فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۱ (پاییز ۱۳۸۷) صص. ۹ تا ۲۶

اندازه‌های عدم اطمینان

سید محمود طاهری

چکیده

در این مقاله، نخست اندازه‌های عدم اطمینان، و به‌ویژه ردهٔ بزرگی از آن‌ها موسوم به اندازه‌های فازی، مورد بررسی قرار می‌گیرند. سپس دو نوع مهم این اندازه‌ها، یعنی اندازه‌های باور (اعتقاد) و اندازه‌های موجه‌نمایی، و حالت خاص آن‌ها یعنی اندازه‌های احتمال، مطالعه شده و ارتباط این اندازه‌ها با مفهومی به نام تابع تخصیص پایه توضیح داده می‌شود. به علاوه دو ردهٔ مهم دیگر از این اندازه‌ها، به نام‌های اندازه‌های امکان و اندازه‌های لزوم (حتمیت)، بررسی می‌گردند. مطالب ارائه شده، با مثال‌های عددی و کاربردی تشریح شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: اندازه‌های عدم اطمینان، اندازه‌های فازی، اندازه‌های غیر جمعی، اندازه‌های باور، اندازه‌های امکان، اندازه‌های احتمال، تابع تخصیص پایه

۱. مقدمه و تاریخچه

از دیرباز تنها رهیافت تکامل یافتهٔ ریاضی برای اقدام در شرایط عدم اطمینان، نظریهٔ احتمال بوده است. اما از چند دههٔ گذشته به این سو، نظریه‌های گوناگون دیگری برای بررسی متغیرها و سیستم‌هایی که اطلاع نسبت به آن‌ها کافی و دقیق نیست، ارائه شده‌اند. بسیاری از این نظریه‌ها در یک چارچوب کلی موسوم به اندازه‌های عدم اطمینان[1] قرار می‌گیرند. این اندازه‌ها در واقع توابع مجموعه‌ای با ویژگی‌های خاص هستند. توسیع و تحدید این ویژگی‌ها منجر به انواع اندازه‌های عدم اطمینان می‌شود. گرچه اندازه‌های عدم اطمینان انواع گوناگونی دارند، اما ردهٔ بزرگ و مهمی از آن‌ها که اندازه‌های فازی[2] نامیده شده‌اند، بیشتر مورد توجه قرار گرفته‌اند.

1) Uncertainty Measures 2) Fuzzy Measures

همان طور که می‌دانیم، مفهوم اندازه یکی از کلیدی‌ترین مفاهیم در ریاضیات است. اندازه‌های متداول در ریاضیات اندازه‌های جمعی (اندازه‌های با ویژگی جمع‌پذیری) هستند. این ویژگی در عین حال که در بسیاری از موارد مفید و راهگشاست، ولی به هر حال، یک محدودیت تلقی می‌شود. اندازه‌های فازی در جهت رفع این محدودیت معرفی شده‌اند. این اندازه‌ها تعمیمی از مفهوم متداول اندازه‌اند، به این معنی که در آن‌ها شرط جمع پذیری توسط شرط ضعیف‌تر یکنوایی جایگزین می‌شود. چون غیرجمعی بودن، ویژگی اصلی اندازه‌های فازی است، این اندازه‌ها گاهی اندازه‌های غیرجمعی[1] نیز نامیده می‌شوند.

از لحاظ تاریخی، اندازه‌های فازی نخستین بار توسط سوگینو در سال ۱۹۷۲ [۳۷] (بر گرفته از رساله دکترای وی [۳۸]) مطرح شد. البته پیش از آن تلاش‌هایی در جهت ارائهٔ روش‌هایی جدید برای توصیف و تحلیل عدم اطمینان انجام گرفته بود، که از جمله می‌توان به مفاهیم احتمال‌های بالایی و پایینی[2] توسط دمپستر [۹] و مطالعهٔ احتمال در چارچوب اندازه‌های باور (اعتقاد)[3] توسط شفر [۳۵] اشاره کرد. (برای مروری بر مبانی این دو نظریه به [۱] مراجعه کنید).

پس از معرفی اندازه‌های فازی توسط سوگینو، این مبحث به یکی از مباحث جدی و گسترده در نظریه‌های اندازه، نظریه‌های عدم اطمینان و نظریه‌های اطلاع، و کاربرد آن‌ها تبدیل شده است.

دوبوا و پراد [۱۱] و مورفوشی و سوگینو [۲۷ و ۲۸] مروری جامع بر مفاهیم و ویژگی‌های مرتبط با اندازه‌های فازی ارائه داده‌اند. در این زمینه، کتاب‌های دننبرگ [۱۰] و وانگ و کلیر [۴۲] دربارهٔ اندازه‌های فازی، و به طور کلی اندازه‌های غیر جمعی، حائز اهمیت است.

باندمر و نتر [۴]، گودمن و گوین [۱۵] و گرابیش و همکاران [۱۷] اندازه‌های فازی را با تأکید بر جنبه‌های کاربردی مطالعه نموده‌اند. لیگینلال و او [۲۴] ضمن مرور برخی کاربردهای اندازه‌های عدم اطمینان، کاربردی از این اندازه‌ها را در فرایند تصمیم‌گیری مطالعه نموده‌اند. نیز ناروکاوا و تورا [۲۹] کاربرد اندازه‌های فازی را در نظریهٔ بازی‌ها بررسی کرده‌اند. فرسون و گینزبرگ [۱۴]، هن کیند و هاریسون [۱۸]، کلیر [۱۹] و کلیر و فولگر [۲۱] به بررسی انواع اندازه‌های عدم اطمینان و تفاوت‌های بین آن‌ها پرداخته‌اند. انتقال از یک چارچوب عدم اطمینان به چارچوبی دیگر، توسط افرادی مانند دوبوا و پراد [۱۳] و کلیر [۲۰] بررسی شده است. برونویچ و کارکیشچنکف [۶] ساختار اندازه‌های فازی تولید شده توسط احتمال‌های بالایی و پایینی را بررسی کرده‌اند. لوکس و اعرابی [۲۶] یک اندازهٔ فازی مقدار، مبتنی بر تعمیمی از قضیه دمپستر ــ شفر، ارائه کرده‌اند. لی و ژو [۲۳] قواعد و شیوه‌های استنتاج را بر اساس برخی از اندازه‌های فازی مطالعه نموده‌اند. تفاوت‌های بین اندازه‌های احتمال و امکان به وسیلهٔ گودمن و گوین [۱۶]، رالسکو و رالسکو [۳۲] و فیتل و هارتر [۴۰]، و مبحث احتمال‌های نادقیق توسط بوادری و همکاران [۷]، والی [۴۱] و زاده [۴۴] مطالعه شده است. اندازه‌های عدم اطمینان با رویکرد مبتنی بر مجموعه‌های تصادفی توسط گوین [۳۰]

1) Non-additive Measures 2) Upper and Lower Probabilities 3) Belief Measures

بررسی شده است. نیز این اندازه‌ها، با تأکید بر نظریهٔ اعتبار[1] توسط لیو [۲۵] مطالعه شده است.

