فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۹، شمارهٔ ۶۷ (پاییز و زمستان ۱۳۹۹) صص. ۹۳ تا ۱۰۶

# نگاهی به فضاهای احتمال ناجابه‌جایی

قدیر صادقی، علی طالبی، و محمد صال مصلحیان

**چکیده**

نظریهٔ احتمال ناجابه‌جایی تعمیمی از نظریهٔ احتمال کلاسیک است که در آن، به متغیرهای تصادفی به‌چشم توابع اندازه‌پذیر نگاه نمی‌شود، بلکه به‌سان عملگرهایی روی یک فضای هیلبرت تلقی می‌شوند. در این مقاله، با ارائه چندین مثال، به بررسی سیر تاریخی نظریهٔ احتمال و تحوّل آن از صورت کلاسیک به نظریهٔ اندازه و سپس صورت ناجابه‌جایی می‌پردازیم.

## ۱. سرآغاز

نظریهٔ احتمال شاخه‌ای از ریاضیات است که به مطالعهٔ پدیده‌های تصادفی می‌پردازد. مبانی علم احتمال در سدهٔ هفدهم میلادی و با کارهای ریاضیدانان فرانسوی همچون پاسکال و فرما و ریاضیدان هلندی، هویگنس، پایه‌گذاری شد. در اواخر سدهٔ هجدهم و آغاز سدهٔ نوزدهم میلادی، نظریهٔ احتمال در دانش‌های طبیعی و صنعت کاربرد پیدا کرد. در نیمهٔ دوم سدهٔ نوزدهم میلادی، ریاضیدانان روسی تأثیری شگرف در پیشرفت نظریهٔ احتمال داشتند: چبیشف[۱] و شاگردانش، لیاپونُف[۲] و مارکُف[۳] یک رشته از مسئله‌های کلی نظریهٔ احتمال را حل کردند. در آغاز قرن بیستم، دانشمندان بسیاری از جمله بُرل و برنشتاین[۴] روی نظریهٔ احتمال کار کردند اما درخشان‌ترین نام در این عرصه کُلموگُرُف[۵]، ریاضیدان روسی، است که اصول موضوع نظریهٔ احتمال را در کتابی به نام *مبانی نظریهٔ احتمال* در سال ۱۹۳۳ منتشر کرد. نظریهٔ احتمال کلاسیک در اثر وی به‌عنوان شاخه‌ای از نظریهٔ اندازه مطرح شد. یک رویداد قابل توجه در این پیشرفت، سخنرانی معروف هیلبرت در پاریس دربارهٔ مسائل حل‌نشده در ریاضیات بود که در

*عبارات و کلمات کلیدی.* نظریهٔ احتمال؛ نظریهٔ اندازه؛ متغیر تصادفی؛ فضای هیلبرت؛ نظریهٔ احتمال ناجابه‌جایی.

[۱]Pafnuty Chebyshev [۲]Aleksandre Lyapunov [۳]Andrey Markov [۴]Paul M. Bernstein [۵]Andrey N. Kolmogorov

آن، خواستار بررسی نظام‌مندِ نظریهٔ احتمال شده بود. هیلبرت عقیده داشت که علم فیزیک باید به زبان ریاضیات صورت‌بندی شود و او خود نقشی عمده در این خصوص ایفا نمود. او در زمستان سال‌های ۱۹۲۶ و ۱۹۲۷، یک سلسله سخنرانی در مورد مکانیک کوانتومی ارائه داد که با همکاری فون‌نویمان تهیه شده بود. این رویکرد با صورت‌بندی مکانیک کوانتومی توسط فون‌نویمان در فضای هیلبرت به اوج خود رسید. مطالب موجود در فیزیک کوانتوم مانند اصل عدم قطعیت هایزنبرگ با توجه به نتایج آزمایش‌ها، از جنبهٔ تصادفی برخوردار هستند و پیش‌بینی دقیق ناممکن است؛ یعنی عدم توانایی ما در پیش‌بینی، به‌دلیل کم بودن دانش نیست، بلکه خودِ پدیده‌های کوانتومی ماهیت تصادفی دارند [۶]. نامساوی بل و قضیهٔ کوشن[۱]–اشپِکر[۲] از قضیه‌های مهمی هستند که نشان می‌دهند نمی‌توان مکانیک کوانتوم را با استفاده از نظریهٔ احتمال کلاسیک صورت‌بندی کرد، زیرا مقادیر کمّی یک مشاهده‌پذیر (ویژگی دینامیکی مانند مکان، سرعت و تکانه) قابل دستیابی نیست مگر اینکه مشخص کنیم کدام اندازه‌گیری را قصد داریم انجام دهیم و کدام مقادیر را مایلیم تعیین کنیم. به این معنا، فیزیک کوانتوم نیاز به توضیح بیشتری از شانس دارد. با گذشت زمان، نظریهٔ احتمالی موسوم به نظریهٔ احتمال ناجابه‌جایی به‌وجود آمد که هر دو نظریهٔ احتمال کلاسیک و نظریهٔ احتمال کوانتومی را به‌عنوان حالت‌های خاص در بر می‌گرفت. با توجه به ریشه‌های این موضوع، نظریهٔ احتمال ناجابه‌جایی را نظریهٔ احتمال کوانتومی نیز می‌خوانند. مقدمه‌ای از ایده‌های اساسی الگوی احتمالی در مکانیک کوانتوم، برای ریاضیدانان در [۸] قابل دسترسی است.

نظریهٔ احتمال ناجابه‌جایی تعمیمی از نظریهٔ احتمال کلاسیک است که در آن، متغیرهای تصادفی به چشم توابع اندازه‌پذیر نگریسته نمی‌شوند، بلکه عملگرهایی روی یک فضای هیلبرت هستند. این نظریه به‌عنوان یک نظریهٔ اندازهٔ ناجابه‌جایی توسط فون‌نویمان در اوایل دههٔ ۱۹۳۰ میلادی مطرح شد و به‌تدریج گسترش یافت. در دوران معاصر، ریاضیدانانی همچون وینر[۳]، دوب[۴]، خین‌چین[۵]، بورکهُلدر[۶]، ایتو[۷] و تائو[۸] به توسعهٔ نظریهٔ احتمال همت گماشتند [۱، ۳، ۱۰، ۱۹].

