فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۹، شمارهٔ ۶۷ (پاییز و زمستان ۱۳۹۹) صص. ۱۴۱ تا ۱۵۵

پایه‌های تودرتو و کاربردهای آنها

امیر هاشمی و بنت‌الهدی بینایی

چکیده

یکی از ابزارهای مهم برای مطالعهٔ ایدآل‌های حلقه‌های چندجمله‌ای، پایهٔ گرُبنِر است. هدف اصلی از معرفی پایهٔ گرُبنِر، یافتن پایه‌ای برای فضای خارج‌قسمتی یک ایدآل (به‌عنوان یک فضای برداری) برای مطالعهٔ ویژگی‌های جبری، هندسی و ترکیبیاتیِ ایدآل با استفاده از ابزارهای جبرخطی است. پایهٔ تودرتو نوع خاصی از پایهٔ گرُبنِر با ویژگی‌های ترکیبیاتیِ اضافی است که خاستگاه آن، جبری‌سازیِ دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است. پایهٔ تودرتو نه‌تنها ویژگی‌های زیادی از ایدآل تولید شده توسط آن را توصیف می‌کند، بلکه اثبات بسیار ساده‌تری برای بسیاری از قضیه‌های مهم در هندسه جبری نیز فراهم می‌کند. هدف از نگارش این مقاله، معرفی نظریهٔ پایه‌های تودرتو و بررسی برخی از کاربردهای آن در جبر تعویض‌پذیر است.

۱. سرآغاز

مفهوم پایهٔ گرُبنِر و اولین الگوریتم محاسبهٔ آن، نخستین بار توسط بوخبرگر[۱] در سال ۱۹۶۵ در رسالهٔ دکتری‌اش به راهنماییِ گرُبنِر[۲] ارائه شد [۳]. سپس در سال ۱۹۷۹ در [۲] دو محک برای بهبود محاسبه این پایه ارائه کرد. مولِر[۳]، مورا[۴] و تراوِرسو[۵] در سال ۱۹۹۲ پایهٔ گرُبنِر را با پیچیدگی کمتر و سرعت بالاتری با استفاده از مفهوم سی‌زی‌جی[۶] محاسبه کردند [۱۰]. از طرفی فوژر[۷] در سال‌های ۱۹۹۹ و ۲۰۰۲ دو

عبارات و کلمات کلیدی. حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها؛ ترتیبِ تک‌جمله‌ای؛ پایهٔ گرُبنِر؛ تقسیم تودرتو؛ پایهٔ تودرتو.
این مقاله، به‌عنوان مقالهٔ مدعو، بر اساس سخنرانی ارائه‌شده توسط نگارندهٔ اول در ششمین همایش مرزهای علوم ریاضی که در سال ۱۳۹۷ در دانشگاه صنعتی شریف برگزار شد، تهیه شده است.

[۱]Buchberger [۲]Gröbner [۳]Möller [۴]Mora [۵]Traverso [۶]Syzygy [۷]Faugère

الگوریتم معروف خود را برای محاسبهٔ پایهٔ گرُبنِر ارائه کرد [۶، ۷]. پایهٔ گرُبنِر کاربردهای قابل توجهی در علوم ریاضی دارد که می‌توان به حل دستگاه‌های چندجمله‌ای، محاسبهٔ بُعد ایدآل، برنامه‌ریزی خطی و اثبات قضیه‌های هندسی اشاره کرد. از طرفی پایهٔ گرُبنِر یک ایدآل، منعکس‌کنندهٔ همهٔ ویژگی‌های آن ایدآل نیست. یکی از مفاهیم جدید و کاربردی در جبر محاسباتی، مفهوم پایه‌های تودرتو[۱] است که ویژگی‌های بیشتری از یک ایدآل را نسبت به پایه‌های گرُبنِر ارائه می‌کنند. در اواخر قرن بیستم، جَنِت [۹]، ریاضیدان فرانسوی، تحلیل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با مشتقات جزئی را بر مبنای تکمیل (جبری) تودرتو مطالعه کرد. شیوهٔ او توسط توماس [۱۳]، ریاضیدان آمریکایی، به دستگاه‌های چندجمله‌ای غیرخطی عمومیت داده شد. پایهٔ این ارتباط جبری توسط پُماره[۲] [۱۱] در کتابی به‌قلمِ خودش توضیح داده شد. با استفاده از این ارتباط جبری، ژارکوف[۳] و بلینکوف[۴] [۱۴] مفهومی به‌نام پایهٔ تودرتو را در جبر تعویض‌پذیر معرفی کردند. گِرت[۵] و بلینکوف با معرفی تقسیم‌های تودرتو، مفهوم کلی‌تری از پایهٔ تودرتو برای ایدآل‌های چندجمله‌ای ارائه کردند [۸]. در این مقاله روش‌های الگوریتمی نیز برای محاسبهٔ این پایهٔ معرفی شد.

پایهٔ تودرتو نوع خاصی پایهٔ گرُبنِر با ویژگی‌های ترکیبیاتی اضافی است، که نه‌تنها نسبت به یک ترتیبِ تک‌جمله‌ای، بلکه نسبت به یک تقسیم تودرتو تعریف می‌شود. ایدهٔ اساسی پشت پایهٔ تودرتو این است که به هر مولد در پایه، مجموعه‌ای از متغیرهای ضربی نسبت داده می‌شود و این، منجر به تعریف تقسیم تودرتو می‌شود. هر مولد تنها مجاز است توسط چندجمله‌ای‌های برحسب این متغیرهای ضربی، ضرب شود. یک اثر این تحدید، یکتا بودن نمایش استاندارد تودرتو است که پایهٔ گرُبنِر عادی دارای این ویژگی نیست. با در نظر گرفتن تقسیم‌های تودرتوی متفاوت، پایه‌های تودرتوی متفاوتی می‌توان تعریف کرد که از آن جمله می‌توان به پایه‌های پُماره، توماس و جَنِت اشاره کرد. یکی از موضوعات مهم در مورد تقسیم‌های تودرتو، متناهی بودنِ پایهٔ متناظر برای یک ایدآل است که این ویژگی را *نوتری بودن* می‌نامیم. برای مثال، تقسیم جَنِت، یک تقسیم نوتری است در حالی که تقسیم پُماره نوتری نیست. نکته‌ای که پایهٔ پُماره را متمایز می‌کند این است که پایهٔ پُماره نه‌تنها ویژگی‌های زیادی از ایدآل را توصیف می‌کند، بلکه اثبات‌های ساده‌تری برای برخی از قضیه‌های مهم در هندسه جبری و جبر تعویض‌پذیر فراهم می‌کند. در این مقاله، پس از معرفی مقدمات مورد نیاز، به معرفی تقسیم تودرتو و پایهٔ تودرتو می‌پردازیم. همچنین روش محاسبه یک پایهٔ تودرتو را نیز با ارائهٔ مثال بیان می‌کنیم. در ادامه برخی کاربردهای مهم پایهٔ تودرتو را در جبر تعویض‌پذیر ارائه می‌کنیم.