موضوع انتگرال‌های غیرجمعی و به‌ویژه انتگرال‌های فازی که مرتبط و متناسب با اندازه‌های غیرجمعی تعریف می‌شوند، توسط محققانی مانند بن‌ونوتی و مسیار [۵]، مورفوشی و سوگینو [۲۸]، رالسکو و آدامز [۳۳]، اشمیدلر [۳۴] و سوگینو [۳۹] مورد مطالعه قرار گرفته است. خاطر نشان می‌شود که انتگرال‌های غیرجمعی، در یک تقسیم‌بندی کلی، به چهار شیوه شامل انتگرال شوکه [۸]، انتگرال سی‌پوس [۳۶]، انتگرال سوگینو و انتگرال T ـ همنرم رده‌بندی می‌شوند. یک اثر کامل در این باره کتاب دننبرگ [۱۰] است. نیز اثر پپ [۳۱] که در آن ردهٔ وسیعی از توابع مجموعه‌ای مقدار و انتگرال چنین توابعی را مطالعه نموده است، شایان توجه است.

مقالهٔ حاضر بدین ترتیب تدوین شده است: در بخش دوم تعریف اندازه‌های فازی ارائه می‌شود و ضمن بیان چند مثال، تفاوت آن با اندازه‌های احتمال و مجموعه‌های فازی تشریح می‌گردد. در بخش سوم، دو نوع خاص از اندازه‌های فازی، موسوم به اندازه‌های باور و اندازه‌های موجه‌نمایی (مقبولیت)[2]، بررسی می‌گردند. در بخش چهارم مفهوم تابع تخصیص (واگذاری) پایه[3]، که یک مفهوم کلیدی در مبحث اندازه‌های عدم اطمینان است، معرفی می‌شود. بخش پنجم به اندازه‌های احتمال و بخش ششم به اندازه‌های امکان[4] و اندازه‌های لزوم[5] که حالت‌های خاص و مهمی از اندازه‌های فازی هستند، اختصاص دارد. مراجع اصلی این مقاله [۱۷] و [۲۱] و [۲۸] هستند.

۲. اندازه‌های فازی

در این بخش و در بخش‌های آینده فرض می‌کنیم که X یک مجموعهٔ مرجع و $\mathcal{P}(X)$ مجموعهٔ توانی آن و $\mathcal{B}(X)$ (به کوتاهی: $\mathcal{B}$) یک میدان سیگمایی از زیرمجموعه‌های X است.

تعریف ۱.

تابع مجموعه‌ای $g : \mathcal{B} \longrightarrow [0,1]$ را یک اندازهٔ فازی بر $(X, \mathcal{B})$ گوییم اگر در سه اصل زیر صدق کند:

[g_1 :] (شرایط مرزی)

$$g(\varnothing) = 0 \quad , \quad g(X) = 1$$

[g_2 :] (یکنوایی)

$$A \subseteq B \Longrightarrow g(A) \leq g(B) \quad , \quad \forall\ A, B \in \mathcal{B}$$

1) Credibility Theory 2) Plausibility Measures 3) Basic Assignment Function
4) Possibility Measures 5) Necessity Measures

$[g_3:]$ (پیوستگی) برای هر دنبالهٔ یکنوا از زیرمجموعه‌های X، یعنی برای هر دنباله $\{A_i \in \mathcal{B}\ ,\ i \in N\}$ که

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \quad \text{یا} \quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$$

داشته باشیم

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} g(A_i) = g(\lim_{i \longrightarrow \infty} A_i)$$

در تعریف بالا هر عضو $\mathcal{B}$ یک پیشامد[1] نام دارد و مجموعهٔ مرجع X فضایی است شامل پیشامدهایی که با دسته‌ای اطلاعات نادقیق و نامطمئن دربارهٔ عناصر X مرتبط‌اند، و $g(A)$ درجهٔ اطمینان نسبت به رخ دادن پیشامد A است.

اصل اول بیان می‌کند که، صرف نظر از اطلاعات[2] و شواهدی[3] که در اختیار داریم، هر عنصر مورد بررسی مطمئناً در X قرار دارد و مطمئناً در مجموعهٔ تهی قرار ندارد.

اصل دوم بیانگر این احساس شهودی است که اگر پیشامد A پیشامد B را نتیجه دهد $(A \subseteq B)$، آن گاه حداقل همان اطمینان را که به رخ دادن A داریم، به رخ دادن B داریم. به سخن دیگر، اصل دوم نتیجه می‌دهد که اطلاعات و شواهد مربوط به عضویت یک عنصر در مجموعهٔ B باید دست‌کم به اندازهٔ شواهد عضویت آن عنصر به هر زیرمجموعه از B، مانند A، باشد.

اصل سوم، که فقط برای حالتی کاربرد دارد که X نامتناهی است، لزوم پیوسته بودن تابع g را بیان می‌کند. به سخن دیگر این اصل نوعی سازگاری را تضمین می‌کند: محاسبه $g(A)$ $(A = \lim_{i \longrightarrow \infty} A_i)$ چه به‌صورت حد $g(A_i)$ ها و چه با به‌کارگیری g برای حد A_i ها به یک نتیجه منجر شود.

تذکر ۱. برخی محققان تعریف اندازهٔ فازی را با شرایط ضعیف‌تری ارائه نموده‌اند. از جمله در برخی متون در تعریف اندازهٔ فازی، شرط $g(X) = 1$ ذکر نمی‌شود و اندازهٔ فازی با چنین شرطی، اندازهٔ فازی نرمال شده[4] نامیده می‌شود. برای توضیح بیشتر به [۱۷] رجوع کنید.

