

خم‌های عجیب در هندسه هذلولوی

منیره پیمان

چکیده

در این مقاله، دو خم عجیب در هندسه هذلولوی که مشابه اقلیدسی ندارند، معرفی و ویژگی‌های آنها بررسی می‌شود. تعریفی جدید برای دایره می‌آوریم و می‌بینیم که برخی از ویژگی‌های جالب این دو خم، در مورد دایره نیز صادق است. در پایان نشان می‌دهیم که اگر سه نقطه بر یک استقامت اقلیدسی نباشند، سه خم هم‌فاصله متفاوت وجود دارند که این سه نقطه بر آنها قرار دارند.

۱. سرآغاز

هندسه در اصل علم «اندازه‌گیری زمین» بوده است. هرودت^۱، تاریخ‌نگار یونانی سده پنجم پیش از میلاد، پیدایش هندسه را به مساحتان مصری نسبت می‌دهد ولی تمدن‌های کهن بابلی، هندی و چینی نیز اطلاعات هندسی زیادی داشته‌اند. ما هندسه اقلیدسی را برای تجسم جهان مادی به‌کار می‌بریم. مقدمات این علم، از کتابی به نام «اصول» به‌دست ما رسیده است که اقلیدس^۲، ریاضیدان یونانی، آن را حدود سیصد سال پیش از میلاد مسیح نگاشته است. تصویری که ما بر اساس این هندسه از جهان فیزیکی پیدا کرده‌ایم، تا اندازه زیادی به‌وسیله آیزاک نیوتن^۳ در اواخر سده هفدهم میلادی ترسیم شده است. داوید هیلبرت^۴، برجسته‌ترین ریاضیدان جهان در اوایل سده بیستم، با به‌کارگیری روش بنیادینی، دستگاهی را پایه‌ریزی کرد که بنیادها را از نظر ماهیت، نزدیک‌ترین بنیادها به اصول اقلیدس هستند. در این روش، خطر استدلال از روی نمودار و دیگر کاستی‌هایی که در روش

عبارات و کلمات کلیدی. هندسه هذلولوی؛ خم حدی؛ دایره زمانی؛ خم هم‌فاصله؛ آبردایره.

^۱Herodotus ^۲Euclid ^۳Isaac Newton ^۴David Hilbert

ارائه هندسه توسط اقلیدس وجود داشت، برطرف گردید. بنداشت‌های هیلبرت به پنج دسته وقوع، میانبود، قابلیت انطباق، پیوستگی و توازی تقسیم می‌شوند که بنداشت توازی او معادل اصل پنجم اقلیدس یا همان اصل توازی اقلیدسی است. اگر از بنداشت‌های هیلبرت، بنداشت توازی را کنار بگذاریم، هندسه‌ای خواهیم داشت که به هندسه خنثی یا هندسه نتاری شهرت دارد. این هندسه، زیربنایی برای هر دو هندسه اقلیدسی و هذلولوی است و در آن، همه احکامی که در برهان آنها اصل توازی نقشی ندارد، قابل اثبات هستند. در نتیجه هندسه نتاری از نظر علم منطق، یک دستگاه قیاسی سازگار و تمام است [۱].

هندسه هذلولوی که در اوایل سده نوزدهم تقریباً همزمان توسط گاوس^۱، بویوی^۲ و لباچفسکی^۳ کشف شد، هندسه‌ای است که با پذیرش همه بنداشت‌های هندسه نتاری و افزودن بنداشت توازی هذلولوی پدید آمده است. در بنداشت توازی هذلولوی می‌پذیریم که یک خط l و یک نقطه P ناواقع بر آن وجود دارند که حداقل دو خط موازی با l از نقطه P می‌گذرند. برای تجسم هندسه هذلولوی، از سه الگوی بلترامی^۴ - کلاین^۵، نیم صفحه بالایی پوانکاره^۶ و قرص پوانکاره کمک می‌گیریم. برتری الگوی بلترامی - کلاین در نمایش خط‌های این هندسه به کمک پاره‌خط‌های اقلیدسی و برتری الگوهای پوانکاره در این است که زوایا به روش اقلیدسی اندازه گرفته می‌شوند. با بررسی الگوهای فوق دیده می‌شود که هندسه هذلولوی همان قدر سازگار است که هندسه اقلیدسی و با توجه به کارهایی که توسط گاوس انجام گرفته است، می‌توان هندسه اقلیدسی را یک حالت حدی از هندسه هذلولوی دانست [۱].

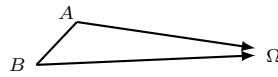
در هندسه هذلولوی، خط‌های موازی ممکن است واگرا یا به‌طور مجانبی همگرا باشند. در این مقاله خواهیم دید که یک نقطه عادی، آرمانی یا فراآرمانی به ترتیب، مرکز دایره، مرکز خم حدی یا مرکز خم هم‌فاصله خواهند بود. این دو خم اخیر در هندسه اقلیدسی مشابه ندارند و هدف ما در این مقاله، بررسی ویژگی‌های این دو خم است.

۲. نقاط آرمانی، فراآرمانی و متناظر

می‌دانیم که دو خط به‌طور مجانبی موازی، هیچ نقطه تقاطعی ندارند اما به چنین خط‌هایی نقطه‌ای در بی‌نهایت به نام نقطه آرمانی منسوب می‌کنیم و آن را نقطه تقاطع آن دو خط می‌انگاریم. پس چنین می‌پنداریم که همه خط‌هایی که در یک امتداد با یک خط معین و در نتیجه با یکدیگر موازی حدی هستند، در یک نقطه آرمانی متقارب می‌شوند و یک دسته خط با یک رأس آرمانی تشکیل می‌دهند. پس هر خط علاوه بر نقاط عادی، دو نقطه آرمانی دارد که تمام خط‌هایی که در دو امتداد با آن موازی حدی باشند، بر یکی از آن نقاط خواهند گذشت. بنابراین در گزاره «دو خط در یک نقطه آرمانی

^۱Carl Friedrich Gauss ^۲János Bolyai ^۳N. I. Lobachevsky ^۴Eugenio Beltrami ^۵Felix Klein

^۶Henri Poincaré



شکل ۱

مقاطع هستند»، منظور آن است که دو خط موازی حدی هستند و گزاره «خطی يك نقطه عادی را به يك نقطه آرمانی خطی مفروض وصل می‌کند» یعنی از آن نقطه عادی يك نیم خط موازی حدی با آن خط مفروض و در آن امتداد معین، رسم شده است. معمولاً برای نمایش نقاط آرمانی، حروف بزرگ الفبای یونانی (مانند Ω) به کار گرفته می‌شود.