اکنون به‌طور مختصر بخش‌های این مقاله را توضیح می‌دهیم. در بخش دوم، مفهوم پایهٔ گرُبنِر را برای یک ایدآل چندجمله‌ای تعریف می‌کنیم و به بیان برخی کاربردهای پایهٔ گرُبنِر می‌پردازیم. در بخش سوم،

---

[۱] involutive [۲] Pommaret [۳] Zharkov [۴] Blinkov [۵] Gerdt

مفاهیم تقسیم تودرتو و پایهٔ تودرتو را ارائه می‌کنیم. در بخش چهارم، روشی الگوریتمی برای محاسبهٔ یک پایهٔ تودرتو توصیف می‌کنیم و در بخش پایانی، برخی کاربردهای پایهٔ تودرتو را معرفی می‌کنیم.

۲. پایه‌های گرُبنِر

یکی از ابزارهای جبر محاسباتی در مطالعهٔ ایدآل‌های چندجمله‌ای مفهوم پایهٔ گرُبنِر است. در ادامه به بیان برخی از مفاهیم لازم جهت معرفی پایهٔ گرُبنِر می‌پردازیم. برای مطالعهٔ توضیحات بیشتر، به [۴، ۵] مراجعه کنید.

یک تک‌جمله‌ای برحسب متغیرهای x_1، x_2، ... ، x_n حاصلضربی به‌شکل $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ است که در آن، $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ یک n–تایی از اعداد صحیح نامنفی است. درجهٔ x^α را با نماد $|\alpha|$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $\mathbb{K}$ یک میدان باشد. هر چندجمله‌ای f برحسب متغیرهای x_1، x_2، ... ، x_n یک ترکیب خطی متناهی از تک‌جمله‌ای‌ها با ضرایب در $\mathbb{K}$ است. بنابراین چندجمله‌ای f را می‌توانیم به‌شکل $f = \sum_{\alpha\in A} a_\alpha x^\alpha$ بنویسیم که در آن، $\alpha \in A$، $a_\alpha \in \mathbb{K}$ و $A \subset \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ یک مجموعهٔ متناهی است. برای هر α عبارت $a_\alpha x^\alpha$ را یک *جمله* از f می‌نامیم. درجهٔ چندجمله‌ای f را با نماد $\deg(f)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\deg(f) = \max\{|\alpha| \mid \alpha \in A, a_\alpha \neq 0\}.$$

مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ای‌های برحسب x_1، x_2، ... ، x_n با ضرایب در $\mathbb{K}$ همراه با عمل‌های جمع و ضرب چندجمله‌ای‌ها تشکیل یک حلقه می‌دهند، که آن را حلقهٔ چندجمله‌ای‌های چند متغیره برحسب x_1، x_2، ... ، x_n می‌نامیم و با نماد $R = \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ نمایش می‌دهیم.

برای بیان الگوریتم تقسیم، نیازمند مقایسهٔ تک‌جمله‌ای‌ها هستیم. بنابراین در این بخش به بیان مفاهیم ترتیبِ تک‌جمله‌ای، تک‌جمله‌ای پیشرو، ضریب تک‌جمله‌ای پیشرو و جملهٔ پیشرو می‌پردازیم. یک *ترتیبِ تک‌جمله‌ای*[۱] $\prec$ روی $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ یک ترتیب کلی روی $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ است که در دو شرط صدق کند: اولاً اگر $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ و $\alpha \prec \beta$، آن‌گاه $\alpha+\gamma \prec \beta+\gamma$ و ثانیاً $\prec$ خوش‌ترتیب باشد به این معنی که هر زیرمجموعهٔ ناتهی $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ نسبت به $\prec$ دارای کوچکترین عضو باشد. فرض کنیم $\mathbb{M}$ مجموعهٔ همهٔ تک‌جمله‌ای‌های حلقهٔ R باشد. با توجه به اینکه می‌توانیم تک‌جمله‌ای $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ را با nتایی $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ نظیر کنیم، نگاشتی یک‌به‌یک و پوشا به‌شکل زیر بین تک‌جمله‌ای‌های R و اعضای $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ می‌توان تعریف کرد:

$$\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{Z}^n_{\geq 0}, \qquad \varphi(x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}) = (\alpha_1,\dots,\alpha_n).$$

[1] Monomial ordering

بر اساس این تناظر، یک ترتیبِ تک‌جمله‌ای روی $\mathbb{Z}^n_{\geq ۰}$ یک ترتیبِ تک‌جمله‌ای روی R القا می‌کند. در این صورت، x^α را کوچکتر از x^β گوییم و می‌نویسیم $x^\alpha \prec x^\beta$ اگر $\alpha \prec \beta$.

برای مثال، اگر فرض کنیم $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq ۰}$ و بگوییم $\alpha \succ_{lex} \beta$، اگر سمت چپ‌ترین مؤلفهٔ ناصفر $\alpha - \beta$ مثبت باشد، آن‌گاه این ترتیبِ لغتنامه‌ای است. اگر فرض کنیم $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq ۰}$ و بگوییم $\alpha \succ_{drl} \beta$، اگر $|\alpha| > |\beta|$ یا $|\alpha| = |\beta|$ و سمت راست‌ترین مؤلفهٔ ناصفر $\alpha - \beta$ منفی باشد، این ترتیبِ لغتنامه‌ای معکوس مدرج است. تک‌جمله‌ای‌های $y^۲z^۳, yz^۴ \in \mathbb{K}[x, y, z]$ را در نظر بگیرید. چون

$$(۰, ۲, ۳) - (۰, ۱, ۴) = (۰, ۱, -۱),$$

با فرضِ $x \prec_{lex} y \prec_{lex} z$، می‌توان نوشت $y^۲z^۳ \succ_{lex} yz^۴$ و با فرضِ $x \prec_{drl} y \prec_{drl} z$، داریم $y^۲z^۳ \succ_{drl} yz^۴$.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $\succ$ یک ترتیبِ تک‌جمله‌ای روی R و $f = a_\alpha x^\alpha + a_\beta x^\beta + \cdots + a_\gamma x^\gamma$ یک چندجمله‌ای در R باشد که در آن، $x^\alpha \succ x^\beta \succ \cdots \succ x^\gamma$، $\alpha, \beta, \ldots, \gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq ۰}$. اگر $a_\alpha \neq ۰$ آن‌گاه

- a_α را *ضریب پیشرو*[۱] چندجمله‌ای f می‌نامیم و با $\mathrm{LC}(f)$ نمایش می‌دهیم؛
- x^α را *تک‌جمله‌ای پیشرو*[۲] چندجمله‌ای f می‌نامیم و با $\mathrm{LM}(f)$ نمایش می‌دهیم؛
- $a_\alpha x^\alpha$ را *جملهٔ پیشرو*[۳] چندجمله‌ای f می‌نامیم و با $\mathrm{LT}(f)$ نمایش می‌دهیم.