## ۲. فضاهای احتمال کلاسیک

آغاز رسمی نظریهٔ احتمال، به قرن هفدهم در مطالعهٔ بازی‌های قمار یعنی بازی‌هایی که در آنها شانس دخالت بسزایی داشته است، برمی‌گردد. این بازی‌ها کارهایی از قبیل چرخاندن چرخ، ریختن یک تاس، پرتاب یک سکه، کشیدن یک کارت بازی از بین چند کارت و غیره را در بر می‌گیرد که در آنها برآمد یا نتیجهٔ آزمایش، پیش از انجام آزمایش، قطعی و مشخص نیست. بنابراین موضوع اصلی نظریهٔ احتمال، بررسی پدیده‌هایی تجربی است که نظم تعیُّنی ندارند ولی در عین حال، دارای نظمی هستند که توسط ثبت فراوانی‌هایشان تعیین می‌گردد و در نتیجه با وجود قطعی نبودن برآمد، یک برآمد قابل پیش‌بینی در

[۱] Simon B. Kochen [۲] Ernst Paul Specker [۳] Norbert Wiener [۴] Joseph L. Doob [۵] Aleksandre Khinchine [۶] Donald L. Burkholder [۷] Kiyoshi Itô [۸] Terence Tao

درازمدت وجود دارد. برای مثال، در پرتاب یک سکهٔ سالم (متقارن و متعادل موسوم به نااریب) به دفعات زیاد، حدود نیمی از نتایج در دفعات زیاد انجام آزمایش، «رو» خواهد بود. در پرتاب چنین سکه‌ای، تنها دو حالت «رو» یا «پشت» رخ می‌دهد. پس انتظار داریم که احتمال ظاهر شدن «رو» یا «پشت» برابر باشد و در نتیجه به پیشامد ظاهر شدن «رو»، احتمال $\frac{۱}{۲}$ را نسبت می‌دهیم. این نوع استدلال سبب می‌شود احتمال کلاسیک پیشین را برای آزمایش تصادفی دارای $n$ برآمد ممکن دوبه‌دو ناسازگار (مجزا) و هم‌شانس به‌صورت زیر تعریف کنیم: اگر به تعداد $n(A)$ برآمد ویژگی $A$ را داشته باشند، احتمال رخداد $A$ برابر است با $\frac{n(A)}{n}$.

با کمی دقت در تعریف احتمال پیشین، درمی‌یابیم که این تعریف مستلزم اندکی همان‌گویی است و این پرسش پیش می‌آید که واقعاً معنای هم‌شانس بودنِ حالات چیست و چگونه می‌توان قضاوت کرد که دو حالت، هم‌شانس هستند یا نه؟ اجازه دهید مثال مشهور منسوب به دالامبر، ریاضیدان مشهور فرانسوی، را یادآور شویم. دالامبر استدلال کرد که در پرتاب دو سکه، سه حالتِ ممکن وجود دارد که عبارت‌اند از (الف) دو رو (ب) دو پشت و (پ) یک رو و یک پشت. بنابراین نتیجه گرفت که احتمال پیشامد «یک رو و یک پشت» برابر با $\frac{۱}{۳}$ است. اگر او تصوّر می‌کرد که احتمال، با فراوانی تجربی وقوع پیشامد پیوند دارد، شاید بعد از اینکه دو سکه را بیش از چند بار پرتاب می‌کرد، نظرش عوض می‌شد. حتی گفته شده است که قرن‌ها مردم بر این اعتقاد بودند که تعداد دندان‌های مردان بیش از تعداد دندان‌های زنان است، زیرا ارسطو چنین گفته بود و ظاهراً هیچ‌کس به خود زحمت این را نداده بود که به دهان چند نفر نگاهی بیفکند! [۲]

بنابراین در رهیافت کلاسیک پیشین، شاهد برخی محدودیت‌های دست و پا گیر هستیم. برای مثال، در حالتی که تعداد برآمدهای ممکن نامتناهی باشد و یا در پرتاب سکه‌ای که به‌نفع «رو» اریب است، تعریف کلاسیک پیشین نمی‌تواند ما را یاری کند. به این منظور، مجبوریم تعریف کلاسیک پیشین را اصلاح کنیم و یا آن را گسترش دهیم و احتمالی با حوزهٔ کاربردی وسیع‌تر به‌نام احتمال کلاسیک پسین معرفی کنیم. نکتهٔ مهم در این نوع مفهوم احتمال، این است که بتوانیم دنباله‌ای از مشاهدات یا آزمایش‌ها را تحت شرایط یکسان تصور کنیم. آن‌وقت می‌توانیم احتمال وقوع پیشامد $A$ را $p$ بگیریم و به‌وسیلهٔ فراوانی نسبی پیشامد $A$ در دنباله‌ای از آزمایش‌ها، مقدار تقریبی $p$ را به‌دست آوریم. برای مثال، فرض کنیم می‌خواهیم پیش‌بینی کنیم که نوزادی که به دنیا می‌آید پسر است یا دختر. این پیشامد به‌طور انفرادی، نامعین است اما می‌توان آن را به‌طور اطمینان‌بخشی با نتایج گروهی از تولدها مرتبط ساخت. برای مثال، اگر بر اساس موارد ثبت شدهٔ تولدها، مثلاً ۵۱ درصد از نوزادان پسر باشند، منطقی است که وجود عدد $p$ را به‌عنوان احتمال تولد فرزند پسر، بپذیریم و آن را با ۰٫۵۱ تقریب بزنیم [۵].

در ادامه نظریهٔ احتمال نوین را معرفی می‌کنیم. این نظریهٔ احتمال به‌اندازهٔ کافی غنی هست که هر دو قسم احتمال پیشین و احتمال پسین را در بر گیرد. خوانندهٔ علاقه‌مند برای مطالعهٔ بیشتر می‌تواند به [۵] مراجعه کند. هر برآمد ممکنِ یک آزمایش را *نقطهٔ نمونه‌ای* و مجموعهٔ همهٔ برآمدهای ممکن را *فضای نمونه‌ای* می‌نامیم. یک *پیشامد* زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است. احتمال را تنها به پیشامدها نسبت می‌دهیم. همواره می‌توان ردهٔ پیشامدها را به‌اندازهٔ کافی بزرگ گرفت که همهٔ زیرمجموعه‌ها یا پیشامدهایی را که می‌خواهیم دربارهٔ احتمال آنها صحبت کنیم، در بر بگیرد. برای فضاهای نمونه‌ای بزرگ، چنین نیست که هر زیرمجموعه‌ای یک پیشامد باشد. اگر فضای نمونه‌ای شمارش‌پذیر یا متناهی باشد، معمول است که ردهٔ پیشامدها را همان ردهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای بگیرند [۵].

