فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۹، شمارهٔ ۶۷ (پاییز و زمستان ۱۳۹۹) صص. ۱۸۱ تا ۲۰۸

نظریهٔ ریاضی احتمال و مبانی فیزیک کوانتوم

میثم میثمی صدر

چکیده

در این مقاله، از یک دیدگاه احتمالاتی به فیزیک کوانتوم نگاه می‌کنیم و می‌کوشیم شرحی مختصر از برخی مفاهیم پایه‌ای مانند پدیدار، کنونه، هم‌آزمایی و عدم قطعیت عرضه کنیم. برای این منظور، یک نظریهٔ عمومی به‌نام «نظریهٔ پدیدار و کنونه» معرفی می‌کنیم و سپس در این چارچوب و با کمک نظریهٔ عملگرها روی فضای هیلبرت و نظریهٔ جبرهای C^*، برخی مفاهیم پایه‌ای فیزیک کوانتوم را توصیف می‌کنیم.

۱. سرآغاز

مایکل آتیا در [۸] نکته‌ای قریب به این مضمون می‌گوید که در شاخه‌های گوناگون دانش فیزیک نظری، همواره مسائلی مهم بروز می‌کند که می‌توانند چراغ راه مسیر صحیح پژوهش‌های نوین در دانش ریاضی برای ریاضیدانان باشند. بیان دقیق و صورت‌بندی مجرّد و ریاضی‌وارِ آنچه که فیزیکدانان آنها را نظریه‌های فیزیکی می‌نامند، همواره چالشی جذاب و آموزنده برای ریاضیدانان بوده است.[۱] در این میان، فیزیک کوانتوم به سبب ماهیتش که بررسی ذرات زیراتمی «غیر قابل مشاهده» است و همچنین به‌سبب اینکه بر روی حقایقی «تأییدشده» مانند دوگانی موج–ذره، روابط عدم قطعیت، در هم تنیدگیِ کوانتومی و ... بنا شده است که در تناقض با تصوّرات و فهم عرفیِ بشری قرار دارند، جذابیتی دوچندان داشته است (برای مطالعهٔ تاریخچه‌ای در این زمینه، به [۱۴] مراجعه کنید). در موارد متعددی، بررسی و

عبارات و کلمات کلیدی. فیزیک کوانتوم؛ پدیدار؛ کنونه؛ هم‌آزمایی؛ عدم قطعیت.

[۱] مقصود از صورت‌بندی مجرّد و ریاضی‌وار یک نظریهٔ فیزیکی، بنا کردن آن نظریه بر روی چند تعریف و اصل ابتدایی و استنتاج حقایق و قوانین فیزیک در قالب قضیه‌های ریاضی است. خاطرنشان می‌کنیم که چنین صورت‌بندی مجرّدی از دید برخی فیزیکدانان (که شاید با ریاضی محض چندان آشنا نباشند)، بیهوده و حتی نادرست است. در این باره، مقدمهٔ [۱۴] را بخوانید.

پژوهش دربارهٔ مسائلی که از شاخهٔ نظری فیزیک کوانتوم وارد ریاضی شده‌اند، باعث گسترش چشم‌گیر و یا ایجاد نظریه‌های گوناگون و زیبای ریاضی شده است. در این میان می‌توان از نظریهٔ عملگرها روی فضای هیلبرت، جبرهای عملگری، جبرهای هوپف، هندسهٔ ناجابه‌جایی [۴]، نظریهٔ توپولوژیکی میدان‌های کوانتومی [۲] و کاربردش در رده‌بندی خمینه‌های با بُعد پایین [۱۳]، و ناورداهای گروموف–ویتن در هندسهٔ جبری [۵]، نام برد. هدف از نگارش این مقاله، معرفی مبانی احتمالاتیِ فیزیک کوانتوم از دیدگاه ریاضی برای خوانندگان آشنا با ریاضی (اما ناآشنا با فیزیک کوانتوم) است. برای این منظور، یک نظریهٔ کلی و عمومی به‌نام «نظریهٔ پدیدار و کنونه»[1] معرفی می‌کنیم و سعی می‌کنیم دیدگاه احتمالاتی به برخی از مفاهیم اولیهٔ فیزیک کوانتوم را در چارچوب این نظریه بررسی کنیم.

دو مفهوم *پدیدار*[2] و *کنونه*[3] در نوشته‌های فیزیک کوانتوم نقشی بسیار پُررنگ ایفا می‌کنند و کم‌وبیش در هر نوشته‌ای دربارهٔ فیزیک کوانتوم دیده می‌شوند. مشاهده‌ها و نتایج حاصل از اندازه‌گیری‌های گوناگون در مورد یک دستگاه فیزیکی در آزمایشگاه فیزیک کوانتوم، به‌کمک این دو مفهوم و روابط و معادلات بین آنها صورت‌بندی می‌شوند.[4]

به هر دستگاه فیزیکی کوانتومی دو مجموعه از اشیاء، مجموعهٔ کنونه‌ها و مجموعهٔ پدیدارها نسبت داده می‌شود. هر کنونه، متناظر با وضعیتی است که دستگاه در آزمایشگاه به خود می‌گیرد. هر پدیدار، متناظر با نوعی از فرآیند اندازه‌گیری است که در آزمایشگاه روی دستگاه اِعمال می‌شود و حاصل آن، یک عدد حقیقی است. به این عدد، *مقدار* آن پدیدار تحت کنونه‌ای که سیستم در آن قرار دارد، گفته می‌شود. این امکان وجود دارد که یک فرآیند اندازه‌گیری در یک کنونهٔ مشخص، مقدارهای عددیِ گوناگونی را برای پدیدار متناظرش نتیجه دهد. از این‌رو با تکرار فرآیند اندازه‌گیری متناظر با یک پدیدار در یک کنونهٔ مشخص، اندازهٔ احتمالی روی مجموعهٔ مقدارهای پدیدار به‌دست می‌آید. این حقیقت را در قالب یک اصل صورت‌بندی می‌کنیم: **هر کنونه، یک اندازهٔ احتمال روی مجموعهٔ مقدارهای هر پدیدار القا می‌کند.**
گاهی تعمیم یک مفهوم ریاضی می‌تواند فهم آن را ساده‌تر کند و در پیشبُرد نظریهٔ مبتنی بر آن مفهوم، بسیار کارآمد باشد. در این نوشتار، دو مفهوم کنونه و پدیدار و اصول حاکم بر آنها در فیزیک کوانتوم، به‌صورت مجرّد تعمیم داده می‌شود به‌گونه‌ای که نتایج حاصل از هرگونه اندازه‌گیریِ احتمالاتی[5] در چارچوب این نظریه

---

[1] واژهٔ «نظریه» پیش از واژگان «پدیدار و کنونه» در نوشته‌های مربوط به این موضوع، به‌ندرت ظاهر شده است. ضمناً انتخاب «پدیدار» در مقابل observable و «کنونه» در مقابل state، پیشنهاد نویسنده است.

[4] اگر فرض بر این باشد که بتوان زبان و منطق حاکم بر فیزیک کوانتوم را به‌مثابهٔ یک نظریهٔ منطق ریاضی مرتبهٔ اول یا دوم در نظر گرفت، آن‌گاه مفاهیمی مانند دستگاه فیزیکی، اندازه‌گیری، کنونه و پدیدار نقش تعریف‌نشده‌ها یا نمادهای آن نظریه را بازی خواهند کرد.

[5] در اینجا مقصود از یک اندازه‌گیریِ احتمالاتی، فرآیندی است که در دنیای بیرونی تحت شرایط به‌ظاهر یکسان بارها می‌تواند تکرار شود.

[2] observable [3] state

قابل صورت‌بندی باشد.[۱] خواهیم دید که نظریهٔ پدیدار و کنونه، پل یا حلقهٔ واصلی است که یک سوی آن ذهن ریاضیدان قرار دارد و سوی دیگرش، دنیای بیرون از ذهن یا همان دنیای واقعی است که در آن، مشاهدات آزمایشگاهی صورت می‌گیرد.

تعبیرهای گوناگونی (به‌لحاظ فلسفی) از فیزیک کوانتوم وجود دارد. تعبیر احتمالاتیِ فیزیک کوانتوم که نظریهٔ پدیدار و کنونه بر آن استوار است، به تعبیر کوپنهاگی نیز معروف است. این نامگذاری از آن رو صورت گرفته است که این تعبیر توسط بور که از استادان دانشگاه کوپنهاگ بود و دستیارش هایزنبرگ پی‌ریزی شده است. بنیان تعبیر کوپنهاگی بر این گزاره استوار است: **ظاهر شدن اندازه‌های احتمال در اندازه‌گیری‌های دستگاه‌های کوانتومی، ناشی از خطا یا کمبود اطلاعات ما از آن دستگاه «نیست»، بلکه پدیده‌ای ذاتی است.**[۲] بزرگترین مخالف تعبیر کوپنهاگی، اینشتین بود که هیچ‌گاه آن را نپذیرفت. سخن معروف اینشتین که «خداوند تاس بازی نمی‌کند»، اشاره به دیدگاه او در این باره دارد.

در بخش ۲، پیشنیازهایی از مدل کُلموگرُفی نظریهٔ احتمال را مرور می‌کنیم؛ از جمله تعریف‌های سیگما–جبر، فضای اندازه‌پذیر، اندازهٔ احتمال، متغیر تصادفی، میانگین، واریانس، و خانوادهٔ هماهنگ از اندازه‌های احتمال را یادآوری می‌کنیم. همچنین توضیحاتی دربارهٔ استخراج اندازه‌های احتمال به‌روش موسوم به فراوانی نسبی ارائه می‌دهیم.

در بخش ۳، تلاش می‌کنیم تا مفهوم پیچیدهٔ *هم‌آزمایی* را برای آزمایش‌ها و اندازه‌گیری‌های احتمالاتی، به‌صورت ساده و مقدماتی توضیح دهیم. هم‌آزمایی یکی از مفاهیم پایه‌ای در فیزیک کوانتوم است. به‌طور کلی، گردایه‌ای از آزمایش‌ها یا اندازه‌گیری‌ها روی یک دستگاه یا پدیده را *هم‌آزما* گوییم اگر همهٔ این آزمایش‌ها «با هم» بتوانند روی دستگاه اِعمال شوند. مشکل اصلی «شبه‌تعریفی» که برای هم‌آزمایی آورده‌ایم، ظاهر شدن قید «با هم» است. توصیف مفهوم هم‌آزمایی برای اندازه‌گیری‌های احتمالاتی، حتی پیچیده‌تر است و اساساً باید خاطرنشان کنیم که این مفهوم در چارچوب مدل کُلموگرُفیِ نظریهٔ احتمال، قابل توصیف نیست.[۳] با این همه، در [۱۱] تلاش شده است تا با اضافه کردن اصولی به مدل کلموگرُفیِ نظریهٔ احتمال، مفهوم هم‌آزمایی برای اندازه‌گیری‌های احتمالاتی روی دستگاه‌های کلاسیک و کوانتومی، به‌صورت ریاضی‌وار و دقیق، تعریف و بررسی گردد.

