

## عکس قضیه شارکوفسکی

مریم ربیعی و منیره اکبری

### چکیده

هدف این مقاله، مطالعه عکس قضیه شارکوفسکی است که می‌گوید به ازای هر عدد طبیعی  $p$  تابع پیوسته حقیقی روی خط حقیقی وجود دارد که نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب اولیه  $p$  دارد ولی به ازای هر عدد طبیعی  $q$  که در ترتیب شارکوفسکی قبل از  $p$  ظاهر شده باشد، نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب اولیه  $q$  ندارد. در این مقاله، ویژگی‌های چنین تابع‌هایی را بررسی می‌کنیم و آنها می‌سازیم.

### ۱. سرآغاز

الکساندر میکولایویچ شارکوفسکی<sup>۱</sup> در سال ۱۹۶۴ در [۲۲] قضیه‌ای بسیار مهم درباره دوره تناوب نقاط تناوبی توابع پیوسته حقیقی روی خط حقیقی ثابت کرد. او در سال ۱۹۶۵ مقاله دیگری [۲۳] منتشر کرد که به نوعی کامل‌کننده [۲۲] بود. هر دو مقاله به زبان روسی نوشته شده بودند و به همین دلیل، تا مدت‌ها ناشناخته ماندند.

فرض کنیم اعداد طبیعی به این‌گونه مرتب شده‌اند که ابتدا اعداد فرد بزرگتر از ۱ به ترتیب صعودی در سطر اول نوشته شده‌اند، سپس در سطر دوم، ۲ برابر اعداد سطر اول و با ادامه این روند در سطر  $l + 1$  برابر اعداد سطر اول نوشته شده باشند و در نهایت توان‌های ۲ به ترتیب نزولی مرتب شده باشند، به طوری که ۲ و سپس ۱ آخرین اعداد در این ترتیب باشند. این ترتیب اعداد طبیعی که در زیر

---

عبارات و کلمات کلیدی: ترتیب شارکوفسکی؛ دور اشتفان؛ دوره تناوب؛ قضیه شارکوفسکی؛ تابع دو برابر ساز.

<sup>۱</sup>Alexander Mikolayevich Sharkovsky

نشان داده شده است، ترتیب شارکوفسکی<sup>۱</sup> نامیده می‌شود.

$3 >$	$5 >$	$7 >$	$\dots >$	$2n-1 >$	$2n+1 >$	$\dots$
$2 \times 3 >$	$2 \times 5 >$	$2 \times 7 >$	$\dots >$	$2 \times (2n-1) >$	$2 \times (2n+1) >$	$\dots$
$2^2 \times 3 >$	$2^2 \times 5 >$	$2^2 \times 7 >$	$\dots >$	$2^2 \times (2n-1) >$	$2^2 \times (2n+1) >$	$\dots$
$\dots >$	$\dots >$	$\dots >$	$\dots >$	$\dots >$	$\dots >$	$\dots$
$2^l \times 3 >$	$2^l \times 5 >$	$2^l \times 7 >$	$\dots >$	$2^l \times (2n-1) >$	$2^l \times (2n+1) >$	$\dots$
$2^{l+1} \times 3 >$	$2^{l+1} \times 5 >$	$2^{l+1} \times 7 >$	$\dots >$	$2^{l+1} \times (2n-1) >$	$2^{l+1} \times (2n+1) >$	$\dots$
$\dots >$	$\dots >$	$\dots >$	$\dots >$	$\dots >$	$\dots >$	$\dots$
$\dots >$	$2^{n+1} >$	$2^n >$	$\dots >$	$\dots >$	$2^2 > 2^1 > 1$	

اکنون فرض کنیم  $I$  یک بازه یا خط حقیقی است. قضیه کامل شارکوفسکی شامل سه بخش زیر است:

**قضیه ۱.۱.** فرض کنیم  $f : I \rightarrow I$  تابعی پیوسته باشد و  $q$  و  $p$  دو عدد طبیعی باشند که  $q > p$ . در این صورت، اگر  $f$  نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب اولیه  $q$  داشته باشد، آنگاه نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب اولیه  $p$  نیز دارد.

**قضیه ۲.۱.** فرض کنیم  $q$  و  $p$  دو عدد طبیعی باشند که  $q > p$ . در این صورت، تابع حقیقی پیوسته  $f : I \rightarrow I$  وجود دارد که نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب اولیه  $p$  دارد اما هیچ نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب اولیه  $q$  ندارد.

**قضیه ۳.۱.** تابع حقیقی پیوسته  $f : I \rightarrow I$  وجود دارد به طوری که به ازای هر  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب اولیه  $2^n$  دارد اما هیچ نقطه تناوبی با دوره تناوب دیگری ندارد.

شارکوفسکی در [۲۲] قضیه ۱.۱ را ثابت کرد. استدلال‌های ذکر شده در این مقاله، قضیه ۲.۱ را نیز ثابت می‌کند. او در [۲۳] قضیه ۲.۱ را ثابت کرد (برای کسب اطلاعات بیشتر در این زمینه، به [۲۰] مراجعه کنید). امروزه عموماً قضیه ۱.۱ را قضیه شارکوفسکی و قضیه‌های ۲.۱ و ۳.۱ را عکس قضیه شارکوفسکی می‌دانند [۱۲، ۱۷].

قضیه شارکوفسکی تا سال ۱۹۷۵ ناشناخته بود. توجه به قضیه شارکوفسکی در واقع، از سال ۱۹۷۵ بعد از انتشار مقاله لی و یورک [۱۹] شروع شد که شامل حالت خاص قضیه شارکوفسکی است؛ هرچند نویسندگان مقاله در زمان نوشتن آن، از قضیه شارکوفسکی اطلاع نداشتند. مدتی پس از انتشار مقاله [۱۹]، یورک در کنفرانسی در برلین شرقی شرکت کرد. در آنجا طی ملاقاتی با شارکوفسکی، از نتایج وی درباره دوره‌های تناوب نقاط تناوبی توابع پیوسته روی بازه‌های حقیقی مطلع شد [۱۱]. لی و یورک نشان دادند که اگر تابع پیوسته حقیقی  $f$  نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب

<sup>۱</sup> Sharkovsky ordering

اولیه ۳ داشته باشد، آن‌گاه به‌ازای هر عدد طبیعی  $n$ ، نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب اولیه  $n$  دارد. این مطلب با استفاده از قضیه شارکوفسکی بدیهی است، زیرا در ترتیب شارکوفسکی عدد ۳ قبل از اعداد طبیعی دیگر آمده است. چند سال بعد از انتشار مقاله لی و یورک، اثباتی از قضیه شارکوفسکی (قضیه ۱۰.۱) توسط اشتفان<sup>۱</sup> منتشر گردید [۲۵]. سپس اثبات‌های دیگری از این قضیه تقریباً همزمان توسط ریاضیدانان زیادی منتشر شد. برای مثال، به [۹]، [۱۰]، [۱۸] و [۲۶] مراجعه کنید. مقاله شارکوفسکی [۲۲] در سال ۱۹۹۵ به زبان انگلیسی ترجمه شد [۲۴].