توجه کنید که همهٔ زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای، پیشامد نیستند اما اینکه کدام‌یک از زیرمجموعه‌ها پیشامد هستند و کدام‌یک نه، هنوز شرح داده نشده است. در اینجا به‌جای تعریف دقیق اینکه کدام زیرمجموعه‌های $\Omega$ خانوادهٔ پیشامدها را تشکیل می‌دهند، به ذکر ویژگی‌های بنیادی خانوادهٔ پیشامدها می‌پردازیم.

**تعریف ۱.۲.** به خانوادهٔ $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای $\Omega$ که در شرایط زیر صدق می‌کند، یک $\sigma$−جبر می‌گوییم:

- $\Omega \in \mathcal{F}$؛
- اگر $A \in \mathcal{F}$، آن‌گاه $A^c \in \mathcal{F}$؛
- اگر $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ خانواده‌ای در $\mathcal{F}$ باشد، آن‌گاه $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$.

به هر کدام از عضوهای یک $\sigma$−جبر در $\Omega$، پیشامد می‌گوییم.

پیش از این گفته شد که توجه ما به پیشامد، اساساً به‌علت توجه به احتمالِ رخ دادن آنها است. پس یقیناً مایلیم که خانوادهٔ پیشامدها *پیشامد حتمی*، یعنی $\Omega$ را شامل شود. همچنین اگر $A$ یک پیشامد باشد و بتوانیم دربارهٔ احتمال رخ دادن آن صحبت کنیم، پس $A^c$ نیز باید پیشامد باشد تا بتوانیم دربارهٔ احتمال رخ ندادن $A$ هم صحبت کنیم. ویژگی سوم می‌گوید که اجتماع خانواده‌ای شمارا از پیشامدها، یک پیشامد است و وقتی رخ می‌دهد که دست‌کم یکی از آنها رخ دهد. منطقی به نظر می‌رسد که ثبت آماری فراوانی یک پدیده یا آزمایش تصادفی، به ما انگیزه می‌دهد که یک اصل در مورد تخمین کمّیِ تصادفی بودنِ پیشامد $A$ مرتبط با نتایج آن پدیده یا آزمایش در نظر بگیریم. با این دیدگاه، در نظریهٔ احتمال به هر پیشامد $A$ عدد معیّن $P(A)$ نظیر می‌شود که *احتمال رخ دادن* آن پیشامد نامیده می‌شود. بنابراین تابع احتمال که اکنون معرفی می‌کنیم، یک تابع مجموعه‌ای است (یعنی قلمرو آن، مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای و بُرد آن، مجموعه‌ای از اعداد حقیقی در بازهٔ $[۰, ۱]$ است).

**تعریف ۲.۲.** تابع احتمال $P$ یک تابع مجموعه‌ای با قلمرو $\mathcal{F}$ (یک $\sigma$-جبر در $\Omega$) و بُرد در $[\circ,\text{۱}]$ است که در اصول زیر صدق می‌کند:

- $P(\Omega) = \text{۱}$؛
- برای هر $A \in \mathcal{F}$، $P(A) \geq \circ$؛
- اگر $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ دنباله‌ای از پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار (یعنی $A_i \cap A_j = \emptyset$ برای $i \neq j$) در $\mathcal{F}$ باشد، آن‌گاه $P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.

ویژگی سوم می‌گوید که اگر یک پیشامد را به اجتماع تعدادی شمارا پیشامد دیگر بشکنیم، آن‌گاه احتمال این پیشامد برابر است با مجموع احتمال‌های آن قطعات. *فضای احتمال* عبارت از سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ است که در آن، $\Omega$ فضای نمونه‌ای، $\mathcal{F}$، $\sigma$-جبرِ پیشامدها و $P$ یک تابع احتمال با قلمرو $\mathcal{F}$ است.

فضای احتمال $(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$ را یک فضای احتمال *گسسته* می‌نامیم اگر $\Omega$ یک مجموعهٔ متناهی یا شمارش‌پذیر باشد و خانوادهٔ پیشامدها برابر با $\text{۲}^\Omega$ باشد. در این مورد، تابع احتمال برای هر مجموعهٔ $A \subseteq \Omega$ در روابط $P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\})$ و $\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) = \text{۱}$ صدق می‌کند.

## ۳. ارتباط بین احتمال و نظریهٔ اندازه

همان‌طور که می‌دانیم، تعریف احتمال روی مجموعه‌های متناهی یا شمارش‌پذیر، از دیدگاه نظریهٔ اندازه به‌سادگی قابل توصیف است و در واقع، از اولین نمونه‌های تاریخی محسوب می‌شود. در ادامه با بررسی دقیق‌ترِ مثال پرتاب سکه، تناظری را که بین احتمال و نظریهٔ اندازه وجود دارد، تشریح می‌کنیم. یک سکه سالم را در نظر بگیرید. فضای نمونه‌ای در پرتاب این سکه، مجموعهٔ {پشت ,رو} است و داریم $P(\text{ر}) = P(\text{پ}) = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$. حال فرض کنیم که سکه دوبار پرتاب شود. فضای نمونه‌ای در این حالت، شامل چهار عضو است که احتمال رخ دادن هر کدام برابر با $\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$ است. در $n$ بار پرتاب این سکه، $\text{۲}^n$تا $n$تایی مرتب، همهٔ برآمدهای ممکن هستند و احتمال هر یک برابر با $\frac{\text{۱}}{\text{۲}^n}$ است. سپس فرض کنیم این سکه را بی‌نهایت بار پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی، مجموعهٔ همهٔ دنباله‌هایی است که هر جملهٔ آن، «ر» یا «پ» است. برای مشخص کردن الگوی ریاضیِ فضای نمونه‌ای، ابتدا «ر» را با عدد $\circ$ و «پ» را با عدد ۱ جایگزین و هر دنباله را با بسط دودوییِ عددی در بازهٔ $[\circ,\text{۱}]$ متناظر می‌کنیم. برای مثال، $\circ/\circ\text{۱}\circ\text{۱}\circ\text{۱}\circ\text{۱}\ldots$ بسط دودویی $\frac{\text{۱}}{\text{۳}} = \ldots + \frac{\text{۱}}{\text{۱۶}} + \frac{\text{۱}}{\text{۴}}$ است. در حالت کلی اگر ۱ یا $d_n = \circ$، آن‌گاه

$$\circ/d_{\text{۱}}d_{\text{۲}}d_{\text{۳}}\ldots = \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} \frac{d_n}{\text{۲}^n}.$$