---

[۱] تا آنجا که نگارنده می‌داند، نظریهٔ پدیدار و کنونه با چنین تعمیمی و چنین صورتی که ما در اینجا به آن پرداخته‌ایم، تاکنون در نوشتهٔ دیگری ظاهر نشده است. البته در بنای این نظریه از [۱] و [۳، ۷] بسیار بهره برده‌ایم.

[۲] برای توصیف واژهٔ ذاتی، مثالی از زندگی روزمره می‌آوریم. آزمایش پرتاب سکه را در نظر بگیرید. اگر اندازه و جهت کلیهٔ نیروهای دخیل، جرم سکه و فاصلهٔ آن تا زمین با خطای کوچکی در دسترس ما باشد، آن‌گاه می‌توان پیش‌بینی کرد که نتیجهٔ آزمایش شیر خواهد بود یا خط. بنابراین ظاهر شدن اندازهٔ احتمال در توصیف نتایج حاصل از این آزمایش، ذاتی نیست.

[۳] تا آنجا که می‌دانیم، چنین مفهومی به‌صورت مجرّد تاکنون در نظریهٔ احتمال بررسی نشده است.

در بخش ۴، مبانی و اصول کلی حاکم بر یک نظریهٔ پدیدار و کنونه را شرح می‌دهیم و مثال‌های متعدد اما ساده‌ای از نظریه‌های پدیدار و کنونه گوناگون ارائه می‌کنیم. نشان می‌دهیم که مجموعهٔ کنونه‌های یک نظریه را همواره می‌توان «محدب» در نظر گرفت. همچنین مفهوم هم‌آزماییِ گردایه‌ای از پدیدارها را بررسی می‌کنیم.

در بخش ۵، یک نظریهٔ خاص پدیدار و کنونه معرفی می‌کنیم که تقریباً منطبق است با متداول‌ترین صورت‌بندی‌ای از مکانیک کوانتومی که توسط فیزیکدانان به‌کار می‌رود. در این نظریه، فضای کنونه‌ها، یک فضای هیلبرت است و پدیدارهای نظریه با عملگرهای خطی خودالحاقی روی آن فضای هیلبرت داده می‌شوند. بخش ۵ را با یک صورت‌بندی دقیق ریاضی از «اصل عدم قطعیت» به‌پایان می‌بریم. این اصل یکی از مفاهیم بنیادی در فیزیک کوانتوم است.

در بخش ۶، به‌کمک نظریهٔ جبرهای C^*، یک نظریهٔ پدیدار و کنونه با «اندکی» تفاوت نسبت به نظریهٔ مذکور در بخش ۵، برای توصیف دستگاه‌های کوانتومی ارائه می‌کنیم. فضای کنونه‌های این نظریه با فضای کنونه‌های یک جبر C^* متحد است و پدیدارهای نظریه با C^*-زیرجبرهای تعویض‌پذیر آن جبر داده می‌شوند. بخش ۶ را با بحثی دربارهٔ هم‌آزمایی پدیدارها در نظریهٔ مذکور، به‌پایان می‌رسانیم.

یادآوری می‌کنیم که برخی دیگر از مفاهیم پایه‌ایِ فیزیک کوانتوم مانند توپولوژی روی فضای کنونه‌ها، ویژگی‌های جبری فضای پدیدارها، تقارن، دینامیک و قوانین حرکت را که ما در این مقاله به آنها نپرداخته‌ایم، می‌توان در قالب یک نظریهٔ پدیدار و کنونه معرفی و بررسی کرد.

۲. نمادگذاری و پیشنیازهایی از نظریهٔ احتمال

در این بخش، برخی از مفاهیم پایه‌ای مدل کلموگرُفیِ نظریهٔ احتمال را مرور می‌کنیم. برای آشنایی بیشتر، خواننده را به کتاب‌های نظریهٔ اندازه و احتمال (برای مثال [۱۲]) ارجاع می‌دهیم.

به زوج $(\Omega, \mathcal{F})$ *فضای اندازه‌پذیر* گوییم اگر Ω یک مجموعه باشد و $\mathcal{F}$ یک سیگما-جبر روی Ω باشد، یعنی $\mathcal{F}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های Ω است به‌گونه‌ای که شامل $\varnothing$ است و نسبت به متمم‌گیری در Ω و اجتماع شمارش‌پذیر از اعضایش، بسته است. هر عضو $\mathcal{F}$ را یک *زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر* از Ω نامیم. به نگاشت $f : \Omega \to \Omega'$ بین فضاهای اندازه‌پذیر Ω و Ω'، *نگاشت اندازه‌پذیر* می‌گوییم اگر تصویر وارون هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر از Ω' تحت f، زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر از Ω باشد. برای یک فضای توپولوژیک، کوچکترین سیگما-جبر روی آن فضا شامل همهٔ زیرمجموعه‌های باز را سیگما-جبر بُرل می‌نامیم. در این مقاله، فضاهای توپولوژیک را به‌عنوان فضاهای اندازه‌پذیر همراه با سیگما-جبر بُرل در نظر می‌گیریم. همچنین هر مجموعهٔ شمارش‌پذیر را (به‌عنوان یک فضای اندازه‌پذیر) همراه با سیگما-جبر مجموعهٔ توانی در نظر می‌گیریم. مقصود از یک اندازهٔ احتمال روی فضای اندازه‌پذیر $(\Omega, \mathcal{F})$، یک تابع

مجموعه‌ای P از $\mathcal{F}$ به بازهٔ بسته $[0,1]$ از اعداد حقیقی است طوری که $P(\Omega) = 1$ و

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

برای هر دنباله $(E_n)_n$ از اعضای دوبه‌دو مجزای $\mathcal{F}$.

فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{F})$ فضای اندازه‌پذیر باشد و ω عضو دلخواهی از Ω باشد. در این صورت، اندازهٔ نقطه-جرمی متمرکز بر ω روی $(\Omega, \mathcal{F})$ را با δ_ω نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: برای هر $E \in \mathcal{F}$ اگر $\omega \in E$، آن‌گاه $\delta_\omega(E) = 1$ و اگر $\omega \notin E$، آن‌گاه $\delta_\omega(E) = 0$. دقت کنید که اگر Ω یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر باشد، آن‌گاه هر اندازهٔ احتمال روی Ω به‌طور کامل با مقادیرش روی زیرمجموعه‌های تک‌عضوی Ω مشخص می‌شود. اگر μ یک اندازهٔ احتمال روی فضای توپولوژیک Ω باشد، آن‌گاه به متمم مجموعهٔ باز

$$\bigcup\{E \subset \Omega : \mu(E) = 0 \text{ و باز } E\}$$

در Ω، *تکیه‌گاه* μ می‌گوییم.

فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{F})$ و $(\Omega', \mathcal{F}')$ فضاهای اندازه‌پذیر، P اندازهٔ احتمال روی Ω و $f : \Omega \to \Omega'$ نگاشت اندازه‌پذیر باشد. به سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک *فضای احتمال* می‌گوییم و f را یک متغیر تصادفی Ω'-مقدار نامیم. در این حالت، f یک اندازهٔ احتمال $P\rceil_f$ روی Ω' القا می‌کند، که به آن *توزیع احتمال* f می‌گوییم:

$$P\rceil_f(E') := P(f^{-1}E') \qquad (E' \in \mathcal{F}')$$

فرض کنیم f یک متغیر تصادفی $\mathbb{R}$-مقدار روی فضای احتمال (Ω, P) باشد. میانگین و واریانس f به‌ترتیب، با $\mathbf{E}_P(f)$ و $\mathbf{V}_P(f)$ نشان داده می‌شوند:

$$\mathbf{E}_P(f) := \int_\Omega f \mathrm{d}P, \qquad \mathbf{V}_P(f) := \mathbf{E}_P(f^2) - \mathbf{E}_P^2(f) = \mathbf{E}_P(f - \mathbf{E}_P(f))^2.$$

این دو مقدار عددی را (در صورت وجود) می‌توان به‌کمک توزیع احتمال f نیز تعریف کرد:

$$\mathbf{E}_P(f) := \int_{\mathbb{R}} x \mathrm{d}P\rceil_f(x), \qquad \mathbf{V}_P(f) := \int_{\mathbb{R}} x^2 \mathrm{d}P\rceil_f(x) - \mathbf{E}_P^2(f).$$

بنابراین اگر μ یک اندازهٔ احتمال روی $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه میانگین و واریانس μ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{E}_\mu := \int_{\mathbb{R}} x \mathrm{d}\mu(x), \qquad \mathbf{V}_\mu := \int_{\mathbb{R}} x^2 \mathrm{d}\mu(x) - \mathbf{E}_\mu^2.$$

فرض کنیم $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i)\}_{i\in J}$ گردایه‌ای متناهی از فضاهای اندازه‌پذیر باشد. کوچکترین سیگما–جبر روی $\Omega_J := \prod_{i\in J}\Omega_i$ شامل مجموعه‌های به‌شکل

$$\prod_{i\in J} E_i, \qquad (E_i \in \mathcal{F}_i)$$

سیگما–جبر *حاصلضربی* نامیده می‌شود. در این مقاله، Ω_J به‌عنوان یک فضای اندازه‌پذیر همواره با سیگما–جبر ضربی در نظر گرفته می‌شود. دقت کنید که اگر به‌ازای هر i، Ω_i فضای توپولوژیک و $\mathcal{F}_i$ سیگما–جبر بُرل روی Ω_i باشد، آن‌گاه سیگما–جبر بُرل روی فضای Ω_J همراه با توپولوژی حاصلضربی، با سیگما–جبر حاصلضربی روی آن یکسان است. اگر $\{(\Omega_i, P_i)\}_{i\in J}$ گردایه‌ای متناهی از فضاهای احتمال باشد، آن‌گاه یک اندازهٔ احتمال یکتای P روی Ω_J موجود است که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$P(\prod_i E_i) = \prod_i P_i(E_i), \qquad (E_i \in \mathcal{F}_i)$$

P *اندازهٔ احتمال حاصلضربی* برای گردایه $\{P_i\}_{i\in J}$ نامیده و با $\prod_{i\in J} P_i$ نشان داده می‌شود.