در اثبات قضیه شارکوفسکی تنها از قضیه مقدار میانی که نتیجه پیوستگی تابع روی خط حقیقی که یک میدان مرتب کامل است، استفاده می‌شود. بنابراین قضیه شارکوفسکی ممکن است روی سایر فضاها برقرار نباشد. برای مثال، اگر  $f$  تابعی پیوسته روی  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  (دایره واحد) با ضابطه (پیمانه ۱)  $f(\theta) = \theta + \frac{p}{q}$  باشد که در آن،  $p$  و  $q$  اعداد صحیح ناصفر و نسبت به هم اول هستند، آن‌گاه همه نقاط، تناوبی هستند و دوره تناوب اولیه آنها  $q$  است. همچنین شرط پیوستگی  $f$  نیز ضروری است. برای مثال، برای تابع  $f: [0, 3] \rightarrow [0, 3]$  با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ x - 2 & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

همه نقاط بجز ۰، تناوبی با دوره تناوب اولیه ۳ هستند و ۰ نهایتاً تناوبی با دوره تناوب اولیه ۳ است. با توجه به ترتیب شارکوفسکی، اگر تابع پیوسته حقیقی  $f$  تعداد متناهی نقطه تناوبی داشته باشد، دوره تناوب این نقاط، توان‌هایی از ۲ است. همچنین در قضیه شارکوفسکی، ترتیب قرار گرفتن نقاط مدار تناوبی روی خط حقیقی (چگونگی جایگشت نقاط مدار تناوبی) مهم است. همین امر موجب بررسی جایگشت‌های متناظر با مدارهای تناوبی تابع‌های پیوسته شده است [۳، ۵، ۶، ۷]. به‌طور کلی، بررسی قضیه شارکوفسکی منجر به پیشرفت دینامیک ترکیباتی شده است. برای مشاهده تعمیمی از قضیه شارکوفسکی روی فضاهاى توپولوژیک، به [۲۱] و برای مطالعه تعمیمی از آن برای توابع چندمقداری، به [۱، ۲] مراجعه کنید. مقاله‌های متعددی درباره قضیه شارکوفسکی در نشریه ماهنامه ریاضی آمریکا<sup>۲</sup> منتشر شده است؛ از جمله [۴، ۱۱، ۱۳، ۱۴، ۲۰].

عکس قضیه شارکوفسکی (قضیه‌های ۲.۱ و ۳.۱) نیز مورد بررسی قرار گرفته است ولی در برخی از مراجع، بعضی از جزئیات اثبات، بیان نشده است [۱۲، ۱۶، ۱۷]. در این مقاله، هدف ما این است که عکس قضیه شارکوفسکی را با جزئیات کامل‌تر بررسی کنیم تا به نقش ترتیب اعداد حقیقی و پیوستگی تابع تأکید کنیم و با روش‌های ساختن توابع پیوسته با دوره‌های تناوب گوناگون، آشنا

<sup>۱</sup>Štefan <sup>۲</sup>The American Mathematical Monthly

شویم. بدین منظور به دسته‌بندی دوره‌های تناوب و بررسی ویژگی‌های هر دسته می‌پردازیم و سپس توابع پیوسته مورد نظر در عکس قضیه شارکوفسکی را می‌سازیم. با توجه به دسته‌بندی دوره‌های تناوب، از مفاهیمی مانند دور/شتفان<sup>۱</sup> و تابع دو برابر ساز<sup>۲</sup> استفاده می‌کنیم.

در بخش ۲ مفاهیم مقدماتی مورد نیاز بیان می‌شود و در بخش ۳ دوره‌های تناوب دسته‌بندی می‌شوند. روش‌های دیگری نیز برای اثبات عکس قضیه شارکوفسکی وجود دارد [۱۱] اما مزیت روش گفته‌شده در این مقاله، ساختنی بودن آن است. می‌توان تابع‌های گوناگونی ساخت که نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب اولیه<sup>۳</sup>  $2 \times 3$  دارند ولی هیچ نقطه‌ای با دوره تناوب اولیه<sup>۴</sup>  $2n+1$  ندارد. همچنین با استفاده از تابع دو برابر ساز، تابعی ساخته می‌شود که دوره تناوب نقاط تناوبی آن، دو برابر دوره تناوب نقاط تناوبی تابع داده شده است. چون روش ساختن تابع دو برابر ساز، منحصر به فرد نیست [۱۵]، می‌توان توابع متعددی با این ویژگی ساخت.

## ۲. مفاهیم مقدماتی

فرض کنیم  $f: X \rightarrow X$  و  $x \in X$ . مجموعه  $O_f(x) = \{x, f(x), \dots, f^n(x), \dots\}$  را که در آن،  $f^n = f \circ f^{n-1}$  و  $f^0 = Id$  مدار<sup>۴</sup>  $x$  تحت  $f$  می‌نامیم. نقطه<sup>۵</sup>  $x$  یک نقطه تناوبی<sup>۶</sup>  $f$  با دوره تناوب  $n$  است اگر  $f^n(x) = x$ . کوچکترین  $n$  با این ویژگی را دوره تناوب اولیه<sup>۷</sup>  $x$  می‌نامیم. در این حالت، مجموعه  $\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$  مدار نقطه تناوبی<sup>۶</sup>  $x$  یا یک  $n$ -دوره<sup>۸</sup> نامیده می‌شود. نقطه تناوبی<sup>۶</sup>  $x$  با دوره تناوب اولیه<sup>۷</sup> فرد  $n$  را یک دور/شتفان<sup>۱</sup> می‌نامیم اگر مدار آن دارای ترتیب<sup>۹</sup>

$$f^{n-1}(x) < f^{n-3}(x) < \dots < f^2(x) < x < f(x) < f^3(x) < \dots < f^{n-2}(x)$$

و یا ترتیب<sup>۱۰</sup>

$$f^{n-2}(x) < \dots < f^3(x) < f(x) < x < f^2(x) < \dots < f^{n-3}(x) < f^{n-1}(x)$$

باشد [۸]. اگر  $n = 1$  نقطه<sup>۵</sup>  $x$ ، نقطه ثابت<sup>۷</sup>  $f$  نامیده می‌شود.  $x$  را یک نقطه نهایتاً تناوبی<sup>۸</sup>  $f$  با دوره تناوب اولیه<sup>۷</sup>  $n$  می‌نامیم اگر  $x$  تناوبی نباشد ولی به ازای یک  $k \geq 1$ ،  $f^k(x)$  نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب اولیه<sup>۷</sup>  $n$  باشد. بدیهی است که اگر  $x$  یک نقطه تناوبی<sup>۶</sup>  $f$  با دوره تناوب  $n$  باشد، آن‌گاه  $n$  مضربی از دوره تناوب اولیه<sup>۷</sup>  $x$  است. همچنین اگر  $x$  یک نقطه تناوبی<sup>۶</sup>  $f$  با دوره تناوب اولیه<sup>۷</sup>  $n$  باشد، آن‌گاه به ازای هر  $t$ ،  $1 \leq t \leq n-1$ ،  $f^t(x)$  نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب اولیه<sup>۷</sup>  $n$  است.

<sup>۱</sup>Štefan cycle <sup>۲</sup>doubling function <sup>۳</sup>orbit <sup>۴</sup>periodic point <sup>۵</sup>prime period <sup>۶</sup> $n$ -cycle <sup>۷</sup>fixed point <sup>۸</sup>eventually periodic

گزاره ۱۰.۲ ([۱۲]). گیریم  $f$  تابعی پیوسته و  $I$  بازه‌ای بسته و کراندار باشد به طوری که  $f(I) \supseteq I$ . در این صورت،  $f$  دستکم یک نقطه ثابت در  $I$  دارد.