هر عدد $x \in [۰, ۱)$ چنین بسطی دارد که لزوماً یکتا نیست: اگر $k$ عددی صحیح باشد و $۰ < k < ۲^n$، آن‌گاه عدد گویای $\frac{k}{۲^n}$ دو بسط در پایهٔ دو خواهد داشت که یکی مختوم و دیگری نامختوم است. بقیهٔ اعداد در بازهٔ $[۰, ۱)$ بسطی یکتا در پایهٔ دو دارند. می‌دانیم که روی $[۰, ۱)$ اندازهٔ لبگ تعریف می‌شود که به هر زیربازه، طول آن را نسبت می‌دهد. پیشامد اینکه $n$ پرتاب اول مشخص و داده شده باشد، با مجموعهٔ دنباله‌های نامتناهی که با $n$تایی داده‌شده از اعداد ۰ و ۱ شروع می‌شوند، متناظر است و این نیز در تناظر با زیربازه‌ای از $[۰, ۱)$ به طول $\frac{۱}{۲^n}$ است. هر پیشامد در این آزمایش تصادفی شامل $m$ دنبالهٔ مختلف از $n$ پرتاب اول، با زیرمجموعه‌ای از $[۰, ۱)$ با اندازهٔ لبگ $\frac{m}{۲^n}$ متناظر است. این موضوع، اندازهٔ لبگ را با احتمالات به‌نوعی مرتبط می‌کند و نمونه‌ای از ارتباط کلی بین نظریهٔ اندازه و احتمال محسوب می شود [۷].

قبل از چبیشف، علاقهٔ اصلی در حوزهٔ احتمال، در محاسبهٔ احتمال پیشامدها بود. او اولین کسی بود که از قدرت کامل مفاهیم *متغیر تصادفی*[۱] و امید ریاضی بهره گرفت. مفهوم متغیر تصادفی یکی دیگر از مفاهیم اساسی در نظریهٔ احتمال است که برای نمایش کمیّت‌های تصادفی در یک آزمایش تصادفی مورد استفاده قرار می‌گیرد. معمولاً در یک آزمایش تصادفی، بهتر است به‌جای مطالعهٔ برآمدهای آزمایش، به مطالعهٔ تابعی از نتایج بپردازیم. نقاط فضای نمونه‌ای می‌توانند چیزهایی کاملاً ملموس نظیر مولکول و یا افراد انسان باشند. ولی ممکن است بتوان به آنها پارامترهایی نسبت داد که برخی از آنها اندازه‌پذیر باشد. مولکول دارای جرم و سرعت است که از روی آنها می‌توانیم تکانه و انرژی جنبشی آن را با استفاده از فرمول‌های فیزیک محاسبه کنیم. برای انسان، مشخصه‌های فیزیولوژیکی نظیر سن، قد، وزن و داده‌های عددی دیگری از قبیل بهرهٔ هوشی، درآمد سالانه و مالیات‌های پرداختی و ... به او مربوط می‌شوند.

به هر تابع مانند $X : \omega \mapsto X(\omega)$ با حوزهٔ تعریف $\Omega$ که مجموعهٔ مقادیر آن زیرمجموعه‌ای شمارا از اعداد حقیقی باشد، یک *متغیر تصادفی گسسته* می‌گوییم. بنابراین هر تابع روی فضای نمونه‌ای شمارا، یک متغیر تصادفی گسسته خواهد بود. اما حتی در سطح مقدماتی هم پرسش‌های مهم بسیاری وجود دارند که در آنها باید متغیرهایی را در نظر بگیریم که از چنین محدودیتی پیروی نمی‌کنند. به این معنا که فضاهای نمونه‌ای زیادی وجود دارند که شمارا نیستند یا متغیرهای تصادفی که مجموعهٔ مقدارهای آنها شمارا نیست. آن‌وقت سؤال‌های مربوط به *اندازه‌پذیری* پیش می‌آیند که بدون توسّل به ریاضیات پیشرفته نمی‌توان به‌طور رضایت‌بخشی به بررسی آنها پرداخت.

منظور از یک متغیر تصادفی، تابع اندازه‌پذیر $X$ از $\Omega$ به فضای بُرل $\mathbb{R}$ است؛ به زبان ساده‌تر، برای هر عدد حقیقی $t$، مجموعهٔ $\{\omega : X(\omega) \leq t\}$ پیشامدی (مجموعه‌ای اندازه‌پذیر) در $\mathcal{F}$ باشد. در نظریهٔ اندازه ثابت می‌شود که این تعریف برای اندازه‌پذیریِ یک تابع کافی است و وقتی چنین شرطی برقرار

[۱] random variable

باشد، می‌توانیم به بحث دربارهٔ احتمال‌های انواعی از پیشامدها مانند $\{t \leq X < s\}$، $\{X = t\}$، $\{X \in \mathbb{Q}\}$ و یا پیشامد $\{e^X > X^۲ + ۱\}$ بپردازیم که در آن، به‌منظور مختصرنویسی برای متغیر تصادفی $X$ و مجموعهٔ بُرل $B$، به‌جای پیشامد $\{\omega : X(\omega) \in B\}$ می‌نویسیم $\{X \in B\}$.

