فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۹، شمارهٔ ۶۷ (پاییز و زمستان ۱۳۹۹) صص. ۱۲۵ تا ۱۴۰

تاریخچهٔ مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های نامنفی

علی‌محمد نظری و عطیه نظامی

چکیده

در این مقاله، تاریخچهٔ مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های نامنفی مطالعه می‌شود. این مسئله، ظاهری ساده دارد اما حل آن، مشکلات متعددی به همراه داشته است و ذهن ریاضیدانان بسیاری را در قرن بیستم و قرن حاضر به خود مشغول کرده است؛ مسئله‌ای که با به‌وجود آمدنِ ماتریس‌های تصادفی و ماتریس‌های تصادفی دوگانه، اهمیتی دوچندان پیدا کرد.

۱. سرآغاز

ماتریس‌های نامنفی، ماتریس‌هایی هستند که همهٔ درآیه‌های آنها عددهای حقیقی نامنفی است. قضیه‌ای که توسط دو ریاضیدان آلمانی، اسکار پرون[1] در سال ۱۹۰۷ و گئورگ فروبنیوس[2] در سال ۱۹۱۲ ثابت و به قضیهٔ پرون–فروبنیوس معروف شد، ویژگی‌های کلی ماتریس‌های نامنفی را مورد بررسی قرار داد و باعث تعریف بزرگترین مقدار ویژه برای این‌گونه ماتریس‌ها شد که به آن *مقدار ویژهٔ پرون* و بردار ویژهٔ نظیر آن را نیز *بردار ویژهٔ پرون* می‌گوییم. تأثیر این قضیه در مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های نامنفی، آنقدر زیاد است که می‌توان گفت تقریباً هر مقاله‌ای در این مبحث، بی‌شک اشاره‌ای به این قضیه دارد. مجموعهٔ مقادیر ویژهٔ یک ماتریس مانند A را *طیف* آن ماتریس می‌خوانیم و با $\sigma(A)$ نمایش می‌دهیم. وقتی ماتریس A به‌گونه‌ای باشد که یک مجموعه مانند σ مجموعهٔ مقادیر ویژهٔ آن باشد، گوییم طیف σ

عبارات و کلمات کلیدی. مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس؛ ماتریس‌های نامنفی؛ مقدار ویژهٔ پرون.

[1]Oskar Perron [2]Georg Frobenius

توسط ماتریس A *تحقق‌پذیر* است. بزرگترین مقدار ویژهٔ ماتریس A را از نظر قدرمطلق، شعاع طیفی ماتریس A می‌نامیم با $\rho(A)$ نمایش می‌دهیم.

ماتریس‌های نامنفی در نظریهٔ احتمال و زنجیرهای مارکُف کاربردهای فراوانی دارند. یکی از انواع ماتریس‌های نامنفی، ماتریس *تحویل‌ناپذیر* است. ماتریس مربعی نامنفی A یک ماتریس تحویل‌ناپذیر است اگر نتوان ماتریس وارون‌پذیر P را چنان یافت که

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ 0 & G \end{pmatrix}$$

که در آن، ماتریس‌های E و G ماتریس‌های مربعی هستند که اندازهٔ آنها دست‌کم ۱ است. به عبارت دیگر، گراف نمایش ماتریس مجاورت تحویل‌ناپذیر، اکیداً همبند است. قضیهٔ پرون–فروبنیوس به‌صورت زیر است:

قضیه ۱.۱. *فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ و نامنفی باشد. مقدار ویژهٔ پرون عبارت است از $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$. اگر ماتریس A تحویل‌ناپذیر باشد، آن‌گاه*

(۱) $\rho(A) > 0$؛
(۲) $\rho(A)$ یک مقدار ویژهٔ ماتریس A است؛
(۳) برداری با درآیه‌های نامنفی وجود دارد که $Ax = \rho(A)x$؛
(۴) $\rho(A)$ دارای مرتبهٔ تکرار ۱ است.

در این مقاله، تاریخچهٔ مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های نامنفی مورد بررسی قرار می‌گیرد. مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های نامنفی یک مسئله با ظاهری بسیار ساده و راه‌حلی در اکثر اوقات، بسیار پیچیده است. تاکنون ریاضیدانان متعددی روی این مسئله کار کرده‌اند و از همه سوی جهان به این مسئله توجه شده است. در کشورمان نیز روی این مسئله کار کرده‌اند. ریاضیدانان ایرلندی توان زیادی را صرف حل این مسئله کرده‌اند و در توسعهٔ مسئله نقش به‌سزایی داشته‌اند.

ابتدا به توصیف جواب‌های داده‌شده برای مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های نامنفی می‌پردازیم و شرایط لازم برای وجود جواب مسئله را مطرح می‌کنیم. البته مسئله می‌تواند جواب‌های بی‌شماری داشته باشد. تلاش می‌کنیم گوشه‌ای از شگردهای گوناگونی را که برای حل مسئله ارائه شده است، به‌اختصار بیان کنیم. کمی هم به مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های نامنفی متقارن خواهیم پرداخت که از حالت‌های بسیار جالب مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس است.

۲. مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های نامنفی و شرایط سلیمانوا

یافتن مقادیر ویژهٔ یک ماتریس، یکی از مسائل بغرنج و پیچیده در جبرخطی عددی است که سال‌ها است ذهن ریاضیدانان را به خود مشغول داشته است. هنوز یک راه‌حل کارآمد که بتواند مقادیر ویژهٔ همهٔ ماتریس‌ها را تعیین کند، ارائه نشده است. البته شاید کسانی که با روش‌های عددی آشنا نیستند، یافتن مقادیر ویژه را از طریق پیدا کردن ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه مد نظر قرار دهند اما یافتن چندجمله‌ای مشخصه خودش در بهترین حالت، از نظر عددی دست‌کم دارای تابع پیچیدگی $O(n^۳)$ برای یک ماتریس مرتبهٔ n با روش کریلف[۱] است و به‌دلیل حساسیت مقادیر ویژه نسبت به ضرایب چندجمله‌ای‌ها (کار بسیار ارزندهٔ ویلکینسون[۲] ریاضیدان انگلیسی متوفی به سال ۱۹۸۶)، عملاً این راه‌حل ناممکن است. از طرف دیگر، حل معادلات چندجمله‌ای با درجهٔ بیش از ۴ مقدور نیست (کارهای ریاضیدانان دوران طلایی نیمهٔ اول قرن نوزدهم، گالوا و آبل، خود بهترین شاهد است). پس روش‌های عددی پا در میان گذاشتند و کم‌وبیش ادامه دارند.

مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس، یعنی اینکه یک دسته عدد داشته باشیم و بخواهیم ماتریسی بیابیم که مجموعهٔ داده‌شده، مجموعهٔ مقادیر ویژهٔ آن ماتریس باشد. ظاهر مسئله بسیار ساده است: با توجه به اینکه مقادیر ویژهٔ یک ماتریس قطری یا مثلثی، درآیه‌های روی قطر اصلی آن را تشکیل می‌دهند، اگر عضوهای این مجموعه را روی قطر یک ماتریس با ابعاد مجموعهٔ داده‌شده قرار دهیم و ماتریس مثلثی یا قطری حاصل را در نظر بگیریم، کار تمام است. قطعاً مسئله جواب‌های زیادی نیز دارد، زیرا درآیه‌های قطری به $n!$ طریق روی قطر اصلی جابه‌جا می‌شوند و اگر ماتریس جواب را به‌صورت بالامثلثی در نظر بگیریم، بی‌شمار جواب وجود خواهد داشت، زیرا درآیه‌های بالای قطر اصلی، آزاد هستند و تغییری در مقادیر ویژه به‌وجود نمی‌آورند. این مسئلهٔ IEP[۳] است. اما با اضافه شدنِ تنها یک محدودیت و آن اینکه ماتریس جواب، یک ماتریس نامنفی باشد، به یک‌باره مسئله مشکل خواهد شد. اگر مجموعهٔ داده‌شده دارای اعداد منفی باشد، آن‌گاه ماتریس‌های قطری و بالامثلثی و پایین‌مثلثی با قرار دادن عضوهای مجموعهٔ داده‌شده به‌جای درآیه‌های قطر اصلی، مسئله را حل نخواهند کرد یا از آن مهم‌تر، اگر طیف داده‌شده دارای جفت‌های مزدوج از اعداد مختلط باشد (به این دلیل باید جفت مزدوج باشد که این‌ها ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس نیز هستند و ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها با ضرایب حقیقی به‌صورت جفت مزدوج هستند)، حل مسئله پیچیدگی‌های خودش را خواهد داشت. به این مسئله به‌اختصار، NIEP[۴] می‌گوییم.

تقریباً از اواخر دههٔ چهارم قرن بیستم، توجه ریاضیدانان بزرگ به این مسئله جلب شد. شاید اولین بار کُلموگُرُف[۵]، ریاضیدان بزرگ روسی، به این مسئله پرداخته باشد که صورت مسئله را در سال ۱۹۳۷ در کلاس درسش مطرح و بعداً آن را در مقاله‌ای ارائه کرد [۲۱]. سؤال کُلموگُرُف این بود که چه موقع عضوهای

---

[۱] Krylov [۲] Wilkinson [۳] Inverse Eigenvalue Problem [۴] Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem
[۵] Kolmogorov

یک مجموعه از اعداد مختلط، می‌توانند مقادیر ویژهٔ یک ماتریس نامنفی باشند. سلیمانوا[1] شاگرد همان کلاس در سال ۱۹۴۹ در مقاله‌ای شرایطی را روی طیف داده‌شده قرار داد که یک *ماتریس همراه* نامنفی جواب این مسئله باشد [۴۸]. ماتریس همراه به یکی از شکل‌های زیر است:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & a_2 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

که در آن، ماتریس‌های C_1 و C_2 به‌ترتیب، بالاهمراه و پایین‌همراه نامیده می‌شوند. چندجمله‌ای مشخصهٔ هر دو ماتریس عبارت است از

$$\det(\lambda I - C_1) = \det(\lambda I - C_2) = \lambda^n - a_n\lambda^{n-1} - \cdots - a_2\lambda - a_1$$

و از اینجا معلوم می شود که چرا به این ماتریس‌ها همراه میگویند: آنها ضرایب چندجمله‌ای مشخصه خویش را همراه دارند. کُلموگرُف و سلیمانوا می‌خواستند یک ماتریس تصادفی یا تصادفی دوگانه را بیابند به‌گونه‌ای که یک مجموعهٔ داده‌شده طیف آن را تشکیل دهد. ماتریس تصادفی، ماتریسی نامنفی است که در آن، مجموع هر سطر برابر با ۱ است و ماتریس تصادفی دوگانه، یک ماتریس نامنفی است که مجموع درآیه‌های هر سطر و هر ستون آن، برابر با ۱ باشد. به‌طور دقیق‌تر، ماتریس A یک ماتریس تصادفی است اگر و تنها اگر $AJ = J$ که در آن، J برداری است که همهٔ درآیه‌های آن ۱ است. از ویژگی‌های مهم ماتریس‌های تصادفی این است که عدد ۱ مقدار ویژهٔ پرون این ماتریس است و بردار ویژهٔ متناظر با آن، برداری است که همهٔ درآیه‌های آن ۱ است. ابداع‌کنندهٔ مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های نامنفی، کُلموگرُف و سلیمانوا، اساتید برجستهٔ دانشگاه دولتی مسکو، هستند. شرطی که سلیمانوا روی این مسئله قرار داد این بود که اولاً همهٔ مقادیر ویژه حقیقی باشند و ثانیاً بزرگترین مقدار ویژه، تنها مقدار ویژهٔ مثبت مجموعهٔ مقادیر ویژه باشد و مجموع همهٔ مقادیر ویژه، نامنفی باشد. به عبارت دیگر، بزرگترین مقدار ویژه، خودش نامنفی باشد و از قدرمطلق بقیهٔ مقادیر ویژه و همچنین از مجموع آنها کوچکتر نباشد. البته روشن است که اگر ماتریسی نامنفی باشد، مجموع درآیه‌های قطر اصلی آن نامنفی است و چون می‌دانیم که مجموع درآیه‌های قطر اصلی یا *اثر* ماتریس، برابر با مجموع مقادیر ویژه است، پس اولین شرط لازم برای حل‌پذیری مسئله به‌وجود می‌آید. شرط لازم دیگری که برای یک مجموعه از مقادیر ویژه مثل σ باید مطرح کرد، بسته بودن نسبت به عمل مزدوج است، یعنی $\sigma = \bar{\sigma}$. مسئلهٔ کُلموگرُف برای حالت $n = 3$

