

## سیر تکامل نظریه گروه‌ها تا رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی

محمدرضا درفشه

### چکیده

نظریه گروه‌ها یکی از بنیادی‌ترین و کاربردی‌ترین شاخه‌های جبر است. مفهوم گروه در فرآیند حل یکی از قدیمی‌ترین مسائل ریاضی یعنی حل معادلات جبری به وجود آمد. از مهم‌ترین شاخه‌های نظریه گروه‌ها، گروه‌های جایگشتی و نظریه نمایش گروه‌ها است که هر دو، شاخه‌های پژوهشی فعالی هستند. گروه‌های ساده در مرکز پژوهش‌های کنونی نظریه گروه‌ها قرار دارد. بسیاری از سؤال‌های عمیق درباره گروه‌های متناهی به سؤال‌هایی مشابه درباره گروه‌های ساده یا تقریباً ساده منجر می‌شود و اینجا است که رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی کاربرد پیدا می‌کند. در این نوشته، سعی کرده‌ایم ضمن بررسی تکامل نظریه گروه‌ها، به مسئله رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی و کاربرد آن بپردازیم.

### ۱. سرآغاز

«نظریه گروه‌ها که گالوا (همچنین کُشی و لاگرانژ) واضع آن بود، از جمله نظریه‌های ریاضی است که به‌طور حیرت‌انگیزی پُر بار است. این نظریه علاوه بر آنکه موضوع معادلات جبری را کاملاً روشن کرد، وسیله‌ای بسیار خوب و قوی به دست فیزیکدانان قرن بیستم داد. بدون شک، برای من ممکن نیست که شما را وارد علمی کنم که ورود به آن همچون رموز کیمیاگران، قدغن و مشکل است و گذشته از آن، موضوع به‌طور غیر عادی خشک و مجرد است اما یک مثال ساده، تصوّر واضح‌تری از موضوع به شما خواهد داد و می‌توانید از آستانه این معبر، ثروت‌های بی‌مانندی را که در داخل آن نهان است، به تصوّر درآورید. اگر مورد کاربرد نظریه گروه‌ها فقط محدود به حل معادلات جبری بود، باز هم ارزش آن عظیم و مهم می‌نمود اما وسعت و اهمیت آن، به مراتب بیشتر از این است. گالوا نظریه گروه‌ها را در مورد جبر

به‌کار برد، کلاین آن را در هندسه مورد استفاده قرار داد، سوفوس لی آن را در حساب دیفرانسیل وارد کرد و فیزیکدانان نظری در نظریاتشان از آن بهره گرفتند.» [۱] موضوع نظریه گروه‌ها منحصر به جبر و هندسه و فیزیک نظری و حساب دیفرانسیل نیست، بلکه نظریه گروه‌ها امروزه در مدخل ریاضیات قرار دارد و هر کس که بخواهد در یکی از رشته‌های علمی و فنی مطالعه عمیق داشته باشد، ناگزیر باید آن را بیاموزد و مورد استفاده قرار دهد [۱].

شکل‌گیری نظریه گروه‌ها از سال ۱۷۷۰ م. آغاز شد و تا قرن بیستم ادامه پیدا کرد و بیشتر مطالب آن در قرن ۱۹ توسعه یافت. عمده‌ترین علل این توسعه را می‌توان در ارائه اثبات‌های دقیق، مجردسازی، ظهور روش اصل موضوعی دانست. تا حدود اواخر قرن هجدهم، جبر عمدتاً مطالعه حل معادلات چندجمله‌ای بود اما در قرن بیستم، جبر به مطالعه دستگاه‌های مجرد به روش اصل موضوعی تبدیل شد و این انتقال از جبر کلاسیک معادلات چندجمله‌ای، به جبر به اصطلاح جدید، دستگاه‌های مجرد را در قرن نوزدهم پدید آورد. علاوه بر نظریه گروه‌ها، ساختار حلقه‌های جابه‌جایی، هیأت‌ها، حلقه‌های ناجابه‌جایی و فضاها برداری نیز پا به عرصه وجود نهادند و همه این‌ها به موازات نظریه گروه‌ها و گاهی هم در تداخل با آن، رشد کردند. نظریه گالوا مخلوطی از هر دو نظریه گروه‌ها و هیأت‌ها است؛ نظریه نمایش گروه مخلوطی از نظریه گروه‌ها، جبر ناجابه‌جایی و جبر خطی است.

چهار منبع عمده در تکامل نظریه گروه‌ها همراه با نام پدید آورنده آنها را به ترتیب زیر می‌توان ذکر کرد: جبر کلاسیک (لاگرانژ ۱۷۷۰ م.)، نظریه اعداد (گوس ۱۸۰۱ م.)، هندسه (کلاین ۱۸۷۴ م.) و آنالیز (لی ۱۸۷۴ م.)، پوانکاره و کلاین (۱۸۷۶ م.). در ادامه به اختصار به هر یک از موارد فوق اشاره می‌شود.