باید دقت کنیم که در حلقهٔ چندجمله‌ای‌های nمتغیره، تک‌جمله‌ای پیشرو، ضریب پیشرو و جملهٔ پیشرو بستگی به ترتیبِ تک‌جمله‌ای تعریف‌شده روی R و ترتیب متغیرها دارند. برای مثال، فرض کنیم $f = ۴yz^۲ - x^۲y^۲ + ۵z^۳$ و $x \succ_{drl} y \succ_{drl} z$. در این صورت، $\mathrm{LC}(f) = -۱$، $\mathrm{LM}(f) = x^۲y^۲$ و $\mathrm{LT}(f) = -x^۲y^۲$.

در این بخش، به‌کمک مفاهیم بالا، قضیهٔ الگوریتم تقسیم را برای حلقهٔ چندجمله‌ای‌های چندمتغیره بیان می‌کنیم. برای توضیحات تکمیلی به [۵] قضیهٔ ۳ صفحهٔ ۶۴ مراجعه کنید.

قضیه ۲.۲ (الگوریتم تقسیم). *گیریم $\succ$ یک ترتیبِ تک‌جمله‌ای روی R باشد و $f, f_۱, \ldots, f_k \in R$. در این صورت، چندجمله‌ای‌های $q_۱, \ldots, q_k, r \in R$ وجود دارند که $f = q_۱f_۱ + \cdots + q_kf_k + r$ و*

- *$r = ۰$ یا هیچ جمله‌ای از r توسط $\mathrm{LT}(f_۱)$، ...، $\mathrm{LT}(f_k)$ عاد نمی‌شود؛*
- *$\mathrm{LT}(q_if_i) \preceq \mathrm{LT}(f)$ به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, t$.*

[۱] leading coefficient [۲] leading monomial [۳] leading term

r و q_1، . . .، q_k *را به‌ترتیب، باقیمانده و خارج‌قسمت‌های تقسیم* f *بر* f_1، . . .، f_k *می‌نامیم.*

باقیماندهٔ تقسیم f بر دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌ها مانند F در حالت کلی یکتا نیست و با تغییر جایگاه عضوهای F و یا با تغییر ترتیبِ تک‌جمله‌ای، ممکن است تغییر کند.

مثال ۳.۲. فرض کنیم $f_1 = xy + 1$، $f_2 = y^2 - 1$ و $f = xy^2 - x$. با توجه به الگوریتم تقسیم، اگر $F_1 = (f_1, f_2)$، آنگاه $f = yf_1 - x - y$ و اما اگر $F_2 = (f_2, f_1)$، آنگاه $f = xf_2$.

اگر $f_1, \ldots, f_k \in R$ آنگاه مجموعهٔ $\left\{\sum_{i=1}^{k} h_i f_i \mid h_i \in R\right\}$ را ایدآل تولید شده توسط f_1، f_2، . . .، f_k می‌نامیم و با $\langle f_1, \ldots, f_k\rangle$ نمایش می‌دهیم. اگر f_1، f_2، . . .، f_k عضوهایی از R باشند و باقیماندهٔ تقسیم f بر $F = (f_1, \ldots, f_k)$ برابر با صفر باشد، با توجه به الگوریتم تقسیم، چندجمله‌ای‌های $q_1, \ldots, q_k \in R$ وجود دارند به‌طوری که می‌توانیم f را به‌صورت $f = q_1 f_1 + \cdots + q_k f_k$ بنویسیم و در نتیجه $f \in \langle f_1, \ldots, f_k\rangle$. در واقع، صفر بودنِ باقیمانده، شرط لازم برای عضویتِ f در ایدآل تولید شده توسط F است اما شرط کافی نیست. در مثال ۳.۲ از باقیماندهٔ تقسیم f بر F_2، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $f \in \langle f_1, f_2\rangle$ در حالی که باقیماندهٔ تقسیم در حالت اول، ناصفر است.

مثال بالا انگیزه‌ای برای یافتن مجموعهٔ مولد برای یک ایدآل است به‌طوری که نه‌تنها باقیماندهٔ تقسیم هر چندجمله‌ای بر این مجموعه یکتا باشد، بلکه بتوان بر اساس آن، محکی برای تشخیص عضویت یک چندجمله‌ای در یک ایدآل ارائه کرد. در ادامه می‌بینیم پایهٔ گرُبنِر همان مجموعهٔ مولد مورد نظر است.

فرض کنیم $F \subset R$ یک مجموعهٔ متناهی و $\prec$ یک ترتیبِ تک‌جمله‌ای روی R باشد. در این صورت، قرار می‌دهیم $\mathrm{LT}(F) = \{\mathrm{LT}(f) \mid f \in F\}$. اگر $I \subset R$ یک ایدآل باشد، آنگاه ایدآل *جملهٔ پیشروی* ایدآل I را نسبت به $\prec$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{LT}(I) = \langle \mathrm{LT}(f) \mid f \in I\rangle.$$

فرض کنیم $I \subset R$ ایدآلی در حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها و $\prec$ یک ترتیبِ تک‌جمله‌ای روی R باشد. مجموعهٔ متناهی $G \subseteq I$ را یک پایهٔ گرُبنِر I نسبت به $\prec$ گوییم اگر $\mathrm{LT}(I) = \langle \mathrm{LT}(G)\rangle$. همچنین مجموعهٔ متناهی $G \subseteq R$ را یک پایهٔ گرُبنِر گوییم اگر G یک پایهٔ گرُبنِر برای $\langle G\rangle$ باشد.

مثال ۴.۲. فرض کنیم $\{f_1, f_2\} = \{x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x\}$ و $x \prec_{drl} y \prec_{drl} z$. $\{f_1, f_2\}$ یک پایهٔ گرُبنِر برای $I = \langle f_1, f_2\rangle$ نیست، زیرا

$$x^2 \notin \langle \mathrm{LT}(f_1), \mathrm{LT}(f_2)\rangle = \langle x^3, x^2y\rangle.$$

اما $x^{۲} \in \mathrm{LT}(I)$. از سوی دیگر، دو مجموعهٔ

$$\{f_{۱}, f_{۲}, -x^{۲}, -۲xy, , -۲y^{۲}+x\}, \{f_{۱}, f_{۲}, -x^{۲}, -۲xy, -۲y^{۲}+x, xy\}$$

دو پایهٔ گرُبنِر برای $\langle f_{۱}, f_{۲}\rangle$ هستند و در نتیجه پایهٔ گرُبنِر یکتا نیست.