گزاره ۲۰.۲ ([۱۷]). فرض کنیم  $f$  تابعی پیوسته و  $I$  و  $J$  بازه‌هایی بسته و کراندار باشند به طوری که  $f(I) \supseteq J$ . در این صورت، بازه بسته  $A \subseteq I$  موجود است به طوری که  $f(A) = J$ .

برای نمایش  $J$  از  $f(I) \supseteq J$  از نماد  $I \rightarrow J$  و همچنین برای نمایش  $f(x) = y$  از نماد  $x \mapsto y$  استفاده می‌کنیم.

نتیجه ۳۰.۲ ([۱۷]). فرض کنیم  $f$  تابعی پیوسته و  $I_i$ ،  $1 \leq i \leq n$ ، بازه‌های بسته و کراندار باشند به طوری که

$$I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_n \rightarrow I_1.$$

در این صورت، نقطه تناوبی  $x \in I_1$  با دوره تناوب  $n$  وجود دارد که به ازای هر  $j$ ،  $1 \leq j \leq n-1$ ، داریم  $f^j(x) \in I_{j+1}$ .

### ۳. عکس قضیه شارکوفسکی

در این بخش، به بررسی عکس قضیه شارکوفسکی می‌پردازیم. نخست برای  $p \in \mathbb{N}$  به بررسی ویژگی‌های تابع پیوسته‌ای می‌پردازیم که نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب اولیه  $p$  دارد ولی به ازای هر  $q > p$  نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب اولیه  $q$  ندارد. با توجه به قضیه شارکوفسکی، کافی است دوره‌های تناوب را به صورت زیر دسته‌بندی کنیم.

حالت ۱: به ازای هر  $n \geq 2$ ، تابع پیوسته  $f$  وجود دارد که نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب اولیه  $2n+1$  دارد ولی هیچ نقطه‌ای با دوره تناوب اولیه  $2n-1$  ندارد؛

حالت ۲: به ازای هر  $n \geq 1$ ، تابع پیوسته  $f$  وجود دارد که نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب اولیه  $2 \times 3$  دارد ولی هیچ نقطه‌ای با دوره تناوب اولیه  $2n+1$  ندارد؛

حالت ۳: به ازای هر  $n \geq 2$  و هر  $l \geq 1$ ، تابع پیوسته  $f$  وجود دارد که نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب اولیه  $2^l \times (2n+1)$  دارد ولی هیچ نقطه‌ای با دوره تناوب اولیه  $2^l \times (2n-1)$  ندارد؛

حالت ۴: به ازای هر  $l \geq 1$ ، تابع پیوسته  $f$  وجود دارد که نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب اولیه  $2^{l+1} \times 3$  دارد ولی به ازای هر  $n \geq 1$ ، هیچ نقطه‌ای با دوره تناوب اولیه  $2^l \times (2n+1)$  ندارد؛

حالت ۵: به ازای هر  $n \geq 0$ ، تابع پیوسته  $f$  وجود دارد که نقطه‌های تناوبی با دوره تناوب اولیه  $2^n$  دارد ولی هیچ نقطه‌ای با دوره تناوب اولیه  $2^{n+1}$  ندارد؛  
 حالت ۶: تابع پیوسته  $f$  وجود دارد که به ازای هر  $m \geq 0$ ، نقطه‌های تناوبی با دوره تناوب اولیه  $2^m$  دارد ولی هیچ نقطه‌ای با دوره تناوب اولیه  $(2n+1) \times 2^l$  به ازای هر  $l \geq 0$  و هر  $n \geq 1$  ندارد.

**۱.۳. بررسی حالت ۱.** فرض می‌کنیم به ازای  $n \geq 2$ ، تابع پیوسته  $f$  نقطه‌های تناوبی با دوره تناوب اولیه  $2n+1$  دارد ولی هیچ نقطه تناوبی با دوره تناوب اولیه  $2n-1$  ندارد. اعضای این مدار تناوبی را به ترتیب صعودی به صورت

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{2n+1}$$

مرتب می‌کنیم. روشن است که  $x_1 > f(x_1)$  و  $f(x_{2n+1}) < x_{2n+1}$ . فرض می‌کنیم  $i$  بزرگترین اندیسی باشد که  $x_i > f(x_i)$ . بنابراین  $f(x_{i+1}) < x_{i+1}$ . لذا داریم

$$f(x_{i+1}) \leq x_i < x_{i+1} \leq f(x_i). \quad (۱.۳)$$

قرار می‌دهیم  $I_1 = [x_i, x_{i+1}]$ . در این صورت، با توجه به (۱.۳) و با استفاده از قضیه مقدار میانی، داریم

$$I_1 \subseteq [f(x_{i+1}), f(x_i)] \subseteq f[x_i, x_{i+1}] = f(I_1). \quad (۲.۳)$$

لذا  $I_1 \rightarrow I_1$ . چون دوره تناوب  $x_i$  دو نیست،  $f(x_i) = x_{i+1}$  و  $f(x_{i+1}) = x_i$  هم‌زمان اتفاق نمی‌افتد. با توجه به (۱.۳)، داریم  $x_{i+1} > f(x_i)$  یا  $x_i < f(x_{i+1})$  که در هر دو صورت،  $f(I_1)$  شامل نقطه دیگری از مدار تناوبی متمایز از  $x_i$  و  $x_{i+1}$  است. بنابراین  $f(I_1)$  شامل بازه دیگری به صورت  $[x_j, x_{j+1}]$  متمایز از  $I_1$  است. آن را  $I_2$  می‌نامیم. در این صورت،

$$I_1 \neq I_2, \quad f(I_1) \supset I_2. \quad (۳.۳)$$

قرار می‌دهیم  $C_1 = I_1$  و فرض می‌کنیم اجتماع همه بازه‌هایی به صورت  $[x_j, x_{j+1}]$  باشد که  $f(C_1)$  شامل آنها است. پس با توجه به (۲.۳) و (۳.۳)، داریم

$$I_1 \cup I_2 \subseteq C_2 \subseteq f(C_1).$$

فرض می‌کنیم به ازای  $k \geq 2$ ،  $C_1, \dots, C_k$  ساخته شده باشند به طوری که

$$I_1 \cup I_2 \subseteq C_2 \subseteq \dots \subseteq C_{k-1} \subseteq C_k \subseteq f(C_{k-1}). \quad (۴.۳)$$

اکنون  $C_{k+1}$  را اجتماع همه بازه‌های  $[x_j, x_{j+1}]$  می‌گیریم که زیرمجموعه تصویر بازه‌ای به صورت  $[x_l, x_{l+1}] \subseteq C_k$  هستند. بنابر (۴.۳)،  $C_k \subseteq f(C_{k-1}) \subseteq f(C_k)$  و لذا

$$C_k \subseteq C_{k+1} \subseteq f(C_k).$$

به علاوه، با توجه به روش ساخت  $C_k$  ها، برای هر بازه  $I_{j_k}$  به صورت  $[x_j, x_{j+1}]$  در  $C_k$ ،  $k \geq 2$  دنباله

$$I_1 \rightarrow I_{j_2} \rightarrow \dots \rightarrow I_{j_{k-1}} \rightarrow I_{j_k}$$

موجود است به طوری که به ازای  $k$ ،  $2 \leq i \leq k$ ،  $I_{j_i} \subseteq C_i$ .