۱.۱. جبر کلاسیک. در حدود ۱۶۰۰ سال پیش از میلاد، بابلی‌ها می‌دانستند که چگونه با روش کامل کردن مربع، معادله درجه دو را حل کنند و روش‌های جبری برای حل معادلات درجه سه و درجه چهار حدوداً در ۱۵۴۰ م. ارائه شد. یکی از مسائل اصلی برای دو قرن بعد، حل معادله درجه پنج بود که لاگرانژ در مقاله‌ای به سال ۱۷۷۰ م. مطرح کرد تا برای نخستین بار، پیوندی میان حل یک معادله چندجمله‌ای و جایگشت‌های ریشه‌های آن برقرار کند. در واقع، مطالعه جایگشت‌های ریشه‌های یک معادله، سنگ بنای نظریه عمومی لاگرانژ برای معادلات جبری بود. سؤالاتی از قبیل اینکه: آیا هر معادله دارای ریشه است؟ چند ریشه دارد؟ آیا ریشه‌ها حقیقی، مختلط، مثبت یا منفی‌اند؟ نیز مطرح شد. در مقاله سال ۱۷۷۰ م.، لاگرانژ تلاش خود را وقف حل معادله درجه پنج کرد. او ابتدا روش‌های شناخته شده پیشین که توسط ریاضیدانان شاخصی چون اویلر، دکارت و دیگران درباره حل معادلات درجه سه و درجه چهار ارائه شده بود، مطالعه کرد و مشاهده نمود که نقطه اشتراک این روش‌ها، تحویل چنین معادلاتی به معادلات کمکی است. چنین معادلات کمکی درجه‌شان کمتر از درجه معادلات اصلی است. با وجود اینکه لاگرانژ در مسئله حل‌پذیری معادله درجه پنج موفق نشد، روش او سنگ بنای پژوهش‌هایی مهم گردید. نخستین بار

در اثر لاگرانژ، تناظری بین حل معادله درجه پنجم و جایگشت ریشه‌های آن مطرح گردید. هرچند صحبتی از محاسبات جایگشتی نظیر ترکیب جایگشت‌ها در کار او نیست، می‌توان گفت که روح نظریه گروه‌ها در کارش حضور داشته است.

**۲.۱. نظریه اعداد.** در کتاب معروف تحقیقات حسابی که گاوس آن را در سال ۱۸۰۱ م. منتشر کرد، مطالبی دیده می‌شود که می‌توان گاوس را مبتکر نظریه گروه‌های آبدلی متناهی دانست بدون اینکه از تعاریف متداول نظریه گروه‌ها استفاده کرده باشد. این گروه‌ها عبارت‌اند از گروه جمعی اعداد صحیح به پیمانه  $m$ ، گروه ضربی اعداد صحیح که نسبت به  $m$  اول هستند به پیمانه  $m$ ، گروه رده‌های هم‌ارزی فرم‌های درجه دو و گروه ریشه‌های  $n$ ام واحد. برای مثال، گاوس نشان داد که اگر  $p$  یک عدد اول فرض شود، آن‌گاه عضوهای مجموعه اعداد صحیح به پیمانه  $p$  و ناصفر که با  $\mathbb{Z}_p^*$  نمایش داده می‌شود، همگی مساوی توانی از یک عدد واحد است، یعنی گروه  $\mathbb{Z}_p^*$  دوری است. به علاوه گاوس تعداد مولدهای این گروه را معین کرد. برای هر عضو از  $\mathbb{Z}_p^*$ ، او مرتبه عضو را تعریف کرد و نشان داد که مرتبه هر عضو، عدد  $p-1$  را عاد می‌کند.

گاوس نشان داد که ریشه‌های  $n$ ام واحد، تشکیل گروه دوری می‌دهند. مسئله نمایش اعداد صحیح با فرم‌های دوتایی درجه دو به زمان فرما برمی‌گردد. یک فرم دوتایی درجه دو، فرمی به شکل  $ax^2+bx+cy^2$  است که  $a$ ،  $b$  و  $c$  اعداد صحیح‌اند. گاوس روی مجموعه همه این فرم‌ها قانون ترکیب تعریف می‌کند و نشان می‌دهد که این قانون شرکت‌پذیر و جابه‌جایی است، همچنین عضو خنثی و وارون هر عضو وجود دارد. به این ترتیب، همه ویژگی‌های گروه آبدلی را بررسی می‌نماید. با وجود این، نمی‌توان تصریح کرد که گاوس مفهوم گروه مجرد یا حتی گروه آبدلی مجرد را درک کرده است.

