لایبور، نرخ بازدهٔ داخلی، نرخ بهرهٔ سَلَف آنی، نرخ بهرهٔ کوتاه‌مدت و منحنی ثمر از جملهٔ این نرخ‌ها هستند. به‌علاوه، این ورقه‌ها به‌عنوان دارایی در بازارهای مالی داد و ستد می‌شوند و انواع مفاهیم مالی نظیر اختیارهای اوراق قرضه را همراه خود دارند. شگفت اینکه وقتی ورقهٔ قرضه به‌عنوان واحد قیمت‌گذاری معرفی شود، پای تبدیل گیرسانوف، رادُن–نیکودیم، مارتینگل، قیمت‌گذاری ریسک خنثی، بلک و ... به نظریهٔ اوراق قرضه باز می‌شود. سرانجام، اشاره می‌کنیم که محصولاتی مانند سواپ، سواپشن (اختیار سواپ)، کف و سقف نیز با اوراق قرضه در ارتباط هستند [۴، ۵، ۱۴، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۳۳، ۳۴]. این مفاهیم را می‌گذاریم و می‌گذریم تا به مدل‌های نرخ بهرهٔ کوتاه‌مدت برسیم.

۲.۱۱. نرخ‌های بهره و اوراق قرضه. گفتیم که نرخ‌های بهره، رابطه‌ای نزدیک با اوراق قرضه دارند. در واقع، هرجا قرضی هست، بهره‌ای هم هست. بنابراین می‌توان گفت که اوراق قرضه از مولدهای بزرگ نرخ‌های بهره هستند. برای درک اهمیت این پیوند و شناخت مظهر برخی از نرخ‌های بهره، قضیهٔ زیر را به روش مالی ثابت می‌کنیم.

قضیه ۴.۱۱. *فرض کنیم $P(t,T)$، قیمت T–ورقهٔ قرضه در زمان $t \leq T$، تابعی به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر نسبت به متغیر T باشد. در این صورت، تابع $F(t,u)$ وجود دارد که*

$$P(t,T) = \exp\Big(- \int_t^T F(t,u)du \Big). \qquad (۴.۱۱)$$

اثبات. زمان‌های $t < S < T$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم الان لحظهٔ t است. می‌خواهیم با استفاده از اوراق قرضه، زمینهٔ سرمایه‌گذاری یک دلار در لحظهٔ S را فراهم کنیم که تا لحظهٔ T ادامه داشته باشد. برای این کار، سبدی تشکیل می‌دهیم که شامل فروش یک S–ورقه به قیمت $P(t,S)$ دلار و خرید تعداد $\frac{P(t,S)}{P(t,T)}$ T–ورقه است. بنابراین در این لحظه موجودیِ سبد صفر است. S–ورقه در لحظهٔ S سررسید می‌شود و مبلغ یک دلار مورد نیاز سرمایه‌گذاری را نصیب سبد می‌کند که بدهی ناشی از فروش امانی S–ورقه است و همان لحظه، تسویه می‌شود. T–ورقه‌ها در زمان T سررسید می‌شوند و مبلغ $\frac{P(t,S)}{P(t,T)}$ دلار به‌دست می‌آید. اگر نرخ بهرهٔ پیوستهٔ مرکب را با $r(r,S,T)$ نشان دهیم، آن‌گاه موجودیِ سبد در زمان T عبارت است از

$$\frac{P(t,S)}{P(t,T)} \times ۱ = e^{r(t,S,T)(T-S)}. \tag{۵.۱۱}$$

با استفاده از این رابطه، به‌دست می‌آوریم

$$r(t,S,T) = -\frac{\ln P(t,T) - \ln P(t,S)}{T-S}.$$

حد طرف اول این رابطه را وقتی $S \to T$، با $F(t,u)$ نشان می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم

$$F(t,u) = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}$$

که همان تابع زیر علامتِ انتگرال در (۴.۱۱) است. $\square$

تعریف ۵.۱۱. $r(t) = F(t,t), F(t,T), r(t,S,T)$ را به‌ترتیب، *نرخ بهرهٔ سَلَف پیوستهٔ مرکب*، *نرخ بهرهٔ سَلَف آنی* با سررسید T و *نرخ بهرهٔ آنی کوتاه‌مدت* می‌نامیم.