دو خط به طور و اگر موازی نیز نقطه مشترک ندارند ولی چنان که می‌دانیم، این خطها دارای عمود مشترک هستند [۵]. با استفاده از این ویژگی، به هر خط، نقطه‌ای فراآرمانی چنان منسوب می‌شود که به منزله نقطه مشترک همه خطهای عمود بر آن باشد. پس همه خطهای عمود بر يك خط، دسته‌ای تشکیل می‌دهند که رأس آنها نقطه‌ای فراآرمانی است. در نتیجه می‌توان پنداشت که دو خط به طور و اگر موازی، یکدیگر را در يك نقطه فراآرمانی قطع می‌کنند. همچنین متناظر با هر نقطه فراآرمانی، خطی وجود دارد که نماینده آن نقطه است و هر خطی که بر خط نماینده عمود باشد، از آن نقطه فراآرمانی می‌گذرد. قرارداد می‌کنیم که نقاط فراآرمانی را با حروف بزرگ یونانی به همراه اندیسی که معرف خط نماینده آن نقطه باشد، نمایش دهیم. با این قرارداد، Γ_ℓ يك نقطه فراآرمانی است و همه خطهایی که بر ℓ عمود هستند، از آن می‌گذرند.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم نقطه آرمانی Ω تقاطع دو خط است که به طور مجانبی موازی هستند. همچنین نقاط دلخواه A و B را چنان در نظر می‌گیریم که A بر یکی از این دو خط و B بر دیگری واقع باشد. شکل پدید آمده از دو خط مذکور و پاره خط AB ، شکلی مثلث‌گونه است که دو رأس عادی آن، نقاط A و B و رأس آرمانی آن، Ω است (شکل ۱).

گزاره ۲.۲ ([۱۰]). اگر در دو شکل مثلث‌گونه $\triangle AB\Omega$ و $\triangle A'B'\Omega'$ داشته باشیم

$$AB \cong A'B' \quad \text{و} \quad \angle BA\Omega \cong \angle B'A'\Omega'$$

آن‌گاه $\angle AB\Omega \cong \angle A'B'\Omega'$ و بنابراین $\triangle AB\Omega$ و $\triangle A'B'\Omega'$ قابل انطباق خواهند بود.

تعریف ۳.۲. دو نقطه P و Q واقع بر دو خط متمایز را نقاط متناظر گوییم، اگر زاویه‌های واقع در یک طرف خط \overleftrightarrow{PQ} که توسط آن دو خط و خط \overleftrightarrow{PQ} پدید آمده‌اند، قابل انطباق باشند.

اگر خط‌هایی که نقاط متناظر بر آنها واقع‌اند، به‌طور مجانبی موازی، متقاطع یا به‌طور واگرا موازی باشند، دارای ویژگی‌هایی خواهند بود که در قضیه‌های زیر می‌بینیم. اثبات این قضیه‌ها را می‌توانید در [۱۰] بیابید.

قضیه ۴.۲. به‌ازای هر نقطه واقع بر یکی از دو خطی که به‌طور مجانبی موازی هستند، یک و تنها یک نقطه متناظر با آن، واقع بر خط دیگر وجود دارد.

قضیه ۵.۲. اگر هر یک از نقاط P ، Q و R بر یکی از سه خطی که در یک جهت با یکدیگر به‌طور مجانبی موازی هستند، واقع گردند و Q متناظر با P و R متناظر با Q باشد، آن‌گاه سه نقطه نمی‌توانند بر یک استقامت اقلیدسی قرار گیرند و به‌علاوه R متناظر با P است.

قضیه ۶.۲. به‌ازای هر نقطه واقع بر یکی از دو خط متقاطع، یک و تنها یک نقطه متناظر با آن، واقع بر خط دیگر وجود دارد.

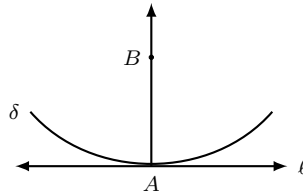
قضیه ۷.۲. اگر هر یک از نقاط P ، Q و R بر یکی از سه خطی که متقاطع هستند، واقع شود و Q متناظر با P و R متناظر با Q باشد، آن‌گاه سه نقطه نمی‌توانند بر یک استقامت اقلیدسی قرار گیرند و به‌علاوه R متناظر با P است.

قضیه ۸.۲. به‌ازای هر نقطه واقع بر یکی از دو خطی که به‌طور واگرا موازی هستند، یک و تنها یک نقطه متناظر با آن، واقع بر خط دیگر وجود دارد.

قضیه ۹.۲. اگر هر یک از نقاط P ، Q و R بر یکی از سه خطی که به‌طور واگرا موازی هستند، واقع شود و Q متناظر با P و R متناظر با Q باشد، آن‌گاه سه نقطه نمی‌توانند بر یک استقامت اقلیدسی قرار گیرند مگر وقتی که خط‌گذرنده بر آنها، عمودمشترک سه خط باشد. به‌علاوه R متناظر با P است.

۳. خم حدی

خط ℓ و نقطه A واقع بر آن را در نظر می‌گیریم. از A بر ℓ عمودی خارج و نقطه B را بر آن اختیار می‌کنیم. حال فرض کنیم دایره δ به مرکز B و شعاع \overline{AB} در A بر ℓ مماس باشد. اگر B در امتداد عمود بر ℓ از A بسیار دور شود، آن‌گاه دایره δ در حالی که بر ℓ مماس باقی می‌ماند، به‌تدریج بزرگ می‌شود و اگر B به‌اندازه دلخواه زیاد از A دور شود، به سمت یک وضع حدی میل خواهد کرد. در هندسه اقلیدسی، وضع حدی دایره δ دقیقاً خط ℓ است ولی در هندسه هذلولوی، وضع حدی δ ، یک خم با سرشتی عجیب است (شکل ۲). اکنون به معرفی و بررسی ویژگی‌های این خم می‌پردازیم.