مثال ۱. می‌خواهیم نوع بیماری یک مریض را تشخیص دهیم. برای سادگی، فرض کنید می‌خواهیم بدانیم که مریض فعلی واجد کدام یک از بیماری‌های برونشیت، سرماخوردگی یا سینه پهلوست. آزمایش‌های پزشکی و عوارض بیماری، اطلاعات و شواهدی در اختیار می‌گذارند که به تشخیص بیماری کمک می‌کند. این اطلاعات آن اندازه دقیق و مطمئن و کامل نیستند که بتوان نوع بیماری را به‌طور قطعی تعیین کرد. اما می‌توان بر پایهٔ این اطلاعات درجهٔ اطمینان نسبت به وجود هر بیماری را مشخص نمود. مثلاً ممکن است، طبق اطلاعات و شواهد موجود، به اندازه ۷۰٪ مطمئن شویم که مریض عضو مجموعه انسان‌هایی است که برونشیت دارند، و ۵۰٪ مطمئن شویم

1) Event 2) Information 3) Evidence 4) Normalized Fuzzy Measure

که وی عضو مجموعه افرادی است که سرماخوردگی دارند و ۲۰٪ مطمئن شویم که وی سینه پهلو دارد. این مقادیر تشکیل یک اندازه فازی را می‌دهند که توصیف کنندهٔ عدم اطمینان نسبت به نوع بیماری فرد مورد نظر است.

مثال ۲. دادگاهی را در نظر بگیرید که برای یک محاکمه جنایی دربارهٔ بی‌گناهی یا مجرمیت تعدادی متهم تشکیل شده است. دادگاه برای قضاوت دربارهٔ این افراد متوسل به اطلاعات، شواهد و گواه‌هایی می‌شود. دادگاه نمی‌تواند به‌طور قطع مجرمیت یا بی‌گناهی هر متهم را تعیین کند. اما می‌تواند، طبق شواهد و گواه‌های موجود، تعیین کند که با چه اندازه اطمینانی هر متهم عضو مجموعهٔ مجرمین است. این نوع عدم اطمینان را می‌توان در قالب اندازه‌های فازی توصیف و تبیین کرد.

نکتهٔ ۱. از تعریف ۱ و مثال‌های بالا آشکار است که نوع عدم اطمینانی که با اندازه‌های فازی تبیین می‌شود با نوع عدم اطمینانی که توسط مجموعه‌های فازی بیان می‌شود، متفاوت است. در حالت اخیر، با یک مجموعهٔ فازی روبرو هستیم یعنی مجموعه‌ای با کران‌های نادقیق (مثلاً مجموعه افراد بلند قد، مجموعه اعداد طبیعی کوچک، مجموعه اعداد حدوداً ۱۰، ...). آنگاه به هر شیء درجه‌ای نسبت می‌دهیم که بیانگر درجهٔ عضویت آن شیء در مجموعهٔ فازی مورد نظر است. اما در مبحث اندازه‌های فازی با مجموعه‌هایی دقیق (غیر فازی) روبرو هستیم. در این جا عدم اطمینان به این موضوع باز می‌گردد که، طبق اطلاعات و شواهد موجود، چه اندازه مطمئن هستیم که یک فرد (شیء) خاص عضو هر مجموعه است. برای نمونه در مثال تشخیص پزشکی، مجموعه افراد دارای برونشیت یک مجموعه مشخص و غیرفازی فرض می‌شود. حال برپایهٔ اطلاعات و شواهد موجود، به اندازه ۷۰٪ اطمینان داریم که مریض فعلی عضو مجموعه افراد واجد برونشیت است. هم چنین در مثال محاکمهٔ جنائی، مجموعه افراد مجرم و مجموعه افراد بی‌گناه دو مجموعهٔ دقیق و غیرفازی هستند. در این جا عدم اطمینان به این باز می‌گردد که تا چه اندازه مطمئن هستیم که یک فرد خاص عضو مجموعه افراد مجرم است (یا این که تا چه اندازه مطمئن هستیم که هر مجموعه خاص از افراد، شامل فرد یا افراد مجرم است).

پس در حالت مجموعه‌های فازی، تابع عضویت تابعی از مجموعه مرجع X به بازه $[۰, ۱]$ است. در حالی که در مبحث اندازه‌های فازی، هر اندازه فازی تابعی از $\mathcal{B}$ (یک میدان سیگمایی از X) به بازه $[۰, ۱]$ است.

نکتهٔ ۲. تفاوت اندازه‌های فازی و اندازه‌های احتمال شایان توجه است. در واقع اصول موضوعه‌ای که در تعریف ۱ بیان شده است، ضعیف‌تر از اصول موضوعهٔ احتمال است. بدین ترتیب می‌توان گفت که اندازه‌های احتمال حالت خاصی از اندازه‌های فازی هستند. تفاوت اساسی به اصل جمع‌پذیری احتمال باز می‌گردد. اصلی که بیان می‌دارد که برای هر مجموعه از پیشامدهای جدا از هم A_i

$$P(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i)$$

که در آن I یک مجموعهٔ شمارای اندیس گذار است. از همین اصل نتیجه می‌شود که $P(A^C) = ۱ - P(A)$. به سخن دیگر اندازهٔ احتمال متمم هر پیشامد را می‌توان برحسب اندازهٔ احتمال آن پیشامد به‌دست آورد. اما در اندازه‌های فازی با دانستن $g(A)$ (درجه اطمینان به رخ دادن پیشامد A) مقدار $g(A^C)$ (درجه اطمینان به رخ ندادن A) را نمی‌توان دقیقاً تعیین کرد.

نتیجهٔ ۱. از اصل یکنوایی ($g_۲$) نتیجه می‌شود که برای هر $A, B \in \mathcal{B}$،

$$g(A \cap B) \leq \min[g(A)\ ,\ g(B)] \qquad (۱.\text{الف})$$

$$g(A \cup B) \geq \max[g(A)\ ,\ g(B)] \qquad (۱.\text{ب})$$

۳. اندازه‌های باور و اندازه‌های موجه‌نمایی

تعریف ۲. تابع مجموعه‌ای $Bel : \mathcal{B} \longrightarrow [۰, ۱]$ را یک اندازهٔ باور بر $(X, \mathcal{B})$ گوییم اگر در اصول $g_۱$ تا $g_۳$ صدق کرده و به علاوه برای هر $n \in N$ و هر رده از زیرمجموعه‌های $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ از $\mathcal{B}$،

$$Bel(A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_n) \geq \sum_i Bel(A_i) - \sum_{i<j} Bel(A_i \cap A_j) + \cdots + (-۱)^{n+۱} Bel(A_۱ \cap \cdots \cap A_n) \qquad (۲)$$

برای نمونه در حالت $n = ۲$ رابطهٔ فوق به این صورت در می‌آید

$$Bel(A_۱ \cup A_۲) \geq Bel(A_۱) + Bel(A_۲) - Bel(A_۱ \cap A_۲) \qquad (۳)$$

مقدار $Bel(A)$ درجهٔ باوری است که بر پایهٔ اطلاعات و گواه‌ها و شواهد موجود، به رخ دادن پیشامد A داریم (تعبیر دقیق‌تر را به زودی خواهیم گفت). اصل ممیزهٔ اندازه‌های باور، رابطهٔ ۲، بیان می‌دارد که درجهٔ باور مرتبط با اجتماع چند پیشامد جدا از هم، از مجموع درجات باور تک تک پیشامدها کمتر نباشد. پس این اصل حالت ضعیف‌تری از اصل جمع پذیری احتمال است. بنابراین اندازه‌های احتمال حالت خاصی از اندازه‌های باور هستند: در اندازه‌های احتمال نامساوی ۲ تبدیل به تساوی می‌شود. (برای تعمیمی از اندازه‌های باور [۲۲] را ببینید).