اگر در (۵.۱۱) به‌جای نرخ بهرهٔ پیوستهٔ مرکب، از نرخ بهرهٔ ساده استفاده کنیم، یعنی بنویسیم

$$\frac{P(t,S)}{P(t,T)} = ۱ + L(t,S,T)(T-S)$$

یا

$$\frac{P(t,S) - P(t,T)}{(T-S)P(t,T)} = L(t,S,T),$$

آن‌گاه $L(t,S,T)$ به‌دست می‌آید که نرخ بهرهٔ سَلَف ساده یا *نرخ بهرهٔ لایبور* نامیده می‌شود که در زمان t مصوب در بازهٔ زمانی $[S,T]$، اجرایی و در زمان T منقضی می‌شود. نرخ لایبوری که زمان تصویب و زمان آغاز اجرای آن یکی باشند، $t = S$، نرخ بهرهٔ آنی ساده یا *نرخ لایبور آنی* نامیده می‌شود. فرشید

جمشیدیان، ریاضیدان ایرانی، در زمینهٔ مطالعات مربوط به نرخ‌های لایبور، بازار لایبور و مشتقات نرخ بهره، نامی آشنا است [۳۵].

داستان اوراق قرضهٔ صفرکوپن، نرخ بهرهٔ کوتاه‌مدت و نرخ بهرهٔ سَلَف وقتی هیجان‌انگیز می‌شود که فرض کنیم هر سه، فرآیندهای تصادفی هستند. در این صورت، برای مثال، به‌ازای هر $\omega \in \Omega$ ثابت، نمودار تابع دومتغیرهٔ $P(t,T), \circ \leq t \leq T$ یک رویه و لذا نمودار فرآیند $P(t,T,\omega), \circ \leq t \leq T$ رویه‌ای تصادفی است. نکتهٔ جالب‌تر اینکه تحت شرایطی، دینامیک یکی از سه فرآیند ورقهٔ صفر کوپن، نرخ بهرهٔ سَلَف و نرخ بهرهٔ آنی، دینامیک‌های دوتای دیگر را به‌دست می‌دهد [۵، ۱۸، ۳۴].

۳.۱۱. مدل‌های نرخ بهرهٔ کوتاه‌مدت. فرض کنیم نرخ بهرهٔ کوتاه‌مدت $r(t)$ روی فضای احتمال پالایش‌شدهٔ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, P)$ جواب معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی

$$dr(t) = a(t)dt + b(t)dW_t$$

باشد و $r(\circ)$ داده‌شده باشد. بازاری را در نظر بگیرید که در آن، فقط یک حساب بانکی وجود دارد و دیگر هیچ. بنابراین در این بازار جز اینکه بنشینیم و منتظر تحوّلات حساب بانکی بر اساس تحوّلات نرخ بهره باشیم، نمی‌توانیم سرمایه‌گذاری کنیم. با این حال، می‌توانیم اوراق قرضه را مشتقات نرخ بهره قلمداد و آنها را قیمت‌گذاری کنیم. اما این کار یک اشکال مهم دارد. نرخ بهره نمی‌تواند یک دارایی باشد و بنابراین این بازار، فاقد داراییِ قابل معامله است. برای رفع این عیب اساسی، یک ورقهٔ قرضهٔ صفرکوپن با سررسید بسیار دیر به بازار اضافه می‌کنیم. به این ترتیب، بازار بدون آربیتراژ و کامل می‌شود و بنابراین قیمت‌گذاری اوراق قرضهٔ صفرکوپن، امکان‌پذیر می‌شود و قیمت حاصل یکتا است.

فرض کنیم T سررسید یک ورقه و $p(t,T,r)$ قیمت آن در لحظهٔ $\circ \leq t \leq T$ باشد به‌طوری که $p(T,T,r) = ۱$. در این صورت [۵، ۱۸، ۳۴]:

قضیه ۶.۱۱. *در بازار بدون آربیتراژ اوراق قرضه، تابع p در معادلهٔ*

$$\frac{\partial p(t,T,r)}{\partial t} + (a(t)) - \lambda b(t))\frac{\partial p(t,T,r)}{\partial r} + \frac{۱}{۲}b(t)^{۲}\frac{\partial^{۲} p(t,T,r)}{\partial r^{۲}} - rp(t,T,r) = \circ$$

با شرط نهاییِ $p(T,T,r) = ۱$ صدق می‌کند.

این معادله که بسیار شبیه معادلهٔ بلک–شولز است، به *معادلهٔ ساختار زمانی ورقهٔ قرضه* موسوم است و کاربردهای فراوانی در مطالعات مدل‌های نرخ بهره و اوراق قرضه دارد. در اینجا ضریب λ *قیمت بازاری ریسک* نامیده می‌شود و نقشی پررنگ در مطالعات بازار اوراق قرضه ایفا می‌کند. برای نرخ‌های

بهرهٔ کوتاه‌مدت مدل‌های بسیاری معرفی شده است که با استفاده از آنها، قیمت ورقه‌های صفرکوپن برآورد می‌شود [۵، ۱۸، ۳۴].