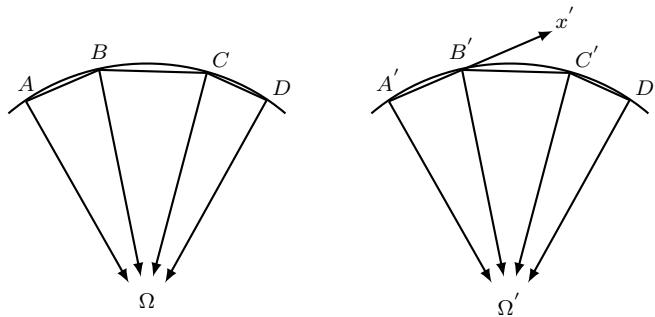
شکل ۲

برای این منظور، تعریفی جدید برای دایره می‌آوریم که بتواند همه ویژگی‌های مشهور دایره را نتیجه دهد و به علاوه وسیله‌ای ساده برای انتقال از دایره معمولی به خم‌های تازه و عجیب باشد.

تعریف ۱.۳. دایره مکان هندسی نقاط متناظر واقع بر شعاع‌های یک دسته خط شعاعی است که رأس آن یک نقطه عادی باشد.

اگر سرشت شعاع‌هایی که نقاط متناظر بر آنها قرار دارند را تغییر دهیم، به دو خم مورد نظر در این مقاله خواهیم رسید. نخست به مطالعه مجموعه نقاط متناظر واقع بر دسته‌ای از خط‌ها که به‌طور مجانبی موازی هستند، می‌پردازیم؛ یعنی دسته‌ای که رأس آن یک نقطه آرمانی است. این مکان در هندسه هذلولوی یک خط راست نیست، زیرا بنا بر قضیه ۵.۲، هیچ سه نقطه‌ای از این مجموعه بر یک استقامت اقلیدسی قرار ندارند. این مکان دایره نیز نیست، زیرا چنان‌که خواهیم دید، دارای ویژگی‌هایی است که در دایره وجود ندارد. چون این خم، صورت حدی دایره‌ای است که شعاع آن بی‌نهایت بزرگ می‌شود، آن را خم حدی یا دایره زمانی می‌نامند [۱۰]. نیم‌خط‌های دسته خط‌هایی که به‌طور مجانبی موازی هستند را شعاع‌ها یا محورها و به مرکز آرمانی این شکل، مرکز خم حدی می‌گویند. بدیهی است که بنا بر قضیه ۵.۲، چون هیچ سه نقطه‌ای از خم حدی بر یک استقامت اقلیدسی قرار نگرفته‌اند، یک خط راست نمی‌تواند یک خم حدی را در بیش از دو نقطه قطع کند.

تذکر ۲.۳. دو خم حدی را در نظر می‌گیریم که مرکزهای آرمانی آنها Ω و Ω' است. نقاط A, B, C, D و ... را بر خم حدی به مرکز Ω اختیار و شعاع‌های $\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{B\Omega}, \overrightarrow{C\Omega}, \overrightarrow{D\Omega}$ و ... را رسم می‌کنیم. سپس نقطه دلخواه A' را بر خم حدی به مرکز Ω' اختیار و شعاع $\overrightarrow{A'\Omega'}$ را رسم می‌کنیم. حال نیم‌خط $\overrightarrow{A'x'}$ را چنان رسم می‌کنیم که $\angle \Omega' A' x'$ بر $\angle \Omega A B$ قابل انطباق باشد. سپس نقطه B' واقع بر نیم‌خط $\overrightarrow{A'x'}$ را چنان برمی‌گزینیم که $A'B' \cong AB$. با رسم شعاع $\overrightarrow{B'\Omega'}$ ، بنا بر گزاره ۲.۲، دو مثلث‌گونه $\triangle AB\Omega$ و $\triangle A'B'\Omega'$ قابل انطباق خواهند بود. در نتیجه $\angle AB\Omega \cong \angle A'B'\Omega'$ و بنا بر این $\angle B'A'\Omega' \cong \angle A'B'\Omega'$. پس B' متناظر با A' خواهد بود و بنا بر قضیه ۴.۲،



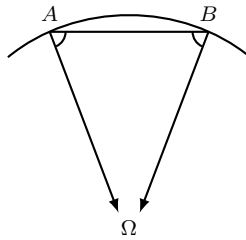
شکل ۳

نقطه B' بر خم حدی به مرکز Ω' واقع است. با ادامه این روند، نقاط C' ، D' و ... را بر این خم حدی چنان می‌یابیم که وترهای $B'C'$ ، $C'D'$ و ... به ترتیب، بر وترهای BC ، CD و ... قابل انطباق باشند و به علاوه، زاویه‌های ساخته شده توسط جفت وترهای متناظر و شعاع‌های مرسوم از نقاط انتهایی آنها، قابل انطباق باشند (شکل ۳). این تناظر میان دو خم حدی را قابلیت انطباق آنها می‌نامیم. در نتیجه هر دو خم حدی قابل انطباق هستند. همچنین تناظر یک به یک میان قوس‌های متناظر در تناظر توصیف شده را به قابلیت انطباق آنها اطلاق می‌کنیم. برای مثال، می‌گوییم قوس‌های متناظر AD و $A'D'$ قابل انطباق هستند. همچنین ممکن است این تناظر بین دو قوس از دو خم حدی هم‌مرکز یا دو قوس از یک خم حدی برقرار شود. اگر تناظر توصیف شده در تذکر ۲.۳ بین دو قوس از یک خم حدی برقرار شود، این تناظر را با واژه «خمیدگی» و به این صورت بیان می‌کنیم که «یک خم حدی در همه نقاط خود دارای یک خمیدگی است.» چنان که دیده می‌شود، این ویژگی را دایره‌ها نیز دارند.

ویژگی‌های جالب دیگری برای خم‌های حدی در [۱۵] به دست آمده است که در قضیه زیر می‌بینیم. برخی از این ویژگی‌ها در مورد دایره نیز صادق هستند ولی نه همه آنها.

قضیه ۳.۳. گزاره‌های زیر برقرارند:

- (الف) بر هر دو خم حدی (یا بر یک خم حدی)، وترهای قابل انطباق دارای قوس‌های قابل انطباق و قوس‌های قابل انطباق دارای وترهای قابل انطباق هستند. علاوه بر این، در قوس‌هایی که قابل انطباق نیستند، وتر بزرگتر متعلق به قوس بزرگتر است؛
- (ب) اگر خطی خم حدی را در یک نقطه قطع کند و شعاع نباشد، خم را در یک نقطه دیگر نیز قطع خواهد کرد؛



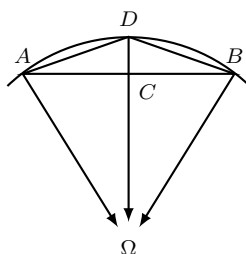
شکل ۴

(پ) مماس بر خم حدی در هر نقطه، بر شعاع گذرنده از آن نقطه عمود است؛ یعنی خم حدی محورهای خود را با زاویه قائمه قطع می‌کند. در نتیجه می‌توان آن را مسیری عمود بر دسته شعاع‌های خود پنداشت.