نتیجهٔ ۲. اگر در رابطهٔ ۲ قرار دهیم $n = ۲$ و $A_۱ = A$ و $A_۲ = A^C$، خواهیم داشت

$$Bel(A) + Bel(A^C) \leq ۱$$

به هر اندازهٔ باور، یک اندازهٔ موسوم به اندازهٔ موجه‌نمایی مرتبط است که برای هر مجموعهٔ A از $\mathcal{B}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Pl(A) = ۱ - Bel(A^C)$$

و به‌طور مشابه

$$Bel(A) = ۱ - Pl(A^C)$$

بنابراین اندازه‌های باور و موجه‌نمایی، دوگان یکدیگرند. اندازه‌های موجه‌نمایی را می‌توان مستقلاً و به‌صورت زیر نیز تعریف نمود.

تعریف ۳. تابع مجموعه‌ای $Pl : \mathcal{B} \longrightarrow [۰, ۱]$ را یک اندازهٔ موجه‌نمایی بر $(X, \mathcal{B})$ گوییم اگر در اصول $g_۱$ تا $g_۳$ صدق کرده و به‌علاوه برای هر $n \in N$ و هر رده از زیرمجموعه‌های $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ از $\mathcal{B}$،

$$Pl(A_۱ \cap A_۲ \cap \cdots \cap A_n) \leq \sum_i Pl(A_i) - \sum_{i<j} Pl(A_i \cup A_j) + \cdots + (-۱)^{n+۱} Pl(A_۱ \cup \cdots \cup A_n) \quad (۴)$$

برای نمونه در حالت $n = ۲$ رابطهٔ فوق به این صورت در می‌آید

$$Pl(A_۱ \cap A_۲) \leq Pl(A_۱) + Pl(A_۲) - Pl(A_۱ \cup A_۲) \quad (۵)$$

که برای مقایسه با رابطهٔ ۳ می‌توان آن را چنین نوشت

$$Pl(A_۱ \cup A_۲) \leq Pl(A_۱) + Pl(A_۲) - Pl(A_۱ \cap A_۲)$$

اصل ممیزهٔ اندازه‌های موجه‌نمایی (رابطهٔ ۴) حالت ضعیف‌تری از اصل جمع‌پذیری احتمال است. بنابراین اندازه‌های احتمال حالت خاصی از اندازه‌های موجه‌نمایی هستند: در اندازه‌های احتمال نامساوی ۴ تبدیل به تساوی می‌شود.

نتیجهٔ ۳. اگر در رابطهٔ ۴ قرار دهیم $n = ۲$ و $A_۱ = A$ و $A_۲ = A^C$، خواهیم داشت

$$Pl(A) + Pl(A^C) \geq ۱$$

۴. تابع تخصیص پایه

تعریف ۴. تابع مجموعه‌ای $m : \mathcal{B} \longrightarrow [۰, ۱]$ را یک تابع تخصیص پایه بر $(X, \mathcal{B})$ گوییم اگر $m(\varnothing) = ۰$ و

$$\sum_{A \in \mathcal{B}} m(A) = ۱ \quad (٦)$$

مقدار $m(A)$ درجه‌ای از اطمینان است که به رخ دادن دقیقاً پیشامد A (و نه هیچ زیرمجموعهٔ مشخص از آن) داریم.

نکتهٔ ۳. معادلهٔ ٦ شبیه به معادلهٔ مربوط به توابع جرم احتمال، $\sum_{x \in X} P(x) = ۱$، است. اما تفاوتی اساسی بین توابع جرم احتمال و توابع تخصیص پایه وجود دارد. توابع جرم احتمال بر X تعریف

می‌شوند و توابعی عددی هستند، در حالی که تخصیص‌های پایه بر عناصر $\mathcal{B}$ تعریف می‌شوند و توابعی مجموعه‌ای هستند. خاطر نشان می‌شود که در بعضی منابع از عبارت تابع تخصیص احتمال پایه استفاده شده است. ما، به‌ویژه برای تمایز با توابع احتمال، از عبارت تابع تخصیص پایه استفاده می‌کنیم. نیز در برخی از متون به جای تابع تخصیص پایه، عبارت تابع جرم[۱] را به کار می‌برند.

نکتهٔ ۴. گاهی بهتر است شرط $m(\varnothing) = ۰$ در تعریف ۴ را حذف نمود. این کار برای حالت‌هایی توصیه می‌شود که مجموعهٔ اطلاعات در مورد پدیدهٔ مورد بررسی کامل نیست و با نوعی نقصان اطلاعات روبرو هستیم. (نیز رجوع کنید به تذکر ۱).

تعریف ۵. هر مجموعهٔ $A \in \mathcal{B}$ که برای آن $m(A) > ۰$، یک عنصر کانونی m (*Focal Element*) نامیده می‌شود.

عناصر کانونی، زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع X هستند که اطلاعات و شواهد و قرائن و گواه‌های موجود، بر آن‌ها تمرکز دارند. به‌ویژه هنگامی که X متناهی باشد، می‌توانیم تابع m را با فهرست عناصر کانونی و اندازه‌های آن‌ها مشخص کنیم.

نکتهٔ ۵. با توجه به تعریف تابع تخصیص پایه، در می‌یابیم که اولاً لزومی ندارد که $m(X) = ۱$، و دوم آن که تابع تخصیص پایه یک تابع یکنوا نیست یعنی لزومی ندارد که اگر $A \subset B$ آنگاه $m(A) \leq m(B)$ و سوم آن که رابطه‌ای خاص بین $m(A)$ و $m(A^C)$ وجود ندارد.