**۳.۱. هندسه.** در برنامه‌ای که کلاین در سال ۱۸۷۲ م. در دانشگاه ارلانگن اعلام کرد و به برنامه ارلانگن معروف شد، هندسه را به عنوان مطالعه پایاها تحت گروه تبدیلات، رده‌بندی نمود. پس از آن، گروه‌هایی مانند گروه تصویری، گروه حرکات صلب، گروه تشابهات، گروه هذلولوی، گروه بیضوی و هندسه‌های وابسته به این گروه‌ها، پدید آمد. قرن نوزدهم شاهد رشدی انفجاری‌آمیز در هندسه بود. هندسه‌های جدید مانند هندسه تصویری، هندسه نااقلیدسی، هندسه دیفرانسیل، هندسه جبری، هندسه  $n$ -بعدی و هندسه گراسمانی به وجود آمد. در اواسط قرن، مسئله عمده پیوند درونی این هندسه‌های متفاوت و روش‌های هندسی مطرح شد که این، منجر به مطالعه روابط هندسی با تأکید بر مطالعه ویژگی‌های شکل‌هایی شد که تحت تبدیلات پایا می‌مانند. به زودی مطالعه خود تبدیلات نیز آغاز شد. به این ترتیب، انواع گوناگونی از تبدیلات، موضوع مطالعات تخصصی شد. در نتیجه ارتباط منطقی بین این تبدیلات، مورد بحث قرار

گرفت و سرانجام، به هم‌نهادی نظریه‌ی گروهی کلاین انجامید. به عقیده‌ی ریاضیدانان، برنامه‌ی ارلانگن کلاین، به‌صراحت سمت و سوی نظریه‌ی گروهی داشته است.

۴.۱. آنالیز. در سال ۱۸۷۴ م. لی نظریه‌ی عمومی گروه تبدیلات پیوسته را معرفی کرد، چیزی که امروزه اساساً گروه لی نامیده می‌شود. در واقع، لی فکر می‌کرد که دنباله‌روی آبل و گالوا است و آنچه را درباره‌ی معادلات دیفرانسیل انجام می‌دهد که آنها درباره‌ی معادلات جبری انجام دادند. پژوهش‌های او سپس به سمت مطالعه‌ی معادلات دیفرانسیل در حالت کلی سوق یافت که تحت یک گروه پیوسته پایا باشند و سپس از مطالعه‌ی ویژگی‌های معلوم این گروه‌ها، نتایجی برای حل این معادلات به‌دست آورد. با وجود اینکه لی در شکل دادن به نظریه‌ی گالوای معادلات دیفرانسیل موفق نبود، پژوهش‌های او در صورت‌بندی این نظریه نقشی اساسی ایفا کرد.

## ۲. مجردسازی در نظریه‌ی گروه‌ها

تقریباً صد سال پس از زمانی که در سال ۱۷۷۰ م. لاگرانژ پژوهش‌های خود درباره‌ی نظریه‌ی گروه‌ها را آغاز کرد، مفهوم گروه مجرد به وجود آمد. در سال ۱۸۵۴ م. کیلی در یکی از مقالاتش اولین تعریف مجرد از یک گروه متناهی را ارائه داد و سپس مثال‌هایی متعدد از گروه ارائه‌کردمانند کواترنیون‌ها، جایگشت‌ها و گروه‌هایی که در نظریه‌ی توابع بیضوی ظاهر می‌شوند. او نشان داد که هر گروه مجرد با زیرگروهی از یک گروه جایگشتی یکرخت است؛ چیزی که امروزه با عنوان قضیه‌ی کیلی معروف است. همچنین جدول ضرب یک گروه متناهی را تعریف کرد و نشان داد هر گروه متناهی با داشتن جدول ضرب خود، کاملاً معین می‌شود. سپس همه‌ی گروه‌ها از مرتبه‌ی ۴ و ۶ را با تقریب یکرختی، کاملاً مشخص ساخت. هرچند مجردسازی گروه توسط کیلی در زمان خودش توجه کسی را به خود جلب نکرد، تقریباً ۲۵ سال بعد، چنین تعریفی مورد توجه قرار گرفت و خود کیلی بود که در سال ۱۸۷۸ م. چهار مقاله درباره‌ی گروه با استفاده از تعریف مجرد آن نوشت. او مسئله‌ی یافتن گروه‌های از مرتبه‌ی داده‌شده را طرح کرد. ریاضیدان دیگری که تعریف مجرد گروه چه متناهی و چه نامتناهی را ارائه داد، فون دیک بود که گروه را توسط مولدها و روابط تعریف نمود. چنین صورت‌بندی، یک نمایه‌ی گروه نامیده می‌شود. او گروه آزاد با  $n$  مولد را ساخت (گروه آزاد از رتبه‌ی  $n$ ) و نشان داد که هر گروه متناهیاً تولیدشده، تصویر همریخت یک گروه آزاد از رتبه‌ی متناهی است.