[1] Suleimonova

با یک ماتریس دوری توسط دو ریاضیدان روسی دیگر، به نام‌های دمیتری‌یُف[۱] و دینکین[۲] در سال‌های ۱۹۴۵ و ۱۹۴۶ حل شده است [۶، ۷]. آیا این شرط نامنفی بودنِ مجموع مقادیر ویژه می‌توانست کافی هم باشد؟ زالتسمان[۳] در سال ۱۹۷۲ [۴۳] طیف

$$\sigma = \left\{ ۱, ۱, -\frac{۲}{۳}, -\frac{۲}{۳}, -\frac{۲}{۳} \right\}.$$

را ارائه کرد که در شرط نامنفی بودنِ مجموع اعضای مجموعه صدق می‌کند اما ماتریسی نامنفی وجود ندارد که این مجموعه، طیف آن باشد. این نشان داد که شرط مذکور، یک شرط لازم است و نه کافی.

فریدلند[۴] شرط سلیمانوا را با یک تغییر، در قالب یک حدس در مقالهٔ خویش به سال ۱۹۷۸ بیان کرد و آن این بود که شرط حقیقی بودنِ عضوهای طیف را از روی آن برداشت: فرض کنیم σ یک مجموعه از اعداد مختلط باشد که دست‌کم یک عضو مثبت دارد، مجموع عضوهای آن نیز نامنفی است و دارای عضوی است که از قدرمطلق بقیهٔ اعضا کوچکتر نیست. در این صورت، σ مجموعهٔ مقادیر ویژهٔ یک ماتریس نامنفی است [۹]. از آن پس، بسیاری از ریاضیدانان در تلاش برای حل این مسئله بر آمده‌اند؛ از جمله ریمز[۵] که از تشابه ماتریس‌ها شروع کرد و طی مقاله‌ای، توانست شرایط حل‌پذیری را برای مسائل با ابعاد حداکثر ۴ مورد بررسی قرار دهد [۴۱]. سپس بحث شرایط لازم دیگری برای حل‌پذیری مسئله به‌مرور توسط ریاضیدانان فعال در این حوزه مطرح شد و هر یک توانستند شرایط جدیدی را مطرح کنند و تعدادی نیز به شرط کافی بپردازند. اما مسئله آنقدر پیچیده از آب در آمد که تاکنون تنها برای حالت ۵×۵ حل شده است. البته برای حالتِ جواب متقارن، پیشرفت‌ها چشمگیر بوده است اما برای حالت کلی هنوز راه باز است. اکنون می‌توان گفت این مسئله‌ای بود که بیش از نیم قرن یکی از چالش‌های ریاضیدانان این شاخه از ریاضیات بوده است.

۳. شرایط لازم برای حل‌پذیری مسئله

شرط سلیمانوا شرط لازم جالبی از آب در آمد؛ اگرچه می‌توان آن را به‌صورت شرط کافی نیز در نظر گرفت اما این شرط، تعداد کمی از طیف‌ها را تحت پوشش قرار می‌داد. اینکه مجموع توان‌های مقادیر ویژه با مجموع توان‌های درآیه‌های قطری یک ماتریس برابر هستند، مسئله را به آنجا رساند که شرط لازم نامنفی بودنِ مجموع مقادیر ویژه برای حل‌پذیری، به‌صورت زیر تغییر یافت:

$$\sum_{j=۱}^{n} \lambda_i^k = S_k = \sum_{i=۱}^{n} a_{ii}^k \geq ۰, \qquad k = ۱, ۲, \ldots$$

[۱] Dmitriev [۲] Dynkin [۳] Salzmann [۴] Freidland [۵] Reams

و این یکی از شرایط لازم حل‌پذیریِ مسئله است. البته روشن است که مجموع فوق برای توان‌های زوج، عددی نامنفی است و برای توان‌های فرد، باید قبل از حل مسئله آن را مورد بررسی قرار داد. در سال ۱۹۷۸ جانسون[۱]، رافائل لُوِی[۲] و لویی لوندن[۳] نیز شرط لازم جالب دیگری را برای حل‌پذیریِ مسئله ارائه دادند که به نامساوی JLL معروف شد [۱۹، ۲۴]. این شرایط عبارت است از

$$S_k^m \leq n^{m-۱} S_{km}, \qquad k, m = ۱, ۲, \ldots . \tag{۱.۳}$$

این نامساوی برای ماتریس همانی به تساوی تبدیل می‌شود. آنها برای $n = ۳$ یک مقدار ویژهٔ مثبت و یک جفت مزدوج مختلط با مجموع مثبت را مطرح و روش ساختن یک ماتریس نامنفی را ارائه کردند و نیز شرطی که برای حل‌پذیری مسئله قرار دادند، به‌صورت زیر بود:

$$[S_۱(\sigma)]^۲ \leq ۳S_۲(\sigma).$$

این نامساوی باعث به‌وجود آمدن نامساوی JLL در حالت کلی گردید. آنها برای حالت $n = ۴$ یک راه‌حل ابتکاری ارائه کردند. در سال ۱۹۹۹ لافی[۴] و میهن[۵] نامساوی JLL را برای حالتی که ماتریس نامنفی مطلوب، اثر صفر دارد، ساده کردند [۲۳]:

$$S_۲^۲ \leq (n - ۱) S_۴.$$

یک مثال جالب اینکه طیف به‌صورت $\sigma = \{\sqrt{۲}, i, -i\}$ در شرط JLL برای حالت $k = ۱$ و $m = ۲$ صدق نمی‌کند. پس ماتریسی نامنفی وجود ندارد که دارای طیف σ باشد.

در سال ۱۹۹۱ در رساله‌ای طولانی که توسط بویل[۶] و هَندِلمان[۷] نوشته شد، شرط لازم و کافی برای حل‌پذیریِ مسئله به‌صورت زیر ارائه گردید:

قضیه ۱.۳. *مجموعهٔ ناصفر $\sigma = \{\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ با شرط $\lambda_۱ = \max |\lambda_i|$، طیف یک ماتریس مثبت است اگر و تنها اگر*

(۱) $\lambda_۱ > |\lambda_i|$ برای هر $i > ۱$؛

(۲) $S_k > ۰$ برای $k = ۱, ۲, \ldots$؛

(۳) ضرایب چندجمله‌ای $\prod_{i=۱}^{n} (t - \lambda_i)$ حقیقی باشند.

مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های نامنفی برای حالت $n = ۴$ و $n = ۵$ و شرط اضافهٔ صفر بودنِ اثر و در نتیجه صفر بودنِ مجموع طیف داده‌شده، به‌وسیلهٔ ریمز [۴۱] و لافی و میهن [۲۳] حل شد. برای طیف حقیقی، لافی و میهن کامل‌ترین جواب را در حالت $n = ۴$ ارائه کردند.

---
[۱] Johnson [۲] Lowey [۳] London [۴] Laffey [۵] Meehan [۶] Boyle [۷] Handelman

شرط لازم و کافی برای حالت $n=۲$ این است که مجموعهٔ داده‌شده، یعنی $\sigma=\{\lambda_۱,\lambda_۲\}$ دارای دو عضو حقیقی با مجموع نامنفی باشد. اگر هر دو عضو مجموعهٔ σ نامنفی باشند، آن‌گاه ماتریسی قطری که درآیه‌های قطر اصلی‌اش اعضای مجموعهٔ σ باشند، جواب مسئله است و اگر $\lambda_۱>۰$ و $\lambda_۲<۰$ و $\lambda_۱+\lambda_۲\geq ۰$، آن‌گاه ماتریس

$$A=\begin{pmatrix} ۰ & -\lambda_۱\lambda_۲ \\ ۱ & \lambda_۱+\lambda_۲ \end{pmatrix}$$

جواب مسئله است [۳۴]. چون در حالت کلی برای $n=۲$، برای دو ماتریس که یکی تصادفی به‌صورت

$$\begin{pmatrix} a & ۱-a \\ b & ۱-b \end{pmatrix}$$

است که در آن، $۰\leq a,b\leq ۱$ و دیگری تصادفی دوگانه به‌صورت

$$\begin{pmatrix} \frac{۱-b+a}{۲} & \frac{۱-a+b}{۲} \\ \frac{۱-a+b}{۲} & \frac{۱-b+a}{۲} \end{pmatrix}$$

است، مجموعه مقادیر ویژهٔ هر دو ماتریس، $\{۱,-b+a\}$ است، پس می‌توان گفت این دو مسئله، یعنی مسئلهٔ مقدار ویژهٔ ماتریس‌های تصادفی و تصادفی دوگانه در این حالت، هم‌ارز هستند. اما در حالت $n=۳$، برای طیف $\sigma=\{-۱,۰,۱\}$ ماتریس تصادفی

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

را داریم و هیچ ماتریس تصادفی دوگانه یافت نمی‌شوند که مجموعهٔ σ طیف آن باشد. پس در این حالت، این دو مسئله هم‌ارز نیستند [۱۹]. مسئله برای حالت $n=۳$ توسط لوی و لوندن در [۲۴] حل شد. البته آنجا دیگر شرط لازم و کافی برای حل‌پذیری مطرح نشده بود و فقط شرایطی که مسئله را بتواند به جواب برساند، برای حالت ۳×۳ ارائه شده بود.

برای حالت $n=۴$ با مجموع مقادیر ویژهٔ صفر (در نتیجه همهٔ درآیه‌های قطری ماتریس جواب به دلیل اینکه نامنفی است، صفر خواهد شد)، ریمز [۴۱] و لافی و میهن [۲۳] مسئله را مورد بررسی قرار دادند. تا قبل از مقالهٔ [۳۴]، مسئله برای $n=۵$ همچون حالت‌های دیگر حل نشده بود اما در سال ۲۰۱۲ آنها مسئله را برای $n=۵$ در ۱۷ حالت گوناگون حل کردند و شاید بتوان گفت که کامل‌ترین جواب تاکنون برای حل مسئله در حالت $n=۵$، مقالهٔ آنان است.

برای حالت طیف غیرحقیقی، رسالهٔ دکتریِ میهن با استادراهنماییِ توماس لافی، در حالت $n = ۴$ گره‌گشای کار است [۲۳]. اگر بخواهیم جواب به‌صورت یک ماتریس دوری برای طیف

$$\sigma = \{\lambda_۱, \lambda_۲, \dots, \lambda_n\}$$

باشد، شرایط لازم و کافی برای حل این مسئله توسط راجو و سوتو[۱] در [۴۲] آمده است. ماتریس‌های دوری، از انواع ماتریس‌های توپلیتس[۲] هستند که به‌وسیلهٔ یک بردار به‌عنوان سطر اول تولید می‌شوند به این صورت که سطر دوم تا آخر، از انتقال هر درآیه به سمت راست یا چپ از سطر بالایی به‌دست می‌آید. به عبارت دیگر، ماتریس تئوپلیتز ماتریسی است که درآیه‌های هر قطر آن یکسان است. ظاهر سادهٔ این ماتریس‌ها و یکسانی بردارهای ویژه که مستقل از بردار تولیدی آنها است، باعث شده است بسیار مورد استقبال ریاضیدانان قرار گیرند.

در سال ۱۹۹۷ گائو[۳] نشان داد که اگر یک طیف $\sigma = \{\lambda_۱, \lambda_۲, \dots, \lambda_n\}$ تحقق‌پذیر باشد و فرض کنیم که $\lambda_۱$ مقدار ویژهٔ پرون برای آن باشد، آن‌گاه اگر $\lambda_۲$ مقدار ویژهٔ حقیقی باشد، برای هر $\epsilon \geq ۰$ مجموعهٔ

$$\sigma' = \{\lambda_۱ + \epsilon, \lambda_۲ \pm \epsilon, \lambda_۳, \dots, \lambda_n\}$$

نیز تحقق‌پذیر است. او بعد از سلیمانوا اولین کسی است که یک شرط لازم و کافی برای حل‌پذیری مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های نامنفی ارائه کرد. قضیهٔ او به‌شکل زیر است [۱۵]:

قضیه ۲.۳. *اگر $\sigma = \{\lambda_۱, \lambda_۲, \dots, \lambda_n\}$ یک مجموعه از اعداد مختلط باشد که در شرط $\sigma = \bar{\sigma}$ صدق می‌کند، آن‌گاه عددی حقیقی مانند $\lambda_۰$ وجود دارد که*

$$\max_{۲\leq j\leq n} |\lambda_j| \leq \lambda_۰ \leq ۲n \max_{۲\leq j\leq n} |\lambda_j|$$

و لذا σ توسط یک ماتریس نامنفی مانند A تحقق‌پذیر است اگر و تنها اگر $\lambda_۱ \geq \lambda_۰$.