فرض کنیم (Ω, P) یک فضای احتمال باشد و به‌ازای هر $i \in I$، f_i یک متغیر تصادفی Ω_i–مقدار روی Ω باشد. به گردایهٔ $\{f_i\}_{i\in I}$ مستقل گفته می‌شود اگر به‌ازای هر زیرمجموعهٔ متناهی مانند J از I، توزیع احتمال متغیر تصادفی Ω_J–مقدار $\prod_{i\in J} f_i$ با اندازهٔ احتمال حاصلضربی $\prod_{i\in J} P\rceil_{f_i}$ روی Ω_J یکسان باشد.[1] به‌بیان دیگر، اگر به‌ازای هر $i \in J$، E_i زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر از Ω_i باشد، آن‌گاه داشته باشیم

$$P(f_i \in E_i, i \in J) = \prod_{i\in J} P(f_i \in E_i)$$

فرض کنیم $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ گردایه‌ای از فضاهای اندازه‌پذیر و به‌ازای هر مجموعهٔ متناهی $J \subseteq I$، P_J یک اندازهٔ احتمال روی Ω_J باشد. در این صورت، به گردایهٔ $\{P_J\}_J$ *هم‌آهنگ* گوییم اگر برای $J' \subseteq J$ داشته باشیم $P_J\rceil_{\xi_{JJ'}} = P_{J'}$ که در آن، $\xi_{JJ'} : \Omega_J \to \Omega_{J'}$ نگاشت *افکنش کانونی* را نشان می‌دهد.

۳. مفهوم هم‌آزماییِ اندازه‌گیری‌های احتمالاتی

هدف از این بخش، معرفی مفهوم پیچیدهٔ «هم‌آزمایی» برای خوانندگانی است که احتمالاً برای بار نخست در این نوشته با آن آشنا می‌شوند. از این‌رو از آوردن صورت‌بندی دقیق ریاضی آن خودداری می‌کنیم و خوانندگان را برای مطالعهٔ بحثی مفصل و دقیق در این باره، به [۱۱] ارجاع می‌دهیم.

[1] از مفهوم «استقلال» در بخش‌های توصیف نظریه‌های کوانتومی استفاده‌ای نخواهیم کرد اما تعریف آن را می‌آوریم چون برحسب تجربه می‌دانیم که در پاره‌ای از موارد، مفهوم «استقلال» و مفهوم «هم‌آزمایی» (که بعداً به آن خواهیم پرداخت) با هم اشتباه گرفته می‌شوند.

تعریف ۱.۳. گردایه‌ای از آزمایش‌ها یا فرآیندهای اندازه‌گیری روی یک پدیده یا دستگاه را هم‌آزما می‌گوییم اگر همهٔ آن فرایندها را بتوان با هم روی دستگاه اِعمال کرد.

قید «با هم» در تعریف بالا، لزوماً به‌معنای «در یک زمان» نیست، بلکه بدین معنا است که اِعمال هر کدام از فرایندهای اندازه‌گیری، نه تأثیری روی اِعمال کردن فرایندهای اندازه‌گیری دیگر می‌گذارد و نه تأثیری روی نتایج حاصل از اندازه‌گیری‌های دیگر. برای روشن شدن این مفهوم، سه مثال می‌آوریم.

مثال ۲.۳. یک دوندهٔ دوی سرعت برای رکوردگیری، مسیر مستقیم و کوتاهی را می‌دود. از بهزاد می‌خواهیم که دو فرایند اندازه‌گیری a و b را به‌ترتیب، برای تعیین طول مسافتی که دونده تا ثانیهٔ پنجم حرکتش می‌دود و سرعت دونده در ثانیهٔ پنجم حرکت، ابداع کند. بهزاد دو دوربین عکاسی دارای زمانسنج قابل تنظیم با دقت یکصدم ثانیه، و یک متر نواری در اختیار دارد. بهزاد زمانسنج یکی از دوربین‌ها را روی زمان ۵ و زمانسنج دوربین دیگر را روی زمان ۵٫۰۱ تنظیم می‌کند و دوربین‌ها را در کنار مسیر حرکت دونده قرار می‌دهد. به‌محض اینکه دونده حرکتش را آغاز می‌کند، بهزاد زمانسنج دوربین‌ها را به‌کار می‌اندازد و دوربین‌ها در زمان‌های از پیش تعیین‌شده هر کدام یک عکس می‌گیرند. پس از پایان رکوردگیری، بهزاد با متری که در اختیار دارد و به‌کمک عکس‌ها، نتیجه می‌گیرد که دونده تا ثانیهٔ پنجم r_0 متر و تا لحظهٔ پنج و یک‌صدم ثانیه r_1 متر دویده است. بنابراین برای a و b به‌ترتیب، اعداد r_0 و $100(r_1 - r_0)$ را اعلام می‌کند. مشخص است که هرچه دوربین‌ها و متر دقیق‌تر باشند، بهزاد نیز اعداد دقیق‌تری اعلام خواهد کرد. ولی در هر صورت، گردایهٔ $\{a, b\}$ برای بهزاد هم‌آزما است.

در ۳.۵ خواهیم دید که برای یک ذرهٔ کوانتومی، تعیین سرعت ذره (یا به‌طور هم‌ارز، تکانهٔ ذره) و تعیین مکان ذره در یک زمان، هم‌آزما نیستند.

مثال ۳.۳. فرض کنیم یک عدد سیب به ما داده شده و از ما خواسته شده است که دو اندازه‌گیری a و b را به‌شرح زیر انجام دهیم:

(a) سیب را با استفاده از یک دستگاه آبمیوه‌گیری، آب‌گیری کرده و حجم آب سیب حاصل را با استفاده از یک ارلن‌مایر مشخص به‌دست آوریم.
(b) سیب را در یک تنور با حرارت مشخص به مدت ده دقیقه قرار دهیم و سپس وزن سیب تنوری را با استفاده از یک ترازوی مشخص به‌دست آوریم.

واضح است که گردایهٔ $\{a, b\}$ هم‌آزما نیست.

مثال ۴.۳. فرض کنیم به‌ازای هر عدد طبیعی n، a_n نمایانگر فرآیند اندازه‌گیری دمای هوای شهر زنجان در ایستگاه مرکزی هواشناسی، در ساعت هفت صبح nاُمین روز بعد از نوروز سال ۱۳۹۸ باشد. روشن است که گردایهٔ نامتناهی $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ هم‌آزما است.

پیش از آنکه مفهوم هم‌آزمایی را برای آزمایش‌ها و اندازه‌گیری‌های احتمالاتی معرفی کنیم، اجازه دهید که خود مفهوم «آزمایش احتمالاتی» را اندکی روشن‌تر کنیم. مقصود از یک آزمایش یا اندازه‌گیری احتمالاتی روی یک دستگاه، فرآیندی است که روی دستگاه اِعمال می‌شود و حاصل آن، پدیدار شدن یا مشخص شدن یک ویژگی خاصِ دستگاه است، با این فرض که این فرآیند بتواند تحت شرایط «یکسان» به‌دفعات روی دستگاه اِعمال شود، یا اینکه نسخه‌های همسانی از دستگاه، به تعداد «زیاد» موجود باشد که این فرآیند بتواند روی همهٔ آن نسخه‌ها نیز اِعمال شود. برای مثال، فرض کنیم از ما بخواهند احتمال ظاهر شدن هر کدام از وجوه شش‌گانهٔ یک تاس نامتقارن را بیابیم. در اینجا دستگاه مورد آزمایش، تاس است و آزمایش مربوطه، پرتاب تاس و مشاهدهٔ اینکه کدام وجه ظاهر می‌شود. روشن است که این آزمایش را به‌دفعات تحت شرایط یکسان می‌توان روی دستگاه انجام داد. در واقع، انتقال در زمان آزمایش، شرایط انجام آن را تغییر نمی‌دهد.

تعریف ۵.۳. فرض کنیم $\{a_i\}_{i\in I}$ گردایه‌ای از آزمایش‌ها یا اندازه‌گیری‌های احتمالاتی روی یک پدیده یا دستگاه باشد. فرض کنیم به‌ازای هر $i\in I$، (Ω_i, P_i) فضای احتمالی باشد که از نتایج حاصل از آزمایش a_i روی دستگاه، ساخته می‌شود. می‌گوییم گردایه $\{a_i\}_{i\in I}$ هم‌آزما است اگر به‌ازای هر زیرمجموعهٔ متناهی مانند J از I، اندازهٔ احتمال توأمان گردایهٔ $\{P_i\}_{i\in J}$ در دسترس باشد.

در تعریف بالا، مفهوم «در دسترس بودن» دقیق و ریاضی‌وار نیست. سعی می‌کنیم این مفهوم را اندکی روشن کنیم. فرض کنیم P_J اندازهٔ احتمال توأمان گردایهٔ $\{P_i\}_{i\in J}$ را برای $J:=\{i_1,\ldots,i_n\}$ نشان دهد. بنابراین P_J یک اندازهٔ احتمال روی فضای اندازه‌پذیر

$$\Omega_J := \Omega_{i_1}\times\cdots\times\Omega_{i_n}$$

است طوری که اگر E_1، E_2، $\ldots$، E_n به‌ترتیب، زیرمجموعه‌هایی اندازه‌پذیر از Ω_{i_1}، Ω_{i_2}، $\ldots$، Ω_{i_n} باشند، آن‌گاه $P_J(E_1\times\cdots\times E_n)$ مقدار عددیِ احتمال آن را نشان می‌دهد که به‌طور توأمان، نتیجهٔ به‌دست آمده از اندازه‌گیریِ a_{i_1} در E_1 باشد، $\ldots$ و نتیجهٔ به‌دست آمده از اندازه‌گیریِ a_{i_n} در E_n قرار داشته باشد. دقت کنید که به‌محض اینکه بپذیریم « P_J در دسترس است»، پذیرفته‌ایم که a_{i_1}، a_{i_2}، $\ldots$، a_{i_n} با هم قابل اِعمال روی دستگاه هستند. همچنین اگر به‌درستی تشخیص داده باشیم که گردایهٔ $\{a_i\}_{i\in I}$

هم‌آزما است، آن‌گاه گردایهٔ $\{P_J\}_J$ از اندازه‌های احتمال توأمان، مطابق با تعریف پایانیِ بخش دوم، باید هم‌آهنگ باشد.