امید[۱] (یا میانگین) متغیر تصادفی $X$ عبارت است از انتگرال $\int_\Omega XdP$ و با نماد $\mathbb{E}X$ نشان داده می‌شود. در فضاهای احتمال گسسته که فضای نمونه‌ای شمارا است، هر تابع روی $\Omega$ به‌دلیل مجهز بودنِ $\Omega$ به $\sigma$−جبر خانوادهٔ توانی، اندازه‌پذیر است. برای یک متغیر تصادفی گسسته مانند $X$ امید ریاضی به مجموع

$$\mathbb{E}X = \sum x_j P(X = x_j)$$

تبدیل می‌شود که در آن، $x_j$ها مقدارهای متمایز $X$ هستند. همچنین متناظر با احتمال شرطی، می‌توان امید شرطی[۲] [۹] متغیر تصادفی $X$ نسبت به یک زیر $\sigma$− جبر $\mathcal{G}$ را به‌عنوان یک متغیر تصادفی $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ تعریف کرد که نسبت به $P$ انتگرال‌پذیر و نسبت به $\mathcal{G}$ اندازه‌پذیر است و برای هر $G \in \mathcal{G}$ داریم

$$\int_G \mathbb{E}(X|\mathcal{G})dP = \int_G XdP$$

در حالت خاص که $X$ تابع مشخصهٔ مجموعهٔ اندازه‌پذیر $A$ باشد، احتمال شرطی به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\int_G \mathbb{E}(A|\mathcal{G})dP = P(A \cap G)$$

برای متغیر تصادفی $X$ *تابع توزیع تجمعی*[۳] $F_X$ به‌صورت

$$F_X(t) = P(X \leq t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

تعریف می‌شود. تابع توزیع تجمعی، احتمال توزیع مقادیر متغیر تصادفی را به‌صورت تجمعی بیان می‌کند. با استفاده از تابع توزیع تجمعی $F_X$ می‌توان به احتمال بعضی پیشامدها در مورد $X$ پاسخ داد. برای مثال، برای $t < s$ داریم

$$P(t < X \leq s) = F_X(s) - F_X(t).$$

تابع توزیع تجمعی $F_X(\cdot)$ تابعی یکنوا، نانزولی و از راست پیوسته است و

$$F_X(-\infty) = \lim_{t\to-\infty} F_X(t) = ۰, \qquad F_X(\infty) = \lim_{t\to\infty} F_X(t) = ۱.$$

[۱] expectation [۲] conditional expectation [۳] cumulative distribution function

می‌توان امید ریاضی یک متغیر تصادفی را با استفاده از تابع توزیع آن به‌دست آورد. در واقع، اگر $X$ یک متغیر تصادفی نامنفی باشد، آن‌گاه

$$\mathbb{E}X = \int_{0}^{\infty} (1 - F_X(t))\, dt = \int_{0}^{\infty} P(X > t)\, dt.$$

در پایان این بخش، به فرآیندهای تصادفی برای مدل‌سازی تغییرات کمیت‌های تصادفی نسبت به زمان، اشاره می‌کنیم. یک فرآیند تصادفی خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی مانند $\{X_t\}_{t\geq 0}$ است و برای نمایش اطلاعات، از یک خانوادهٔ صعودی از زیر $\sigma$-جبرها استفاده می‌شود. یکی از مهم‌ترین فرآیندهای تصادفی، مارتینگل‌ها هستند. یک مارتینگل نسبت به پالایهٔ $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ از زیر $\sigma$-جبرها عبارت است از خانواده‌ای مانند $\{X_t\}_{t\geq 0}$ از متغیرهای تصادفی به‌طوری که برای هر $t$، $X_t \in \mathcal{F}_t$ و $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ برای هر $s \leq t$. این رابطه به این معنی است که مناسب‌ترین پیش‌بینی مقدار یک فرآیند تصادفی در هر زمان $t$ از آینده به شرط در اختیار داشتن اطلاعات تا زمان $s$، مقدارهای فرآیند در زمان $s$ است [۴].

## ۴. فضاهای احتمال ناجابه‌جایی

پیشوند «ناجابه‌جایی» را می‌توان به بسیاری از حوزه‌های کلاسیک ریاضیات اضافه کرد. برای مثال، می‌توان به هندسهٔ ناجابه‌جایی یا فضاهای توپولوژیکی ناجابه‌جایی (جبرهای $C^*$)، گروه‌های کوانتومی و حساب دیفرانسیل ناجابه‌جایی اشاره کرد. اما قدیمی‌ترین نمونه، فضاهای احتمال ناجابه‌جایی است که به کارهای فون‌نویمان و سگال[۱] برمی‌گردد. راهبردی که در همهٔ این نمونه‌ها برای ارائهٔ ساختار ناجابه‌جایی استفاده می‌شود، یکسان است: اطلاعات مربوط به ساختار کلاسیک را در یک جبر مناسب از توابع گردآوری می‌کنیم. منظور از جبر، ساختاری است که همزمان یک فضای برداری و یک حلقه است. ویژگی‌های جبر به‌دست آمده را فهرست می‌کنیم. یکی از آنها جابه‌جایی بودن جبر است. شرط جابه‌جایی بودن را حذف می‌کنیم و جبرمان را با یک جبر ناجابه‌جایی تعویض می‌کنیم.

اجازه دهید این استراتژی را برای ساختار یک فضای احتمال به‌کار ببریم. فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را در نظر بگیرید. به‌دنبال جبری مانند $\mathcal{M}$ از توابع $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ هستیم که ویژگی‌های $\mathcal{F}$ و $P$ را به‌دست دهد. همهٔ توابع اندازه‌پذیر نسبت به $\mathcal{F}$ را در نظر می‌گیریم؛ یعنی توابعی مانند $X$ که برای هر عدد حقیقی $\alpha$، مجموعهٔ $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \alpha\}$ متعلق به $\mathcal{F}$ باشد. مایلیم که امید ریاضیِ هر تابع $X \in \mathcal{M}$، یعنی $\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega)$ تعریف شده باشد. بنابراین توابع مورد نظر را به ردهٔ توابع اساساً کراندار محدود می‌کنیم:

$$\|X\|_\infty = \mathbf{esssup}_{\omega\in\Omega} |X(\omega)| = \inf\{\alpha > 0 : P(|X| > \alpha) = 0\} < \infty.$$

[۱] Irving Segal

بنابراین جبر $\mathcal{M} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را انتخاب کرده‌ایم که دارای شرایط مورد نظر است. توجه داریم که بین توابعی که تقریباً همه‌جا برابرند، تفاوتی قائل نمی‌شویم. در نتیجه ساختار جبری $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ به‌دست می‌آید. حال باید بررسی کنیم که آیا واقعاً همهٔ اطلاعات مربوط به $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را ذخیره کرده‌ایم. روشن است که $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ جبر $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را به‌طور یکتا مشخص می‌کند. به‌عکس، اگر قرار دهیم

$$\mathcal{F}' := \{X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) : \quad X = X^2 = \overline{X}\}$$

که در آن، $\overline{X}$ مزدوج مختلط $X$ است، آن‌گاه می‌توان مجدداً اندازهٔ احتمال $P$ را با تعریف $P'$ به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$P' : \mathcal{F}' \longrightarrow [0, 1], \qquad X \mapsto \mathbb{E}(X).$$

جبر $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ توسط توابع مشخصه (تصاویر[1]) تولید می‌شود.