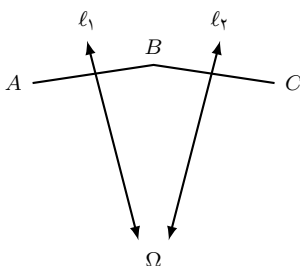
یادآوری می‌کنیم که خط‌های به‌طور مجانبی موازی، در یک امتداد به هم نزدیک و در امتداد دیگر از هم دور می‌شوند. همچنین بنا بر تعریف، یک خم حدی، مکان هندسی نقاط متناظر واقع بر دسته‌ای از خط‌ها است که به‌طور مجانبی موازیند؛ یعنی دسته‌ای از خط‌ها که رأس آن یک نقطه آرمانی است. بنابراین برای یک خم حدی، واژه «تقعر» را به این صورت تعریف می‌کنیم. فرض کنیم Ω مرکز آرمانی یک خم حدی و A و B نقاطی دلخواه واقع بر آن باشند. چون زاویه‌های قابل انطباق $\angle BAO$ و $\angle ABO$ در مثلث‌گونه $\triangle ABO$ حاده هستند، گوییم تقعر یک خم حدی به طرف توازی شعاع‌های آن، کاو یا مقعر است (شکل ۴). در پایان این بخش، نشان می‌دهیم که با داشتن سه نقطه از یک خم حدی، می‌توان آن را رسم کرد. برای این منظور، ابتدا قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۳. خط عمود بر وسط وتر وتری از خم حدی، شعاع است و قوس متناظر با آن وتر را نصف می‌کند.

اثبات. وتر AB از خم حدی داده‌شده به مرکز آرمانی Ω را اختیار و شعاع‌های \overrightarrow{AO} و \overrightarrow{BO} را رسم می‌کنیم. چون نقاط A و B متناظر هستند، داریم $\angle BAO \cong \angle ABO$. فرض کنیم C نقطه وسط پاره‌خط AB باشد. شعاع \overrightarrow{CO} را رسم می‌کنیم و دو شکل مثلث‌گونه $\triangle BCO$ و $\triangle ACO$ را در نظر می‌گیریم. بنا بر گزاره ۲.۲، خواهیم داشت $\angle ACO \cong \angle BCO$. پس $\angle ACO$ بر مکمل خود قابل انطباق است. در نتیجه $\angle ACO$ قائمه است و بنابراین خط \overrightarrow{CO} عمود منصف وتر AB است. حال اگر تقاطع خط \overrightarrow{CO} و خم حدی را D بنامیم، بدیهی است که دو مثلث $\triangle ACD$ و $\triangle BCD$ به حالت دو ضلع و زاویه بین، قابل انطباق خواهند بود. در نتیجه $AD \cong BD$



شکل ۵



شکل ۶

بنابراین قوس‌های نظیر آنها قابل انطباق هستند. پس خط $\overrightarrow{C\Omega}$ قوس نظیر وتر AB را نصف می‌کند (شکل ۵). □

قضیه ۵.۳. هر خم حدی با سه نقطه از آن کاملاً مشخص می‌شود.

اثبات. فرض کنیم سه نقطه A ، B و C از یک خم حدی داده شده باشند. بنا بر قضیه ۵.۲، این سه نقطه بر یک استقامت اقلیدسی نیستند. اگر خط‌های l_1 و l_2 به ترتیب، عمودمنصف وترهای AB و BC باشند، آنگاه بنا بر قضیه ۴.۳، این دو خط، شعاع‌اند و بنابراین به‌طور مجانبی موازی هستند. پس Ω مرکز خم حدی، نقطه آرمانی مشترک آنها است و در طرفی از خط \overrightarrow{AB} قرار دارد که C در آن است. با یافتن Ω ، نقاط دیگر آن نیز با استفاده از تعریف به‌دست می‌آیند (شکل ۶). □

۴. خم هم‌فاصله

در این بخش، به دسته‌ای از شعاع‌ها که رأس فراآرمانی دارند، می‌پردازیم و نقاط متناظر واقع بر این دسته را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۱.۴. خم هم‌فاصله، مکان هندسی نقاط متناظر واقع بر دسته‌ای از خط‌ها است که به‌طور واگرا موازی‌اند. خط‌های دسته را شعاع‌ها یا محورهای خم هم‌فاصله، رأس فراآرمانی دسته را مرکز آن و خط نماینده رأس را خط مبنا می‌نامیم.

خط مبنا در واقع همان عمودمشتک خط‌های دسته مذکور است. به خم هم‌فاصله، *آبردایره* نیز می‌گویند [۱۰]. چون هر خط (در اینجا خط مبنا) دقیقاً مرز دو نیم‌صفحه است و این نیم‌صفحه‌ها، نقطه مشترکی ندارند [۵]، نشان خواهیم داد که خم هم‌فاصله از دو شاخه تشکیل شده است که در دو طرف خط مبنا قرار دارند. بنابراین خم هم‌فاصله همبند نیست.

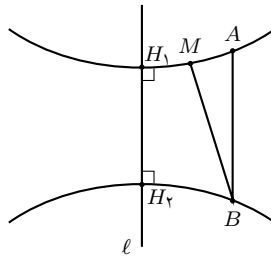
تعریف ۲.۴. فرض کنیم نقاط A و B واقع بر خم هم‌فاصله‌ای با خط مبنای l باشند که در یک طرف l واقع‌اند. همچنین فرض کنیم H_1 و H_2 به‌ترتیب، محل تلاقی شعاع‌های گذرنده از نقاط A و B با خط l باشند. بنابر تعریف خم هم‌فاصله و ویژگی‌های یک چهارضلعی گوژ در هندسه هذلولوی [۵]، زاویه‌های قابل انطباق $\angle BAH_1$ و $\angle ABH_2$ حاده‌اند. در این حالت گوییم خم هم‌فاصله به سمت خط مبنای خود کاو یا مقعر است.

ویژگی‌های خم هم‌فاصله را می‌توان در قضیه‌های زیر دید.