تعریف ۶.۳. با مفروضات شبه‌تعریف ۵.۳، به گردایهٔ $\{a_i\}_{i\in I}$ *مستقل* گوییم اگر هم‌آزما باشد و به‌ازای هر زیرمجموعهٔ متناهی J از I، اندازهٔ احتمال توأمان گردایهٔ $\{P_i\}_{i\in J}$، اندازهٔ احتمال حاصلضربی باشد.

فرض کنیم بتوان روی دستگاه، یک فرآیند اندازه‌گیریِ احتمالاتی a با فضای احتمال (Ω, P) اِعمال کرد به‌گونه‌ای که بتوان نتایج به‌دست آمده از اندازه‌گیری‌های a_{i_1}، a_{i_2}، $\ldots$، a_{i_n} را تنها از روی نتایج به‌دست آمده از اندازه‌گیریِ a به‌دست آورد. به‌بیان اندکی رسمی‌تر، متغیرهای تصادفی «توجیه‌پذیر» f_1، f_2، $\ldots$، f_n روی Ω با مقادیر به‌ترتیب، در Ω_{i_1}، Ω_{i_2}، $\ldots$، Ω_{i_n} موجود باشند که در ویژگی زیر صدق کنند:

$$P\rceil_{f_i} = P_i, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

در این صورت، اندازهٔ احتمال توأمان P_J نیز «در دسترس» است. در واقع،

$$P_J := P\rceil_{f_J}$$

که در آن، f_J متغیر تصادفی Ω_J–مقدار روی Ω تعریف‌شده با $\omega \mapsto (f_1(\omega), \ldots, f_n(\omega))$ را نشان می‌دهد.

اجازه دهید به همان مثال سیب بازگردیم. فرض کنیم این بار جعبه‌ای حاوی یکصد عدد سیب را به ما داده‌اند و خواسته‌اند که نتایج به‌دست آمده از اندازه‌گیری a، یعنی به‌دست آوردن حجم آب سیب، را به‌کمک یک فضای احتمال بیان کنیم. همچنین فرض کنیم ارلن‌مایری که به ما داده‌اند با دقت یک میلی‌لیتر باشد. یک سیب را از جعبه برمی‌داریم و به آن عدد یک را نسبت می‌دهیم و پس از آب‌گیری و به‌دست آوردن حجم آب سیب به عدد صحیح و نامنفی V_1، حجم آب سیب برحسب میلی‌لیتر، می‌رسیم. همین عمل را برای ۹۹ سیب باقی‌مانده در جعبه انجام می‌دهیم و در نتیجه به یکصد عدد صحیح V_1، V_2، $\ldots$، V_{100} می‌رسیم. اگر فرض کنیم که حجم آب هیچ‌کدام از سیب‌ها بیشتر از ۳۰۰ میلی‌لیتر نباشد، آن‌گاه طبیعی‌ترین فضای احتمالی که می‌توانیم بسازیم عبارت است از (Ω_1, P_1) که در آن، $\Omega_1 = \{1, \ldots, 300\}$ و $P_1 = \frac{1}{100}\sum_{n=1}^{100}\delta_{V_n}$. اما برای اینکه بتوانیم آزمایش b، یعنی تعیین جرم سیب تنوری را نیز انجام دهیم، یک جعبهٔ سیب دیگر در اختیار ما قرار می‌دهند و ادعا می‌کنند که محتویات این جعبه با جعبه قبلی کاملاً یکسان است. یعنی تناظری یک‌به‌یک بین سیب‌های دو جعبه وجود دارد به‌گونه‌ای که سیب‌های متناظر، ویژگی‌های یکسانی دارند. فرض کنیم ترازویی که برای توزین به ما داده‌اند با دقت گرم باشد. بنابراین مشابه آزمایش قبل، تمام سیب‌ها را تنوری می‌کنیم و بعد از وزن کردن، به یکصد عدد صحیح

نامنفی $M_۱$، $M_۲$، $\ldots$، $M_{۱۰۰}$ می‌رسیم به‌گونه‌ای که M_n جرم برحسب گرم سیبی است که در مرحلهٔ nاُم از جعبه برداشته‌ایم. اگر فرض کنیم که جرم هر سیب از ۴۰۰ گرم کمتر است، آن‌گاه مانند قبل طبیعی‌ترین فضای احتمالی که می‌توانیم به آزمایش b نسبت دهیم، عبارت است از $(\Omega_۲, P_۲)$ که در آن، $\Omega_۲ = \{۱, \ldots, ۴۰۰\}$ و $P_۲ = \frac{۱}{۱۰۰}\sum_{n=۱}^{۱۰۰}\delta_{M_n}$. بنابراین دو اندازه‌گیری مختلف a و b را روی یک دستگاه انجام دادیم و نتایج این اندازه‌گیری‌ها را به‌کمک دو فضای احتمال مرتب کردیم. حال فرض کنیم سومین جعبهٔ سیب را نیز داده باشند که با جعبه‌های اول و دوم یکسان است. یک سیب به‌تصادف از جعبه سوم انتخاب می‌کنند و از ما می‌خواهند که با توجه به نتایج آزمایش‌هایی که انجام داده‌ایم، به سه پرسش زیر پاسخ دهیم.

(۱) مقدار عددی احتمال اینکه حجم آب میوهٔ به‌دست آمده از سیبی که انتخاب شده است برابر ۱۲۰ میلی‌لیتر باشد، چیست؟
(۲) مقدار عددی احتمال اینکه جرم تنوری‌شده سیبی که انتخاب شده است، برابر با ۲۵۰ گرم باشد، چیست؟
(۳) مقدار عددی احتمال اینکه حجم آب میوه به‌دست آمده از سیبی که انتخاب شده است، برابر با ۱۲۰ میلی‌لیتر باشد و جرم تنوری‌شدهٔ همان سیب، برابر با ۲۵۰ گرم باشد، چیست؟

در پاسخ به پرسش‌های (۱) و (۲) به‌ترتیب اعداد $P_۱(\{۱۲۰\})$ و $P_۲(\{۲۵۰\})$ را اعلام می‌کنیم اما پاسخی برای پرسش (۳) نداریم. در واقع، اندازهٔ احتمال توأمان گردایهٔ $\{P_۱, P_۲\}$ موجود نیست و در نتیجه گردایهٔ $\{a, b\}$ هم‌آزما نیست.

گفتیم که دو جعبه سیبی که به ما داده‌اند، کاملاً یکسان است و فرض کردیم که تناظری یک‌به‌یک بین سیب‌های دو جعبه وجود دارد. حال فرض کنیم این تناظر بر ما معلوم باشد، یعنی هر سیبی که از جعبهٔ اول انتخاب کنیم، دقیقاً بدانیم که با کدام سیب از جعبه دوم یکسان است. در این صورت، می‌توانیم اندازه‌گیری‌های a و b را به‌گونه‌ای سامان دهیم که اندازهٔ احتمال توأمان مطلوب را نیز داشته باشیم. برای این منظور، تنها کافی است در هر مرحله هنگامی که یک سیب از جعبهٔ اول برای آب‌گیری برمی‌داریم، همسان همان سیب را از جعبهٔ دوم برای تنوری شدن انتخاب کنیم. به این ترتیب، پس از اندازه‌گیری‌های مربوط در مرحلهٔ n اُم، به زوج (V_n, M_n) از اعداد صحیح می‌رسیم. فضای احتمالی که این اندازه‌گیری‌های توأمان را صورت‌بندی می‌کند، عبارت است از $(\Omega_۱ \times \Omega_۲, P)$ که در آن، $P = \frac{۱}{۱۰۰}\sum_n \delta_{(V_n, M_n)}$. بنابراین با اطلاعات بیشتری که در اختیارمان قرار گرفت، توانستیم اندازه‌گیری‌های مناسب‌تری انجام دهیم و در نتیجه این بار گردایهٔ $\{a, b\}$ هم‌آزما است.

۴. مبانی نظریهٔ پدیدار و کنونه

در این بخش، مبانی، اصول و داده‌های عمومی یک نظریهٔ پدیدار و کنونه را معرفی می‌کنیم. به‌طور کلی، مقصود از کنونه برای یک دستگاه یا پدیدهٔ واقعیِ بیرون از ذهن، یک حالت یا وضعیت ویژه است که دستگاه در دنیای بیرونی یا در آزمایشگاه به‌خود می‌گیرد و به‌نوعی با وضعیت‌های دیگر دستگاه (یا به سخن دیگر، با کنونه‌های دیگر دستگاه) متمایز است. هر پدیدار برای دستگاه، متناظر با نوعی فرآیند اندازه‌گیری یا آزمایش روی دستگاه است که تحت هر کنونه از دستگاه قابل اِعمال است. فرض بر این است که اندازه‌گیری متناظر با هر پدیدار را تحت یک کنونهٔ ویژه، روی دستگاه به‌دفعات می‌توان اِعمال کرد و از نتیجهٔ این تکرارها، می‌توان یک اندازهٔ احتمال روی مجموعهٔ مقادیر پدیدار ساخت که به آن، اندازهٔ احتمالی گوییم که آن کنونه به پدیدار نسبت می‌دهد.

۱.۴. داده‌ها و اصول عمومی حاکم بر یک نظریهٔ پدیدار و کنونه. یک نظریهٔ پدیدار و کنونه مانند $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ بر داده‌هایی به‌شرح زیر استوار است:

- دو مجموعهٔ ناتهی و از هم جدای $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{S}$ که به اعضای $\mathfrak{A}$، *پدیدار* و به اعضای $\mathfrak{S}$، *کنونه* گفته می‌شود؛
- به هر پدیدار $a \in \mathfrak{A}$ یک فضای اندازه‌پذیر $(\Omega_a, \mathcal{F}_a)$ نسبت داده می‌شود. به Ω_a فضای مقادیر a و به هر عضو از $\mathcal{F}_a$ یک *پیشامد قابل رؤیت* توسط a گوییم؛
- هر کنونه $s \in \mathfrak{S}$ روی فضای مقادیر هر پدیدار $a \in \mathfrak{A}$، یک اندازهٔ احتمال مانند $P_{a,s}$ القا می‌کند.