چون  $2n$  بازه به صورت  $[x_j, x_{j+1}]$  داریم،  $l \leq 2n$  وجود دارد به طوری که  $C_l = C_{l+1}$  بنابراین  $C_l = [x_1, x_{2n+1}]$ . اگره دوره تناوب اولیه  $x_1$  کمتر از  $2n + 1$  خواهد بود. از طرف دیگر، چون  $2n + 1$  عددی فرد است، اگر  $a$  نقطه میانی  $I_1$  باشد، تعداد نقاط مدار  $x_1$  در دو طرف  $a$  با هم برابر نیست. بنابراین دو نقطه متوالی  $x_j$  و  $x_{j+1}$  در یک طرف  $a$  وجود دارند به طوری که  $f(x_j)$  و  $f(x_{j+1})$  در دو طرف  $a$  واقع هستند. در این حالت، قرار می‌دهیم  $I_t = [x_j, x_{j+1}]$  بنابراین  $I_1 \subset f(I_t)$  و لذا  $I_t \rightarrow I_1$ . با توجه به این بحث، دنباله

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_t \rightarrow I_1 \quad (۵.۳)$$

وجود دارد. فرض کنیم

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_t \quad (۶.۳)$$

یک دنباله منیمال<sup>۱</sup> باشد؛ یعنی  $I_k \rightarrow \dots \rightarrow I_k$ ،  $k \geq 1$ ، در دنباله (۶.۳) ظاهر نشده باشد. این فرض امکان پذیر است، زیرا در صورت ظهور چنین دنباله‌ای می‌توانیم  $I_k$  را جایگزین آن دنباله کنیم. برای  $i$  و  $j$  که  $1 \leq i, j \leq t$  و  $i \neq j$  در (۵.۳) داریم  $I_i \neq I_j$ . اکنون نشان می‌دهیم که  $t = 2n$ . روشن است که  $t \leq 2n$ . حال اگر  $t < 2n$ ، دنباله

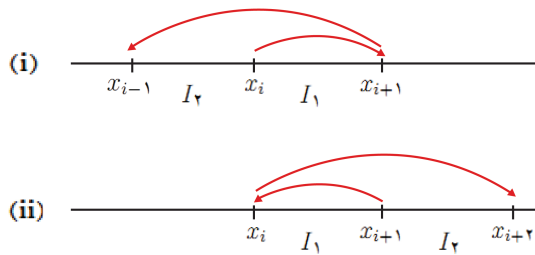
$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_t \rightarrow I_1 \rightarrow \underbrace{I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1}_{\text{بار } 2n-t-1}$$

<sup>۱</sup>minimal sequence

را در نظر می‌گیریم. از نتیجه ۳.۲ و مینیمال بودن دنباله (۶.۳)، وجود یک نقطه تناوبی با دوره تناوب اولیه  $2n - 1$  حاصل می‌شود که تناقض است. پس  $t = 2n$ . بنابراین دنباله

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_{2n-1} \rightarrow I_{2n} \rightarrow I_1. \quad (7.3)$$

یک دنباله مینیمال است که در آن، تمام بازه‌های به شکل  $[x_j, x_{j+1}]$  که  $1 \leq j \leq 2n$  وجود دارند. لذا  $f(I_1)$  تنها شامل  $I_1$  و  $I_2$  است. در نتیجه فقط یکی از دو حالت زیر می‌تواند اتفاق بیفتد (شکل ۱).



شکل ۱. حالت‌های ممکن قرار گرفتن  $I_1$  و  $I_2$  در کنار هم.

$$(i) \quad I_2 = [x_{i-1}, x_i], f(x_{i+1}) = x_{i-1}, f(x_i) = x_{i+1}$$

$$(ii) \quad I_2 = [x_{i+1}, x_{i+2}], f(x_{i+1}) = x_i, f(x_i) = x_{i+2}$$

در ادامه نشان می‌دهیم در هر دو حالت، یک دور اشتغال داریم. فرض می‌کنیم حالت (i) برقرار باشد. بررسی حالت (ii) به‌طور مشابه انجام می‌پذیرد. با استقرا نشان می‌دهیم که به‌ازای  $0 \leq \ell \leq n - 1$  داریم

$$f(x_{i-\ell}) = x_{i+\ell+1}, f(x_{i+\ell+1}) = x_{i-\ell-1},$$

$$I_{2\ell+1} = [x_{i+\ell}, x_{i+\ell+1}], I_{2\ell+2} = [x_{i-\ell-1}, x_{i-\ell}].$$

با توجه به حالت (i)، روابط بالا برای  $\ell = 0$  برقرار است. بگیریم این روابط به‌ازای  $0 \leq \ell \leq k - 1$  برقرار باشد. به‌ویژه برای  $\ell = k - 1$  داریم

$$f(x_{i-k+1}) = x_{i+k}, f(x_{i+k}) = x_{i-k},$$

$$I_{2k-1} = [x_{i+k-1}, x_{i+k}], I_{2k} = [x_{i-k}, x_{i-k+1}].$$



با توجه به مینیمال بودن (۷.۳) و عدم وجود نقطه تناوبی با دوره تناوب اولیه  $۱ - ۲n$ ،  $f(I_{2k})$  باید تنها شامل  $I_{2k+1}$  باشد. پس بنابر  $x_{i+k} = f(x_{i-k+1})$ ، باید داشته باشیم

$$f(x_{i-k}) = x_{i+k+1}, I_{2k+1} = [x_{i+k}, x_{i+k+1}].$$

همچنین  $f(I_{2k+1})$  باید تنها شامل  $I_{2k+2}$  باشد که با توجه به  $f(x_{i+k}) = x_{i-k}$ ، باید داشته باشیم

$$f(x_{i+k+1}) = x_{i-k-1}, I_{2k+2} = [x_{i-k-1}, x_{i-k}].$$

بنابراین به ازای  $l = n - 1$  داریم

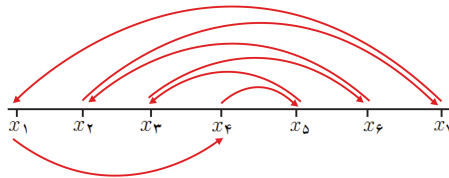
$$f(x_{i-n+1}) = x_{i+n}, f(x_{i+n}) = x_{i-n}, \quad (۸.۳)$$

$$I_{2n-1} = [x_{i+n-1}, x_{i+n}], I_{2n} = [x_{i-n}, x_{i-n+1}]. \quad (۹.۳)$$

از سوی دیگر، با توجه به نحوه نامگذاری  $I_j$ ها باید  $I_n = [x_1, x_2]$ . از مقایسه با (۹.۳) نتیجه می‌گیریم که  $i - n = 1$  و با جایگذاری در (۸.۳)، به دست می‌آوریم  $f(x_2) = x_{2n+1}$  و  $f(x_{2n+1}) = x_1$  به این ترتیب،

$$x_{n+1} \mapsto x_{n+2} \mapsto x_n \mapsto x_{n+3} \mapsto x_{n-1} \mapsto \dots \mapsto x_2 \mapsto x_{2n+1} \mapsto x_1$$

و در نتیجه  $f(x_1) = x_{n+1}$ ؛ یعنی یک دور اشتفان داریم (به ازای  $n = 3$  شکل ۲ را ببینید). توجه



شکل ۲. مدار نقطه  $x_1$  در حالت  $n = 3$  که یک دور اشتفان را نشان می‌دهد.