عده‌ای بر آن شدند که مسئله را به‌شکل استقرایی حل کنند، یعنی از یک طیف کوچکتر شروع کنند و طیف‌های بزرگتر را به‌دست آورند که از آن جمله براوئر[۴] است که قضیهٔ بسیار جالب خویش را در سال ۱۹۵۲ ارائه داد [۲]. یک اثبات استاندارد برای قضیهٔ براوئر، توسط ریمز در سال ۱۹۶۶ ارائه شد [۴۱]. این قضیه، یکی از قضیه‌های تأثیرگذار در مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های نامنفی است؛ اگرچه خودش به‌طور مستقیم به این مسئله نپرداخته است:

[۱] Rojo and Soto [۲] Teoplitz [۳] Guo Wuwen [۴] Brauer

قضیه ۳.۳. *فرض‌کنیم ماتریس A با اندازهٔ $n\times n$ دارای مقادیر ویژهٔ λ_1 ، λ_2، ...، λ_n باشد و v بردار ویژهٔ متناظر با مقدار ویژهٔ λ_k و q برداری دلخواه باشد. در این صورت، ماتریس $A+vq^T$ دارای مقادیر ویژهٔ زیر است:*

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_k + v^T q, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n.$$

در سال ۲۰۰۳ راجو و سوتو [۴۲] با استفاده از این قضیه، نخستین گام در مسائل پیوندی را طرح و ثابت کردند که اگر $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ طیف یک ماتریس نامنفی باشد که در شرط $\sigma = \bar{\sigma}$ صدق کند، آن‌گاه ماتریسی نامنفی از مرتبهٔ $n+1$ وجود دارد که شامل طیف σ است. در اثبات این قضیه از ایدهٔ براوئر استفادهٔ زیادی شده است. این قضیه نشان می‌دهد که برای حالت متقارن، مسئله را با سادگیِ بیشتری می‌توان تا هر بُعدی حل کرد و همچون حالت نامتقارن نیست که تحت شرایطی بسیار خاص حل شود.

۴. حالت متقارن و یک مسئلهٔ کلاسیک

در این بخش، می‌خواهیم به مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های متقارن بپردازیم که به‌اختصار با SNIEP[1] نمایش داده می‌شود. چنان‌که می‌دانیم مقادیر ویژهٔ یک ماتریس متقارن، همگی حقیقی هستند. از این‌رو برای یک طیف حقیقی که دارای یک مقدار ویژهٔ پرون باشد، قرار است یک ماتریس متقارن و حقیقی به‌دست آید که مجموعهٔ داده‌شده، مجموعهٔ مقادیر ویژهٔ آن باشد. در سال ۱۹۷۴ فیدلر به این مطلب پرداخت و جواب بسیار سادهٔ زیر را برای حالت $n=2$ و طیف $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ که در آن، $\lambda_1 \geq 0$ و $\lambda_1 \geq |\lambda_2|$ ارائه داد [۱۲]:

$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_2 & \lambda_1-\lambda_2 \\ \lambda_1-\lambda_2 & \lambda_1+\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

در سال ۱۹۷۹ فریدلند و مِلکمن[2] در [۱۰] از اندیشهٔ فیدلر در حالت $n=2$ برای ماتریس‌های متقارن استفاده و ثابت کردند مجموعهٔ $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ که در آن، $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ می‌تواند طیف یک ماتریس سه‌قطریِ متقارن نامنفی باشد اگر و تنها اگر برای هر i، $\lambda_i + \lambda_{n-i+1} = 0$. در این حالت، ماتریس جواب J عبارت است از

$$J = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_{[\frac{n+1}{2}]}), \qquad A_i = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_i+\lambda_{n-i+1} & \lambda_i-\lambda_{n-i+1} \\ \lambda_i-\lambda_{n-i+1} & \lambda_1+\lambda_{n-i+1} \end{pmatrix}$$

[1] Symmetric Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem [2] Melkman

و اگر n فرد باشد، قرار می‌دهیم $i = \frac{n+۱}{۲}$ و $A_i = [\lambda_i]$. در سال ۱۹۹۷ گائو در [۱۵] به حل مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های متقارن نامنفی در حالت $n = ۳$ پرداخت.

وقتی یک مجموعه از اعداد حقیقی توسط یک ماتریس نامتقارن تحقق می‌یابد، می‌گوییم مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس نامنفی حقیقی یا RNIEP[۱] طرح شده است. در سال ۱۹۷۸ هرشکوویتس[۲] در رسالهٔ دکتریِ خود این سؤال را طرح کرد آیا اگر مسئلهٔ RNIEP جواب داشته باشد، مسئلهٔ SNEIP نیز جواب دارد؟ [۱۷] در سال ۱۹۹۶ جانسون و همکارانش [۲۰] ثابت کردند که دو مسئلهٔ RNIEP و SNEIP متفاوت هستند. پیدا کردن کوچکترین بُعدی که دو مسئلهٔ RNIEP و SNEIP متفاوت باشند، هنوز حل‌نشده است. لافی در سال ۱۹۹۸ در هفتمین *کنفرانس سالیانهٔ جبرخطی* نشان داد که دو مسئلهٔ RNIEP و SNEIP برای $n = ۵$ متفاوت هستند. این برهان او ناشی از مقالهٔ منتشر نشده‌ای از لوی و هارتویگ[۳] بود که نامی برایش انتخاب نشده است [۱۶]. در سال ۲۰۰۴ اِگلستُن[۴] و همکارانش [۸] مسئله را برای $n = ۵$ در حالت‌های متفاوتی حل کردند.