تنها اصلی که به‌صورت عمومی باید برقرار باشد، این است که

- کنونه‌ها توسط پدیدارها از هم جدا می‌شوند. به‌سخن دیگر، به‌ازای هر دو کنونهٔ متمایز مانند s و s'، پدیدار a چنان موجود است که

$$P_{a,s} \neq P_{a,s'}$$

اصل بالا درواقع، بیان ریاضی‌وارِ این اصل ذهنی بدیهی است که اگر دو حالت یا وضعیت یک دستگاه متمایز باشند، آن‌گاه این تمایز باید توسط دست‌کم یک آزمایش، نمود داشته باشد.

بحث را با ذکر چند مثال ساده پی می‌گیریم.

مثال ۱.۴. فرض کنیم سه تاس به نام‌های $D_۱$، $D_۲$، $D_۳$ با توزیع جرم‌های گوناگون را برای به‌دست آوردن احتمال (تقریبی) ظاهر شدن هر وجه، هزار بار تحت آزمایش قرار داده‌اند و از ما خواسته‌اند نتایج به‌دست آمده را تحت یک نظریهٔ پدیدار و کنونه صورت‌بندی کنیم. برای این منظور، یکی از پیشنهادهای

ما می‌تواند به این شرح باشد: $\mathfrak{S}$ را مجموعهٔ $\{D_۱, D_۲, D_۳\}$ می‌گیریم و برای نظریه‌مان تنها یک پدیدار تعریف می‌کنیم:

$$\mathfrak{A} := \{a\}, \qquad \Omega_a := \{۱, \dots, ۶\}$$

همچنین با نتایج به‌دست آمده از هزار بار پرتاب تاس D_i، اندازهٔ P_{a,D_i} را به‌روش بدیهی می‌سازیم. دقت کنید که چون تاس‌ها توزیع جرم گوناگون داشتند، انتظار داریم که سه اندازهٔ احتمال P_{a,D_i} نیز متفاوت باشند. به سخن دیگر، $\mathfrak{A}$ اعضای $\mathfrak{S}$ را از هم جدا می‌کند.

مثال ۲.۴. برای سنجش مهارت تیراندازی گروه هزار نفرهٔ سربازان یک پادگان پس از دورهٔ آموزشی، تصمیم گرفته می‌شود که آزمایش‌هایی به شرح زیر انجام پذیرد. هر سرباز به سمت هدفی مربع‌شکل با مساحت ۴ مترمربع و مختصات‌بندی‌شده به‌صورت $[-۱۰۰, ۱۰۰] \times [-۱۰۰, ۱۰۰]$ که در شمال یک میدان تیر قرار دارد، از جنوب میدان به حالت عمود بر هدف و از فاصله‌های $\ell_۱$ و $\ell_۲$ و در سه وضعیت ایستاده O، نشسته S و درازکش L و در شرایطی که باد از سمت غرب W یا از سمت شرق E می‌وزد، تیراندازی می‌کند. در هر بار تیراندازی، مختصات (x, y) محل اصابت گلوله به هدف توسط یک مسئول و فاصلهٔ r محل اصابت گلوله تا مرکز هدف، توسط مسئول دیگری با خط‌کش‌هایی به‌دقت سانتی‌متر سنجیده می‌شود. با فرض اینکه تیر سربازها همیشه به هدف برخورد می‌کند، یک نظریهٔ پدیدار و کنونه می‌سازیم به‌قسمی که

$$\mathfrak{S} := \{\ell_۱, \ell_۲\} \times \{O, S, L\} \times \{W, E\}, \quad \mathfrak{A} := \{(x, y), x, y, r\}$$

و همچنین

$$\Omega_{(x,y)} := \{-۱۰۰, \dots, ۱۰۰\}^۲, \quad \Omega_r := \{۱, \dots, ۱۰۰^۲\}.$$

صورت‌بندی مابقی نظریه به خواننده واگذار می‌شود.

مثال ۳.۴. ذره‌ای را در نظر بگیرید که در فضای اقلیدسی یک‌بُعدی مختصات‌بندی‌شده با $\mathbb{R}$، از زمان $-\infty$ تا زمان $+\infty$ به‌صورت هموار حرکت می‌کند. یک نظریه به‌شرح زیر می‌سازیم. $\mathfrak{S}$ را مجموعهٔ همهٔ خم‌های هموار $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ می‌گیریم. به‌ازای هر $t \in \mathbb{R}$ پدیدارهای $x_t, \dot{x}_t, \ddot{x}_t$ را به‌ترتیب به مکان، سرعت و شتاب ذره در لحظهٔ t نسبت می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$\Omega_{x_t} = \Omega_{\dot{x}_t} = \Omega_{\ddot{x}_t} := \mathbb{R},$$

$$P_{x_t,\gamma} := \delta_{\gamma(t)}, P_{\dot{x}_t,\gamma} := \delta_{\gamma'(t)}, P_{\ddot{x}_t,\gamma} := \delta_{\gamma''(t)}.$$

مثال ۴.۴. فرض کنیم ذره‌ای که در مثال ۳.۴ داشتیم یک ذره کلاسیک باشد که تحت قوانین نیوتن به‌صورت آزادانه در حرکت است. در این صورت، می‌توانیم فضای کنونه‌های نظریهٔ مثال ۳.۴ را از یک

خمینهٔ بی‌نهایت بُعدی به یک خمینهٔ دو بُعدی تقلیل دهیم و نظریه‌ای تازه به‌دست آوریم. برای این منظور، $\mathfrak{S}$ را مجموعهٔ $\mathbb{R}^۲$ می‌گیریم و $s=(\xi,v)\in\mathfrak{S}$ را کنونه‌ای تعبیر می‌کنیم که ذره تحت آن، در زمان ۰ در مکان ξ قرار دارد و سرعتش برابر با v است. همچنین قرار می‌دهیم

$$P_{x_t,s}:=\delta_{\xi+tv}, P_{\dot{x}_t,s}:=\delta_v, P_{\ddot{x}_t,s}:=\delta_\circ. \qquad (۱.۴)$$

در مورد نظریهٔ تعریف‌شده در مثال ۴.۴، توجه به این نکته ضروری است که ما با دانستن حرکت آزاد ذره و دانستن قوانین نیوتن، نظریه را صورت‌بندی کردیم اما در عمل، عکس این فرآیند انجام می‌پذیرد. به دیگر سخن، اگر فردی اطلاعی از نوع حرکت ذره یا قوانین نیوتن نداشته باشد، برای صورت‌بندی نظریه باید $\mathfrak{S}$ و روابط ۱.۴ را از روی نتایج به‌دست آمده از اندازه‌گیریِ پدیدارها حدس بزند. آن‌گاه پس از صورت‌بندی نظریه قانون اول نیوتن از روابط ۱.۴ به‌دست می‌آید.

در دو مثال نظری سادهٔ زیر، به هر فضای اندازه‌پذیر دو نظریهٔ پدیدار و کنونه وابسته می‌کنیم.

مثال ۵.۴. فرض کنیم $(\Omega,\mathcal{F})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. $\mathfrak{S}$ را با مجموعهٔ همهٔ اندازه‌های احتمال روی Ω می‌گیریم و $\mathfrak{A}$ را با $\mathcal{F}$ یکسان می‌گیریم. همچنین برای هر پدیدار مانند $a=E$ و هر کنونه مانند $s=P$ قرار می‌دهیم

$$\Omega_a:=\{\circ,۱\}, P_{a,s}(\{\circ\}):=P(\Omega\setminus E), P_{a,s}(\{۱\}):=P(E).$$

مثال ۶.۴. فرض کنیم Ω، $\mathcal{F}$ و $\mathfrak{S}$ مانند مثال ۵.۴ باشند. این بار $\mathfrak{A}$ را مجموعهٔ تابع‌های اندازه‌پذیر حقیقی‌مقدار f روی Ω می‌گیریم و برای هر پدیدار مانند $a=f$ و هر کنونه مانند $s=P$، تعریف می‌کنیم $\Omega_a:=\mathbb{R}$ و $P_{a,s}:=P\rceil_f$.

دقت کنید که نظریهٔ مثال ۶.۴ به‌نوعی شامل نظریهٔ مثال ۵.۴ است. در مثال زیر به هر تابع انتقال احتمالاتی یک نظریه نسبت می‌دهیم.

مثال ۷.۴. فرض کنیم

$$M:[\circ,\infty)\times\Omega\times\mathcal{F}\to[\circ,۱]$$

یک تابع انتقال احتمالاتی روی فضای اندازه‌پذیر $(\Omega,\mathcal{F})$ با زمان $[\circ,\infty)$ باشد. بنابراین به‌ازای هر $t,t'\in[\circ,\infty)$، $\omega\in\Omega$ و $E\in\mathcal{F}$، $M(t,\omega,.)$ یک اندازهٔ احتمال روی $(\Omega,\mathcal{F})$ است و $M(t,.,E)$ تابعی اندازه‌پذیر است که $M(\circ,\omega,.)=\delta_\omega$ و معادلهٔ چَپمن–کُلموگُرُف برقرار است:

$$M(t+t',\omega,E)=\int_\Omega M(t',.,E)\mathrm{d}M(t,\omega,.).$$

در این صورت، می‌دانیم که به هر اندازهٔ احتمال P روی $(\Omega, \mathcal{F})$ یک فرآیند تصادفی مارکُف با مقادیر در $(\Omega, \mathcal{F})$ و احتمال آغازین P نسبت داده می‌شود. به M یک نظریهٔ پدیدار و کنونه به این صورت نسبت می‌دهیم که $\mathfrak{S}$ را مجموعهٔ همهٔ اندازه‌های احتمال روی Ω می‌گیریم. قرار می‌دهیم

$$\mathfrak{A} := \{a_t : t \in [\circ, \infty)\}$$

و $(\Omega_{a_t}, \mathcal{F}_{a_t}) = (\Omega, \mathcal{F})$ و برای هر کنونه مانند $s = P$ و $E \in \mathcal{F}$ تعریف می‌کنیم

$$P_{a_t,s}(E) := \int_\Omega M(t, ., E)\mathrm{d}P.$$

۲.۴. تحدب صوری $\mathfrak{S}$. در هر نظریهٔ پدیدار و کنونه، مجموعهٔ $\mathfrak{S}$ را می‌توان با تعریف یک عمل دوتایی و اضافه کردن کنونه‌های لازم، مجموعه‌ای محدب در نظر گرفت. فرض کنیم $s, s' \in \mathfrak{S}$ و r یک عدد حقیقی در بازهٔ $[\circ, ۱]$ باشد. کنونهٔ $rs + (۱ - r)s'$ را کنونه‌ای تعریف می‌کنیم که اندازهٔ احتمالی که روی فضای مقادیر پدیدار a القا می‌کند، برابر با r–جمع محدب اندازه‌های احتمال $P_{a,s}$ و $P_{a,s'}$ باشد. به سخن دیگر،

$$P_{a,rs+(۱-r)s'} := rP_{a,s} + (۱ - r)P_{a,s'}.$$

دقت کنید که اگر چنین کنونه‌ای در $\mathfrak{S}$ وجود نداشته باشد، بدون وارد شدن هیچ خدشه‌ای به اصول نظریه، می‌توان آن را به $\mathfrak{S}$ اضافه کرد. البته ممکن است در دنیای واقعی مابه‌ازای چنین کنونه‌ای موجود نباشد. (مثال ۱.۴ را درنظر بگیرید.)