کنید که در هر دو حالت (i) و (ii) داریم

$$f(I_{2n}) \supseteq I_1 \cup I_3 \cup I_5 \cup \dots \cup I_{2n-1}.$$

اکنون با فرض  $n \geq 2$ ، با توجه به مطالب ذکر شده، تابعی می‌سازیم که یک نقطه تناوبی با دوره تناوب اولیه  $۱ + 2n$  داشته ولی هیچ نقطه تناوبی با دوره تناوب اولیه  $۱ - 2n$  نداشته باشد.

فرض می‌کنیم به‌ازای  $0 \leq \ell \leq n-1$

$$I_{2\ell+1} = [n + \ell + 1, n + \ell + 2], \quad I_{2\ell+2} = [n - \ell, n - \ell + 1].$$

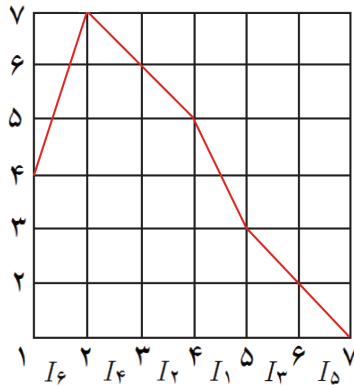
تابع پیوستهٔ تکه‌ای-خطی<sup>۱</sup>

$$f : [1, 2n + 1] \rightarrow [1, 2n + 1]$$

را به‌گونه‌ای تعریف می‌کنیم که به‌ازای  $0 \leq \ell \leq n-1$

$$f(n + 1 - \ell) = n + \ell + 2, \quad f(n + \ell + 2) = n - \ell, \quad f(1) = n + 1$$

و تحدید نمودار  $f$  به هر زیربازهٔ  $I_j$ ، یک پاره‌خط باشد (در حالت  $n = 3$  شکل ۳ را ببینید). در نتیجه



شکل ۳. نمودار  $f$  به‌ازای  $n = 3$ .

$$f(I_1) = I_1 \cup I_2, \tag{10.3}$$

$$f(I_k) = I_{k+1}, \quad 2 \leq k \leq 2n - 1, \tag{11.3}$$

$$f(I_{2n}) = \bigcup_{\ell=0}^{n-1} I_{2\ell+1}. \tag{12.3}$$

توجه کنید که کافی است تحدید نمودار  $f$  به هر زیربازه، پیوسته باشد نه لزوماً یک پاره‌خط که ساده‌ترین تعریف است. اکنون نشان می‌دهیم که  $f$  هیچ نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب اولیهٔ  $2n - 1$  ندارد. با استفاده از (۱۰.۳) و (۱۱.۳)، داریم  $f(I_1) = \bigcup_{i=1}^{2n} I_i \supseteq I_1$  پس بنا بر گزارهٔ ۱.۲،  $f$  دارای

<sup>۱</sup>piecewise linear function

نقطه‌ای تناوبی مانند  $a$  با دوره تناوب  $1 - 2n$  در  $I_1$  است. همچنین بنابر (۱۰.۳)،  $f$  دارای یک نقطه ثابت مانند  $b$  در  $I_1$  است. بنابراین  $f^{2n-1}(b) = b$ . از طرفی، تابع  $f$  روی هر بازه  $I_j$  که  $j \neq 2n$ ، اکیداً نزولی است و روی  $I_{2n}$  اکیداً صعودی است. در نتیجه با توجه به روابط (۱۰.۳) و (۱۱.۳)،  $f^{2n-1}$  روی  $I_1$  اکیداً نزولی است. چون هر تابع اکیداً نزولی حداکثر یک نقطه ثابت دارد،  $a = b$ . پس دوره تناوب اولیه  $a$  برابر ۱ است. بنابراین  $f$  در  $I_1$  نقطه تناوبی با دوره تناوب اولیه  $1 - 2n$  ندارد.

حال گیریم  $f$  دارای نقطه‌ای تناوبی مانند  $c$  با دوره تناوب اولیه  $1 - 2n$  در  $I_{2n}$  باشد، یعنی

$$c = f^{2n-1}(c) \in I_{2n}. \quad (۱۳.۳)$$

با توجه به (۱۲.۳) و اینکه  $f$  در  $I_1$  نقطه تناوبی با دوره تناوب اولیه  $1 - 2n$  ندارد، نتیجه می‌گیریم که  $f(c) \in \bigcup_{\ell=1}^{n-1} I_{2\ell+1}$ . به استقرای ریاضی، فرض می‌کنیم رابطه  $f^{2l-1}(c) \in \bigcup_{\ell=1}^{n-1} I_{2\ell+1}$  برقرار است. از (۱۱.۳) نتیجه می‌گیریم که  $f^{2l}(c) \in \bigcup_{\ell=2}^n I_{2\ell}$ . بنابراین با استفاده از (۱۱.۳) و (۱۲.۳) به دست می‌آوریم  $f^{2l+1}(c) \in \bigcup_{\ell=1}^{n-1} I_{2\ell+1}$ . به ویژه  $f^{2n-1}(c) \in \bigcup_{\ell=1}^{n-1} I_{2\ell+1}$  که با (۱۳.۳) در تناقض است.

چون بنابر (۱۱.۳)، برای هر  $1 - 2n \leq k \leq 2n - 2$ ، داریم  $f^{2n-k}(I_k) = I_{2n}$ ، نقطه تناوبی با دوره تناوب  $1 - 2n$  در  $I_k$  نیز وجود ندارد. بنابراین تابع ساخته شده، نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب اولیه  $1 + 2n$  دارد ولی هیچ نقطه تناوبی با دوره تناوب اولیه  $1 - 2n$  ندارد.

**۲.۳. بررسی حالت ۲.** در این بخش، تابعی معرفی می‌کنیم که نقطه‌ای با دوره تناوب اولیه ۶ دارد اما دارای هیچ نقطه تناوبی با دوره تناوب اولیه فرد بزرگتر از ۱ نیست. نخست فرض کنیم  $f$  نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب اولیه زوج دارد ولی هیچ نقطه تناوبی با دوره تناوب اولیه فرد بزرگتر از ۱ ندارد و فرض کنیم اعضای این مدار تناوبی به صورت

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{2n}$$

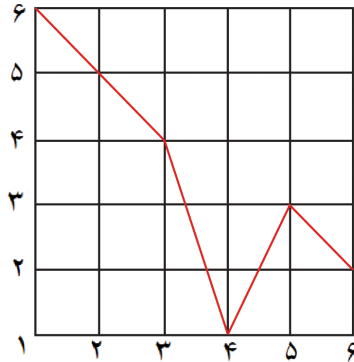
مرتب شده باشند. مشابه بحث زیربخش ۱.۳،  $I_1 = [x_i, x_{i+1}]$  را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که  $i$  بزرگترین اندیسی باشد که  $f(x_i) > x_i$ . پس  $f(x_{i+1}) < x_{i+1}$ . فرض می‌کنیم  $a$  نقطه میانی  $I_1$  باشد. اگر دو نقطه متوالی مدار  $x_1$  در یک طرف  $a$  موجود باشند به طوری که تصاویر آنها در دو طرف  $a$  قرار گیرد، دنباله مینیمال

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_t \rightarrow I_1 \quad (۱۴.۳)$$

را مشابه زیربخش ۱.۳ می‌سازیم. در این صورت، اگر  $t$  عددی فرد باشد، آنگاه دنباله (۱۴.۳) وگر نه دنباله

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_t \rightarrow I_1 \rightarrow I_1 \quad (15.3)$$

وجود یک نقطه تناوبی با دوره تناوب اولیه فرد را تضمین می‌کند که تناقض است.