سپاسگزاری: از آقای دکتر علی صفدری وایقانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه علامه طباطبایی که بی یاری او، امکان تدوین این متن با استفاده از نرم افزار TeX وجود نداشت، داوران ناشناس و از انجمن ریاضی ایران بابت حمایت‌های بی‌دریغ، تشکر می‌کنم.

مراجع

[1] J. Voit, *The Statistical Mechanics of Financial Markets*, 3rd edn., Springer-Verlag, New York, Berlin, 2005.

[2] Aristotle, *Politics*, translated by Benjamin Jowell.

[3] Sidney Homer, Richard Sylla, *A History of Interest Rates*, 4th edn., John Wiley & Sons, 2005.

[4] Investopedia.

[5] T. Bjork, *The Arbitrage Theory in Continuous Time*, 3rd edn., Oxford University Press, Oxford, 2009.

[6] Freddy Delbaen, Walter Schachermayer, *The Mathematics of Arbitrage*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[7] Fima C. Klebaner, *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*, 2nd edn., Imperial College Press, London, 2005.

[8] J. Michael Steele, *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[9] Emanuel Derman, Paul Wilmott, *The Financial Modeler's Manifesto, Risk Management*, Issue 17, Sept 2009.

[10] Mark J. P. Anson, Frank J. Fabozzi, Moorad Choudhry, Ren-Raw Chen, *Credit Derivatives Instruments, Applications and Pricing*, John Wiley & Sons, 2004.

[11] Amadeo, Kimberly, *CDOs (Collateralized Debt Obligation)*, April 28, 2018, the balance.

[12] Rama Cont, Peter Tankov, *Financial Modelling with Jump Processes*, CRC, 2004.

[13] Fischer Black, Myron Scholes, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *The Journal of Political Economy*, **81** (1973), no. 3, 637–654.

[14] Wikipedia, Risk.

[15] Robert C. Merton, Paul Samuelson, in: *Encyclopedia of Quantitative Finance*, John Wiley & Sons, 2010.

[16] Mircea Grigoriu, *Stochastic Calculus Applications in Science and Engineering*, Birkhauser, Berlin, 2002.

[17] Nicolas Privault, *Stochastic Analysis in Discrete and Continuous Settings*, Lecture Notes in Mathematics, **1982**, Springer-Verlag, 2009.

[18] Steven E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance (II): Continuous-Time Models*, Springer-Verlag, New York, 2004.

[19] Marek Musiela, Marek Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer-Verlag, 1997.

[20] Yue-Kuen Kwok, *Mathematical Models of Financial Derivatives*, 2nd edn., Springer-Verlag, 2008.

[21] John C. Cox, Stephen A. Ross, Mark Rubenstein, Option pricing: A simplified approach, *Journal of Financial Economics*, **7** (1979), no. 3, 229–263.

[22] John C. Cox, Stephen A. Ross, The Valuation of options for alternative stochastic processes, *Journal of Financial Economics*, **3** (1976), 145–166.

[23] Steven E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance (I): The Binomial Asset Pricing*, Springer-Verlag, New York, 2005.

[24] Bernt Oksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, 5th edn., Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[25] Philip E. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, 2nd edn., Springer-Velrag, New York, 2004.

[26] Robert C. Merton, Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4** (1973), no. 1, 141–183.

[27] Robert C. Merton, Option pricing when the underlying stock returns are discontinuous, *Journal of financial Economics*, **3** (1976), 125–144.

[28] S. G. Kou, A Jump-Diffusion Model for Option Pricing, *Management Science,* **48** (2002), no. 8, 1086–1101.

[29] S. G. Kou, *A Jump-Diffusion Model for Option Pricing in financial Engineering*, In: Handbooks in OR and MS, J. R. Birge, V. Linetsky (eds.), Elsevier, Berlin, 2008.

[30] J. Robert Buchanan, *An Undergraduate Introduction to Financial Mathematics*, 3rd edn., World Scientific, 2012.

[31] The Motley Fool.

[32] Victor Goodman and Joseph Stampfli, *The Mathematics of Finance: Modeling and Hedging*, AMS, 2001.

[33] Rene Carmona, Michael Tehranchi, *Interest Rate Models: an Infinite Dimensional Stochastic Analysis Perspective*, Springer-Verlag, New York, 2006.

[34] Damir Philipovich, *Term-Structure Models: A Graduate Course*, Springer-Verlag, New York, Berlin, 2009.

[35] Farshid Jamshidian, Libor and Swap Market Models and Measures, *Finance and Stochastics*, **1** (1997), 293–330.

تاریخ ارسال: ۹۷/۹/۱۵؛ تاریخ بازنگری: ۹۷/۹/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۹۷/۹/۲۰

محمد جلوداری ممقانی: دانشگاه علامه طباطبائی، دانشکدهٔ علوم ریاضی و رایانه
رایانامه: J_mamaghani@atu.ac.ir