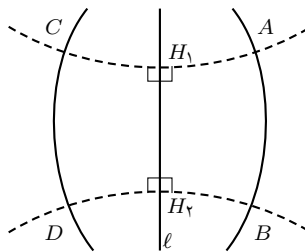
قضیه ۳.۴. برای هر خم هم‌فاصله گزاره‌های زیر برقرارند:

- (الف) خم هم‌فاصله، مکان هندسی نقاط واقع در یک طرف معین خط مبنا است که فاصله‌های عمودی آنها از خط مبنا یکسان است. این گزاره در طرف دیگر خط مبنا نیز برقرار است؛
 (ب) خم هم‌فاصله از دو شاخه که در دو طرف خط مبنا قرار دارند، تشکیل شده است.

اثبات. (الف) فرض کنیم نقطه فراآرمانی Γ_l مرکز خم هم‌فاصله باشد. پس l خط مبنا خواهد بود. حال اگر در یک طرف خط مبنا، نقاط A و B را واقع بر خم هم‌فاصله اختیار کنیم، آن‌گاه شعاع‌های گذرنده از نقاط A و B بر خط مبنا عمود خواهند بود، زیرا بنابر تعریف خم هم‌فاصله، خط مبنا عمودمشتک آنها است. پس اگر نقاط تلاقی شعاع‌های گذرنده از نقاط A و B با خط l را به‌ترتیب، H_1 و H_2 بنامیم، آن‌گاه زاویه‌های $\angle AH_1H_2$ و $\angle BH_2H_1$ قائمه هستند. همچنین بنابر تعریف خم هم‌فاصله، نقاط A و B متناظر هستند. در نتیجه $\angle BAH_1 \cong \angle ABH_2$. اما $\angle BAH_1 \cong \angle BH_2H_1$ ؛ اگر نه با فرض $\angle BH_2H_1 < \angle AH_1H_2$ ، نقطه M میان A و H_1 وجود دارد که $\angle BMH_1 \cong \angle BH_2H_1$ و آن‌وقت در چهارضلعی ساکری H_1H_2BM ، زاویه‌های $\angle BMH_1$ و $\angle MBH_2$ قابل انطباق و حاده خواهند شد [۵]. از طرف دیگر، چون $\angle MBH_2 < \angle ABH_2$ ،



شکل ۷



شکل ۸

پس $\angle MBH_2 < \angle BAH_1$ و بنابراین $\angle BMH_1 < \angle BAH_1$ که ممکن نیست، زیرا $\angle BMH_1$ زاویه خارجی غیرمجاور به $\angle BAM$ از مثلث $\triangle BAM$ است و باید داشته باشیم $\angle BMH_1 > \angle BAM$ یا $\angle BMH_1 > \angle BAH_1$. پس $AH_1 \cong BH_2$ ؛ یعنی A و B از l به یک فاصله‌اند. با انتخاب طرف دیگر خط مبنا و به روش مشابه، درستی گزاره بیان شده در بند (الف) این قضیه مجدداً ثابت می‌شود (شکل ۷). لازم به ذکر است که چون شعاع‌های گذرنده بر A و B خط‌های به‌طور و اگر موازی هستند و این خط‌ها در طرفین خط عمودمشتک‌شان از هم دور می‌شوند [۵]، در شکل ۷ این خط‌ها بدین گونه ترسیم شده‌اند. ضمناً خم هم‌فاصله در این شکل دیده نمی‌شود؛ ترسیم آن را در شکل ۸ خواهیم دید.

(ب) نقاط C و D را به ترتیب، بر نیم خط‌های متقابل $\overrightarrow{H_1A}$ و $\overrightarrow{H_2B}$ چنان اختیار می‌کنیم که $H_1C \cong H_1A$ و $H_2D \cong H_2B$ و بنابراین در چهارضلعی ساکری $\square H_2H_1CD$ داریم $\angle H_1CD \cong \angle H_2DC$ [۵]. پس نقاط C و D متناظرند و لذا C و D نیز بر خم هم‌فاصله و در طرف دیگر خط مبنا قرار دارند (شکل ۸). \square

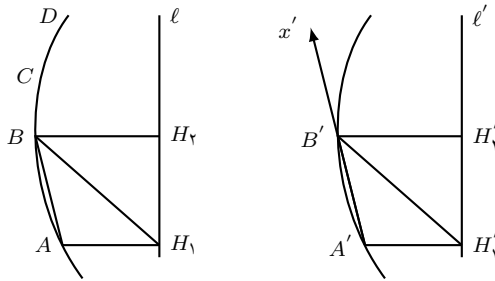
تعریف ۴.۴. فاصله یکسان نقاط یک خم هم‌فاصله از خط مبنا را فاصله می‌نامیم.

دلیل نامگذاری خم هم‌فاصله، فاصله یکسان نقاط آن تا یک خط مشخص (خط مبنا) است. در هندسه اقلیدسی، هر دو خط موازی، یک خم هم‌فاصله هستند. همچنین هر خط را می‌توان به‌عنوان خم هم‌فاصله‌ای با فاصله صفر فرض کرد.

قضیه ۵.۴. هر دو خم هم‌فاصله با فاصله‌های یکسان، قابل انطباق هستند.