شکل ۴. نمودار تابعی که نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب اولیه ۶ دارد ولی هیچ نقطه تناوبی با دوره تناوب اولیه فرد بزرگتر از ۱ ندارد.

لذا تعداد نقاط مدار  $x_1$  در دو طرف  $a$  مساوی هستند. بنابراین  $I_1 = [x_n, x_{n+1}]$  و به علاوه،

$$f(\{x_1, \dots, x_n\}) = \{x_{n+1}, \dots, x_{2n}\}.$$

در نتیجه

$$f(\{x_{n+1}, \dots, x_{2n}\}) = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

بنابراین برای تعریف تابعی که نقطه‌ای با دوره تناوب اولیه ۶ دارد اما دارای هیچ نقطه تناوبی با دوره تناوب اولیه فرد بزرگتر از ۱ نیست، باید

$$f(\{x_1, x_2, x_3\}) = \{x_4, x_5, x_6\} \quad \text{و} \quad f(\{x_4, x_5, x_6\}) = \{x_1, x_2, x_3\}$$

بر این اساس، تابع  $f: [1, 6] \rightarrow [1, 6]$  را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که

$$f(1) = 6, f(2) = 5, f(3) = 4, f(4) = 1, f(5) = 3, f(6) = 2 \quad (16.3)$$

و نمودار  $f$  در بازه  $[i, i+1]$  یک پاره‌خط باشد (شکل ۴). با توجه به اینکه

$$f([1, 3]) = [4, 6], \quad f([4, 6]) = [1, 3],$$

$f$  در  $[۱, ۳] \cup [۴, ۶]$  نقطه تناوبی با دوره تناوب فرد ندارد. به علاوه،  $(f|_{[۳, ۴]})' = -۳$ . لذا مدار هر نقطه واقع در  $[۳, ۴]$  (به استثنای نقطه ثابت) نهایتاً از این بازه خارج می‌شود و هیچ‌گاه مجدداً به آن برنمی‌گردد. پس  $f$  در بازه  $[۳, ۴]$  دارای هیچ نقطه تناوبی با دوره تناوب بزرگتر از ۱ نیست. لذا  $f$  نقطه‌ای با دوره تناوب اولیه ۶ دارد اما هیچ نقطه تناوبی با دوره تناوب اولیه فرد بزرگتر از ۱ ندارد. تابع تعریف شده در (۱۶.۳) یگانه نیست. هر تابع دیگری با این ویژگی که  $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$  تشکیل یک ۶-دور دهد،  $f(\{۱, ۲, ۳\}) = \{۴, ۵, ۶\}$  و  $f(\{۴, ۵, ۶\}) = \{۱, ۲, ۳\}$  می‌تواند در نظر گرفته شود. برای مثال، ۶-دور

$$۳ \mapsto ۴ \mapsto ۲ \mapsto ۵ \mapsto ۱ \mapsto ۶ \mapsto ۳$$

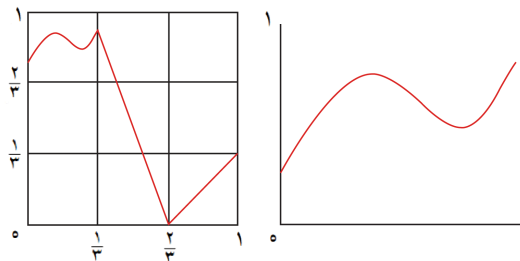
و یا ۶-دور

$$۴ \mapsto ۳ \mapsto ۵ \mapsto ۲ \mapsto ۶ \mapsto ۱ \mapsto ۴$$

نیز را می‌توان در نظر گرفت.

**۳.۳. بررسی حالت های ۳، ۴ و ۵.** فرض کنیم  $f : [۰, ۱] \rightarrow [۰, ۱]$  تابعی پیوسته باشد. ابتدا به معرفی تابع  $F$  که دوره تناوب نقاط تناوبی آن دو برابر دوره تناوب نقاط تناوبی  $f$  است، می‌پردازیم. تابع  $F$  را «دو برابر ساز  $f$ » می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم (شکل ۵).

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}f(3x) + \frac{2}{3} & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ -3F(\frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}) & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ x - \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (۱۷.۳)$$



شکل ۵. سمت راست نمودار  $f$  و سمت چپ دو برابر ساز آن را نشان می‌دهد.

توجه کنید که

$$F([0, \frac{1}{3}]) \subseteq [\frac{2}{3}, 1], \quad F([\frac{2}{3}, 1]) = [0, \frac{1}{3}] \quad (18.3)$$

و به علاوه،  $2 \leq \left| \left( F|_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]} \right)' \right|$ . لذا مدار هر نقطه واقع در  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  (به استثنای نقطه ثابت) نهایتاً از این بازه خارج می شود و هیچ گاه مجدداً به آن برنمی گردد. پس نقاط تناوبی با دوره تناوب بزرگتر از ۱ تابع  $F$ ، در صورت وجود، در  $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$  قرار دارند و دوره تناوب آنها عددی زوج است. با استفاده از (۱۷.۳) و استقرای ریاضی، لم زیر که رابطه بین مدار  $x$  تحت  $f$  و مدار  $\frac{x}{3}$  تحت دو برابر ساز آن را نشان می دهد، نتیجه می شود.

لم ۱۰.۳. فرض کنیم  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  تابعی پیوسته باشد و فرض کنیم  $F$  دو برابر ساز  $f$  باشد. در این صورت،

$$F^n\left(\frac{x}{3}\right) = \begin{cases} \frac{1}{3} f^{\frac{n+1}{3}}(x) + \frac{2}{3} & n \text{ عددی فرد است} \\ \frac{1}{3} f^{\frac{n}{3}}(x) & n \text{ عددی زوج است} \end{cases}$$

با توجه به لم ۱۰.۳ که نشان می دهد  $F^{2n}\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{3} f^n(x)$ ، نتیجه زیر را به دست می آوریم.

نتیجه ۲.۳. نقطه  $x$  نقطه تناوبی تابع  $f$  با دوره تناوب  $n$  است اگر و تنها اگر  $\frac{x}{3}$  نقطه تناوبی تابع دو برابر ساز آن با دوره تناوب  $2n$  باشد.

با استفاده از لم ۱۰.۳، نتیجه زیر نیز که در زیربخش ۴.۳ برای بررسی حالت ۶ به کار می رود، حاصل می شود.

نتیجه ۳.۳. فرض کنیم  $f$  و  $g$  تابعی پیوسته از  $[0, 1]$  به  $[0, 1]$  باشند و  $F$  دو برابر ساز  $f$  و  $G$  دو برابر ساز  $g$  باشد. اگر  $O_f(x) = O_g(x)$ ، آنگاه داریم  $O_F\left(\frac{x}{3}\right) = O_G\left(\frac{x}{3}\right)$ .

اکنون با توجه به مطالب بالا، به بررسی حالت های ۳، ۴ و ۵ می پردازیم.