تعریف ۸.۴. فرض کنیم در یک نظریهٔ پدیدار و کنونه، $\mathfrak{S}$ محدب باشد. در این صورت، به هر نقطهٔ کرانه‌ایِ $\mathfrak{S}$ *کنونهٔ خالص* گوییم و به هر نقطهٔ دیگر $\mathfrak{S}$، *کنونهٔ آمیخته*.

در نظریه‌های مذکور در مثال‌های ۵.۴، ۶.۴ و ۷.۴، مجموعهٔ کنونه‌ها محدب است. در این نظریه‌ها، اگر برای $\omega \in \Omega$ داشته باشیم $\{\omega\} \in \mathcal{F}$، آن‌گاه کنونهٔ تعریف‌شده با اندازهٔ احتمال نقطه–جرمی δ_ω یک کنونهٔ خالص است. در نظریه‌های ذکر شده در مثال‌های ۳.۴ و ۴.۴، با وجود اینکه $\mathfrak{S}$ فضای برداری است، $\mathfrak{S}$ به مفهومی که در اینجا آورده‌ایم، محدب نیست. در واقع، در هر دوی آن نظریه‌ها هر عضو $\mathfrak{S}$ یک کنونهٔ خالص است.

۳.۴. مفهوم هم‌آزمایی پدیدارها. فرض کنیم a و b دو پدیدار از نظریهٔ $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ باشند. می‌گوییم b تابعی از a است اگر نگاشت اندازه‌پذیر $f : \Omega_a \to \Omega_b$ موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر کنونه مانند s داشته باشیم

$$P_{b,s} = P_{a,s}\rceil_f.$$

در این صورت، می‌نویسیم $b = f(a)$. برای نمونه، در نظریهٔ مثال ۲.۴، پدیدارهای r، x و y، همگی تابعی از پدیدار (x, y) هستند. همچنین در نظریهٔ مثال ۵.۴، برای هر $E \in \mathcal{F}$ پدیدار نسبت داده‌شده به $\Omega \setminus E$ تابعی از پدیدار نسبت داده‌شده به E است. با توجه به توضیحات بخش ۳، هم‌آزمایی پدیدارها را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم.

تعریف ۹.۴. در نظریهٔ $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$، به گردایهٔ $\{a_i\}_{i \in I}$ از پدیدارها، *هم‌آزما* گوییم اگر دو شرط برقرار باشد:

(۱) به‌ازای هر کنونه مانند s و هر زیرمجموعهٔ متناهی مانند J از I، اندازهٔ احتمال توأمان گردایهٔ $\{P_{a_i,s}\}_{i \in J}$ موجود و در دسترس باشد و اگر این اندازهٔ احتمال توأمان را با $P_{J,s}$ نشان دهیم، آن‌گاه

(۲) گردایهٔ $\{P_{J,s}\}_J$ هم‌آهنگ باشد.

قضیه ۱۰.۴. *با شرایط تعریف ۹.۴، گردایهٔ $\{a_i\}_{i \in I}$ هم‌آزما است اگر پدیداری مانند a موجود باشد که به‌ازای هر $i \in I$، a_i تابعی از a باشد.*

اثبات. فرض کنیم به‌ازای هر $i \in I$ نگاشت اندازه‌پذیر $f_i : \Omega_a \to \Omega_{a_i}$ چنان باشد که داشته باشیم $a_i = f_i(a)$. در این صورت، به‌ازای هر کنونه مانند s و هر زیرمجموعهٔ متناهی مانند J از I «طبیعی‌ترین» نامزدی که برای اندازهٔ احتمال توأمان گردایهٔ $\{P_{a_i,s}\}_{i \in J}$ داریم، عبارت است از

$$P_{J,s} := P_{a,s}\rceil_{\prod_{i \in J} f_i}$$

که در آن، $\prod_{i \in J} f_i$ متغیر تصادفی $\prod_{i \in J} \Omega_{a_i}$–مقدار $\omega \mapsto (f_i(\omega))_{i \in J}$ را روی فضای احتمال $(\Omega_a, P_{a,s})$ نشان می‌دهد. روشن است که گردایهٔ $\{P_{J,s}\}_J$ هم‌آهنگ است. □

در اینجا مفهوم استقلال پدیدارها را مشابه با شبه‌تعریف ۶.۳، صورت‌بندی می‌کنیم. البته در ادامهٔ مقاله، به مفهوم استقلال اشاره‌ای نخواهیم کرد. با مفروضات شبه‌تعریف ۹.۴، به گردایه $\{a_i\}_{i \in I}$ از پدیدارها، مستقل گوییم اگر هم‌آزما باشد و به‌ازای هر کنونه مانند s و هر زیرمجموعهٔ متناهی J از I، اندازهٔ احتمال توأمان گردایهٔ $\{P_{a_i,s}\}_{i \in J}$، اندازهٔ احتمال حاصلضربی باشد.

۵. صورت‌بندی مفاهیم پایه‌ای فیزیک کوانتوم به‌کمک نظریهٔ عملگرها

همان‌گونه که پیشتر گفتیم، هدف اصلی این نوشته توصیف مبانی فیزیک کوانتوم در چارچوب نظریهٔ پدیدار و کنونه است. در این بخش، یک نظریهٔ پدیدار و کنونه می‌سازیم که می‌تواند مبانی نظریِ بررسی دستگاه‌های کوانتومی را صورت‌بندی کند. در بخش بعد نیز نظریهٔ دیگری برای این منظور ارائه خواهیم کرد. در مکانیک کوانتوم و به‌طور کلی در فیزیک کوانتوم، کنونه‌های یک دستگاه توسط بردارهای یک

فضای هیلبرت (که معمولاً به آن فضای کنونه‌های دستگاه می‌گوییم) توصیف می‌شوند. پدیدارها نیز توسط عملگرهای خودالحاقی روی آن فضای هیلبرت مشخص می‌شوند. خواهیم دید که عملگرهای خودالحاقی نقش پدیدارها با مقادیر حقیقی را بازی می‌کنند.

در ادامهٔ این بخش، ابتدا برخی پیشنیازهای لازم از نظریهٔ عملگرهای خطی روی فضای هیلبرت را معرفی می‌کنیم. سپس صورت‌بندی نظریه را ارائه می‌دهیم و پیوند آن را با زبانی که توسط فیزیکدانان به‌کار می‌رود، به‌اختصار بررسی می‌کنیم. سرانجام، بحث مختصری دربارهٔ اصل عدم قطعیت ارائه می‌دهیم.

۱.۵. پیشنیازهایی از نظریهٔ عملگرها. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت همراه با ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ باشد. مقصود از یک عملگر H $T : \mathbf{D}(T) \subseteq H \to H$ یک نگاشت خطی T از زیرفضای برداری چگال $\mathbf{D}(T)$ به H است. اگر T پیوسته (معادلاً کراندار) باشد، آنگاه T به‌طور یکتا به یک عملگر پیوسته روی H گسترش می‌یابد. اگر $T_۱$ و $T_۲$ دو عملگر باشند، آنگاه

$$\mathbf{D}(T_۱T_۲) := \{h \in \mathbf{D}(T_۲) : T_۲h \in \mathbf{D}(T_۱)\},$$

$$\mathbf{D}(T_۱ + T_۲) := \mathbf{D}(T_۱) \cap \mathbf{D}(T_۲).$$

الحاقی عملگر T که آن را با T^* نشان می‌دهیم، عملگری روی H است که به این صورت تعریف می‌شود: $\mathbf{D}(T^*)$ را مجموعهٔ همهٔ hهایی در H می‌گیریم که تابعک خطی $\langle Tk, h\rangle \mapsto k$ روی $\mathbf{D}(T)$ پیوسته باشد. در نتیجه بنابر قضیهٔ نمایش ریس (در فضاهای هیلبرت)، توسط یک بردار یکتا مانند $T^*h \in H$ نمایش داده می‌شود. بنابراین

$$\langle Tk, h\rangle = \langle k, T^*h\rangle, \qquad (h \in \mathbf{D}(T^*), k \in \mathbf{D}(T)).$$

اگر H متناهی‌بُعد باشد و M ماتریس عملگر T را نسبت به یک پایه از H نشان دهد، آنگاه ماتریس عملگر T^* در همان پایه، برابر با مزدوج ترانهادهٔ M است.

به بردار ناصفر h در $\mathbf{D}(T)$، یک *ویژه‌بردار* برای T گوییم اگر Th مضرب مختلطی از h باشد. به عملگر T *خودالحاقی* گوییم اگر $T = T^*$. بنابراین T خودالحاقی است اگر و تنها اگر

$$\langle Tk, h\rangle = \langle k, Th\rangle, \qquad (h, k \in \mathbf{D}(T^*) = \mathbf{D}(T)). \tag{۱.۵}$$

مقصود از یک تصویر روی H یک عملگر پیوسته مانند q روی H است به‌طوری که

$$q = q^* = q^۲.$$

می‌دانیم که $q \mapsto q(H)$ یک تناظر یک‌به‌یک بین مجموعهٔ همهٔ تصویرها روی H و مجموعهٔ همهٔ زیرفضاهای برداری بسته از H است. روشن است که در این تناظر، عملگر همانی $\mathbf{I}$، به H نگاشته می‌شود.

فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{F})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. مقصود از یک *اندازه طیفی* روی سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, H)$، نگاشتی مانند J از $\mathcal{F}$ به مجموعهٔ تصویرها روی H است به‌طوری که سه شرط برقرار باشد: اول اینکه $J(\Omega) = \mathrm{I}$؛ دوم اینکه به‌ازای هر $E_۱, E_۲ \in \mathcal{F}$ داشته باشیم $J(E_۱ \cap E_۲) = J(E_۱)J(E_۲)$؛ و سوم اینکه اگر $\{E_n\}_n$ دنباله‌ای از اعضای دوبه‌دو مجزای $\mathcal{F}$ باشد، آن‌گاه $J(\bigcup_n E_n) = \sum_n J(E_n)$؛ یعنی به‌ازای هر $h \in H$، دنبالهٔ $\sum_{i=۱}^{n} J(E_i)h$ نسبت به نرم H به $J(\bigcup_n E_n)(h)$ میل می‌کند. اگر J اندازهٔ طیفی باشد، آن‌گاه به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که به‌ازای هر بردار h در H که $\|h\| = ۱$، نگاشت

$$E \mapsto J_h(E) := \langle J(E)h, h \rangle$$

یک اندازهٔ احتمال J_h روی $(\Omega, \mathcal{F})$ تعریف می‌کند. برای مطالعهٔ توضیحات مفصل و اثبات قضیهٔ زیر، خوانندگان را به [۱۰] یا [۶] ارجاع می‌دهیم.

قضیه ۱.۵. *فرض کنیم $T : \mathbf{D}(T) \subseteq H \to H$ یک عملگر خودالحاقی روی H باشد. در این صورت، یک اندازهٔ طیفی یکتا مانند J روی $\mathbb{R}$ موجود است که به‌ازای هر h در $\mathbf{D}(T)$ داریم*

$$\langle Th, h \rangle = \int_{\mathbb{R}} x \mathrm{d}J_h(x). \qquad (۲.۵)$$

همچنین به‌ازای هر چندجمله‌ای Q با ضرایب مختلط اگر $h \in \mathbf{D}(Q(T))$، آن‌گاه

$$\langle Q(T)h, h \rangle = \int_{\mathbb{R}} Q(x) \mathrm{d}J_h(x). \qquad (۳.۵)$$

به‌عکس، به‌ازای هر اندازهٔ طیفی مانند J روی $\mathbb{R}$، یک عملگر خودالحاقی T موجود است که برای آن، (۲.۵) برقرار است.

۲.۵. توصیف یک نظریهٔ پدیدار و کنونه برای دستگاه‌های کوانتومی. فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{F})$ یک فضای اندازه‌پذیر و H یک فضای هیلبرت باشد. به سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, H)$ یک نظریهٔ پدیدار و کنونهٔ $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ به این شرح، نسبت می‌دهیم. $\mathfrak{S}$ را مجموعهٔ همهٔ زیرفضاهای برداری یک‌بُعدی H می‌گیریم. روشن است که در هر زیرفضای برداری ناصفر مانند H، می‌توان یک بردار با نرم ۱ انتخاب کرد و هر بردار ناصفر در H، یک زیرفضای برداری یک‌بُعدی یکتا تولید می‌کند. بنابراین اگر

$$\mathbb{S}_H := \{h \in H : \|h\| = ۱\}$$

کرۀ واحد H را نشان دهد و رابطۀ هم‌ارزی $\sim$ روی $\mathbb{S}_H$ با

$$(h \sim h') \iff (\exists c \in \mathbb{C} : h = ch')$$

تعریف کنیم، آن‌گاه $\mathfrak{S}$ با فضای خارج‌قسمتی القاشده توسط $\sim$ برابر است:

$$\mathfrak{S} \equiv \mathbb{S}_H / \sim . \tag{۴.۵}$$

$\mathfrak{A}$ را مجموعۀ همۀ اندازه‌های طیفی روی $(\Omega, \mathcal{F}, H)$ می‌گیریم. به‌ازای هر پدیدار $J = a \in \mathfrak{A}$، $(\Omega_a, \mathcal{F}_a)$ را برابر با $(\Omega, \mathcal{F})$ تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $V = s \in \mathfrak{S}$ یک زیرفضای برداری یک‌بُعدی از H باشد و h برداری در V با ویژگی $\|h\| = ۱$ باشد. در این صورت، برای پدیدار $J = a$ تعریف می‌کنیم

$$P_{a,s} := J_h. \tag{۵.۵}$$

دقت کنید که اگر $h, h' \in V$ و $\|h\| = \|h'\| = ۱$، آن‌گاه $J_h = J_{h'}$. بنابراین نظریۀ $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ با پدیدارهای Ω–مقدار را تعریف کردیم. حال گیریم $\Omega = \mathbb{R}$. در این حالت، بنابر قضیۀ ۱.۵، می‌توان $\mathfrak{A}$ را با مجموعۀ همۀ عملگرهای خودالحاقی روی H یکسان گرفت. در این صورت، برای یک کنونه مانند $V = s$ و یک پدیدار $T = a$، J را در (۵.۵)، اندازۀ طیفی‌ای در نظر می‌گیریم که بنابر قضیۀ ۱.۵ به T نسبت داده می‌شود.

نظریۀ پدیدار و کنونه‌ای که برای توصیف دستگاه‌های کوانتومی در این زیربخش شرح دادیم، یک نظریۀ مجرّد ریاضی است. این نظریه، توسط فیزیکدانان معمولاً با اِعمال پاره‌ای از تغییرات که به‌اختصار شرح می‌دهیم، برای توصیف دستگاه‌های کوانتومی به‌کار می‌رود. اول از همه، دقت کنید که در فیزیک کوانتومی نظری، همۀ پدیدارها حقیقی‌مقدار هستند. البته این مطلب جای تعجب ندارد و در واقع همان‌گونه که می‌دانیم، «فیزیک علم اندازه‌گیری است» و نتیجۀ هر گونه اندازه‌گیری که در یک آزمایشگاه فیزیک کوانتوم صورت می‌پذیرد، یک عدد حقیقی است. بنابراین فیزیکدانان در چارچوب نظریۀ پدیدار و کنونه‌ای که در این زیربخش به $(\mathbb{R}, H)$ نسبت دادیم، دستگاه‌های کوانتومی را توصیف می‌کنند.

اما تغییراتی که توسط فیزیکدانان اِعمال می‌شود، این است که فضای کنونه‌های یک دستگاه کوانتومی را یک فضای هیلبرت H فرض می‌کنند و به هر بردار ناصفر از H یک کنونه می‌گویند. بردارهایی از H را که نرم آنها برابر با ۱ است، *کنونۀ بهنجار* می‌نامیم. برای بردار ناصفر $h \in H$، به کنونۀ $h/\|h\|$، بهنجارشدۀ h گوییم. رابطۀ (۴.۵) در نوشته‌های فیزیکدانان با دو گزاره بیان می‌شود: اول اینکه برای به‌دست آوردن نتایج صحیح در محاسبۀ احتمال وقوع پیشامدهای گوناگون در یک کنونۀ خاص، باید از بهنجارشدۀ آن استفاده کرد. دوم اینکه عامل فاز یک کنونه، قابل اندازه‌گیری نیست. این دو گزاره را

با آوردن مثالی، توضیح دهیم. کنونه‌های یک دستگاه مکانیک کوانتومی (نانسبیتی) شامل n ذرهٔ بدون اسپین (یعنی با فرض اینکه ذرات ساختار داخلی ندارند) در فضای اقلیدسی سه‌بُعدی، توسط تابع‌های موج

$$w : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{C}$$

که L_2–نرم آنها متناهی است، داده می‌شوند. به سخن دیگر، فضای هیلبرت H که به‌عنوان فضای کنونه‌ها به دستگاه نسبت داده می‌شود، همان $L_2(\mathbb{R}^{3n})$ است. فرض کنیم E یک زیرمجموعهٔ بُرل از $\mathbb{R}^{3n}$ باشد. در این صورت، احتمال اینکه مختصات مکان‌های n ذره‌ای که در دستگاه داریم، عضوی از E باشد، برابر است با

$$\int_E \bar{w}(x) w(x) \mathrm{d}(x) = \int_E |w(x)|^2 \mathrm{d}(x).$$

بنابراین برای اینکه تعبیر احتمالاتی ما درست باشد، باید

$$\int_{\mathbb{R}^{3n}} |w(x)|^2 \mathrm{d}(x) = 1.$$

به عبارت دیگر، $\|w\|_{L_2} = 1$. حال گزارهٔ دوم را توضیح می‌دهیم. به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}^{3n}$، اگر عدد مختلط $w(x)$ را به‌صورت $|w(x)|e^{i\theta_x}$ که در آن، $0 \leq \theta_x < 2\pi$ نمایش دهیم، آن‌گاه به θ_x *فاز* تابع موج w در x گوییم. اگر $0 \leq \alpha < 2\pi$ و w' تابع موجی باشد که برای هر x با

$$w'(x) = |w(x)|e^{i(\theta_x + \alpha)}$$

تعریف شود، آن‌گاه می‌گوییم که w و w' به‌اندازهٔ α اختلاف فاز دارند و α را یک *عامل فاز* نامیم. اینکه «عامل فاز تابع موج w' قابل اندازه‌گیری نیست» یعنی هیچ آزمایش یا فرآیند اندازه‌گیری (یا به سخن دیگر، هیچ پدیداری برای دستگاه) موجود نیست تا بتواند مقدار α را آشکار کند. پس توابع موج w و w'، تمییزناپذیرند و هر دو باید یک کنونه را تعریف کنند.

در مورد پدیدارها باید خاطرنشان کنیم که از نظر فیزیکدانان، هر عملگر خودالحاقی روی H لزوماً به یک پدیدار از دستگاه کوانتومی متناظر نمی‌شود، بلکه تنها آن عملگرهایی پدیدار محسوب می‌شوند که مابه‌ازای آنها در دنیای بیرونی و آزمایشگاه فیزیک کوانتوم، یک فرآیند اندازه‌گیری موجود باشد.[1] لازم به ذکر است که همهٔ عملگرهای (خطی) که در صورت‌بندی نظریِ یک دستگاه کوانتومی ظاهر می‌شوند، لزوماً خودالحاقی نیستند.[2] ولی چنین عملگرهایی قطعاً متناظر با هیچ پدیداری (یا به سخن دیگر، هیچ فرآیند اندازه‌گیری روی دستگاه) نیستند.

[1] البته اینکه چگونه چنین تناظرهایی بین دنیای بیرونی و اشیاء و نظریه‌های ذهنی برقرار می‌شود، از دامنه بحث این نوشته و همچنین دانش مؤلف خارج است.

[2] برای مثال، عملگرهای خلقت و نابودی در مبحث میدان‌های کوانتومی.