یکی از گام‌های مهم در حل مسئله در حالت متقارن، ارائهٔ جواب‌های ترکیبی بود که توسط فیدلر پایه‌گذاری شد. او توانست برای دو طیف از دو ماتریس نامنفی، یک ماتریس نامنفی به‌دست آورد که طیف آن از اجتماع دو طیف مذکور تشکیل شده بود [۱۱]:

قضیه ۱.۴. *فرض‌کنیم A یک ماتریس متقارن $m \times m$ با مجموعهٔ طیف $\Lambda_۱ = \{\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_m\}$ باشد و فرض‌کنیم u بردار ویژهٔ واحد متناظر با مقدار ویژه $\alpha_۱$. فرض‌کنیم B ماتریس متقارن دیگری با طیف $\Lambda_۲ = \{\beta_۱, \beta_۲, \ldots, \beta_n\}$ و بردار واحد v بردار ویژهٔ متناظر با مقدار ویژهٔ $\beta_۱$ باشد. در این صورت، برای هر ρ ماتریس*

$$C = \begin{pmatrix} A & \rho u v^T \\ \rho u v^T & B \end{pmatrix}$$

دارای طیف $\Lambda = \{\gamma_۱, \gamma_۲, \alpha_۲, \ldots, \alpha_m, \beta_۲, \ldots, \beta_n\}$ است که در آن، $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ مقدارهای ویژهٔ ماتریس

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_۱ & \rho \\ \rho & \beta_۱ \end{pmatrix}$$

هستند.

این مسئلهٔ پیوندی، باعث شد که نخست اسمیگُک[۵] در سال ۲۰۰۴ بتواند برای حالت نامتقارن نیز به شرطی که مقدار ویژهٔ پرون دارای بلوک–ژُردان ۱ × ۱ باشند، مسئله‌ای مشابه را حل کند [۴۶] و پس

[۱] Real Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem [۲] Hershkowitz [۳] Hartwig [۴] Egleston [۵] Smigoc

از آن، نظری و شرافت توانستند در سال ۲۰۱۲ بدون شرط بلوک–ژُردان برای مقدار ویژهٔ پرون، مسئلهٔ پیوندی را حل نمایند [۳۴]. قضیهٔ آنها به‌صورت زیر است:

قضیه ۲.۴. *فرض کنیم B یک ماتریس نامنفی از مرتبهٔ $m \times m$ و $M_1 = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m\}$ مجموعهٔ مقادیر ویژهٔ آن و μ_1 مقدار ویژهٔ پرون آن باشد. فرض کنیم A ماتریس نامنفی دیگری به‌شکل*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & a \\ b^T & \mu_1 \end{pmatrix}$$

باشد که در آن، A_1 یک ماتریس از مرتبهٔ $(n-1) \times (n-1)$ است، a و b دو بردار در $\mathbb{R}^{n-1}$ هستند و $M_2 = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ مجموعهٔ مقادیر ویژهٔ ماتریس A است. در این صورت، یک ماتریس نامنفی از مرتبهٔ $(m+n-1) \times (m+n-1)$ وجود دارد به‌طوری که مجموعهٔ

$$M = \{\mu_2, \ldots, \mu_m, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$$

طیف آن است.

در سال ۲۰۰۴ لوی و مک‌دونالد[1] توانستند شرایط حل‌پذیری را برای جواب متقارن مسئلهٔ مقدار ویژهٔ نامنفی ماتریس‌های متقارن در حالت $n = 5$ به‌دست آورند [۲۵]. آنها یک مسئلهٔ کلاسیک مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های نامنفی را در نظر گرفتند. این مسئله دارای طیف $\sigma = \{3, 3, -2, -2, -2\}$ بود. بنابر قضیهٔ پرون–فروبنیوس، ماتریسی نامنفی یافت نمی‌شود که این مجموعه، طیف آن باشد. حال اگر به اولین مقدار ویژه، مقدار مثبت t را اضافه کنیم، آنگاه کوچکترین مقدار t که این مسئله می‌تواند جواب متقارن داشته باشد، برابر با ۱ است [۱۶]. اینکه هیچ ماتریس نامنفی یافت نمی‌شود که مجموعهٔ فوق، طیف آن باشد، از نظر تاریخی اهمیت ویژه‌ای دارد. این مسئله حل‌پذیر نیست، یعنی نمی‌توان ماتریس نامنفی با مجموعهٔ مقادیر ویژهٔ فوق یافت اما تغییرات کوچک روی مسئله برای رسیدن به حل‌پذیری، مطالب جالبی را به مسئلهٔ مقادیر ویژهٔ معکوس ماتریس‌های نامنفی افزوده است. اگر مسئله را به‌صورت نامتقارن در نظر بگیریم، آنگاه کمترین مقداری که می‌توان به بزرگترین مقدار ویژه اضافه کرد تا مسئلهٔ حل‌پذیر شود، عدد $\sqrt{16\sqrt{6} - 39}$ است [۲۳]. کرونین[2]، لافی و میهن در مقالات اخیر خود دربارهٔ حل‌پذیریِ این مسئله، با اضافه کردن صفرهایی، به طیف مورد نظر دست یافته‌اند. برای مثال، طیف

$$\sigma = \{3 + t, 3, -2, -2, -2, 0\}.$$

[1]McDonald [2]Cronin

توسط ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۹ & ۶ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ & ۰ & ۱ \\ ۵۴t^{۲}+۹ & ۵۳t^{۲}+۱۵ & ۱۸t^{۲}-۶ & ۶t^{۲}+۱ & t^{۲}+۶ & ۰ \end{bmatrix}$$

به‌ازای $t = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ حل می‌شود. آنها نشان دادند که با افزایش صفرهای طیف داده‌شده، مقدار t را که به مقدار ویژهٔ پرون اضافه شده است، می‌توان کاهش داد و در نهایت به سمت صفر میل داد [۴].

۵. مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس در ایران

محسنی‌مقدم و ریواز در سال ۲۰۰۴ مقاله‌ای نوشتند که در سال ۲۰۰۷ به چاپ رسید. احتمالاً اولین کسانی در ایران بودند که روی مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس کار کرده‌اند. آنها برای یک مقدار ویژهٔ داده‌شدهٔ مثبت به‌همراه بردار ویژهٔ متناظرش که آن نیز مثبت در نظر گرفته می‌شود، توانستند یک ماتریس یکتای ژاکوبی و یک T–ماتریس یکتا متناظر با آن را بیابند که (λ, x) زوج ویژهٔ T–ماتریس و $(-\frac{۱}{\lambda}, x)$ زوج ویژهٔ ماتریس ژاکوبی متناظر باشند [۳۱]. ماتریس‌های ژاکوبی از انواع ماتریس‌های سه‌قطری متقارن هستند. محسنی‌مقدم و تاج‌الدینی در سال ۲۰۰۹ یک مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس مربعی را حل کردند [۳۰]. ایکراموف[۱] استاد دانشگاه دولتی مسکو، در مقاله‌ای طولانی، به مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس پرداخته است و می‌توان گفت مقالهٔ او یک دایرةالمعارف دربارهٔ مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های نامنفی است و بیشترِ آن دربارهٔ مسئلهٔ فیلمور[۲] است. در سال ۲۰۱۰ با سفارش تاج‌الدینی، توجه نظری به کار استاد راهنمایش دربارهٔ مسئلهٔ فیلمور جلب شد. مسئلهٔ فیلمور، یک مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس است که ماتریس مورد نظر، علاوه بر شرط نامنفی بودن، محدویت دیگری نیز دارد و آن اینکه درآیه‌های مشخصی از ماتریس جواب، باید ناصفر باشند [۱۸]. نظری و همکاران در سال ۲۰۱۱ ابتدا مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های متقارن مرکزی به‌صورت ایکس‌شکل را با شرایط ویژه‌ای مورد بررسی قرار دادند [۳۳] و پس از آن، نظری و شرافت با کار روی مسئلهٔ فیلمور و با ایده‌ای که از مقاله اسمیگُک به‌دست آورده بودند، احتمالًا اولین ایرانیانی باشند که در سال ۲۰۱۲ پا در وادی مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های نامنفی