نظریه‌ی مجرد گروه طی سی تا چهل سال بعد، استحکام بیشتری یافت و در حدود سال ۱۹۲۰ م. می‌توان مشاهده کرد که نظریه‌ی گروه‌ها به شاخه‌های جدیدتری انشعاب یافته است که تعدادی از آنها عبارت‌اند از: نظریه‌ی گروه‌های متناهی، توسعه‌ی نتایج از نظریه‌ی گروه‌های متناهی به گروه‌های نامتناهی با استفاده از شرایط متناهی‌گونه، نمایه‌ی گروه‌ها (نظریه‌ی ترکیبیاتی گروه‌ها)، نظریه‌ی گروه‌های آبلی نامتناهی، نظریه‌ی توسعه‌ی گروه‌ها،

گروه‌های جبری، گروه‌های توپولوژیک، توسعه نظریه نمایش گروه‌ها به گروه‌های پیوسته و نظریه نمایش و سرشت گروه‌های متناهی.

### ۳. گروه‌های ساده متناهی

همان‌طور که ذکر شد، یکی از مسائل اصلی در نظریه گروه‌های متناهی، یافتن همه گروه‌های ساده است. گروه نابديهی  $G$  را ساده می‌نامیم اگر تنها زیرگروه‌های نرمالش  $\{e\}$  و  $G$  باشند. اکنون فرض کنیم  $G$  یک گروه متناهی است و  $H \trianglelefteq G$  نمایانگر نرمال بودن زیرگروه  $H$  در  $G$  باشد. یک سری زیرنرمال برای  $G$  عبارت است از دنباله زیر از زیرگروه‌های  $G$ :

$$\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$$

و خانواده عامل‌های سری عبارت است از  $\{G_{i+1}/G_i \mid 0 \leq i < n\}$ . توجه کنید که سری بالا ماکسیمال است (یعنی نمی‌توانیم زیرگروه اضافی بین  $G_i$  و  $G_{i+1}$  قرار دهیم) اگر و تنها اگر عامل‌های سری، گروه‌های ساده باشند. سری ماکسیمال، سری ترکیبی نامیده می‌شود و داریم

**قضیه ۱.۳ (ژردان-هولدر).** همه سری‌های ترکیبی برای  $G$  دارای طول مساوی هستند و خانواده عامل‌های ساده‌شان یکریخت است.

عامل‌های ساده در سری ترکیبی را عامل‌های ترکیبی  $G$  می‌نامیم. این عامل‌ها با تقریب یکریختی،  $G$  را معین نمی‌سازند اما نقش کنترل‌کننده بر ساختار  $G$  دارند. بنابراین گروه‌های ساده دارای نقشی همانند اعداد اول در نظریه اعداد هستند و لذا گروه‌های ساده را آجرهای ساختمانی گروه‌های متناهی می‌نامند. می‌توان ساختن گروه‌های متناهی را منوط به حل دو مسئله زیر کرد:

**مسئله رده‌بندی.** همه گروه‌های ساده متناهی را معین کنید.

**مسئله توسعه.** فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو گروه باشند. همه گروه‌های متناهی  $G$  با زیرگروه نرمال  $H$  را رده‌بندی کنید که  $A \cong H$  و  $B \cong G/H$ . در این صورت گوئیم  $G$  توسعه‌ای از  $A$  توسط  $B$  است.

مسئله توسعه در حالت کلی مسئله‌ای دشوار است. اما ساختار گروه متناهی  $G$  بستگی به حل این مسئله دارد. اگر سری ترکیبی برای  $G$  را در نظر بگیریم، دیده می‌شود که  $G_1$  و  $G_2/G_1$  گروه‌های ساده هستند و لذا اگر  $B = G_2/G_1$ ، آن‌گاه توسعه  $G_2$  از  $G_1$  توسط  $B$  است. لذا ساختار  $G_2$  بستگی به توسعه گروه ساده  $G_1$  توسط گروه ساده  $B$  دارد. به استقرا دیده می‌شود که  $G$  توسعه دنباله‌ای از گروه‌های ساده توسط گروه‌های ساده است. بنابراین اگر مسئله توسعه برای گروه‌های ساده حل شود، ساختار گروه  $G$  معین می‌گردد. اهمیت مسئله رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی از اینجا معلوم می‌شود. در سال ۱۹۸۱ م. اعلام شد که قضیه رده‌بندی به ترتیب زیر ثابت شده است:

قضیه ۲.۳ (رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی). هر گروه ساده متناهی با یکی از گروه‌های زیر یکرخت است:

(۱) گروهی از مرتبه عددی اول؛

(۲) گروه متناوب؛

(۳) گروه‌های کلاسیک از نوع لی:  $A_n(q), B_n(q), C_n(q), D_n(q), E_6(q), E_7(q), E_8(q)$

که  $n$  یک عدد صحیح مثبت و  $q$  توانی از یک عدد اول است؛

(۳') گروه‌های استثنایی از نوع لی:  $A_n(q), B_n(q), C_n(q), D_n(q), E_6(q), F_4(q), G_2(q), H_4(q)$

(۴) یکی از ۲۶ گروه پراکنده:  $He, Hs, J_4, J_3, J_2, J_1, M_{24}, M_{23}, M_{22}, M_{12}, M_{11}$

$, F_4, F_3, F_5, Fi_{24}, Fi_{23}, Fi_{22}, Co_3, Co_2, Co_1, O'N, Ru, Ly, Suz, Mc$   
 $.F_1$

گروه‌های معرفی شده در ۱، همان گروه‌های دوری  $\mathbb{Z}_p$  هستند که  $p$  عددی اول است. چون تعداد اعداد اول نامتناهی است، تعداد چنین گروه‌هایی عددی نامتناهی است. گروه‌های عنوان شده در ۲، عبارت است از مجموعه همه جایگشت‌های زوج در گروه متقارن  $S_n$ ،  $n \geq 5$ ، که با  $A_n$  نمایش داده می‌شود. بنابراین تعداد نامتناهی گروه ساده  $A_n$ ،  $n \geq 5$ ، وجود دارد. گروه ساده پراکنده به گروهی اطلاق می‌شود که در هیچ خانواده نامتناهی از گروه‌ها ننگند. ثابت شده است که تنها ۲۶ گروه ساده پراکنده وجود دارد که کوچکترین آنها گروه ماتئو  $M_{11}$  از مرتبه  $7920$  و بزرگترین آنها گروهی به نام هیولا از مرتبه

$$8080174247945128758864599049617107570057543680000000000$$

است. گروه‌های ساده از نوع لی چنین تعریف می‌شوند: این گروه‌ها در ۱۶ خانواده نامتناهی از گروه‌های ساده واقع می‌شوند که به یک میدان  $F$  با  $q$  عضو و عدد  $n$  که بُعد یک فضای برداری است، بستگی دارند. این گروه‌ها به تفصیل در مرجع [۲] تشریح شده‌اند و از توضیح مجدد آنها اجتناب می‌کنیم.

در اینجا مایلیم که سرخط‌های کلی و خط سیر تاریخی منجر به رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی را مختصراً بیان کنیم. در سال ۱۸۳۲ م. زیرگروه نرمال توسط گالوا معرفی شد و او گروه‌های جایگشتی را در کارهای پژوهشی خود وارد کرد اما معرفی صریح گروه‌های جایگشتی توسط ژردان در سال ۱۸۷۰ م. صورت گرفت که ثابت کرد گروه‌های متناوب  $A_n$ ،  $n \geq 5$ ، و گروه‌های تصویری خاص در بُعد ۲ روی میدان‌های از مرتبه اول، ساده هستند. حکم‌های مشهور سیلو در سال ۱۸۷۲ م. ارائه شد که بیان می‌دارد هر گروه متناهی که مرتبه‌اش توسط عدد اولی مانند  $p$  عاد شود، دارای زیرگروهی از مرتبه توانی از عدد  $p$  است که مرتبه گروه را عاد می‌کند؛ البته این حکم نخستین بار، برای گروه‌های جایگشتی ثابت شد و

سپس به گروه‌های دلخواه تعمیم داده شد. اولین گروه‌های ساده پراکنده عبارت بودند از گروه‌های ماتیو که در سال‌های ۱۸۶۱ تا ۱۸۷۳ م. ظاهر شدند. در فاصله زمانی ۱۹۰۱-۱۹۰۳ م. چند گروه ساده از نوع لی توسط دیکسون کشف گردید اما کار اساسی شواله در دهه ۱۹۵۰، منجر به ساختن خانواده جدید گروه‌های ساده از نوع لی و مطالعه سازمان‌یافته و متحد گروه‌های کلاسیک و استثنایی از نوع لی با الهام از گروه‌های ساده لی پیوسته شد. در سال ۱۹۵۹ م. پژوهش‌های استاینبرگ در مورد ساختار گروه‌های لی استثنایی پیچیده که در گروه‌های پیوسته نظیری نداشتند و پیرو آن، کشف خانواده جدیدی از گروه‌های ساده توسط استاینبرگ، سوزوکی و ری انجام شد. اما حدسیه برنسايد که تامپسون آن را در سال ۱۹۶۲ م. ثابت کرد و می‌گفت هر گروه از مرتبه فرد حل‌پذیر است، گامی مهم در رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی محسوب می‌شود (تامپسون برای این کار، مدال فیلدز دریافت کرد). یک قرن پس از کشف گروه‌های ساده ماتیو، گروه ساده یانکو  $J_1$  در سال ۱۹۶۶ م. کشف شد و سپس گروه‌های ساده متعددی کشف گردیدند که عضوی از هیچ خانواده شناخته‌شده‌ای از گروه‌های ساده نبودند تا اینکه سرانجام در سال ۱۹۷۵ م. آخرین گروه پراکنده توسط یانکو کشف شد که با  $J_4$  نمایش داده می‌شود. اعلام قضیه رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی، در سال ۱۹۷۹ م. توسط گرنشتاین صورت گرفت.