در ادامه به‌عنوان یک ویژگی پایهٔ گرُبنِر، یک قضیهٔ رده‌بندی در این زمینه را شرح خواهیم داد.

قضیه ۵.۲. *فرض کنیم $G = \{g_{۱}, \ldots, g_t\} \subset R$ یک مجموعهٔ متناهی و $\prec$ یک ترتیب ِتک‌جمله‌ای روی R باشد، آن‌گاه G یک پایهٔ گرُبنِر است اگر و تنها اگر باقیماندهٔ تقسیم هر چندجمله‌ای $f \in R$ بر G یکتا باشد.*

برای اثبات به [۱] صفحه ۳۴ مراجعه کنید. اگر G یک پایهٔ گرُبنِر باشد و $f \in R$، باقیماندهٔ تقسیم f بر G را *شکل متعارف*[۱] چندجمله‌ای f نسبت به G می‌نامیم و با نماد $\mathrm{NF}_G(f)$ نمایش می‌دهیم.

نتیجه ۶.۲. *فرض کنیم G یک پایهٔ گرُبنِر برای ایدآل I باشد و $f \in R$. در این صورت، $f \in I$ اگر و تنها اگر $\mathrm{NF}_G(f) = ۰$.*

برای اثبات به [۵] صفحهٔ ۸۲ مراجعه کنید. در پایان این بخش، به مطالعهٔ مختصر فضای R/I به‌عنوان یک فضای برداری می‌پردازیم و پیوند آن را با پایهٔ گرُبنِر بیان می‌کنیم. فرض کنیم I ایدآلی در R باشد و $f, h \in R$. در این صورت، $f+I$ و $h+I$ را هم‌ارز می‌نامیم اگر $f-h \in I$. همچنین $[f] = f+I = \{f+g \mid g \in I\}$ را هم‌دسته $f+I$ می‌گوییم. مجموعهٔ همهٔ هم‌دسته‌های R را فضای خارج‌قسمتی R بر I می‌نامیم و با R/I نمایش می‌دهیم. فضای خارج‌قسمتی با جمع و ضرب زیر تشکیل یک حلقه می‌دهد:

$$[f]+[g] = [f+g], \qquad [f].[g] = [f.g].$$

این حلقه را می‌توان به‌عنوان یک $\mathbb{K}$– فضای برداری نیز در نظر گرفت و با استفاده از ویژگی‌های فضاهای برداری، به مطالعهٔ ویژگی‌های ایدآل I پرداخت. برای توضیحات بیشتر [۵] صفحهٔ ۲۳۰ مراجعه کنید.

قضیه ۷.۲ (مکالی[۲]). *فرض کنیم G یک پایهٔ گرُبنِر برای ایدآل I باشد. در این صورت، مجموعهٔ همهٔ $[u]$ که u یک تک‌جمله‌ای است و $g \in G$ وجود ندارد که $u \mid \mathrm{LT}(g)$ یک پایه برای R/I به‌عنوان یک $\mathbb{K}$-فضای برداری است.*

---
[۱] normal form [۲] Macaulay

مثال ۸.۲. فرض کنیم $I = \langle xy - x, x^۲ - y \rangle$ ایدآلی در R باشد و ترتیبِ تک‌جمله‌ای را $y \prec_{lex} x$ در نظر می‌گیریم. در این صورت، $G = \{xy - x, x^۲ - y, y^۲ - y\}$ یک پایهٔ گرُبنِر این ایدآل است. بنابراین $\mathrm{LT}(I) = \langle x^۲, xy, y^۲ \rangle$ و $\{[۱], [x], [y]\}$ تشکیل یک پایه برای R/I به‌عنوان $\mathbb{K}$–فضای برداری می‌دهد.

بُعد R/I به‌عنوان یک $\mathbb{K}$ –فضای برداری را با $\dim_{\mathbb{K}}(R/I)$ نمایش می‌دهیم. به‌عنوان یک نتیجه ساده، ایدآل I صفربُعدی است اگر این بُعد متناهی باشد.

۳. پایه‌های تودرتو

روش پایهٔ گرُبنِر یکی از ابزارهای متداول برای تحلیل و حل دستگاه معادلات چندجمله‌ای است، حتی وقتی ریشه‌ها را دقیقاً نمی‌توان محاسبه کرد، این روش اطلاعات ارزشمندی دربارهٔ جواب‌های معادله و ساختار ایدآل فراهم می‌کند. یکی از کاربردهای ارزشمند پایهٔ گرُبنِر در جبرهای تعویض‌ناپذیر و دیفرانسیلی است. از طرفی متأسفانه پایهٔ گرُبنِر اطلاعات کاملی دربارهٔ یک ایدآل و یا حتی یک ایدآل دیفرانسیلی ارائه نمی‌کند. در ادامه، روش‌های جبری برای مطالعهٔ دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی توسط توماس، توسعه یافت و پُماره هم در این پیشرفت نقش موثری داشت. پایهٔ تودرتو نوعی خاص از پایهٔ گرُبنِر با ویژگی‌های ترکیبیاتی اضافی است که نه‌تنها نسبت به یک ترتیبِ تک‌جمله‌ای، بلکه نسبت به یک تقسیم تودرتو تعریف می‌شود. در واقع ایدهٔ اساسی در معرفی پایهٔ تودرتو این است که یک تقسیم تودرتو متغیرها را به دو دسته متغیرهای ضربی و متغیرهای غیرضربی تقسیم می‌کند. بر این اساس، یک چندجمله‌ای تنها زمانی به یک چندجمله‌ای دیگر تقسیم می‌شود که علاوه بر اینکه به‌صورت معمولی تقسیم انجام می‌شود، خارج‌قسمت نیز باید تنها شامل متغیرهای ضربی باشد. برای توضیحات بیشتر، به [۸] مراجعه کنید. فرض کنیم R حلقهٔ چندجمله‌ای‌های n متغیره $\mathbb{K}[x_۱, \ldots, x_n]$ باشد، که در آن $\mathbb{K}$ یک میدان با مشخصه صفر است. همچنین $\mathbb{M} = \{x_۱^{d_۱} \cdots x_n^{d_n} \mid d_i \in \mathbb{Z}_{\geq ۰}, i = ۱, \ldots, n\}$ را مجموعهٔ تک‌جمله‌ای‌های R درنظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۳. $\mathcal{L}$ را یک *تقسیم تودرتو* می‌نامیم اگر برای هر مجموعهٔ متناهی مانند $U \subset \mathbb{M}$ و برای هر $u_۱, u_۲ \in U$ و $v, w \in \mathbb{M}$ شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) اگر $u_۱ \mid_{\mathcal{L}} w$، آنگاه $u_۱ \mid w$؛