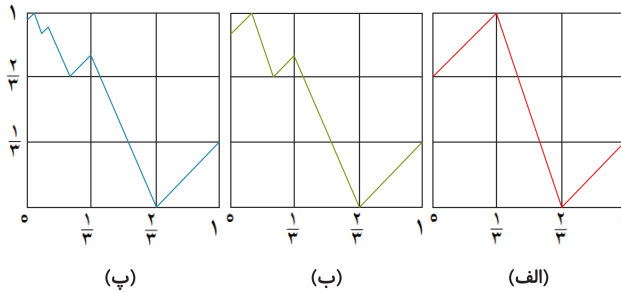
بررسی حالت ۳: در زیربخش ۱۰.۳ تابعی پیوسته ساختیم که نقطه ای تناوبی با دوره تناوب  $2n+1$  دارد ولی هیچ نقطه تناوبی با دوره تناوب  $2n-1$  ندارد. با  $l$  بار ساختن دو برابر ساز این تابع، تابعی پیوسته به دست می آید که نقطه ای تناوبی با دوره تناوب  $2^l \times (2n+1)$  دارد ولی هیچ نقطه تناوبی با دوره تناوب  $2^l \times (2n-1)$  ندارد.

**بررسی حالت ۴:** در زیربخش ۲.۳ تابعی پیوسته معرفی کردیم که نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب ۶ دارد ولی هیچ نقطه تناوبی با دوره تناوب  $2n + 1$  به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  ندارد. با  $l$  بار ساختن دو برابر ساز این تابع، تابعی پیوسته به دست می‌آید که نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب  $3 \times 2^{l+1} \times 6 = 2^l \times 6$  دارد ولی هیچ نقطه تناوبی با دوره تناوب  $(2n + 1) \times 2^l$  ندارد.

**بررسی حالت ۵:** فرض می‌کنیم  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  تابع همانی یا هر تابع پیوسته صعودی و پوشای دیگری باشد. دو برابر ساز  $f$  را  $n$  بار به دست می‌آوریم. بدین ترتیب تابعی به دست می‌آید که نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب اولیه  $2^n$  دارد ولی هیچ نقطه تناوبی با دوره تناوب اولیه  $2^{n+1}$  ندارد.

**۴.۳. بررسی حالت ۶.** در این بخش، تابعی پیوسته معرفی می‌کنیم که به ازای هر  $m \geq 0$ ، نقطه‌ای تناوبی با دوره تناوب اولیه  $2^m$  دارد ولی هیچ نقطه‌ای با دوره تناوب اولیه  $(2n + 1) \times 2^l$  به ازای هر  $l \geq 0$  و هر  $n \geq 1$  ندارد.

نخست فرض کنیم  $F_0 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  تابع همانی باشد. دنباله  $(F_n)_{n \geq 1}$  را که در آن،  $F_1$  دو برابر ساز  $F_0$  و به ازای  $n \geq 1$ ،  $F_{n+1}$  دو برابر ساز  $F_n$  است، در نظر می‌گیریم (شکل ۶). نشان می‌دهیم که این دنباله یک دنباله یکنواخت-کُشی<sup>۱</sup> است و در نتیجه دارای حد است. سپس ثابت می‌کنیم این تابع حدی، ویژگی‌های مورد نظر را دارد.



شکل ۶. از راست به چپ به ترتیب، نمودار توابع  $F_1$ ،  $F_2$  و  $F_3$

لم ۴.۳. فرض کنیم  $(F_n)_{n \geq 1}$  دنباله‌ای باشد که در بالا تعریف شده است. در این صورت،

(الف) اگر  $n \geq m \geq 1$  و  $x \in [\frac{1}{2^m}, 1]$  آن‌گاه  $F_n(x) = F_m(x)$ ؛

(ب) اگر  $n \geq m \geq 1$  و  $x \in [0, \frac{1}{2^m}]$  آن‌گاه  $|F_n(x) - F_m(x)| \leq \frac{1}{2^m}$

اثبات. (الف) ابتدا توجه کنید که به ازای  $n \geq 1$  داریم

$$F_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}F_{n-1}(3x) + \frac{2}{3} & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ -3F_n(\frac{1}{3})(x - \frac{2}{3}) & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ x - \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (19.3)$$

پس به ازای هر  $n \geq 1$  روی بازه  $[\frac{2}{3}, 1]$ ، داریم  $F_n = F_1$ . پس لم به ازای  $m = 1$  برقرار است. فرض می‌کنیم لم به ازای هر  $n$  که  $n \geq m$  برقرار باشد و  $n \geq m + 1$  و  $x \in [\frac{2}{3^{m+1}}, 1]$ . در این صورت،  $n - 1 \geq m$ . از (19.3) و با توجه به اینکه روی  $[\frac{2}{3^m}, 1]$  داریم  $F_{n-1} = F_m$ ، به دست می‌آوریم

$$F_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}F_{n-1}(3x) + \frac{2}{3} & 0 \leq x \leq \frac{2}{3^{m+1}} \\ \frac{1}{3}F_m(3x) + \frac{2}{3} & \frac{2}{3^{m+1}} \leq x \leq \frac{1}{3} \\ -3F_n(\frac{1}{3})(x - \frac{2}{3}) & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ x - \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (20.3)$$

همچنین  $F_n(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}F_{n-1}(1) + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}F_m(1) + \frac{2}{3} = F_{m+1}(\frac{1}{3})$ . با جایگذاری رابطه اخیر در (20.3) و استفاده از تعریف  $F_{m+1}$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$F_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}F_{n-1}(3x) + \frac{2}{3} & 0 \leq x \leq \frac{2}{3^{m+1}} \\ F_{m+1}(x) & \frac{2}{3^{m+1}} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (21.3)$$

بنابراین قسمت اول لم ثابت می‌شود.

(ب) برای اثبات قسمت دوم لم، ابتدا با استقرا نشان می‌دهیم که به ازای  $n \geq 1$ ،

$$|F_n(x) - F_{n-1}(x)| \leq \frac{2}{3^n}. \quad (22.3)$$

با استفاده از (19.3)، به ازای  $n = 1$  داریم

$$|F_1(x) - F_0(x)| = |F_1(x) - x| \leq \frac{2}{3}$$



و همچنین به ازای  $n \geq 2$ ، با توجه به قسمت اول لم،

$$|F_n(x) - F_{n-1}(x)| = \begin{cases} \frac{1}{3^n} |F_{n-1}(3x) - F_{n-2}(3x)| & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} |F_n(\frac{1}{3}) - F_{n-1}(\frac{1}{3})| |x - \frac{1}{3}| & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

اکنون با استفاده از فرض استقرا و اینکه

$$|F_n(\frac{1}{3}) - F_{n-1}(\frac{1}{3})| = \frac{1}{3^n} |F_{n-1}(1) - F_{n-2}(1)| \leq \frac{2}{3^n},$$

(۲۲.۳) ثابت می‌شود. حال به کمک (۲۲.۳)، برای  $n \geq m \geq 1$  به دست می‌آوریم

$$|F_n(x) - F_m(x)| \leq \sum_{i=m}^{n-1} |F_i(x) - F_{i+1}(x)| \leq \sum_{i=m}^{n-1} \frac{2}{3^{i+1}} \leq \frac{1}{3^m}.$$

□

به این ترتیب، قسمت دوم لم نیز ثابت می‌شود.