برای تشریح مشخصه‌سازی جبر $\mathcal{M}$ که در مرحلهٔ قبل به‌دست آمد، ابتدا لازم است که چندین مفهوم و تعریف را از آنالیز تابعی یادآوری کنیم. فرض کنیم $(\mathcal{H}, \langle\, .\,, .\, \rangle)$ یک فضای هیلبرت روی میدان $\mathbb{C}$ با نرم $\|\,.\,\| = \langle\, .\,, .\, \rangle^{\frac{1}{2}}$ باشد. چنین فضاهایی تعمیم فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ با ضرب داخلی بردارها در صفحه است. عملگر خطی $A$ روی $\mathcal{H}$ را *کراندار* گوییم اگر

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1, x \in \mathcal{H}\} < \infty.$$

فضای عملگرهای خطی کراندار روی $\mathcal{H}$ را با $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهیم. به‌ازای هر $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$، عملگر یکتای $A^* \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ وجود دارد که آن را *الحاقی* $A$ می‌نامیم و به این صورت تعریف می‌شود که به‌ازای هر $x, y \in \mathcal{H}$،

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle.$$

به‌سادگی می‌توان دید که فضای $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ همراه با اعمال جمع، ضرب در عدد و ترکیب توابع تشکیل یک جبر می‌دهد. در حالتی که بُعد فضای هیلبرت متناهی باشد، یعنی $\mathtt{dim}(\mathcal{H}) = n$، $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ را می‌توان با فضای $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ متشکل از ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های مختلط یکی گرفت. در این حالت، برای یک ماتریس $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ با نمایش $A = (a_{ij})$ داریم $A^* = (\overline{a_{ji}})$.

فرض کنیم $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$. در این صورت، $A$ را *خودالحاقی* گوییم اگر $A = A^*$ یا به‌طور معادل، برای هر $x \in \mathcal{H}$، $\langle Ax, x \rangle$ حقیقی باشد. $A$ را مثبت گوییم اگر به‌ازای هر $x \in \mathcal{H}$ داشته باشیم $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ و آن‌وقت می‌نویسیم $A \geq 0$. برای $S \subseteq \mathbb{B}(\mathcal{H})$ *جابه‌جاگر* $S$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S^c = \{B \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) \mid BA = AB \qquad \forall A \in S\}.$$

[1] projections

فضای $\mathcal{M}$ متشکل از عملگرهای خطی کراندار روی $\mathcal{H}$ را یک جبر *فون‌نویمان* نامیم اگر $\mathcal{M} = (\mathcal{M}^c)^c$.
یک *حالت*[۱] روی جبر فون‌نویمان $\mathcal{M}$، تابعکی خطی مانند $\tau : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ است که یکانی (یعنی اگر $I$ عملگر همانی در $\mathcal{M}$ باشد، آن‌گاه $\tau(I) = ۱$) و مثبت است، یعنی $\tau(A^*A) \geq ۰$ برای هر $A \in \mathcal{M}$.
به‌علاوه، یک حالت $\tau$ را *اثری*[۲] گوییم اگر برای هر $A \in \mathcal{M}$ داشته باشیم $\tau(A^*A) = \tau(AA^*)$. آن را *وفادار* خوانیم اگر $\tau(A^*A) = ۰$ نتیجه دهد $A = ۰$ و *نرمال* نامیم اگر برای هر تور صعودی و از بالا کراندار مانند $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ از عملگرهای خودالحاقی در $\mathcal{M}$ داشته باشیم

$$\tau\left(\lim_\alpha A_\alpha\right) = \lim_\alpha \tau(A_\alpha).$$

برای مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ تابعک اثر می‌توانید به [۲۰] مراجعه کنید.
اکنون فضای هیلبرت $\mathcal{H} = L^۲(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را در نظر بگیرید. برای هر تابع $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ نگاشت $M_X$ را روی $\mathcal{H}$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، متناظر می‌کنیم:

$$M_X Y(\omega) = X(\omega) Y(\omega).$$

**گزاره ۱.۴.** *فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال باشد. جبر*

$$\mathcal{M} = \{M_X : X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)\}$$

*یک جبر فون‌نویمان جابه‌جایی روی $L^۲(\Omega, \mathcal{F}, P)$ است و نگاشت $\tau : M_X \longmapsto \int X\, dP$ یک حالت نرمال و وفادار است.*

قضیهٔ زیر که موسوم به قضیهٔ گِلفَند[۳] برای جبرهای فون‌نویمان جابه‌جایی است، نشان می‌دهد که عکس گزارهٔ بالا نیز برقرار است.

**قضیه ۲.۴** ([۱۲]). *فرض کنیم $\mathcal{M}$ یک جبر فون‌نویمان جابه‌جایی و $\tau$ یک حالت نرمال و وفادار روی آن باشد. در این صورت، یک فضای احتمال مانند $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و یک $*$-یکریختی $f_x$ $x \longmapsto$ از $\mathcal{M}$ به $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ موجود است به‌طوری که*

$$\|f_x\| = \|x\|, \qquad \mathbb{E}(f_x) := \int_\Omega f_x dP = \tau(x).$$

*در نتیجه $\mathcal{M}$ و $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ می‌توانند یکسان تلقی شوند و $\tau$ متناظر با امید ریاضی نسبت به $P$ است.*

[۱] state [۲] tracial [۳] Israel M. Gelfand

برای متغیر تصادفی $X \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ امید تابع مشخصهٔ مجموعهٔ $\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| \leq t\}$ تابع توزیع خوانده می‌شود. اکنون شرط جابه‌جایی بودن جبر را حذف و به تعریف زیر دست پیدا می‌کنیم.