(۲) برای هر $u_۱ \in U$، $u_۱ \mid_{\mathcal{L}} u_۱$؛

(۳) $u_۱ \mid_{\mathcal{L}} u_۱ v$ و $u_۱ \mid_{\mathcal{L}} u_۱ w$ اگر و تنها اگر $u_۱ \mid_{\mathcal{L}} u_۱ vw$؛

(۴) اگر $u_۱ \mid_{\mathcal{L}} w$ و $u_۲ \mid_{\mathcal{L}} w$ آنگاه $u_۱ \mid_{\mathcal{L}} u_۲$ یا $u_۲ \mid_{\mathcal{L}} u_۱$؛

(۵) اگر $u_2 \mid_{\mathcal{L}} u_1$ و $u_1 \mid_{\mathcal{L}} w$ آن‌گاه $u_2 \mid_{\mathcal{L}} w$؛
(۶) فرض کنیم $U \subset V$ و $u \in V$. در این صورت، برای هر $v \in \mathbb{M}$ که $u \mid_{\mathcal{L}} v$ نسبت به مجموعهٔ U، $u \mid_{\mathcal{L}} v$ نسبت به مجموعهٔ V.

رابطهٔ $\mathcal{L}$-تقسیم پذیری را با $u|_{\mathcal{L}}v$ نمایش می‌دهیم.

اگر $u \mid_{\mathcal{L}} (w = uv)$، این رابطه را با $w = u \times v$ نمایش می‌دهیم. اگر این عاد کردن به‌صورت معمولی بود، آن را با $w = u \cdot v$ نمایش می‌دهیم. در واقع، تعریف ۱.۳ برای هر $u \in U$ دو مجموعهٔ مجزا از متغیرها به‌شکل زیر ایجاد می‌کند:

$$\{x_1, \dots, x_n\} = NM_{\mathcal{L}}(u, U) \cup M_{\mathcal{L}}(u, U)$$

که مجموعهٔ $M_{\mathcal{L}}(u, U)$ را مجموعهٔ *متغیرهای ضربی*[1] و $NM_{\mathcal{L}}(u, U)$ را مجموعهٔ متغیرهای غیرضربی u نسبت به U می‌نامیم. از نماد $M_{\mathcal{L}}(u)$ و $NM_{\mathcal{L}}(u)$ در صورتی که ذکر مجموعهٔ U ضروری نباشد، نیز استفاده می‌کنیم. در واقع، اگر $w = u \times v$، آن‌گاه v یک تک‌جمله‌ای بر حسب متغیرهای ضربی u است. از طرفی، برای معرفی یک تقسیم تودرتو مانند $\mathcal{L}$ باید برای هر مجموعه از تک‌جمله‌ای‌ها مانند U و هر عضو $u \in U$، مجموعهٔ متغیرهای ضربی و غیرضربی u را معرفی کرد طوری که شرایط ذکر شده در بالا برای این تقسیم برقرار باشد. در این صورت، می‌نویسیم $u|_{\mathcal{L}}w$ اگر $w = u.v$ و v شامل متغیرهای ضربی u باشد. در حالت کلی، یک تقسیم تودرتو برای یک تک‌جمله‌ای و با توجه به مجموعهٔ تک‌جمله‌ای‌های شامل آن تعریف می‌شود. برای مثال، تقسیم‌های جَنِت و پُماره که در ادامه به آنها اشاره می‌کنیم، از مشهورترین تقسیم‌های تودرتو هستند.

مثال ۲.۳ (تقسیم جَنِت). فرض کنیم $U \subset \mathbb{M}$ یک مجموعهٔ متناهی و $u \in U$. همچنین فرض کنیم برای $1 \leq k \leq n$، $d_k = \deg_k(u)$ معرف درجهٔ u بر حسب x_k باشد. برای هر $1 \leq i \leq n$ قرار می‌دهیم $[d_1, \dots, d_i] = \{v \in U | \ \deg_j(v) = d_j, 1 \leq j \leq i\}$. با این فرض‌ها، x_i را متغیر *ضربی* برای u می‌نامیم در صورتی که

(۱) اگر $i = 1$، آن‌گاه $\deg_1(u) = \max\{\deg_1(v) \ | \ v \in U\}$؛
(۲) اگر $i > 1$، آن‌گاه $\deg_i(u) = \max\{\deg_i(v) \ | \ v \in [d_1, \dots, d_{i-1}]\}$.

این تقسیم را *تقسیم جَنِت* گوییم و با نماد J نمایش می‌دهیم.

فرض کنیم $u \in \mathbb{M} \setminus \{1\}$. اگر $1 \leq k \leq n$ بزرگترین اندیسی باشد که $\deg_k(u) > 0$، آن‌گاه k را کلاس u می‌نامیم و با $\mathrm{cls}(u)$ نمایش می‌دهیم.

---
[1] multiplicative variables

مثال ۳.۳ (تقسیم پُماره). فرض کنیم $u \in \mathbb{M} \setminus \{۱\}$. اگر $\mathrm{cls}(u) = k$، آنگاه $\{x_k, \ldots, x_n\}$ مجموعهٔ متغیرهای ضربی u را تشکیل می‌دهد. برای $u = ۱$ همهٔ متغیرها ضربی هستند. برای نمایش این تقسیم، از نماد P استفاده می‌کنیم.

مثال ۴.۳. فرض کنیم $U = \{xy, y^۲, z\}$. در این صورت، متغیرهای ضربی اعضای U نسبت به تقسیم‌های جَنِت و پُماره در جدول زیر نمایش داده می‌شوند. بنابراین برای مثال، مشاهده می‌کنیم که متغیر x برای xy متغیر ضربی نسبت به تقسیم جَنِت است در حالی که نسبت به تقسیم پُماره متغیر ضربی نیست. پس می‌توان نوشت $xy \mid_J x^۲y$ و $xy \nmid_P x^۲y$.

monomial	Janet	Pommaert
xy	x, y, z	y, z
y^2	y, z	y, z
z	z	z

فرض کنیم $F \subset R$ یک مجموعهٔ متناهی از چندجمله‌ای‌ها، $\succ$ یک ترتیبِ تک‌جمله‌ای و $\mathcal{L}$ یک تقسیم تودرتو روی $\mathbb{M}$ باشد. برای $۱ \leq k \leq n$، x_k را متغیر ضربی برای $f \in R$ گوییم اگر x_k یک متغیر ضربی برای $\mathrm{LM}(f)$ در مجموعهٔ تک‌جمله‌های $\mathrm{LM}(F)$ باشد. اگر x_k برای $\mathrm{LM}(f)$ ضربی نباشد، آن را یک متغیر غیرضربی f می‌نامیم.

