

## طرح و حل مسئله

بنابر تصمیم هیئت تحریریه فرهنگ و اندیشه ریاضی، از این شماره به بعد، قسمتی از مجله را به طرح و حل مسائل اختصاص دادیم. مسائل طرح شده در این قسمت، متمرکز بر ریاضیات دوره کارشناسی است. امیدواریم مدرسان و ریاضیدانان کشور با معرفی این قسمت از مجله به دانشجویان دوره کارشناسی و تشویق آنها به تلاش برای حل مسائل، باعث به وجود آمدن جوی پویا و جنب و جوش علمی در بین جوانان که ریاضیدانان آینده کشور هستند، شوند.

از خوانندگان محترم دعوت می‌شود تا مسائل اصیل یا کمتر دیده شده برای طرح در این قسمت و همچنین حل مسائل این شماره را با ذکر شماره مسئله، با استفاده از قالب X<sub>HP</sub>Persian، از طریق سایت مجله ارسال کنند. به منظور ارزیابی مسائل پیشنهادی، ارسال راه حل کامل و ذکر مأخذ (در مورد آنهایی که کمتر دیده شده اند) ضروری است. یادآوری می‌شود که مسائل متداول مطرح در کتب درسی یا پاتوق‌های اینترنتی و مسائل طرح شده در قسمت مسائل مجلات دیگر، برای پیشنهاد مناسب نیستند. هیئت تحریریه در انتخاب و ویرایش مسائل آزاد است.



**مسئله ۱.۶۶.** نشان دهید که برای هر  $x \neq 0$  داریم  $\left| \frac{d^n}{dx^n} \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{n+1}$

**مسئله ۲.۶۶.** نشان دهید که اگر زاویه  $x$  برحسب درجه، گویا باشد و  $\sin x$  نیز یک عدد گویا باشد، آنگاه  $\sin x = 0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}$ .

**مسئله ۳.۶۶.** برای یک گروه  $G$  و  $a \in G$  قرار می‌دهیم  $U_a = \{gag^{-1} : g \in G\}$

(الف) نشان دهید که  $U_a$  ها پایه برای یک توپولوژی روی  $G$  تشکیل می‌دهند؛

(ب) نشان دهید این توپولوژی هاوسدرف است اگر و تنها اگر  $G$  آبلی باشد.

**مسئله ۴.۶۶.** فرض کنید  $A = [a_{ij}]$  یک ماتریس  $n \times n$  غیر همانی با درایه‌های حقیقی نامنفی باشد به طوری که مجموع درایه‌های هر سطر و هر ستون آن برابر با ۱ است. نشان دهید جایگشت غیرهمانی  $\sigma$  موجود است به طوری که  $a_{i\sigma(i)} \neq 0$  برای هر  $i$ .

**مسئله ۵.۶۶.** فرض کنید  $f(x) = a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1x + a_0$  یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی از درجه  $2n$  باشد که متحد با صفر نیست و به ازای هر مقدار حقیقی  $x$ ، نامنفی است. نشان دهید چندجمله‌ای  $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \dots + f^{(2n)}(x)$  نیز دارای همین ویژگی است.

**مسئله ۶.۶۶.** فرض کنید  $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_k z^k$  (که  $a_k \in \mathbb{R}$  برای هر  $k$ ) یک تابع تحلیلی روی یک همسایگی باز حول  $0$  در  $\mathbb{C}$  است. نشان دهید یک تابع تام  $g$  موجود است به طوری که ضرایب بسط سری توانی  $f(z)e^{g(z)}$  همگی گویا هستند.

**مسئله ۷.۶۶.** منظور از یک عملیات «درج و جمع» روی یک عدد در مبنای ۲، اضافه کردن تعدادی علامت + در بین ارقام آن و سپس جمع کردن عبارت حاصل (در مبنای ۲) است تا به یک عدد جدید برسیم. نشان دهید برای هر عدد صحیح مثبت (در مبنای ۲) با حداکثر دو عملیات «درج و جمع»، می‌توان به عدد ۱ رسید.

**مسئله ۸.۶۶.** نشان دهید اگر  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی و  $t$  و  $n$  دو عدد صحیح مثبت باشند به طوری که  $t \leq n$ ، آن‌گاه

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (y - kx)^t = \begin{cases} 0 & t < n \\ n!x^n & t = n \end{cases}$$