**تعریف ۳.۴** (فضای احتمال ناجابه‌جایی). اگر $\mathcal{M}$ یک جبر فون‌نویمان روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ و $\tau$ یک حالت نرمال اثری و وفادار روی آن باشد، دوتایی $(\mathcal{M}, \tau)$ را یک فضای احتمال ناجابه‌جایی[1] می‌نامیم.

متناظر با $\{x : \langle |T|x, x\rangle \leq t\}$ می‌توان تصویری نظیر کرد که آن را با $e_{[\circ,t]}(|T|)$ نمایش می‌دهند [۱۲]. در این حالت، تابع توزیع $T$ برابر $\tau\left(e_{[\circ,t]}(|T|)\right)$ تعریف می‌شود. همچنین متناظر با احتمال شرطی و امید شرطی در حالت جابه‌جایی، می‌توان امید شرطی ناجابه‌جایی را تعریف کرد: فرض کنیم $(\mathcal{M}, \tau)$ یک فضای احتمال ناجابه‌جایی و $\mathcal{N}$ یک زیرجبر فون‌نویمان از $\mathcal{M}$ باشد. امید شرطی نسبت به $\mathcal{N}$ یک نگاشت انقباضی مثبت نرمال $\mathcal{E}_{\mathcal{N}}$ از $\mathcal{M}$ به روی $\mathcal{N}$ است که در رابطهٔ

$$\mathcal{E}_{\mathcal{N}}(ATB) = A\mathcal{E}_{\mathcal{N}}(T)B$$

برای هر $T \in \mathcal{M}$ و $A, B \in \mathcal{N}$ و نیز $\tau \circ \mathcal{E}_{\mathcal{N}} = \tau$ صدق می‌کند. به این ترتیب، یک فضای احتمال (ناجابه‌جایی)، با فضای هیلبرت و یک جبر عملگرهای کراندار روی آن تعبیر می‌شود.

## ۵. نامساوی‌های احتمالی

نامساوی‌های احتمالی، کران‌های بالا و پایینی را برای کمیت‌هایی مانند مقدار احتمال یک پیشامد یا امید یک متغیر تصادفی تعیین می‌کنند. اهمیت این کران‌ها برای کنترل مقادیر احتمال یا امید در حالت‌هایی است که محاسبهٔ دقیق این کمیت‌ها ممکن نیست. صورت‌بندی ریاضیِ نظریهٔ احتمال ناجابه‌جایی یا کوانتومی [۱۵] ابتدا برای ارائهٔ توصیف احتمالی آزمایش‌های مکانیک کوانتوم شکل گرفت. در این آزمایش‌ها مشاهداتی رخ می‌دهد که از محدودهٔ نامساوی‌های احتمالی ساده خارج می‌شوند و از این‌رو از جنبه نظریهٔ احتمال کلاسیک، قابل توصیف نیستند. برای مثال، جان بل اولین نوع از نامساوی‌های ناجابه‌جایی را در مقاله‌اش با عنوان «پارادُکس اینشتین–پودولسکی–روزن» منتشر کرد که در چارچوب نظریهٔ احتمال کلاسیک قابل بررسی نبود. همان‌طور که انتظار می‌رود، این سؤال به ذهن خطور می‌کند که چه نتایجی از نظریهٔ احتمال برای فضاهای احتمال ناجابه‌جایی برقرار هستند؟ از آنجا که بحث نامساوی‌ها برای به‌دست آوردن یک کران و تخمین احتمال رخداد یک پیشامد یا امید مجموع چند متغیر تصادفی، نامساوی‌های مرتبط با مارتینگل‌ها [۱۶] و غیره بسیار اساسی و حائز اهمیت است، آیا می‌توان نسخه‌ای از آنها را در حوزهٔ جبرهای فون‌نویمان ناجابه‌جایی به‌دست آورد؟

[1] non-commutative probability space

بسیاری از قضیه‌هایی که در مورد فضاهای احتمال کلاسیک برقرارند، در حالت ناجابه‌جایی هم صادق هستند و برخی از ابزارهایی که در حالت جابه‌جایی به‌کار می‌روند، هنوز هم کارا هستند. با این حال، اغلب لازم است که از تدبیرهای جدیدی بهره گرفت. از معضلاتی که در مطالعهٔ فضای احتمال ناجابه‌جایی با آن مواجه می‌شویم، می‌توان به نامساوی قدرمطلق برای دو عملگر اشاره کرد و یا اینکه در حالت کلی از نامساوی $۰ \le x \le y$، نمی‌توان نتیجه گرفت $۰ \le x^t \le y^t$. در واقع، این نامساوی فقط برای $۰ \le t \le ۱$ برقرار است. یکی دیگر از دشواری‌های پیشِ رو این است که برخلاف حالت جابه‌جایی که می‌دانیم بیشینهٔ نقطه‌وار دو متغیر تصادفی قابل تعریف است، در حالت کلی هیچ تضمینی برای وجود بیشینه برای دو عملگر مثبت وجود ندارد [۱۴]. در میان نامساوی‌های مهم می‌توان به نامساوی‌های زیر اشاره کرد.

**نامساوی چبیشف:** نامساوی چبیشف بیان می‌کند که در هر نمونهٔ تصادفی، تقریباً همهٔ مقادیر حول و حوش میانگین قرار دارند. در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ این نامساوی به‌صورت

$$P(\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| \ge t\}) \le \frac{۱}{t^p} \int_{|X|\ge t} |X|^p dP$$

بیان می‌شود که در آن، $۱ \le p < \infty$. صورت ناجابه‌جایی این نامساوی،

$$\tau(e_{[t,\infty)}(|T|)) \le t^{-p}\tau(|T|^p)$$

است [۱۸].