برای راحتی کار خواننده در بخش بعدی، دو گروه مشخص را تعریف می‌کنیم. فرض کنید  $F$  یک میدان متناهی با  $p^f$  عضو است که  $p$  یک عدد اول است. می‌دانیم  $\langle \sigma_p \rangle = \text{Aut}(F)$  که  $\sigma_p$  خودریختی فروبنیوس با ضابطه  $x \in F, \sigma_p(x) = x^p$  است. فرض کنیم  $V$  یک فضای برداری با بُعد  $n$  روی میدان  $F$  است. گروه تبدیلات خطی وارون‌پذیر  $V$  تشکیل گروه خطی عام  $GL_n(V)$  را می‌دهد و زیرگروه آن متشکل از تبدیلات خطی با دترمینان ۱ را با  $SL_n(F)$  نمایش می‌دهیم. تبدیل خطی  $T: V \rightarrow V$  را شبه‌خطی می‌نامیم اگر برای هر  $x, y \in V$  و هر  $\lambda \in F$ ,

$$T(x + y) = T(x) + T(y), \quad T(\lambda x) = \sigma(\lambda)x$$

که در آن،  $\sigma$  یک خودریختی از میدان  $F$  است. مجموعه تبدیلات شبه‌خطی وارون‌پذیر  $V$  را با  $\Gamma L_n(F)$  نمایش می‌دهیم که تشکیل یک گروه می‌دهد و  $GL_n(F)$  زیرگروه نرمال آن است و گروه خارج‌قسمتی آن با  $\text{Aut}(F)$  یکرخت است. بنابراین مرتبه  $\Gamma L_n(F)$  برابر است با  $f|GL_n(F)|$ .

#### ۴. کاربردها

قضیه رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی به عقیده ریاضیدانان، یکی از بزرگترین دستاوردهای ریاضیات در قرن بیستم است. از ویژگی‌های این قضیه این است که بیانی ساده اما اثباتی مشکل و طولانی دارد

(تقریباً ۱۵۰۰۰ صفحه از مجلات) و دارای کاربردهای ساده و وسیعی است. در زیر برخی از نتایجی که با استفاده از قضیه رده‌بندی ثابت شده است، می‌آوریم.

- هر گروه ناآبلی ساده متناهی، با دو عضو تولید می‌شود؛
- گروه خودریختی‌های خارجی هر گروه ساده، حل‌پذیر است. گروه خودریختی‌های  $G$  با  $\text{Aut}(G)$  و گروه خودریختی‌های داخلی آن با  $\text{Inn}(G)$  نمایش داده می‌شود و  $\text{Out}(G) = \frac{\text{Aut}(G)}{\text{Inn}(G)}$  گروه خودریختی‌های خارجی  $G$  نامیده می‌شود؛
- هیچ گروه جایگشتی ۶-انتقالی بجز گروه متناوب و گروه متقارن وجود ندارد؛
- به‌ازای هر عدد طبیعی  $n$  حداکثر دو گروه ساده نایکریخت از مرتبه  $n$  وجود دارد. برای مثال، می‌توان به دو گروه  $A_8$  و  $PSL_3(4)$  اشاره کرد.
- هر عضو از یک گروه ساده متناهی ناآبلی، یک جابه‌جاگر است؛
- هر گروه جایگشتی انتقالی روی یک مجموعه متناهی با بیش از یک عضو، دارای عضوی از مرتبه توانی از یک عدد اول است که هیچ عضوی از  $\Omega$  را ثابت نگه نمی‌دارد؛
- اگر  $G$  یک گروه دوانتقالی باشد، آنگاه ساختار  $G$  کاملاً مشخص است؛
- اگر  $G$  یک گروه جایگشتی انتقالی از رتبه ۳ باشد، آنگاه ساختار  $G$  کاملاً مشخص است؛
- حدسیه فروبنیوس درباره تعداد جواب‌های  $x^n = 1$  در گروه  $G$  حل می‌شود. این حدسیه می‌گوید اگر  $G$  یک گروه متناهی و  $n$  یک مقسوم‌علیه مرتبه  $G$  فرض شود، آنگاه اندازه مجموعه  $\{g \in G \mid g^n = 1\}$  مضربی از  $n$  است؛
- فرض کنیم  $f$  و  $g$  چندجمله‌ای‌های غیر ثابت تجزیه‌ناپذیر در  $\mathbb{C}[x]$  باشند که  $f(x) - g(y)$  در  $\mathbb{C}[x, y]$  تحویل‌پذیر است. آن وقت یا  $g(x) = f(ax + b)$  که در آن،  $a, b \in \mathbb{C}$  و یا  $\deg f = \deg g = 7, 11, 13, 15, 21, 31$  (در اینجا  $f(x) \in \mathbb{C}[x]$  تجزیه‌ناپذیر نامیده می‌شود در صورتی که اگر  $f_1(f_2(x)) = f(x)$ ،  $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ ، آنگاه درجه یکی از  $f_i(x)$ ‌ها یک باشد،  $i = 1, 2$ )؛
- تنها گروه‌های جایگشتی چهارانتقالی عبارت‌اند از گروه‌های متقارن، متناوب و گروه‌های متناوب  $M_{11}, M_{12}, M_{23}, M_{24}$ ؛
- فرض کنیم  $p$  یک عدد اول است و  $23 < p$ . در این صورت،  $PSL_2(p)$  یک زیرگروه ماکسیمال از گروه متناوب  $\mathbb{A}_{p+1}$  است؛
- فرض کنیم  $p$  یک عدد اول است و  $1 \leq k \leq p-1$ . فرض کنیم  $f(x) = x^p + ax^k + b$  روی  $\mathbb{Q}$  تحویل‌ناپذیر است و  $G$  گروه گالوای  $f(x)$  روی  $\mathbb{Q}$  است. در این صورت، یکی از حالات زیر برقرار است:



(آ) حل‌پذیر است.

(ب)  $G$  با  $\mathbb{A}_p$  یا  $\mathbb{S}_p$  یکرخت است.

(ج)  $p = 7$  و  $G = PSL_2(7)$ .

(د)  $p = 11$  و  $G = PSL_2(11)$  یا گروه ماتریس  $M_{11}$  یکرخت است.

(ه)  $5 < 2 + p = 11$  و  $SL_2(2^e) \subseteq G \subseteq \Gamma L(2^e)$ ؛

■ فرض کنیم  $G$  یک گروه متناهی است،  $p$  یک عدد اول است و  $p \nmid |G|$ . در این صورت، حداکثر دو ردهٔ ترویج از  $p$ -مکمل‌ها در  $G$  وجود دارد؛

■ اگر  $G$  یک گروه ساده با سیلو  $p$ -زیرگروه از مرتبهٔ  $p$  باشد، آن‌گاه  $p \nmid |\text{Aut}(G)|$ .

■ اگر  $G$  یک گروه جایگشتی اولیه و غیر دو انتقالی روی  $2p$  حرف باشد، آن‌گاه  $p = 5$  و  $G$  با یکی از گروه‌های  $\mathbb{A}_5$  یا  $\mathbb{S}_5$  یکرخت است؛

■ اگر  $l(G)$  بزرگترین طول یک زنجیر از زیرگروه‌های گروه متناهی  $G$  باشد، آن‌گاه

$$l(\mathbb{S}_n) = [(3n - 1)/2] - b(n)$$

که در آن،  $b(n)$  تعداد اها در نمایش عدد  $n$  در پایهٔ ۲ است؛

■ تعداد مؤلفه‌های همبندی گراف اول هر گروه متناهی، حداکثر ۶ است.

اثبات اینکه هر گروه نآبلی سادهٔ متناهی با دو عضو تولید می‌شود، حاصل پژوهش‌های تعداد زیادی از ریاضیدانان است. روش اثبات به این صورت است که با استفاده از قضیهٔ رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی، گروه  $G$  به یکی از موارد فهرست‌شده در قضیه مرتبط می‌شود و گزاره برای آن گروه خاص، ثابت می‌شود.

حدسیهٔ اور می‌گوید هر عضو از یک گروه سادهٔ متناهی، یک جابه‌جاگر است. این حدسیه در سال ۲۰۱۰ م. با استفاده از قضیهٔ رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی ثابت شد. ساختار گروه‌های جایگشتی ۲- انتقالی با استفاده از قضیهٔ رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی، چنین است که سوکل<sup>۱</sup> هر گروه ۲- انتقالی، یا آبلی مقدماتی است یا اینکه یک گروه سادهٔ اولیه است و به این ترتیب، ارتباطی مستقیم بین رده‌بندی گروه‌های جایگشتی ۲- انتقالی و قضیهٔ رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی ایجاد می‌گردد. ثابت می‌شود که ۸ خانوادهٔ نامتناهی از گروه‌های ۲- انتقالی وجود دارد. به علاوه، ده گروه اصطلاحاً پراکندهٔ ۲- انتقالی نیز وجود دارد.