اثبات. فرض کنیم l و l' خط‌های مبنای دو خم هم‌فاصله با فاصله یکسان d باشند. نقاط دلخواه A, B, C, D و ... را بر خم هم‌فاصله‌ای که خط مبنای آن l است، اختیار می‌کنیم. سپس نقطه دلخواه A' را بر خم دیگر در نظر می‌گیریم. فرض کنیم H_1 و H_2 به ترتیب، محل تلاقی شعاع‌های گذرنده از A و B با خط l و H'_1 نقطه تلاقی شعاع گذرنده از A' با خط l' باشند. چون در یک خم هم‌فاصله، خط مبنا عمود مشترک شعاع‌های آن است، زاویه‌های $\angle AH_1H_2$ و $\angle BH_2H_1$ قائمه هستند. حال نیم‌خط $\overrightarrow{A'x'}$ را چنان رسم می‌کنیم که $\angle H'_1A'x' \cong \angle H_1AB$. سپس نقطه B' واقع بر $\overrightarrow{A'x'}$ را چنان برمی‌گزینیم که $AB \cong A'B'$ و محل تلاقی شعاع گذرنده از B' با خط l' را H'_2 می‌نامیم. در نتیجه زاویه $\angle B'H'_2H'_1$ قائمه است. حال چون دو خم دارای فاصله یکسان هستند، داریم $AH_1 \cong A'H'_1$. در نتیجه دو مثلث $\triangle BAH_1$ و $\triangle B'A'H'_1$ به حالت (ض‌ض)، قابل انطباق خواهند بود و بنابراین $BH_1 \cong B'H'_1$ و $\angle BH_1A \cong \angle B'H'_1A'$. پس $\angle H_2H_1B \cong \angle H'_2H'_1B'$ و در نتیجه دو مثلث $\triangle H_2BH_1$ و $\triangle H'_2B'H'_1$ به حالت (ز‌زض) قابل انطباق هستند. بنابراین $BH_2 \cong B'H'_2$ و در نتیجه $A'H'_2 \cong B'H'_2$. پس چهارضلعی $A'B'H'_2H'_1$ ساکری است و لذا $\angle H'_2A'B' \cong \angle H'_2B'A'$. در نتیجه B' متناظر با A' است؛ یعنی B' بر خم هم‌فاصله‌ای که خط مبنای آن l' است، قرار دارد. با ادامه این روند، نقاط C', D' و ... را چنان می‌یابیم که وترهای $B'C', C'D'$ و ... به ترتیب، بر وترهای BC, CD و ... قابل انطباق باشد و به‌علاوه، زاویه‌هایی که جفت وترهای متناظر با شعاع‌های گذرنده از نقاط انتهایی آنها می‌سازند، قابل انطباق باشند. چنین تناظر میان دو خم هم‌فاصله را به مفهوم قابلیت انطباق آنها بیان می‌کنیم (شکل ۹). □

دیدیم که تناظر توصیف‌شده میان دو خم هم‌فاصله با فاصله‌های یکسان در قضیه ۵.۴ را با واژه «قابلیت انطباق» آنها بیان کردیم. اکنون تناظر یک‌به‌یک میان قوس‌های متناظر در تناظر توصیف‌شده را به قابلیت انطباق آن دو قوس اطلاق می‌کنیم. برای مثال، گوییم قوس‌های متناظر AB و $A'B'$ قابل انطباق‌اند. حال اگر تناظر توصیف‌شده میان دو قوس از یک خم هم‌فاصله برقرار شود، این تناظر را با واژه «خمیدگی» به این صورت بیان می‌کنیم که «یک خم هم‌فاصله در تمام نقاط خود دارای

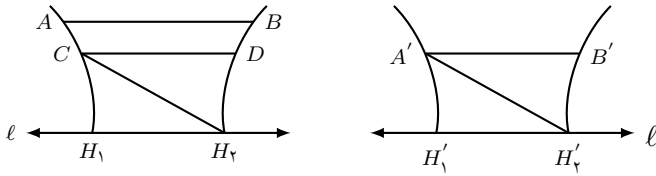


شکل ۹

یک خمیدگی است.» چنان که دیده می‌شود، این ویژگی میان دایره، خم حدی و خم هم‌فاصله مشترک است.

قضیه ۶.۴. دو خم هم‌فاصله با فاصله‌های متفاوت، خمیدگی‌های متفاوت دارند و هرچه فاصله بزرگتر باشد، خمیدگی بیشتر است.

اثبات. دو خم هم‌فاصله را به ترتیب با خط‌های مبنای l و l' و فاصله‌های d و d' در نظر می‌گیریم. سپس نقاط دلخواه A و B را بر خم هم‌فاصله‌ای که خط مبنای آن l است، اختیار می‌کنیم. اگر H_1 و H_2 به ترتیب، محل تلاقی شعاع‌های گذرنده از A و B با خط l باشند، آنگاه زاویه‌های $\angle H_1 H_2 B$ و $\angle H_2 H_1 A$ قائمه هستند و طول پاره‌خط‌های قابل انطباق $H_2 B$ و $H_1 A$ مساوی d است. حال نقاط H'_1 و H'_2 را بر l' چنان اختیار می‌کنیم که $H_1 H_2 \cong H'_1 H'_2$. سپس عمودهایی از H'_1 و H'_2 بر l' خارج می‌کنیم و نقاط A' و B' را به ترتیب، بر این دو عمود و در یک طرف l' چنان برمی‌گزینیم که دو پاره‌خط $H'_1 A'$ و $H'_2 B'$ دارای طول یکسان d' باشند. بدیهی است که A' و B' بر یک شاخه از خم هم‌فاصله‌ای که خط مبنای آن l' است، قرار دارند. حال فرض کنیم $d > d'$. پس نقاط C و D وجود دارند که C میان A و H_1 و D میان B و H_2 واقع است و $H_1 C \cong H'_1 A'$ و $H_2 D \cong H'_2 B'$. دو مثلث $H_1 H_2 C$ و $H'_1 H'_2 A'$ Δ به حالت (ض‌ض) قابل انطباق هستند و در نتیجه همین قابلیت انطباق را برای دو مثلث $H_2 D C$ و $H'_2 B' A'$ Δ خواهیم داشت. پس بنا بر جمع زاویه‌ها، $\angle H_1 C D \cong \angle H'_1 A' B'$ و $\angle H_2 D C \cong \angle H'_2 B' A'$. ادعا می‌کنیم $\angle H'_1 A' B' > \angle H_1 A B$ که در صورت درستی این ادعا، نامساوی $\angle H'_2 B' A' > \angle H_2 B A$ را نیز خواهیم داشت. فرض کنیم چنین نباشد. پس $\angle H'_1 A' B' \leq \angle H_1 A B$ و $\angle H'_2 B' A' \leq \angle H_2 B A$. در نتیجه $\angle H_1 C D \leq \angle H_1 A B$ و $\angle H_2 D C \leq \angle H_2 B A$ و بنابراین مجموع



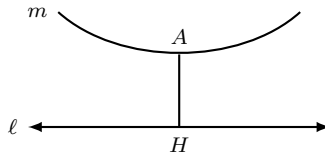
شکل ۱۰

اندازه‌های زاویه‌های چهارضلعی گوش $CDBA$ بزرگتر یا مساوی چهار قائمه خواهد بود که یک تناقض در هندسه هذلولوی است. با اثبات ادعا، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود (شکل ۱۰).