گرچه تخصیص‌های پایه، اندازه‌های فازی نیستند اما نکتهٔ اساسی و مهم این است که هر تابع تخصیص پایه m بر $(X, \mathcal{B})$، به‌طور یکتا یک اندازهٔ باور و یک اندازهٔ موجه‌نمایی بر $(X, \mathcal{B})$ به صورت زیر تعیین می‌کند

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) \qquad (۷)$$

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \varnothing} m(B) \qquad (۸)$$

بنابراین اگر در یک مسأله، مقادیر تابع تخصیص پایه (یا صرفاً عناصر کانونی و مقادیر تابع تخصیص پایه به‌ازای آن‌ها) را بدانیم، می‌توانیم درجه‌های باور و موجه‌نمایی هر پیشامد را محاسبه کنیم. گفتنی است که می‌توان جهتی مخالف با جهت بالا در تعریف توابع باور و موجه‌نمایی را در پیش گرفت. بدین ترتیب که نخست تابع تخصیص پایه را معرفی نمود و سپس توابع باور و موجه‌نمایی را به عنوان توابعی که در روابط ۷ و ۸ صدق می‌کنند، تعریف کرد.

---

1) Mass Function

نتیجهٔ ۴. از روابط ۷ و ۸ نتیجه می‌شود که برای هر پیشامد A،

$$m(A) \leq Bel(A) \leq Pl(A)$$

با روابط ۷ و ۸ می‌توان براساس تابع تخصیص پایه، اندازه‌های باور و موجه‌نمایی را به‌دست آورد. برای حالت عکس، یعنی هنگامی که یک اندازهٔ باور یا یک اندازهٔ موجه‌نمایی داده شده باشند، تخصیص پایهٔ متناظر طبق قضیهٔ زیر به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۱. (قضیهٔ وارون موبیوس) اگر یک اندازهٔ باور $Bel(.)$ یا یک اندازهٔ موجه‌نمایی $Pl(.)$ داده شده باشد، تخصیص‌های پایهٔ متناظر این گونه به‌دست می‌آیند

$$m(A) = \sum_{B\subseteq A} (-۱)^{|A-B|} Bel(B) \quad (۹)$$

$$m(A) = \sum_{B\subseteq A} (-۱)^{|A-B|} (۱ - Pl(B^C)) \quad (۱۰)$$

که در آن $|A-B|$ عدد اصلی مجموعهٔ $A-B$ است.

اثبات. رابطهٔ ۹ را ثابت می‌کنیم. از رابطهٔ ۷ داریم

$$\begin{aligned}\sum_{B\subseteq A} (-۱)^{|A-B|} Bel(B) &= \sum_{B\subseteq A} (-۱)^{|A-B|} \sum_{C\subseteq B} m(C)\\ &= \sum_{C\subseteq A} m(C) + \sum_{B\subset A} (-۱)^{|A-B|} \sum_{C\subseteq B} m(C)\\ &= m(A) + \sum_{C\subset A} m(C) + \sum_{B\subset A} (-۱)^{|A-B|} \sum_{C\subseteq B} m(C)\end{aligned}$$

اما

$$\sum_{C\subset A} m(C) + \sum_{B\subset A} (-۱)^{|A-B|} \sum_{C\subseteq B} m(C) = ۰$$

زیرا همهٔ جمله‌های عبارت $\sum_{C\subset A} m(C)$ با علامت منفی در عبارت بعد ظاهر می‌شود. به‌علاوه جملات باقیمانده در عبارت دوم نیز به‌طور دوتایی با علامت‌های منفی و مثبت ظاهر می‌شوند. دقت کنید که $m(\varnothing) = ۰$. بدین ترتیب رابطهٔ ۹ ثابت می‌شود. رابطهٔ ۱۰ نیز با جایگذاری از رابطهٔ $Bel(B) = ۱ - Pl(B^C)$ به‌دست می‌آید.

مقایسهٔ اندازه باور، اندازهٔ موجه‌نمایی و مقدار تخصیص پایه

با توجه به تعریف تابع تخصیص پایه و روابط ۷ و ۸، بر پایهٔ مجموعه‌ای از اطلاعات و شواهد دربارهٔ مجموعهٔ مرجع X و زیرمجموعه‌های آن، می‌توان گفت که

$m(A)$ درجهٔ اطمینانی است که به رخ دادن دقیقاً پیشامد A (و نه هیچ زیرمجموعهٔ مشخصی از آن) داریم.

$Bel(A)$ درجهٔ اطمینانی است که به رخ دادن پیشامد A و یا هر زیرمجموعه‌ای از آن داریم.

$Pl(A)$ درجهٔ اطمینانی است که برای رخ دادن پیشامد A و یا هر زیرمجموعه از آن و یا هر پیشامد دیگری که با A اشتراکی دارد، قائل هستیم.

تعبیرهای فوق را می‌توان از دیدگاه نظریهٔ اطلاع نیز بیان کرد. فرض کنید براساس اطلاعات موجود می‌خواهیم دربارهٔ عضویت یک شیء (فرد) مشخص از X در مجموعهٔ A نظر دهیم. در این حالت

$m(A)$ بیانگر درجهٔ گواهی اطلاعات موجود بر عضویت آن شیء در دقیقاً مجموعهٔ A است.

$Bel(A)$ بیانگر درجهٔ گواهی اطلاعات موجود بر عضویت آن شیء در مجموعهٔ A و یا هر زیرمجموعه از A است.

$Pl(A)$ بیانگر درجهٔ گواهی اطلاعات موجود بر عضویت آن شیء در مجموعه A و یا هر زیرمجموعه از A و یا هر مجموعه دیگری که با A اشتراک دارد، می‌باشد.

مثال ۳. یک فرد بیمار به پزشک مراجعه می‌کند. پزشک بعد از معاینه و آزمایش‌های لازم نوع بیماری را یکی از سه نوع برونشیت A، سرماخوردگی B، و سینه پهلو C تشخیص می‌دهد و براساس نتایج به‌دست آمده، تخصیص پایه m مندرج در جدول ۱ را ارائه می‌دهد. براساس تخصیص پایه m، و با استفاده از رابطه‌های ۹ و ۱۰ اندازه‌های باور و موجه‌نمایی متناظر را نیز می‌توانیم به‌دست آوریم.