حدسیهٔ شرایر می‌گوید اگر  $G$  یک گروه سادهٔ متناهی باشد، آن‌گاه  $\frac{\text{Aut}(G)}{\text{Inn}(G)}$  گروهی حل‌پذیر است. این حدسیه با دانستن ساختار  $G$  با استفاده از قضیهٔ رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی ثابت می‌شود. به ویژه ساختار گروه‌های غیرحل‌پذیر ۲- انتقالی  $G$  روی  $n$  حرف که دارای دوری به طول  $n$  هستند، این گونه معین

می‌شود که  $G$  با یکی از گروه‌های زیر یکرخت است:

$$M_{23}, M_{11}, PSL_2(11)$$

یا اینکه  $PSL_k(q) \leq G \leq P\Gamma L_k(q)$ .

اکنون به گروه گالوای  $f(x) = x^p + ax^k + p$  روی  $\mathbb{Q}$  می‌پردازیم. می‌توان بررسی کرد که  $f(x)$  حداکثر دارای ۳ ریشه حقیقی است و گروه گالوای  $f(x)$  روی  $\mathbb{Q}$  که با  $G$  نمایش می‌دهیم، یک گروه جایگشتی روی  $p$  حرف است که دارای عضوی از مرتبه ۲ است که حداکثر سه حرف را ثابت نگه می‌دارد. از آنجا که  $G$  روی  $p$  حرف، ۲-انتقالی است، از رده‌بندی گروه‌های ۲-انتقالی، ساختار ممکن برای  $G$  معین می‌گردد.

فرض کنیم  $G$  یک گروه متناهی است. گراف اول  $G$  که با  $\Gamma(G)$  نمایش داده می‌شود، گرافی است که رئوس آن اعداد اولی هستند که مرتبه  $G$  را عاد می‌کنند و دو رأس متمایز  $p$  و  $q$  به هم متصل‌اند اگر و تنها اگر  $G$  دارای عضوی از مرتبه  $pq$  باشد. مفهوم گراف اول در رابطه با پژوهش‌هایی درباره مسائل کوهمولوژی مرتبط با نمایش‌های صحیح گروه‌های متناهی مطرح شد. ثابت شد که  $\Gamma(G)$  همبند نیست اگر و تنها اگر ایده‌آل وابسته  $G$  به‌عنوان مدول، تجزیه‌پذیر باشد. حاصل کار شماری از ریاضیدانان درباره تعداد مؤلفه‌های همبندی  $\Gamma(G)$  با استفاده از قضیه رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی چنین شد که  $\Gamma(G)$  دارای حداکثر ۶ مؤلفه همبندی است. این نتیجه مهم، کاربردهای فراوانی در پژوهش‌های اخیر در نظریه گروه‌ها داشته است.

**سپاسگزاری:** بدین‌وسیله از داوران محترمی که با کمال دقت متن اولیه این دست‌نوشته را خواندند و پیشنهادات ارزنده‌ای ارائه کردند که منجر به بهبود نگارش مقاله شد، تشکر می‌کنم.

## مراجع

- [۱] روسو، ژان پی‌یر، تاریخ علوم، ترجمه حسن صفاری، انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۷۸.
- [۲] کورانت، ریچارد و رابینز، هربرت، ریاضیات چیست، ترجمه حسن صفاری، انتشارات خوارزمی، تهران، ۱۳۴۹.
- [3] Carter, R. W., *Simple Groups of Li Type*, John Wiley and Sons, London, 1972.
- [4] Feit, W., Some consequences of the classification of finite simple groups, In: The Santa Cruz Conference on Finite Groups, **37** (1980), American Mathematical Society.
- [5] Praeger, C. E., Using the finite simple groups, *Asia Pacific Mathematics Newsletter*, **1** (2011), no. 3, 7–10.
- [6] Gorenstein, D., *Finite Simple Groups, An Introduction to Their Classifications*, Plenum, New York, 1982.

- [7] Gorenstein, D., *The classification of the finite simple groups*, vol. 1, Plenum, New York, 1983.
- [8] Gorenstein, D., Lyons, R., Solomon, R., *The Classification of Finite Simple Groups*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 40, no.1–6, 1994.
- [9] Kleiner, I., The evolution of group theory: A brief survey, *Math. Magazine.*, 59 (1986), no. 4, 195–215.

---

تاریخ ارسال: ۹۶/۱۲/۷؛ تاریخ بازنگری: ۹۷/۷/۲؛ تاریخ پذیرش: ۹۷/۷/۶

محمد رضا درفشه: دانشگاه تهران، پردیس علوم دانشگاه تهران، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر  
رایانامه: darafsheh@ut.ac.ir