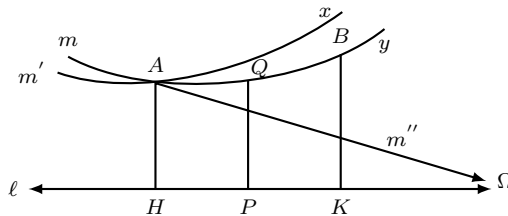
در شکل ۱۰، دو خم هم‌فاصله پیشگفته، رسم نشده‌اند و فقط خط مبنای l (یا l') و نقاط A و B (یا A' و B') را مشاهده می‌کنیم. به سادگی دیده می‌شود که در یک خم هم‌فاصله یا در خم‌های هم‌فاصله قابل انطباق، قوس‌های قابل انطباق، وترهای قابل انطباق دارند و وترهای قابل انطباق، منسوب به قوس‌های قابل انطباق هستند. بدیهی است که منظور ما وترهایی است که نقاط واقع بر یک شاخه را به هم وصل می‌کند. همچنین بنابر قضیه ۹.۲ و مشابه آنچه در مورد خم حدی دیدیم، خط راست نمی‌تواند خم هم‌فاصله را در بیش از دو نقطه قطع کند.

قضیه ۷.۴. اگر خطی خم هم‌فاصله را در یک نقطه قطع کند، آن را در یک نقطه دیگر نیز قطع خواهد کرد مگر اینکه بر آن، مماس یا با خط مبنای آن، به‌طور مجانبی موازی باشد.

اثبات. فرض کنیم l خط مبنا، A نقطه‌ای از خم هم‌فاصله و m خطی باشد که در A بر شعاع گذرنده از A عمود است. محل تلاقی شعاع گذرنده از A بر l را H می‌نامیم. پس خط \overrightarrow{AH} عمود مشترک دو خط l و m است، یعنی l و m به‌طور و اگر موازی هستند. پس اگر d فاصله خم هم‌فاصله باشد، آن‌گاه طول پاره‌خط AH برابر با d است و هیچ نقطه دیگری بر m وجود ندارد که فاصله عمودی آن از l مساوی d باشد. بنابراین m خم هم‌فاصله را فقط در A بریده است. پس m در A بر آن مماس است. در نتیجه خم هم‌فاصله را می‌توان مسیر عمود بر دسته محورهای آن دانست (شکل ۱۱). حال فرض کنیم A نقطه تلاقی خم هم‌فاصله و خط m باشد که با l به‌طور مجانبی موازی است. در این حالت چون هیچ دو نقطه‌ای واقع بر m از l به یک فاصله نیستند، تنها نقطه تلاقی m و خم هم‌فاصله خواهد بود. اکنون به بررسی حالتی می‌پردازیم که خط m خم هم‌فاصله را در نقطه A بریده است ولی نه در A بر خم مماس است و نه با l به‌طور مجانبی موازی است. اگر m بر l عمود و H نقطه تلاقی آنها باشد، آن‌گاه m شاخه دیگر خم هم‌فاصله را در نقطه‌ای مانند B قطع می‌کند. بدیهی است که $AH \cong BH$ ، $B \neq A$ و اثبات تمام است. در غیر این صورت، فرض کنیم خط



شکل ۱۱

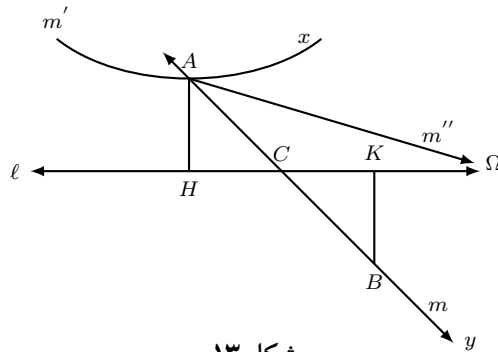


شکل ۱۲

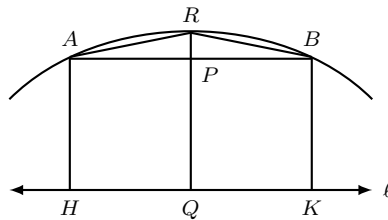
m' در A بر خم مماس و خط m'' بر A بگذرد و با l به طور مجانبی موازی باشد. همچنین فرض کنیم H پای عمود وارد از A بر l و نقطه آرمانی Ω محل تلاقی l و m'' باشند. نقطه x متمایز با A واقع بر m' و در همان طرفی از خط \overrightarrow{AH} که Ω در آن است، اختیار می‌کنیم. اگر m شامل نیم‌خطی مانند \overrightarrow{Ay} باشد که میان دو نیم‌خط \overrightarrow{Ax} و \overrightarrow{AH} قرار گرفته است، آن‌گاه یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:

حالت اول: نیم‌خط \overrightarrow{Ay} میان \overrightarrow{Ax} و $\overrightarrow{A\Omega}$ است. در این صورت، خط m با l به طور واگرا موازی و با l دارای عمودم مشترک است. اگر نقاط P و Q به ترتیب، محل تلاقی l و m با عمودم مشترکشان باشد و نقطه B واقع بر نیم‌خط متقابل \overrightarrow{QA} را چنان اختیار کنیم که $QA \cong QB$ ، آن‌گاه $AH \cong BK$ که در آن، K پای عمود وارد از B بر l است. پس بر خم هم‌فاصله قرار دارد و لذا خط m خم را در نقطه دیگری مانند B قطع کرده است (شکل ۱۲).

حالت دوم: نیم‌خط \overrightarrow{Ay} میان \overrightarrow{AH} و $\overrightarrow{A\Omega}$ است. در این صورت، خط m خط l را در نقطه‌ای مانند C قطع می‌کند. نقطه B واقع بر نیم‌خط متقابل \overrightarrow{CA} را چنان اختیار می‌کنیم که $CA \cong CB$. سپس از B بر l عمودی وارد می‌کنیم و پای عمود را K می‌نامیم. بدیهی است که دو مثلث $\triangle CHA$ و $\triangle CKB$ به حالت (زرزض) قابل انطباق هستند و در نتیجه $AH \cong BK$ ؛ یعنی B بر خم هم‌فاصله قرار دارد. پس خط m خم هم‌فاصله را در نقطه دیگری مانند B قطع کرده است. بدیهی است که در این حالت، هر یک از نقاط A و B بر یک شاخه از خم قرار گرفته است (شکل ۱۳). حال اگر خط m شامل نیم‌خطی باشد که میان نیم‌خط \overrightarrow{Ax} و نیم‌خط متقابل \overrightarrow{AH} قرار گرفته است، آن‌گاه



شکل ۱۳

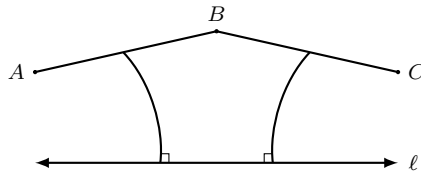


شکل ۱۴

طرفی از خط \overrightarrow{AH} را که Ω در آن نیست، در نظر می‌گیریم. نقطه آرمانی دیگر خط l را که در این طرف واقع است، Ω' می‌نامیم و خط $\overrightarrow{A\Omega'}$ را که با l به‌طور مجانبی موازی است، m'' نامگذاری و مشابه قبل عمل می‌کنیم. \square

قضیه ۸.۴. خط عمود بر وسط وتر AB از خم هم‌فاصله شعاع است و قوس متناظر آن وتر را نصف می‌کند.