تعریف ۵.۳. فرض کنیم $\mathcal{L}$ یک تقسیم تودرتو و $F \subset R$ یک مجموعهٔ متناهی باشد.

- چندجمله‌ای $p \in R$ را $\mathcal{L}$-کاهش‌پذیر توسط $f \in F$ گوییم اگر p دارای یک جملهٔ au باشد که $u = \mathrm{LM}(f) \times v$ و $a \in \mathbb{K} \setminus \{۰\}$. اگر این شرایط برقرار باشد، می‌نویسیم $p \to_f g = p - \frac{a}{\mathrm{LC}(f)} f \times v$ و g را $\mathcal{L}$-کاهش‌یافتهٔ p به‌پیمانهٔ $f \in F$ می‌گوییم؛
- چندجمله‌ای p به‌پیمانهٔ F، $\mathcal{L}$-کاهش‌پذیر است اگر $f \in F$ وجود داشته باشد که p توسط f، $\mathcal{L}$-کاهش‌پذیر باشد؛
- چندجمله‌ای p را $\mathcal{L}$-شکل متعارف f نسبت به F گوییم اگر دنبالهٔ

$$f \to g_۱ \to g_۲ \to \cdots \to g_k = p$$

موجود باشد که p، $\mathcal{L}$-کاهش‌پذیر به‌پیمانهٔ F نباشد. $\mathcal{L}$-شکل متعارف p به‌پیمانهٔ F را با $\mathrm{NF}_{\mathcal{L}}(p, F)$ نمایش می‌دهیم.

مجموعهٔ F را $\mathcal{L}$-*خودکاهش‌یافته* گوییم اگر برای هر $f \in F$، $g \in F \setminus \{f\}$ وجود نداشته باشد که f توسط g، $\mathcal{L}$-کاهش‌پذیر باشد. با استفاده از این مقدمات، اکنون می‌توانیم پایهٔ تودرتو

را تعریف کنیم. فرض کنیم $\mathcal{L}$ یک تقسیم تودرتو باشد. مجموعهٔ $G \subset R$ را یک *پایهٔ تودرتوی* ایدآل $\langle G \rangle$ می‌نامیم اگر G، $\mathcal{L}$-خود کاهش‌یافته باشد و برای هر $g \in \langle G \rangle$ چندجمله‌ای $h \in G$ موجود باشد که $\mathrm{LM}(h)|_{\mathcal{L}} \mathrm{LM}(g)$. برای مثال، اگر فرض کنیم $F = \{xy, y^{۲}, z\}$، آن‌گاه مجموعهٔ $\{z, yz, xz, y^{۲}, xy\}$ یک پایه جَنِت برای ایدآل تولید شده توسط F است.

قضیهٔ زیر نقش اساسی در الگوریتم محاسبهٔ پایهٔ تودرتو دارد.

قضیه ۶.۳. *فرض کنیم $\mathcal{L}$ یک تقسیم تودرتو باشد. مجموعهٔ $\mathcal{L}$-خود کاهش‌یافتهٔ $F \subset R$ یک پایهٔ تودرتو نسبت به $\mathcal{L}$ است اگر و تنها اگر شرط تودرتوی موضعی زیر برای F برقرار باشد:*

$$(\forall f \in F)(\forall x_i \in \mathrm{NM}_{\mathcal{L}}(\mathrm{LM}(f), \mathrm{LM}(F))[\mathrm{NF}_{\mathcal{L}}(x_i \cdot f, F) = ۰]. \qquad (۱.۳)$$

برای مشاهدهٔ اثبات، به [۸] نتیجهٔ ۶.۷ مراجعه کنید.

مثال ۷.۳. ایدآل تولید شده توسط مجموعهٔ $F = \{x^{۲}z, xy, xz^{۲}\} \subset \mathbb{K}[x, y, z]$ و همچنین تقسیم جَنِت را در نظر می‌گیریم. در این صورت، مجموعهٔ $G = \{x^{۲}yz, x^{۲}y, x^{۲}z^{۲}\}$ یک پایهٔ جَنِت برای ایدآل تولید شده توسط مجموعهٔ F است. برای مثال، z یک متغیر غیر ضربی برای $x^{۲}y$ است و $x^{۲}yz$ توسط یک عضو G به‌صورت تودرتو عاد می‌شود.

لازم به ذکر است که تقسیم جَنِت، یک تقسیم نوتری است و در نتیجه هر ایدآل، یک پایهٔ جَنِت متناهی دارد، در حالی که این موضوع برای تقسیم پُماره درست نیست. برای مثال، پایه پُماره برای ایدآل $\langle xy \rangle$، مجموعهٔ $\{xy, x^{۲}y, x^{۳}y, \ldots\}$ است.

۴. الگوریتم محاسبهٔ پایه‌های تودرتو

در این بخش، الگوریتمی را ارائه می‌دهیم که بر مبنای قضیهٔ ۶.۳ و با استفاده از ترتیبِ تک‌جمله‌ای $\prec$ و تقسیم تودرتوی $\mathcal{L}$ یک پایهٔ تودرتو برای ایدآل تولید شده توسط یک مجموعهٔ متناهی، محاسبه می‌کند. این الگوریتم از [۱۲] گرفته شده است که یکی از روش‌های ساده برای محاسبهٔ پایهٔ تودرتو برای یک ایدآل است. زیرالگوریتم InvolutiveAutoreduce یک مجموعهٔ از چندجمله‌ای‌ها دریافت و تا جایی که امکان‌پذیر باشد، یک عضو را به بقیهٔ اعضا به‌صورت تودرتو تقسیم می‌کند و یک مجموعهٔ $\mathcal{L}$-خود کاهش‌یافته محاسبه می‌کند. برای این منظور، از زیرالگوریتم InvolutiveNormalForm برای انجام فرآیند کاهش‌سازی یک چندجمله‌ای نسبت به یک مجموعه از چندجمله‌ای‌ها استفاده می‌کنیم.

با استفاده از قضیهٔ ۶.۳ می‌توان قضیهٔ زیر را اثبات کرد.