لم ۴.۳ نشان می‌دهد که دنباله  $(F_n)_{n \geq 1}$  از توابع پیوسته، یکنواخت-همگرا است و در نتیجه  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$  موجود و تابعی پیوسته است. در ادامه نشان می‌دهیم که  $f$  دارای همه دوره‌های تناوب اولیه به صورت  $2^m$ ،  $m \geq 0$ ، است و دارای هیچ نقطه تناوبی با دوره تناوب دیگری نیست. با توجه به روش ساختن  $F_n$  ها، چون  $x = \frac{1}{15}$  نقطه ثابت  $F_2$  است، پس بنابر قسمت اول لم ۴.۳، به ازای  $n \geq 2$ ، نقطه  $x = \frac{1}{15}$  نقطه ثابت همه  $F_n$  ها است. توجه کنید که  $x = \frac{1}{15}$  در بازه  $[\frac{1}{3}, 1]$  قرار دارد. با توجه به نتایج ۲.۳ و ۳.۳،  $x = \frac{1}{15 \times 3}$  نقطه تناوبی با دوره تناوب اولیه  $2^1$  برای  $F_n$  ها به ازای  $n \geq 3$  است و  $O_{F_2}(\frac{1}{15 \times 3}) = O_{F_3}(\frac{1}{15 \times 3})$ . استفاده از استقرای ریاضی و نتایج ۲.۳ و ۳.۳، نشان می‌دهد که  $x = \frac{1}{15 \times 3^k}$  نقطه تناوبی با دوره تناوب اولیه  $2^k$  برای  $F_n$  ها به ازای  $n \geq k + 2$  است و  $O_{F_n}(\frac{1}{15 \times 3^k}) = O_{F_{k+2}}(\frac{1}{15 \times 3^k})$ . پس  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$  دارای همه دوره‌های تناوب به صورت  $2^m$  است.

اکنون نشان می‌دهیم که  $f$  دارای هیچ نقطه تناوبی با دوره تناوب دیگری نیست. فرض کنیم  $f^l(x_0) = x_0$  و  $f^k(x_0) \neq x_0$ ،  $1 \leq k \leq l$ ، در این صورت، برای هر  $1 \leq k \leq l$ ،  $f^k(x_0) \neq x_0$  زیرا حدگیری از رابطه ۱۹.۳ نشان می‌دهد که دو برابر ساز  $f$  با خودش برابر است. بنابراین اگر  $2l$  نقطه تناوبی  $f$  با دوره تناوب اولیه  $1 \leq l$  باشد، آن‌گاه  $0$  باید نقطه تناوبی  $f$  با دوره تناوب اولیه  $2l$  نیز باشد که تناقض است. حال مدار  $x_0$  تحت  $f$  را در نظر بگیرید. با توجه به متناهی بودن این مدار و اینکه اعضای آن همگی ناصفر هستند،  $n$  را به اندازه کافی بزرگ اختیار می‌کنیم به طوری که

$O_f(x_0) \subset [\frac{1}{3^n}, 1]$ . چون روی  $[\frac{1}{3^n}, 1]$  داریم  $f = F_n$ ، پس  $x_0$  نقطه تناوبی  $F_n$  است که یک تناقض است، زیرا نقاط تناوبی  $F_n$  فقط به صورت  $2^n$  هستند. بنابراین دوره تناوب نقاط تناوبی  $f$  فقط به صورت  $2^m$  است.

## مراجع

- [1] Andres, J., Fišer, J., Jüttner, L., On a multivalued version of the Sharkovskii theorem and its application to differential inclusions, *Set-Valued Analysis*, **10** (2002), 1–14.
- [2] Andres, J., Jüttner, L., Pastor, K., On a multivalued version of the Sharkovskii theorem and its application to differential inclusions, II, *Set-Valued Analysis*, **13** (2005), 47–68.
- [3] Baldwin, S., Generalizations of a theorem of Sarkovskii on orbits of continuous real-valued functions, *Discrete Mathematics*, **67** (1987), 111–127
- [4] Barton, R., Burns, K., A simple special case of Sharkovskii's theorem, *The American Mathematical Monthly*, **107** no. 10 (2000), 932–933.
- [5] Bernhardt, C., Simple permutations with order a power of two, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **4** (1984), 179–186.
- [6] Bernhardt, C., The ordering on permutations induced by continuous maps of the real line, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **7** (1987), 155–160.
- [7] Bernhardt, C., Sharkovsky's theorem and one-dimensional combinatorial dynamics, (2012), arXiv:1201.3583 v1.
- [8] Block, L. S., Coppel, W. A., *Dynamics in one dimension*, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1992.
- [9] Block, L., Guckenheimer, J., Misiurewicz, M., Young, L. S., Periodic points and topological entropy of one dimensional maps, *Global Theory of Dynamical Systems, Lecture Notes in Mathematics*, **819** Springer, Berlin, 1980, 18–34.
- [10] Burkart, U., Interval mapping graphs and periodic points of continuous functions, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **32** (1982), 57–68.
- [11] Burns, K., Hasseblatt, B., The Sharkovsky theorem: A natural direct proof, *The American Mathematical Monthly* **118** (2011), no. 3, 229–244.
- [12] Devaney, R., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd edn., CRC Press, 2003.
- [13] Du, B. S., A simple proof of Sharkovsky's theorem, *The American Mathematical Monthly*, **111** (2004), no. 7, 595–599.
- [14] Du, B. S., A simple proof of Sharkovsky's theorem revisited, *The American Mathematical Monthly*, **114** (2007), no. 2, 152–155.
- [15] Du, B. S., A simple proof of Sharkovsky's theorem revisited, (2009), arXiv: 0711.3892v7.

- [16] Elaydi, S. N., On a converse of Sharkovsky's theorem, *The American Mathematical Monthly*, **103** (1996), no. 5, 386–392.
- [17] Elaydi, S. N., *Discrete Chaos, with Applications in Science and Engineering*, 2nd edn., Chapman & Hall/CRC, 2007.
- [18] Ho, C. W., Morris, C., A graph theoretic proof of Sharkovsky's theorem on the periodic points of continuous functions, *Pacific Journal of Mathematics*, **96** (1981), 361–370.
- [19] Li, T. Y., Yorke, J., Period three implies chaos, *The American Mathematical Monthly*, **82** (1975), 985–992.
- [20] Misiurewicz, M., Remarks on Sharkovsky's theorem, *The American Mathematical Monthly*, **104** (1997), no. 9, 846–847.
- [21] Schirmer, H., A topologist's view of Sharkovsky's theorem, *Houston Journal of Mathematics*, **11** (1985), no. 3, 385–395.
- [22] Sharkovsky, A. N., Co-existence of the cycles of a continuous mapping of the line into itself, *Ukrainskiy Matematicheskii Zhurnal*, **16** (1964), no. 1, 61–71 (in Russian).
- [23] Sharkovsky, A. N., On cycles and structure of a continuous mapping, *Ukrainskiy Matematicheskii Zhurnal*, **17** (1965), no. 3, 104–111 (Russian).
- [24] Sharkovsky, A. N., Co-existence of the cycles of a continuous mapping of the line into itself, *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, **5** (1995), 1263–1273.
- [25] Štefan, P., A theorem of Šarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line, *Communications in Mathematical Physics*, **54** (1977), no. 3, 237–248.
- [26] Straffin, Jr. P. D., Periodic points of continuous functions, *Mathematics Magazine*, **51** (1978), no. 2, 99–105.

---

تاریخ ارسال: ۱۳۹۷/۸/۲۳؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۹/۲۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۹/۲۳

مریم ربیعی: دانشگاه الزهراء، دانشکده علوم ریاضی

رایانامه: [mrabii@alzahra.ac.ir](mailto:mrabii@alzahra.ac.ir)

منیره اکبری: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، دانشکده علوم پایه

رایانامه: [akbari@sru.ac.ir](mailto:akbari@sru.ac.ir)