عناصر کانونی	m	Bel	Pl
A	۰/۱۵	۰/۱۵	۰/۸۵
B	۰	۰	۰/۵۵
C	۰/۱۰	۰/۱۰	۰/۷۵
$A \cup B$	۰/۱۰	۰/۲۵	۰/۹۰
$A \cup C$	۰/۲۰	۰/۴۵	۱
$B \cup C$	۰/۰۵	۰/۱۵	۰/۸۵
$A \cup B \cup C$	۰/۴۰	۱	۱

جدول ۱. تخصیص پایه و اندازه‌های باور و موجه‌نمایی نوع بیماری در مثال ۳

توضیح. پزشک پس از معاینات و آزمایش‌های لازم، ملاحظه می‌کند که ۱۵% از علائم و آثار بیماری، مختص بیماری برونشیت، A، است و هیچ علامتی که مختص بیماری سرماخوردگی، B، باشد وجود ندارد و به علاوه ۱۰% از علائم بیماری نیز مختص بیماری سینه پهلو، C، می‌باشد. هم‌چنین ۱۰% از آثار بیماری، از علائم مشترک بین بیماری‌های A و B است (و نه هر کدام از آن‌ها به‌طور خاص) و ... هم چنین تا آخر، یعنی ۴۰% از علائم بیمار، از علائم مشترک بین هر سه بیماری است. به سخن دیگر ۴۰% از اطلاعات موجود صرفاً گواهی بر این دارند که بیمار در مجموعهٔ بیماران مبتلا به برونشیت یا سرماخوردگی و یا سینه پهلو قرار دارد و از این ۴۰% اطلاعات هیچ نتیجهٔ خاص دیگری عاید نمی‌شود. هم‌چنین مثلاً مقدار ۴۵% برای $Bel(A \cup C)$ این گونه تفسیر می‌شود که درجهٔ باور ما به این که بیمار مبتلا به برونشیت و یا مبتلا به سینه پهلوست برابر ۴۵% است. و هم‌چنین مقدار ۸۵% برای $Pl(B \cup C)$ به این معنی است که ۸۵% علائم بیماری، متعلق به بیماری سرماخوردگی و یا سینه پهلو و یا از علائم مشترک این دو بیماری و یا از علائمی است که مشترک با علائم سرماخوردگی و یا سینه پهلو و بیماری دیگر است.

ملاحظه می‌کنید که نوع اطلاعات و دانش حاصله و نوع اندازه‌های عدم اطمینان که در این جا مطرح است و نوع تخصیص‌دهی مقادیر به مجموعه‌های مختلف، اساساً با آنچه در چارچوب‌های احتمالی بیان می‌شود (و عمدتاً مبتنی بر فراوانی نسبی است) تفاوت بنیادی دارد.

۵. اندازه‌های احتمال

اگر اصل ممیزه اندازه‌های باور یعنی رابطهٔ ۲ با اصل قوی‌تر زیر جایگزین شود، حالت خاصی از اندازه‌های باور که همان اندازه‌های احتمال است به‌دست می‌آید

$$Bel(A \cup B) = Bel(A) + Bel(B) \quad , \quad A \cap B = \varnothing \tag{11}$$

قضیهٔ زیر اساسی‌ترین ویژگی اندازه‌های احتمال را به‌عنوان حالت خاصی از اندازه‌های باور بیان می‌دارد [۲۱].

قضیهٔ ۲. یک اندازه باور $Bel(.)$ بر $(X, \mathcal{P}(X))$، که در آن $\mathcal{P}(X)$ متناهی است، یک اندازهٔ احتمال است اگر و تنها اگر تخصیص پایهٔ متناظر آن، برای مجموعه‌های تک عضوی برابر اندازهٔ باور آن‌ها باشد، یعنی

$$m(\{x\}) = Bel(\{x\})$$

و برای هر مجموعهٔ غیر تک عضوی A، $m(A) = 0$.

از قضیهٔ بالا نتیجه می‌شود که اندازه‌های احتمال بر مجموعه‌های مرجع متناهی، به وسیلهٔ یک تابع به‌صورت $P : X \longrightarrow [0, 1]$ تعریف می‌شوند به قسمی که $P(x) = m(\{x\})$. همان‌طور که می‌دانیم در نوشتارهای آماری این تابع، تابع جرم احتمال (*Probability Mass Function*) نام دارد.

نتیجهٔ ۵. اگر تخصیص پایه فقط بر مجموعه‌های تک عضوی متمرکز شود، داریم $\sum_{x\in X} m(\{x\}) = 1$. در این صورت طرف‌های راست معادله‌های ۷ و ۸ برابر می‌شوند و خواهیم داشت

$$Bel(A) = Pl(A) = \sum_{x\in A} m(\{x\}) = \sum_{x\in A} P(x) = P(A), \quad A \in \mathcal{P}(X)$$

این بدان معنی است که اندازه‌های دوگان باور و موجه‌نمایی تحت اصل ۱۱ به اندازه‌های احتمال تبدیل می‌شوند.

نکتهٔ ٦. گفته شد که اندازه‌های احتمال هنگامی دقیقاً تعیین می‌شوند که عناصر کانونی m، مجموعه‌های تک عضوی باشند. در حالت کلی ممکن است چنین نباشد. در این حالت گرچه نمی‌توان احتمال هر پیشامد را دقیقاً مشخص کرد اما می‌توان، تحت شرایطی، آن را به‌طور نادقیق و به‌صورت یک بازه بیان کرد. کران بالای این بازه اندازهٔ موجه‌نمایی و کران پایین آن اندازهٔ باور مربوط به آن پیشامد است.

توجه کنید که اگر m یک تابع تخصیص پایه بر $\mathcal{B}$ باشد، و $Bel(.)$ و $Pl(.)$ اندازه‌های باور و موجه‌نمایی متناظر با m باشند، آن گاه می‌توان مجموعه‌ای از اندازه‌های احتمال بر $\mathcal{B}$ در نظر گرفت که در رابطهٔ زیر صدق کنند

$$Bel(A) \le P(A) \le Pl(A) \quad , \quad A \in \mathcal{B}$$

این رابطه توضیح می‌دهد که چرا در برخی شرایط، از $Bel(A)$ و $Pl(A)$ به‌عنوان احتمال‌های پایینی و بالایی نام برده می‌شود. احتمال‌های پایینی و بالایی نخستین بار توسط دمپستر [٦] در سال ۱۹٦۷، و البته مستقل از مفهوم اندازه‌های باور و موجه‌نمایی، معرفی شد. برای مطالعهٔ این رویکرد به احتمال، مراجع [۹]، [۳۰] و [۴۱] را ببینید. خوانندهٔ علاقمند به رویکردهای مختلف به احتمال، در مقام یک اندازهٔ عدم اطمینان و تفسیرها و تعبیرهای گوناگون احتمال می‌تواند به مراجع [۲] و [۳] مراجعه کند.

٦. اندازه‌های امکان و لزوم

هنگامی که عناصر کانونی تو در تو[1] باشند آن گاه اندازه‌های باور و موجه نمایی مربوطه، هماهنگ[2] نامیده می‌شوند. این بدان معنی است که اطلاعات و شواهد مربوط به یک مسئله، با یکدیگر در تزاحم نیستند. در این حالت روابط خاصی برای اندازه‌های باور و موجه‌نمایی برقرار می‌شود که در قضیهٔ زیر ارائه شده است [۱۸].