InvolutiveBasis Algorithm

Input: A finite set $F \subset R$, a monomial ordering $\prec$ and an involutive division $\mathcal{L}$

Output: An involutive basis H of the ideal $I = \langle F \rangle$ with respect to $\mathcal{L}$ and $\prec$

$H :=$ InvolutiveAutoreduce$(F, \prec, \mathcal{L})$;

$flag := false$

while $flag = false$ **do**

  $flag := true$

  $S := \{x_j \cdot h \mid h \in H, x_j \in \mathrm{NM}_{\mathcal{L}}(\mathrm{LM}(h), \mathrm{LM}(H))\}$

  if $S = \emptyset$ **then**

    return (H)

  else

    while $S \neq \emptyset$ **do**

      choose $p \in S$ such that $\mathrm{LT}_{\prec}(p) = \min_{\prec}(\mathrm{LT}(S))$

      $S := S \setminus \{p\}$

      $h :=$ InvolutiveNormalForm$(p, H, \prec, \mathcal{L})$

      if $h \neq 0$ **then**

        $flag := false$

        $H :=$ InvolutiveAutoreduce$(H \cup \{h\}, \prec, \mathcal{L})$

      end if;

    end while

  end if

end while

قضیه ۱.۴. *فرض کنیم $\mathcal{L}$ یک تقسیم تودرتو و $\prec$ یک ترتیبِ تک‌جمله‌ای باشد. در این صورت، الگوریتم InvolutiveBasis یک پایهٔ $\mathcal{L}$-تودرتو برای ایدآل تولید شده توسط $F \subset R$ محاسبه می‌کند.*

لازم به ذکر است که این الگوریتم برای هر تقسیم تودرتویی پایان‌پذیر نیست. در واقع، اگر تقسیم تودرتوی داده‌شده نوتری باشد، آن‌گاه این الگوریتم پایان‌پذیر است. برای مثال، تقسیم جَنِت نوتری است در حالی که تقسیم پُماره نوتری نیست. برای توضیحات بیشتر به [۸] مراجعه کنید.

InvolutiveNormalForm Algorithm

Input: A polynomial f, a set of polynomials F, a monomial ordering $\prec$ and an involutive division $\mathcal{L}$

Output: An $\mathcal{L}$-normal form of f modulo F

$h := f$

while h has a monomial m which is $\mathcal{L}$-divisible by F **do**

  select $g \in F$ with $\mathrm{LM}(g) \mid_{\mathcal{L}} m$

  $h := h - cm/\mathrm{LT}(g).g$ where c is the coefficient of m in h

end while

return (h)

---

۵. برخی کاربردهای پایه‌های تودرتو

پایه‌های پُماره متناهی در حالت کلی وجود ندارند و برای یک ایدآل با شرایط خاص وجود دارند. در واقع، با انجام یک تغییر متغیر عام، می‌توان یک ایدآل را به موقعیتی تبدیل کرد که ایدآل جدید دارای پایه پُماره متناهی باشد. البته برخی از پایاهای مرتبط با یک ایدآل با انجام چنین تبدیلاتی، تغییر نمی‌کنند. به همین دلیل، این پایه‌ها در صورت وجود دارای ویژگی‌های منحصر به فردی هستند که آنها را از سایر پایه‌های تودرتو متمایز می‌کند. این پایه‌ها تحلیل ساختاریِ مدول‌های چندجمله‌ای را آسان‌تر می‌سازند. در ادامه به بیان چندکاربرد از پایه‌های پُماره می‌پردازیم. برای توضیحات بیشتر به [۱۲] مراجعه کنید.

یکی از کاربردهای پایه تودرتو (و نه‌تنها پایه پُماره) ارائهٔ تجزیهٔ استنلی[۱] برای یک ایدآل است که با استفاده از آن می‌توان سری هیلبرت و بُعد یک ایدآل را به‌دست آورد. فرض کنیم $I \subseteq R$ یک ایدآل همگن باشد. یک تجزیهٔ استنلی برای R/I یک یکریختی $\mathbb{K}$-خطی $R/I \cong \oplus_{t\in\mathcal{T}}\mathbb{K}[X_t]\cdot t$ است به‌طوری که $\mathcal{T}$ مجموعه‌ای متناهی از تک‌جمله‌ای‌ها است و $X_t \subseteq \{x_۱,\dots,x_n\}$. اگر G یک پایهٔ تودرتو برای یک ایدآل I باشد، با استفاده آن می‌توان یک تجزیه برای I و R/I به‌دست آورد. در واقع، اگر برای هر $g\in G$، X_g معرّف مجموعهٔ متغیرهای ضربی g باشد، آن‌گاه $I = \oplus_{g\in G}\mathbb{K}[X_g]\cdot g$ و در نتیجه هر عضو ایدآل به‌صورت یکتا برحسب پایهٔ تودرتو قابل نمایش است.

مثال ۱.۵. فرض کنیم $x_۱ \prec_{drl} x_۲ \prec_{drl} x_۳$ و

$$I = \langle f_۱ = x_۱^۳, f_۲ = x_۱^۲x_۲ - x_۱^۲x_۳, f_۳ = x_۲^۲ - x_۲x_۳, f_۴ = x_۱x_۲^۲ - x_۱x_۲x_۳\rangle$$

---

[۱] Stanley decomposition

در این صورت، مجموعهٔ $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ یک پایه پُماره برای I است. I را می‌توانیم به‌صورت

$$I = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3] \cdot f_1 \oplus \mathbb{K}[x_2, x_3] \cdot f_2 \oplus \mathbb{K}[x_2, x_3] \cdot f_3 \oplus \mathbb{K}[x_2, x_3] \cdot f_4$$

بنویسیم. پس عبارت زیر یک تجزیهٔ استنلی برای R/I است:

$$R/I = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K} \cdot x_1 \oplus \mathbb{K} \cdot x_2 \oplus \mathbb{K} \cdot x_3 \oplus \mathbb{K} \cdot x_1^2 \oplus \mathbb{K} \cdot x_1x_2 \oplus$$
$$\mathbb{K}[x_3] \cdot x_2^3 \oplus \mathbb{K}[x_3] \cdot x_1x_2^2 \oplus \mathbb{K}[x_3] \cdot x_2x_3^2 \oplus \mathbb{K}[x_3] \cdot x_1^2x_3 \oplus \mathbb{K}[x_3] \cdot x_1x_2x_3.$$

مفهوم دیگری که با استفاده از پایه پُماره قابل محاسبه است، عمق یک ایدآل است. عمق ایدآل I بزرگترین عدد صحیح λ است به‌طوری‌که یک دنبالهٔ منظم از چندجمله‌ای‌های غیر ثابت y_1، ...، y_λ روی R/I وجود داشته باشد. عمق یک ایدآل نسبت به تغییر متغیر پایا است و تغییر نمی‌کند.