[۱] Saidhakim Dododzhanovich Ikramov [۲] Fillmore

گذاردند [۳۴]. چنان‌که اشاره کردیم، شاید برای حالت نامتقارن ۵ × ۵ یکی از کامل‌ترین جواب‌ها را تا آن زمان، برای مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های نامنفی ارائه کردند. دو سال بعد، نظری و مهدی‌نسب توانستند مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های فاصله را بدون استفاده از ماتریس‌های آدامار حل کنند [۳۷]. یکی از جالب‌ترین حالت‌های خاص مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های متقارن، بحث در مورد ماتریس‌های فاصله است. ماتریس فاصله یک ماتریس نامنفی است که درآیه‌های آن از روی فاصلهٔ مختصاتی تعدادی نقطه به‌اندازهٔ بُعد ماتریس به‌دست می‌آید. روشن است که قطر اصلی ماتریس فاصله، صفر است و این یکی از مهم‌ترین شرایط برقراری نامساوی مثلثی بین درآیه‌ها است. سپس نظری و افشاری با استفاده از ایدهٔ مطرح در [۳۴]، توانستند مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس را برای مقادیر ریتس[۱] ماتریس‌های متقارن تعمیم دهند. مقادیر ریتس، مجموعهٔ مقادیر ویژهٔ یک ماتریس و مقادیر ویژهٔ همهٔ زیرماتریس‌های اصلی پیش‌رو آن است [۳۲].

در سال ۲۰۱۳ قنبری و همکاران، مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های ژاکوبی را حل کردند. ماتریس ژاکوبی، یک ماتریس سه‌قطری متقارن با درآیهٔ غیر قطریِ مثبت (منفی) است [۱۳] . ایشان و همکاران بار دیگر مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس برای ماتریس‌های پنج‌قطری را در سال ۲۰۱۴ حل کردند [۲۹، ۱۴].

در سال ۲۰۱۸ نظری و همکاران، مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های نامنفیِ بازه‌ای را فتح باب کردند و با استفاده از ایدهٔ مطرح در [۳۴]، این مسئله را برای حالت‌های خاصی تا $n = ۳$ حل کردند [۳۵]. در سال ۲۰۱۹ نظری و نظامی با استفاده از ایدهٔ ریمز [۴۱] در به‌دست آوردنِ ماتریس‌های متشابه، توانستند مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس‌های نامنفی را با استفاده از ماتریس‌های پایین‌مثلثی واحد در حالت کلی حل کنند [۳۶]. ماتریس‌های پایین‌مثلثی واحد، ماتریس‌هایی پایین‌مثلثی هستند که درآیه‌های قطر اصلی آنها ۱ است و وارون آنها به‌سادگی قابل محاسبه است.

مراجع

[1] Borobia, A., Moro, J., Soto, R. L., A unified view on compensation criteria in the real nonnegative inverse eigenvalue problem, *Linear Algebra Appl.*, **428** (2008), 2574–2584.

[2] Brauer, A., Limits for the characteristic roots of a matrix, IV: Applications to stochastic matrices, *Duke Math. J.*, **19** (1952), 75–91.

[3] Charles, C., Johnson, R., Soto, R. L., Universal realizability of spectra with two positive eigenvalues, *Linear Algebra Appl.*, **545** (2018), 226-–239.

[4] Cronin, A., Laffey, T., The Diagonalizable Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem, *Special Matrices*, **6** (2018), no. 1, 273–281.

[۱] Ritz

[5] Datta, B. N., *Numerical Linear Algebra And its Applications*, Brooks/Cole Publishing Company, 1995.

[6] Dmitriev, N., Dynkin, E., On the characteristic numbers of a stochastic matrix, *Doklady Akad. Nauk,* **49** (1945), 159–162.

[7] Dmitriev, N., Dynkin, E., Eigenvalues of a stochastic matrix, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **10** (1946), 167–184.

[8] Egleston, D., Lenker, Terry, D., Narayan, Sivaram K.,The nonnegative inverse eigenvalue problem, *Linear Algebra Appl.*, **379** (2004), 475–490.

[9] Friedland, S., On an inverse eigenvalue problem for nonnegative and eventually nonnegative matrices, *Israel Journal of Math.*, **29** (1978), no. I, 43–.

[10] Friedland, S., Melkman, A. A., On the eigenvalues of nonnegative Jacobi matrices, *Linear Algebra Appl.*, **25** (1979), 239–254.

[11] Fiedler, M., Eigenvalues of nonnegative symmetric matrices, *Linear Algebra Appl*. **9** (1974), 119–142.

[12] Fiedler, M., Eigenvalues of nonnegative symmetric matrices, *Linear Algebra Appl.*, **9** (1974), 119–142.

[13] Ghanbari, K., Parvizpou,r F., Mirzaei, H., Constructing Jacobi matrices using prescribed mixed eigendata, *Linear and Multilinear Algebra*, **62** (2014), no. 6, 721–734.

[14] Ghanbari K., Mirzaei, H., Inverse eigenvalue problem for pentadiagonal matrices, *Inverse Problems in Science and Engineering*, **22** (2014), no. 4, 530–542.

[15] Guo, W., Eigenvalues of nonnegative matrices, *Linear Algebra Appl.*, **266** (1997), 261–270.