قضیهٔ ۳. فرض کنید m یک تابع تخصیص پایه بر $(X, \mathcal{B})$ باشد. اگر عناصر کانونی m تو در تو باشند آنگاه برای هر $A, B \in \mathcal{B}$،

1) Nested 2) Consonant

$$Bel(A \cap B) = \min[Bel(A)\ ,\ Bel(B)] \qquad (۱۲.\text{الف})$$
$$Pl(A \cup B) = \max[Pl(A)\ ,\ Pl(B)] \qquad (۱۲.\text{ب})$$

در این حالت خاص، اندازه‌های باور و موجه‌نمایی به ترتیب اندازه‌های لزوم و امکان نامیده می‌شوند. این اندازه‌ها را می‌توان مستقیماً به‌عنوان دو نوع خاص از اندازه‌های فازی نیز تعریف کرد. (نیز رجوع کنید به [۹]).

تعریف ٦. تابع مجموعه‌ای $N : \mathcal{B} \longrightarrow [۰, ۱]$ را یک اندازه لزوم بر $(X, \mathcal{B})$ گوییم اگر در اصول $g_۱$ تا $g_۳$ صدق کند و به‌علاوه برای هر $A, B \in \mathcal{B}$،

$$N(A \cap B) = \min[N(A)\ ,\ N(B)] \qquad (۱۳)$$

ملاحظه می‌کنید که اندازه‌های لزوم از تحمیل تساوی در رابطهٔ (۱.الف) حاصل می‌شود. حالت حدی دیگر، از تحمیل تساوی در رابطه (۱.ب) به‌دست می‌آید.

تعریف ۷. تابع مجموعه‌ای $\Pi : \mathcal{B} \longrightarrow [۰, ۱]$ را یک اندازه امکان بر $(X, \mathcal{B})$ گوییم اگر در اصول $g_۱$ تا $g_۳$ صدق کند و به‌علاوه برای هر $A, B \in \mathcal{B}$،

$$\Pi(A \cup B) = \max[\Pi(A)\ ,\ \Pi(B)] \qquad (۱۴)$$

توضیح آن که، برپایهٔ اطلاعات و شواهد موجود، $N(A)$ درجهٔ حتمیت و لزوم رخ دادن پیشامد A است. هم‌چنین $\Pi(A)$ درجهٔ سازگاری اطلاعات و شواهد موجود با پیشامد A است. توجه دارید که برای هر $A \in B$،

$$\Pi(A) \geq N(A)$$

رابطهٔ اخیر با این درک شهودی منطبق است که یک پیشامد قبل از آن که لازم و حتمی شود، ممکن می‌شود.

واضح است که اندازه‌های لزوم و امکان دوگان یکدیگر هستند و به‌طور یکتا توسط رابطه‌های زیر از هم حاصل می‌شوند

$$\Pi(A) = ۱ - N(A^C) \qquad (۱۵.\text{الف})$$
$$N(A) = ۱ - \Pi(A^C) \qquad (۱۵.\text{ب})$$

به سخن دیگر، امکان یک پیشامد برابر است با یک منهای اندازهٔ حتمیت متمم آن پیشامد، و اندازهٔ حتمیت یک پیشامد برابر با یک منهای اندازه امکان متمم آن پیشامد است.

نتیجهٔ ٦. برای هر اندازهٔ لزوم و امکان روابط زیر برقرار هستند

$$\min[N(A)\ ,\ N(A^C)] = ۰ \qquad (۱٦.\text{الف})$$
$$\max[\Pi(A)\ ,\ \Pi(A^C)] = ۱ \qquad (۱٦.\text{ب})$$

اثبات. رابطهٔ ۱۶. الف براساس رابطهٔ ۱۳ و با توجه به اصل g_1 حاصل می‌شود. رابطهٔ ۱۶.ب نیز بر پایهٔ رابطهٔ ۱۴ و با توجه به اصل g_1 به‌دست می‌آید.

رابطهٔ ۱۶.الف بیان می‌کند که هیچ گاه، از دو پیشامد متناقض، هر دو اندازه‌های لزوم مثبت ندارند. رابطهٔ ۱۶.ب بیان می‌دارد که از بین دو پیشامد A و پیشامد متمم A، دست کم یکی کاملاً ممکن است رخ دهد.

برای هر اندازهٔ لزوم و اندازهٔ امکان دوگان آن، روابط زیر برقرار هستند

$$N(A) > 0 \implies \Pi(A) = 1 \qquad \text{(۱۷.الف)}$$

$$\Pi(A) < 1 \implies N(A) = 0 \qquad \text{(۱۷.ب)}$$

اثبات. اگر $N(A) > 0$ آنگاه از رابطهٔ ۱۶.الف نتیجه می‌شود که $N(A^C) = 0$. اکنون، با استفاده از رابطهٔ ۱۵.الف داریم $\Pi(A) = 1$. رابطهٔ ۱۷.ب به‌طور مشابه (نیز با برهان خلف و با استفاده از رابطهٔ ۱۷.الف) ثابت می‌شود.

بر پایهٔ آنچه گفته شد می‌توان رابطه‌های متناظر در اندازه‌های امکان و اندازه‌های لزوم را به‌صورتی که در جدول زیر درج شده است خلاصه کرد. برای مطالعهٔ بیشتر در مورد اندازه‌های امکان به [۱۲] و [۳۰] و [۴۳] مراجعه کنید.

روابط مربوط به اندازه‌های لزوم	روابط مربوط به اندازه‌های امکان
$N(A \cap B) = \min[N(A), N(B)]$ $N(A) = 1 - \Pi(A^c)$ $\min[N(A), N(A^c)] = 0$ $N(A) + N(A^c) \leq 1$ $N(A) > 0 \Rightarrow \Pi(A) = 1$	$\Pi(A \cup B) = \max[\Pi(A), \Pi(B)]$ $\Pi(A) = 1 - N(A^c)$ $\max[\Pi(A), \Pi(A^c)] = 1$ $\Pi(A) + \Pi(A^c) \geq 1$ $\Pi(A) < 1 \Rightarrow N(A) = 0$
$\Pi(A) \geq N(A)$	

منابع و مراجع

[۱] اعرابی، ب؛ شهبازی میرزا حسنلو، ط (۱۳۸۶)، مروری بر مبانی نظریه دمپستر شفر، اندیشه آماری، ش ۲۳، ص ۱۹—۳.

[۲] طاهری، س م (۱۳۸۱)، یگانگی و چندگانگی احتمال، نامه فرهنگستان علوم، ش ۱۹، ص ۱۲۵—۹۳.