اثبات. فرض کنیم l خط مبنا و A و B دو نقطه از یک خم هم‌فاصله باشند که بر یک شاخه از آن قرار گرفته‌اند. همچنین فرض کنیم H و K به‌ترتیب، پای عمودهای وارد از A و B بر l ، P وسط وتر AB و Q وسط پاره‌خط HK باشد. چون $AH \cong BK$ ، به‌سادگی دیده می‌شود که خط \overrightarrow{PQ} بر هر دو خط \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{HK} عمود است و لذا عمود منصف وتر AB ، شعاع است. حال اگر نقطه R محل تقاطع این شعاع با خم هم‌فاصله باشد، آن‌گاه از قابلیت انطباق دو مثلث RPA و RPB نتیجه می‌گیریم که $RA \cong RB$. اما قوس‌های متناظر وترهای قابل انطباق، قابل انطباق هستند. پس دو قوس RA و RB قابل انطباق خواهند بود (شکل ۱۴). \square



شکل ۱۵

اکنون می‌توان چگونگی ترسیم یک خم هم‌فاصله را با داشتن سه نقطه از آن بیان کرد.

قضیه ۹.۴. هر خم هم‌فاصله با داشتن سه نقطه از آن کاملاً مشخص می‌شود.

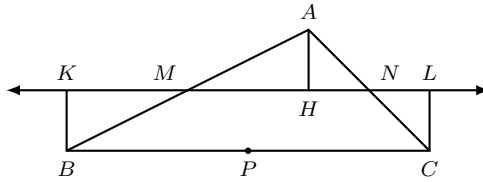
اثبات. فرض کنیم A ، B و C سه نقطه از یک خم هم‌فاصله باشند. بنابر قضیه ۹.۲، این سه نقطه نمی‌توانند بر یک استقامت اقلیدسی قرار گیرند. همچنین بنابر قضیه ۸.۴، عمودمنصف‌های دو وتر AB و BC شعاع هستند. در نتیجه به‌طور و اگر موازی هستند و عمودمشتک آنها، خط مبنای خم هم‌فاصله است. خط مبنا را ℓ و فاصله را d می‌نامیم. بدیهی است که d فاصله عمودی نقطه A (B یا C) از ℓ است. با داشتن ℓ و d نقاط دیگر این خم هم‌فاصله به‌دست می‌آیند (شکل ۱۵). \square

در پایان، نشان می‌دهیم که اگر سه نقطه بر یک استقامت اقلیدسی نباشند، سه خم هم‌فاصله متفاوت وجود دارند که این سه نقطه بر آنها قرار دارند.

قضیه ۱۰.۴. سه نقطه ناواقع بر یک خط، بر سه خم هم‌فاصله متفاوت قرار دارند.

اثبات. فرض کنیم A ، B و C بر یک استقامت اقلیدسی نباشند. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم M ، N و P به‌ترتیب، وسط ضلع‌های AB ، AC و BC باشند. اگر پای عمودهای وارد از A ، B و C بر خط \overrightarrow{MN} را به‌ترتیب، H ، K و L بنامیم، آن‌گاه از دو قابلیت انطباق $\triangle AHM \cong \triangle BKM$ و $\triangle AHN \cong \triangle CLN$ داریم $BK \cong AH \cong CL$. در نتیجه نقاط A ، B و C بر خم هم‌فاصله‌ای با خط مبنای \overrightarrow{MN} و فاصله d قرار دارند که در آن، d طول پاره‌خط‌های قابل انطباق مذکور است. به روش مشابه، این سه نقطه بر دو خم هم‌فاصله دیگر با خط‌های مبنای \overrightarrow{MP} و \overrightarrow{NP} نیز قرار خواهند داشت (شکل ۱۶). \square

نتیجه ۱۱.۴. چهار دایره به معنی عام بر رأس‌های یک مثلث می‌گذرند. یکی از آنها همان دایره محیطی مثلث است که مرکز آن یک نقطه عادی است و سه دایره دیگر، سه خم هم‌فاصله (آبردایره) هستند که دارای مراکز فرآرامانی هستند و وجود آنها در قضیه ۱۰.۴ ثابت شد. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که چهار دایره به معنی عام وجود دارند که بر اضلاع یک مثلث مماس هستند.



شکل ۱۶

مراجع

- [۱] ماروین جی. گرینبرگ، هندسه‌های اقلیدسی و ناقلیدسی، ترجمه محمدهادی شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۸۹.
- [2] Beardon, A. F., *An Introduction to Hyperbolic Geometry, in Ergodic Theory, Symbolics Dynamics and Hyperbolic Spaces*, T. Bedford, M. Keane, C. Series (eds.), Oxford University Press, Oxford, 1991.
- [3] Bonola, R., *Non-Euclidean Geometry*, Dover Publication Inc., New York, 1955.
- [4] Coxeter H. S. M., *Non-Euclidean Geometry*, Mathematical Exposition 2, University of Toronto Press, Toronto, 1978.
- [5] Greenberg, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, Second Edition, W. H. Freeman and Co., 1979.
- [6] Iversen, B., *Hyperbolic Geometry*, London Mathematical Society Student Texts 25, Cambridge, 1992.
- [7] Kelly, P. J., Matthews, G., *The Non-Euclidean Hyperbolic Plane*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [8] Redei, L., *Fouction of Euclidean and Non-Euclidean Geometries According to F. Klein*, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics 97, Pergamon Press, Oxford, 1968.
- [9] Rosenfeld, B. A., *A History of Non-Euclidean Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [10] Wolfe, H. E., *Introduction to Non-Euclidean Geometry*, Holt. Rinehart and Winston, 1945.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۶/۱۲/۱۲؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۵/۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۵/۴

منیره پیمان: دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

رایانامه: Paimann_m@scu.ac.ir