[16] Hartwig, R., Loewy, R., Unpublished, 1989.

[17] Hershkowitz, D., *Existence of matrices satisfying prescribed conditions*, M. Sc. Thesis, Technion-Israel Institute of Technology, 1978.

[18] Ikramov, Kh., Chugunov, V., Inverse matrix eigenvalue problems, *Journal of Mathematical Sciences*, **98** (2000), no. 1, 51–136.

[19] Johnson, C., Row stochastic matrices similar to doubly stochastic matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, **10** (1981), 113–130.

[20] Johnson, C., Laffey, T. J., Loewy, R., The real and the symmetric nonnegative inverse eigenvalue problems are different, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **124** (1996), 3647–3651.

[21] Kolmogorov, A. N., Markov chains with countably many possible states, *Bull. Univ. Moscow*, (A) **3** (1937) 1–16 (in Russian).

[22] Laffey, T., Meehan, E., A characterization of trace zero nonnegative 5×5 matrices, *Linear Algebra Appl.*, **302–303** (1999), 295–302.

[23] Laffey, T., Meehan, E., A characterization of trace zero nonnegative 5×5 matrices, *Linear Algebra Appl.*, **302-303** (1999), 295-302.

[24] Lowey, R., London, D., A note on an inverse problem for nonnegative matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, **6** (1978), 83–90.

[25] Lowey, R., McDonald, J. J., The symmetric nonnegative inverse eigenvalue problem for 5×5 matrices, *Linear Algebra Appl.*. **393** (2004), 275–298.

[26] Manzaneda, C., Andrade, E., Robbiano, M., Realizable lists via the spectra of structured matrices, *Linear Algebra Appl.*, **534** (2017), 51–72.

[27] Meehan, E., *Some Results On Matrix Spectra*, Ph. D. thesis, University College Dublin, 1998.

[28] Minc, M., *Nonnegative Matrices*, John Wiley & Sons, New York, 1988.

[29] Moghaddam, M. R., Mirzaei, H., Ghanbari, K., On the generalized inverse eigenvalue problem of constructing symmetric pentadiagonal matrices from three mixed eigendata, *Linear and Multilinear Algebra*, **63** (2015), no. 6, 1154–1166.

[30] Mohseni Moghadam, M., Tajaddini, A., Inverse eigenvalue problem with non-simple eigenvalues for damped vibration systems, *J. of Informatics and Mathematical Sciences*, **1** (2009), no. 2-3, 91–97.

[31] Mohseni Moghadam, M., Rivaz, A., Algorithms for the Inverse Eigenvalue Problem Concerning Jacobi Matrices and T-matrices, *Southeast Asian Bulletin of Math.*, **31** (2007), 111–118.

[32] Nazari, A. M., Afshari, E., On the construction of symmetric nonnegative matrix with prescribed Ritz values, *J. of Linear and Topological Algebra*, **03** (2014), no. 02, 61– 65.

[33] Nazari, A. M., Afshari, E., Omidi Bidgoli, A.,Properties of Central Symmetric X-Form Matrices, *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, **6** (2011), no. 2, 9–20.

[34] Nazari, A. M., Sherafat, F., On the inverse eigenvalue problem for nonnegative matrices of order two to five, *Linear Algebra Appl.*, **436** (2012), 1771–1790.

[35] Nazari, A. M., Zeinali, M., Mesgarani, H., Inverse eigenvalue problem of interval nonnegative nonnegative matrices of order ≤ 3, *JMM*, **6** (2018), no. 2, 187–194.

[36] Nazari, A. M., Nezami, A., Inverse eigenvalues problem of nonnegative matrices via unit lower triangular matrices, *ELA*, 2019, Accepted paper.

[37] Nazari, A. M., Mahdinasab, F., Inverse eigenvalue problem of distance matrix via orthogonal matrix, *Linear Algebra Appl.*, **450** (2014), 202–216.

[38] Perfect, H., Methods of constructing certain stochastic matrices, *Duke Math. J*, **20** (1953), 395–404.

[39] Perfect, H., Methods of constructing certain stochastic matrices II, *Duke Math. J*, **22** (1955), 305–311.

[40] Radwan, N., An inverse eigenvalue problem for symmetric and normal matrices, *Linear Algebra Appl.*, **248** (1996), 101-109.

[41] Reams, R., An inequality for nonnegative matrices and the inverse eigenvalue problem, *Linear and Multilinear Algebra.*, **41** (1996), 367–375.

[42] Rojo, O., Soto, R. L.,Existence and construction of nonnegative matrices with complex spectrum, *Linear Algebra and its Appl.*, **368** (2003), 53–69.

[43] Salzmann, F. L., A note on eigenvalues of nonnegative matrices, *Linear Algebra Appl.* **5** (1972), 329–338.

[44] Smigoc, H., The inverse eigenvalue problem for nonnegative matrices, *Linear Algebr Appl.*, **393** (2004), 365–374.

[45] Smigoc, H., Construction of nonnegative matrices and the inverse eigenvalue problem, *Linear and Multilinear Algebra.*, **53** (2005), no. 2, 85-–96.

[46] Smigoc, H., The inverse eigenvalue problem for nonnegative matrices, *Linear Algebra Appl.*, **393** (2004), 365–374.

[47] Soto, R. L., Rojo, O., Borobia, A., Moro, J., Symmetric nonnegative realization of spectra, *Electron. J. of Linear Algebra*, **16** (2007), 1–18.

[48] Suleimanova, K. R., Stochastic matrices with real characteristic values, *Doklady Akad. Nauk*, **66** (1949), 343–345 (in Russian).

[49] Torre-Mayo, J., Abril-Raymundo, M. R., Alarcia-Estevez, E., Marijuan, C., Pisonero, M., The nonnegative inverse eigenvalue problem from the coefficients of the characteristic polynomial. EBL digraphs, *Linear Algebra Appl.*, **426** (2007), 729–773.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۸/۲/۴؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۷/۲۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۷/۳۰

علی‌محمد نظری: دانشگاه اراک، دانشکدهٔ علوم، گروه ریاضی
تارنما: `http://url.com/~name`
رایانامه: `a-nazari@araku.ac.ir`

عطیه نظامی: دانشگاه اراک، دانشکدهٔ علوم، گروه ریاضی
تارنما: `http://url.com/~name`
رایانامه: `a-nezami@arshad.araku.ac.ir`