قضیه ۲.۵. *عمق ایدآل I تولید شده توسط پایهٔ پُماره H برابر است با $n - t$ به‌طوری‌که t بزرگترین ردهٔ $\mathrm{LT}(H)$ است؛ به‌علاوه x_{t+1}، ...، x_n یک دنبالهٔ منظم روی R/I تشکیل می‌دهد.*

برای مشاهدهٔ اثبات، به [۱۲] گزارهٔ ۲.۲۰ مراجعه کنید.

مثال ۳.۵. فرض کنیم $I = \langle x_1^3, x_1^2x_2 - x_1^2x_3, x_2^2 - x_2x_3, x_1x_2^2 - x_1x_2x_3 \rangle$. در نتیجه بزرگترین ردهٔ جمله‌های پیشروی مولد Iبرابر با ۲ است و عمق I برابر است با $۳ - ۲ = ۱$.

مفهوم دیگری که با استفاده از پایه پُماره قابل محاسبه است، ایدآل اشباع‌شدهٔ یک ایدآل است. اگر I یک ایدآل همگن و t یک عدد صحیح باشد، منظور از I_t فضای برداری شامل همهٔ چندجمله‌ای‌های از درجهٔ t در I است. فرض کنیم $I \subseteq R$ یک ایدآل همگن باشد. *اشباع‌شدهٔ* I را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I^{sat} = I : M^\infty = \{f \in R \mid \exists k \in \mathbb{N} : fM^k \subseteq I\}$$

که در آن، $M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. توجه می‌کنیم که I^{sat} یک ایدآل R است. اکنون $sat(I)$ را کوچکترین عدد صحیح m تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که برای هر $t \geq m$، $I_t = I_t^{sat}$.

قضیه ۴.۵. *فرض کنیم I ایدآل تولید شده توسط پایهٔ پُماره H باشد. در این صورت، داریم*

$$I^{sat} = \langle h/x_n^{\deg_n(h)} \mid h \in H \rangle \quad \text{و} \quad sat(I) = \{\deg(h) \mid h \in H, x_n \mid h\}.$$

منظور از $\deg_n(h)$ بزرگترین توان x_n است که h را عاد می‌کند. برای مشاهدهٔ اثبات، به [۱۲] گزارهٔ ۱۰.۱ مراجعه کنید.

مثال ۵.۵. فرض کنیم $I = \langle x_1^3, x_1^2x_2 - x_1^2x_3, x_2^2 - x_2x_3, x_1x_2^2 - x_1x_2x_3 \rangle$. بنابراین $I^{sat} = I$. چون هیچ‌کدام از اعضای پایه پُماره توسط x_3 عاد نمی شوند، پس $sat(I) = 0$.

این مقاله را با بیان کاربرد دیگری از پایهٔ پُماره در محاسبهٔ نظم کاستلنوو–مامفورد[1] به پایان می‌بریم. این نظم یکی از مفاهیم اساسی در جبر تعویض‌پذیر است که با استفاده از تحلیل آزاد ایدآل تعریف می‌شود. فرض کنیم I یک ایدآل همگن باشد. نظم کاستلنوو–مامفورد I را بزرگترین مقدار $e_{i,j} - i$ تعریف می‌کنیم که

$$0 \longrightarrow \bigoplus_i R(-e_{\ell,i}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_i R(-e_{1,i}) \longrightarrow \bigoplus_i R(-e_{0,i}) \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

تحلیل آزاد مدرج مینیمال[2] ایدآل I است. یکی از موضوعات پژوهشی در جبر تعویض‌پذیر، محاسبهٔ این نظم برای یک ایدآل است. با استفاده از پایهٔ پُماره به‌سادگی می‌توان این نظم را محاسبه کرد.

قضیه ۶.۵. *فرض کنیم I ایدآل همگن تولید شده توسط پایهٔ پُماره H باشد. در این صورت، نظم کاستلنوو–مامفورد I با بزرگترین درجهٔ چندجمله‌ای‌های متعلق به H برابر است.*

برای مشاهدهٔ اثبات، به [۱۲] قضیهٔ ۹.۲ مراجعه کنید.

مراجع

[1] Adams, William W., Loustaunau, P., *An Introduction to Gröbner Bases*, American Mathematical Society, 1994.

[2] Buchberger, B., A criterion for detecting unnecessary reductions in the construction of Gröbner-bases, In: *Symbolic and algebraic computation (EUROSAM'79, Internat. Sympos., Marseille, 1979)*, Vol. **72** of Lecture Notes in Comput. Sci., pp. 3–21, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[3] Buchberger, B., An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal, *J. Symbolic Comput.*, **41** (2006), no. 3-4, 475–511.

[4] Cox, D., Little, J., O'Shea, D., *Using Algebraic Geometry*, Vol. **185** of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2005.

[5] Cox, D., Little, J., O'Shea, D., *Ideals, Varieties, and Algorithms*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 3rd. edn., 2007.

[6] Faugère, Jean-Charles, A new efficient algorithm for computing Gröbner bases (F_4), *J. Pure Appl. Algebra*, **139** (1999), no. 1-3, 61–88.

[1] Castelnuovo-Mumford regularity [2] minimal graded free resolution

[7] Faugère, Jean-Charles, A new efficient algorithm for computing Gröbner bases without reduction to zero (F_5), In: *ISSAC 2002—Proceedings of the 2002 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pp. 75–83, 2002.

[8] Gerdt, Vladimir P., Blinkov, Yuri, A., Involutive bases of polynomial ideals, *Mathematics and Computers in Simulation*, **45** (1998), 519–542.

[9] Janet, M., *Leçons sur les Systèmes d'Equations aux Dérivées Partielles.* Cahiers Scientifiques, IV, Gauthier-Villars, Paris, 1929.

[10] Möller, H. M., Mora, T., Traverso, C., Gröbner bases computation using syzygies. In: *ISSAC 2002—Proceedings of the 2002 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pp. 320–328, 1992.

[11] Pommaret, Jean-Francois, *Systems of partial differential equations and Lie pseudogroups*, CRC Press, 1978.

[12] Seiler, Werner M., A combinatorial approach to involution and δ-regularity II: Structure analysis of polynomial modules with Pommaret bases, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, **20** (2009), no. 3–4, 261–338.

[13] Thomas, Joseph M., *Differential Systems*, American Mathematical Society, 1937.

[14] Zharkov, A. Yuri, Blinkov, Yuri A., Involution approach to investigating polynomial systems, *Mathematics and Computers in Simulation*, **42** (1996), no. 4, 323–332.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۸/۱/۱۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۵/۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۵/۳

امیر هاشمی: دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکدهٔ علوم ریاضی
تارنما: https://amirhashemi.iut.ac.ir/
رایانامه: Amir.Hashemi@iut.ac.ir

بنت‌الهدی بینایی: دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکدهٔ علوم ریاضی
رایانامه: H.Binaei@math.iut.ac.ir