[۳] گیلیز، د (۱۳۸۶)، نظریه‌های فلسفی احتمال، ترجمه: مشکانی، م ر، مؤسسهٔ انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف.

[4] Bandemer, H., Näther, W. (1992); Fuzzy Data Analysis, Kluwer, Dordrecht.

[5] Benvenoti, P., Mesiar, R. (2000); Integrals with respect to a general fuzzy measure, In: Grabisch, M., et al. (Eds.); Fuzzy Measures and Integrals, Physica-Verlag, pp. 205 - 232.

[6] Bronevich, A.G., Karkishchenko, A.N. (2002); The structure of fuzzy measure families induced by upper and lower probabilities, In: Bertoluzza, C., et al. (Eds.), Statistical Modeling, Analysis and Management of Fuzzy Data, Physica-Verlag, pp. 160-172.

[7] Buadrit, C., Dubois, D., Fargier, H. (2004); Representation of incomplete probabilistic information, In: Lopez-Diaz, et al. (Eds.), Soft Methodology and Random Information Systems, Springer, pp. 149 - 156.

[8] Choquet, G. (1953); Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier, 5: 131 - 295.

[9] Dempster, A.P. (1967); Upper and lower probabilities induced by multivalued mappings, Ann. Math. Stat, 38: 325 - 339.

[10] Dennenberg, D. (1997); Non-additive Measure and Integral, 2nd ed., Kluwer, Dordrecht.

[11] Dubois, D., Prade, H. (1987); Properties of measures of information in evidence and possibility theories, Fuzzy Sets and Systems, 24: 161-182.

[12] Dubois, D., Prade, H. (1988); Possibility Theory, Plenum Press, New York.

[13] Dubois, D., Prade, H., Sandri, S. (1993); On possibility/probability transformations, In: Lowen, R., Roubens, M. (Eds.), Fuzzy Logic: State of the Art, Kluwer, pp. 104 - 112.

[14] Ferson, S., Ginzburg, L.R. (1996); Different methods are needed to propagate ignorance and variability, Reliability Engineering and Systems Safety, 54: 133 - 144.

[15] Goodman, I.R., Nguyen, H.T. (1985); Uncertainty Models for Knowledge-Based Systems, North-Holland, Amsterdam.

[16] Goodman, I.R., Nguyen, H.T. (2002); Fuzziness and randomness, In: Bertoluzza, C., et al. (Eds.), Statistical Modeling, Analysis and Management of Fuzzy Data, Physica-Verlag, pp. 3-21.

[17] Grabisch, M., Nguyen, H.T., Walker, E.A. (1995); Fundamentals of Uncertainty Calculi with Applications to Fuzzy Inference, Kluwer, Dordrecht.

[18] Henkind, S.J., Harrison, M.C. (1988); An analysis for four uncertainty calculi, IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, 18: 700 - 714.

[19] Klir, G.J. (1987); Where do we stand on measures of uncertainty, ambiguity, fuzziness, and the like?, Fuzzy Sets and Systems, 24: 141 - 160.

[20] Klir, G.J. (1990); A principle of uncertainty and information invariance, Intern. J. of General Systems, 17: 249 - 275.

[21] Klir, G.J., Folger, T.A. (1988); Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

[22] Kramosil, I. (2000); Towards generalized belief functions, In: Grabisch, M., et al. (Eds.); Fuzzy Measures and Integrals, Physica-Verlag, pp. 104 - 123.

[23] Lee, E.S., Zhu, Q. (1995); Fuzzy and Evidence Reasoning, Physica-Verlag, Heidelberg.

[24] Liginlal, D., Ow, T.T. (2006); Modeling attitude to risk in human decision processes: An application of fuzzy measures, Fuzzy Sets and Systems, 157: 3040 - 3054.

[25] Liu, B. (2007); Uncertainty Theory, Sec. Ed., Springer-Verlag, Heidelberg.

[26] Lucas, C., Araabi, B.N. (1999); Generalization of the Dempster-Shafer theory: a fuzzy-valued measure, IEEE Trans. Fuzzy Systems, 7 (3): 255 - 270.

[27] Murofushi, T., Sugeno, M. (1991); A thoery of fuzzy measures: representations, the Choquet integral, and null sets, J. Math. Anal. Appl., 159: 532 - 549.

[28] Murofushi, T., Sugeno, M. (2000); Fuzzy measures and fuzzy integrals, In: Grabisch, M., et al. (Eds.), Fuzzy Measures and Integrals, Physica-Verlag, pp. 3 - 41.

[29] Narukawa, Y., Torra, V. (2007); Fuzzy measures and integrals in evaluation of strategies, Fuzzy Sets and Systems, 177: 4686 - 4695.

[30] Nguyen, H.T. (2006); An Introduction to Random Sets, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.

[31] Pap, S. (1995); Null-Additive Set Functions, Kluwer, Dordrecht.

[32] Ralescu, A.L., Ralescu, D.A. (1980); Probability and fuzziness, Inform. Sci., 34: 85 - 92.

[33] Ralescu, D.A., Adams, G. (1980); The fuzzy integral, J. Math. Anal. Appl., 75: 562 - 570.

[34] Schmeidler, D. (1986); Integral representation without additivity, Proc. Amer. Math. Soc., 97: 255 - 261.

[35] Shafer, G. (1976); A Mathematical Theory of Evidence, Princeton Univ. Pub.

[36] Sipos, J. (1979); Non linear integrals, Math. Slovaka, 29: 257 - 270.

[37] Sugeno, M. (1972); Fuzzy measure and fuzzy integral, Trans. SICE, 8: 95-102.

[38] Sugeno, M. (1974); Theory of fuzzy integrals and its applications, Doctoral Thesis, Tokyo Institute of Technology.

[39] Sugeno, M. (1977); Fuzzy measures and fuzzy integrals - a survey, In: Gupta, M.M., et al. (Eds.), Fuzzy Automata and Decision Processes, North - Holland, pp. 89 - 102.

[40] Viertl, A., Hareter, D. (2004); Fuzzy information and stochastics, Iranian J. Fuzzy Systems, 1: 43 - 56.

[41] Walley, P. (1991); Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities, Chapman and Hall, London.

[42] Wang, Z., Klir, G.J. (1992); Fuzzy Measure Theory, Plenum Press, New York.

[43] Yager R.R. (1980); Aspects of possibilistic uncertainty, Intern. J. of Man-Machine Studies, 12: 283 - 298.

[44] Zadeh, L.A. (2002); Toward a perception-based theory of probabilistic reasoning with imprecise probabilities, J. Stat. Plan. Inf., 105: 233 - 264.

سید محمود طاهری
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان
Taheri@cc.iut.ac.ir