**نامساوی هوفدینگ**[۱]: نامساوی هوفدینگ برای محدود کردن جمع تعدادی متغیر تصادفی مستقل کراندار به‌کار می‌آید. صورت جابه‌جایی این نامساوی بیان می‌کند که اگر $a \le X_۱, \dots, X_n \le b$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند و امید همهٔ آنها برابر با $\mu$ باشد، آنگاه

$$P(|\overline{X}_n - \mu| \ge t) \le ۲e^{-۲nt^۲/(b-a)^۲}$$

که در آن، $\overline{X}_n = (\sum_{i=۱}^n X_i)/n$. صورت ناجابه‌جایی این نامساوی [۱۳] این‌طور است که اگر

$$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_j \subseteq M$$

به معنایی خاص مستقل باشند، $a_j \le T_j \le b_j$ خودالحاقی باشند و $\mathcal{E}_{\mathcal{N}}(T_j) = \mu$، آنگاه

$$\tau\left(e_{[t,\infty)}\left(\left|\sum_{j=۱}^n T_j - n\mu\right|\right)\right) \le ۲\exp\left\{\frac{-۲t^۲}{\sum_{j=۱}^n (b_j-a_j)^۲}\right\}.$$

[۱] Wassily Hoeffding

**نامساوی کُلموگُرُف**: نامساوی کُلموگُرُف کرانی بالا برای احتمال اینکه مجموع تعدادی متناهی متغیرهای تصادفی مستقل، بیشتر از یک مقدار مشخص باشد، به‌دست می‌دهد. صورت جابه‌جاییِ آن می‌گوید که اگر $X_j$ها $n$ متغیر تصادفی مستقل با امید صفر و واریانس متناهی باشند، آن‌گاه برای هر $\lambda > ۰$ نامساوی

$$P\left(\max_{۱\leq k\leq n}\left|\sum_{j=۱}^{k} X_j\right| \geq \lambda\right) \leq \frac{۱}{\lambda^۲}\sum_{j=۱}^{n}\mathbb{E}X_j^۲$$

برقرار است. صورت ناجابه‌جاییِ این نامساوی [۱۷] بیان می‌کند که اگر عناصر خودالحاقی $A_۱$، $A_۲$، $\ldots$، $A_n$ از $\mathcal{M}$ به مفهومی خاص مستقل باشند و برای هر $k$ داشته باشیم $\tau(A_k) = ۰$، آن‌گاه برای هر $\lambda > ۰$ یک تصویر $E$ وجود دارد که

$$۱ - \frac{۲(\lambda + \max_{۱\leq k\leq n}\|A_k\|)^۲}{\sum_{k=۱}^{n}\mathrm{var}(A_k)} \leq \tau(E) \leq \frac{\tau\left(\left(\sum_{k=۱}^{n} A_k\right)^۲\right)}{\lambda^۲}$$

که در آن، واریانس $A$ به‌صورت $\mathrm{var}(A) = \tau((A-\tau(A))^۲)$ تعریف می شود.

## مراجع


[۱] جهانی پور، ر.، نیوتن و لایب نیتز، سپس کیوشی ایتو، *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی*، جلد ۲۵ (۱۳۸۵)، شمارهٔ ۳۶، صص. ۶۱–۶۶.

[۲] راس، ش.، *مبانی احتمال*، ترجمهٔ دکتر احمد پارسیان و دکتر علی همدانی، انتشارت شیخ بهایی، اصفهان، ۱۳۹۰.

[۳] ظهوری زنگنه، ب.، دوب آنالیزدان تمام عیار، *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی*، جلد ۲۵ (۱۳۸۵)، شمارهٔ ۳۷، صص. ۷۱–۸۹.

[۴] علیشاهی، ک.، پیوند احتمال و آنالیز ریاضی، *اندیشهٔ آماری*، جلد ۱۴ (۱۳۸۸)، شمارهٔ ۲، صص. ۳۵–۴۶.

[۵] گریبیل، الف. و بوز، د. س.، *مقدمه‌ای بر نظریهٔ آمار*، ترجمهٔ علی مشکانی، ۱۳۷۷.

[۶] ویکی پدیا.

[7] Dudley, R. M., *Real Analysis and Probability*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **74**, Cambridge University Press, 2002.

[8] Franz, U., Skalski, A., *Noncommutative Mathematics for Quantum Systems*, Cambridge University Press, 2016.

[9] Gut, A., *Probability: A Graduate Course*, 2nd. edn., Springer Texts in Statistics, Springer-Verlag, New York, 2013.

[10] Ito, K., *Introduction to Probability Theory*, Translated from the Japanese by the author, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[11] Junge, M., Perrin, M., *Theory of $\mathcal{H}_p$-Spaces for Continuous Filtrations in von Neumann Algebra*, Astérisque, no. 362, 2014.

[12] Kadison, R. V., Ringrose, J. R., *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras: I*, Academic Press, New York, 1983.

[13] Moslehian, M. S., Sadeghi, Gh., Inequalities for sums of random variables in noncommutative probability spaces, *Rocky Mountain J. Math.*, **46** (2016), no. 1, 309–323.

[14] Moslehian, M. S., Talebi, A., Non-commutative Stein inequality and its applications, *Comm. Statist. Theory and Methods*, **48** (2019), no. 7, 1611–1620.

[15] von Neumann, J., *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, 1955.

[16] Pisier, G., *Martingales in Banach spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **155**, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[17] Talebi, A., Moslehian, M. S., Sadeghi, Gh., Etemadi and Kolmogorov inequalities in noncommutative probability spaces, *Michigan Math. J.*, **68** (2019), no. 1, 57–69.

[18] Talebi, A., Moslehian, M. S., Sadeghi, Gh., Noncommutative Blackwell–Ross martingale inequality, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **21** (2018), no. 1, id. 1850005-91, DOI: 10.1142/S0219025718500054.

[19] Tao, T., *Topics in Random Matrix Theory*, Graduate Studies in Mathematics, **132**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

[20] Xu, Q., Operator spaces and noncommutative $L^p$, *Lectures in the Summer School on Banach Spaces and Operator Spaces*, Nankai University China, 2007.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۸/۱/۱۸؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۶/۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۶/۲

قدیر صادقی: دانشگاه حکیم سبزواری، دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی
*رایانامه:* g.sadeghi@hsu.ac.ir

علی طالبی: دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکدهٔ علوم ریاضی، گروه ریاضی
*رایانامه:* alitalebimath@yahoo.com

محمد صال مصلحیان: دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکدهٔ علوم ریاضی، گروه ریاضی
*رایانامه:* moslehian@am.ac.ir