دربارهٔ فضای کنونه‌ها باید این نکته را نیز یادآور شد که فیزیکدانان، کنونه‌ها را به دو دسته تقسیم می‌کنند: یک دسته کنونه‌های «فیزیکی» یا کنونه‌هایی که در دنیای واقعی وجود دارند و توسط پدیدارهای دستگاه آشکار می‌شوند؛ و دستهٔ دیگر که بقیهٔ بردارهای H هستند، کنونه‌های «ریاضی» یا نظری نامیده می‌شوند. دربارهٔ تمایز کنونه‌های فیزیکی و ریاضی، بحث مهم «قوانین اَبَرگزینش» نیز مطرح می‌شود. به‌طور خلاصه، یک قانون اَبَرگزینش، یک عملگر (خطی) ویژه روی H است که کنونه‌های فیزیکی دستگاه تنها می‌توانند بردارهای ویژهٔ آن باشند. برای مطالعهٔ توضیحات ریاضی‌وار و مفصل در این زمینه، خوانندگان را به [۳] ارجاع می‌دهیم.

۳.۵. اصل عدم قطعیت. در این زیربخش، اصل «عدم قطعیت» را در چارچوب نظریهٔ پدیدار و کنونهٔ حقیقی‌مقداری که در زیربخش ۲.۵ ساختیم، توصیف می‌کنیم. بنابراین یک فضای هیلبرت H داریم که کنونه‌های نظریه، زیرفضاهای برداری یک‌بُعدی H هستند و هر عملگر خودالحاقی مانند T روی H یک پدیدار با فضای مقادیر $\mathbb{R}$ است. اگر J اندازه طیفی‌ای باشد که بنابر قضیهٔ ۱.۵ به T نسبت داده می‌شود، آن‌گاه به‌ازای هر کنونه مانند V اندازهٔ احتمال $P_{T,V}$ روی $\mathbb{R}$، برابر با J_h است به‌گونه‌ای که h برداری دلخواه از V با ویژگی $||h|| = ۱$ است. اگر $h \in \mathbf{D}(T)$، آن‌گاه بنابر قضیهٔ ۱.۵، میانگین اندازهٔ احتمال $P_{T,V}$ موجود و برابر است با

$$\mathbf{E}_{P_{T,V}} = \int_{\mathbb{R}} x \mathrm{d}P_{T,V}(x) = \int_{\mathbb{R}} x \mathrm{d}J_h(x) = \langle Th, h\rangle.$$

همچنین اگر $h \in \mathbf{D}(T^{۲})$، آن‌گاه

$$\int_{\mathbb{R}} x^{۲} \mathrm{d}P_{T,V}(x) = \int_{\mathbb{R}} x^{۲} \mathrm{d}J_h(x) = \langle T^{۲}h, h\rangle = \langle Th, Th\rangle.$$

بنابراین اگر $h \in \mathbf{D}(T^{۲})$، آن‌گاه واریانس اندازهٔ احتمال $P_{T,V}$ موجود و برابر است با

$$\mathbf{V}_{P_{T,V}} = \langle Th, Th\rangle - \langle Th, h\rangle^{۲}.$$

به $\mathbf{V}_{P_{T,V}}$ عدم *قطعیت* پدیدار T در کنونهٔ V گوییم.

برای یک اندازهٔ احتمال μ روی $\mathbb{R}$ اگر داشته باشیم $\mathbf{V}_\mu = ۰$، آن‌گاه تکیه‌گاه μ باید برابر با زیرمجموعهٔ تک‌نقطه‌ای $\{\mathbf{E}_\mu\} \subset \mathbb{R}$ باشد. به بیان دیگر، باید داشته باشیم $\mu = \delta_{\mathbf{E}_\mu}$. همچنین هرچه واریانس μ بزرگتر باشد، تکیه‌گاه μ نیز زیرمجموعه‌ای بزرگتر و یا به‌تعبیری پخش‌تر در $\mathbb{R}$ است. بنابراین تساوی $\mathbf{V}_{P_{T,V}} = ۰$ را می‌توان این‌گونه تعبیر کرد که نتیجهٔ اِعمال فرآیند اندازه‌گیری متناظر با T روی دستگاه در کنونهٔ V، برابر با $\langle Th, h\rangle$ است و به هر تعداد هم که این فرآیند اندازه‌گیری روی دستگاه در کنونهٔ V اِعمال گردد، همان عدد حقیقی $\langle Th, h\rangle$ به‌دست می‌آید. به سخن دیگر، صفر بودنِ عدم قطعیت

پدیدارِ T در کنونهٔ V، به‌معنی «قطعیت کامل» در نتیجهٔ اندازه‌گیری متناظر است. همچنین اگر $\mathbf{V}_{P_{T,V}}$ عددی «بزرگ» باشد، آن‌گاه مجموعهٔ نتایج به‌دست آمده از تکرار زیادِ فرآیند اندازه‌گیری متناظر با T روی دستگاه در کنونهٔ V، زیرمجموعهٔ پخشی از $\mathbb{R}$ خواهد بود. به عبارت دیگر، «بزرگیِ» عدم قطعیت پدیدارِ T در کنونهٔ V، به‌معنای «کوچک» بودنِ قطعیت نتیجهٔ اندازه‌گیری متناظر است. قضیهٔ زیر مشخص می‌کند که پدیدار T دقیقاً در کدام کنونه‌ها قطعیت کامل دارد.

قضیه ۲.۵. *$\mathbf{V}_{P_{T,V}} = ۰$ اگر و تنها اگر h برداری ویژه برای T باشد.*

اثبات. فرض کنیم h بردار ویژه باشد. عدد مختلط λ موجود است که $Th = \lambda h$. چون T خودالحاقی است، با به‌کار بردنِ (۱.۵) برای $h = k$ دیده می‌شود که λ باید عدد حقیقی باشد. پس

$$\mathbf{V}_{P_{T,V}} = \langle Th, Th\rangle - \langle Th, h\rangle^۲ = \lambda^۲\langle h, h\rangle - (\lambda\langle h, h\rangle)^۲ = ۰.$$

به‌عکس، فرض کنیم $\mathbf{V}_{P_{T,V}} = ۰$ و قرار می‌دهیم $\lambda := \mathbf{E}_{P_{T,V}} = \langle Th, h\rangle$. چون λ میانگین $P_{T,V}$ است، پس عددی حقیقی است. داریم

$$۰ = \mathbf{V}_{P_{T,V}} = \langle Th, Th\rangle - \lambda^۲ = \langle Th - \lambda h, Th - \lambda h\rangle.$$

بنابراین $Th - \lambda h = ۰$؛ یعنی h بردار ویژهٔ T است. □

قضیهٔ زیر یک صورت کلی برای اصل عدم قطعیت ارائه می‌دهد.

قضیه ۳.۵ ([۶]، قضیهٔ ۱۲.۷). *فرض کنیم V و h مانند بالا باشند و T و S دو پدیدار باشند که*

$$h \in \mathbf{D}(TS) \cap \mathbf{D}(ST) \cap \mathbf{D}(T^۲) \cap \mathbf{D}(S^۲).$$

در این صورت،

$$\mathbf{V}_{P_{T,V}}\mathbf{V}_{P_{S,V}} \geq \frac{۱}{۴}|\langle (TS - ST)h, h\rangle|^۲. \tag{۶.۵}$$

اثبات. فرض کنیم

$$T' := T - \langle Th, h\rangle\mathbf{I}, \qquad S' := S - \langle Sh, h\rangle\mathbf{I}.$$

از نامساوی کُشی–شوارتس و خودالحاقی بودنِ T' و S' نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}\langle T'h, T'h\rangle\langle S'h, S'h\rangle &\geq |\langle T'h, S'h\rangle|^{۲}\\ &\geq |\mathfrak{Im}\langle T'h, S'h\rangle|^{۲}\\ &= \frac{۱}{۴}|\langle S'h, T'h\rangle - \langle T'h, S'h\rangle|^{۲}\\ &= \frac{۱}{۴}|\langle T'S'h, h\rangle - \langle S'T'h, h\rangle|^{۲}\\ &= \frac{۱}{۴}|\langle (T'S' - S'T')h, h\rangle|^{۲}.\end{aligned}$$

به‌سادگی بررسی می‌شود که

$$\mathbf{V}_{P_{T,V}} = \langle T'h, T'h\rangle, \quad \mathbf{V}_{P_{S,V}} = \langle S'h, S'h\rangle$$

و

$$TS - ST = T'S' - S'T'.$$

پس نامساوی بالا همان نامساوی مطلوب است. □

مشابه با مثالی که در زیربخش ۲.۵ داشتیم، یک دستگاه کوانتومی شامل یک ذره به جرم m را در نظر بگیرید که در فضای اقلیدسی یک‌بُعدی در حرکت است (در اینجا برای سادگی بیشتر، از آوردنِ یکاهای کمیت‌های گوناگون خودداری می‌کنیم). بنابراین فضای هیلبرتی که به دستگاه نسبت داده می‌شود، عبارت است از $L_{۲}(\mathbb{R})$. پدیدار T که متناظر با اندازه‌گیری مختصات مکانی ذره است، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{D}(T) := \{w \in L_{۲}(\mathbb{R}) : [x \mapsto xw(x)] \in L_{۲}(\mathbb{R})\},$$

$$Tw(x) = xw(x).$$

ثابت می‌شود [۶] که یک عملگر خودالحاقی یکتا مانند S موجود است که $\mathbf{D}(S)$ شامل همهٔ تابع‌های موج هموار w با تکیه‌گاه فشرده است و برای چنین wهایی، Sw به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Sw(x) = -im\hbar\frac{\partial w}{\partial x}(x).$$

در اینجا $\hbar$ *ثابت بهنجارشدهٔ پلانک* نامیده می‌شود. پدیدار S متناظر با اندازه‌گیری تکانهٔ ذره است. اگر w یک تابع موج هموار با تکیه‌گاه فشرده باشد، آن‌گاه به‌سادگی بررسی می‌شود که

$$w \in \mathbf{D}(TS) \cap \mathbf{D}(ST) \cap \mathbf{D}(T^{۲}) \cap \mathbf{D}(S^{۲})$$

و همچنین

$$(TS - ST)w = im\hbar w.$$

بنابراین اگر $w \neq ۰$ و V زیرفضای برداری یک‌بُعدی از $L_۲(\mathbb{R})$ تولید شده با w باشد، آن‌گاه رابطهٔ عدم قطعیت (۶.۵) برای تابع موج بهنجارشدهٔ $h := w/\|w\|_{L_۲}$ به‌صورت

$$\mathbf{V}_{P_{T,V}}\mathbf{V}_{P_{S,V}} \geq \frac{m^۲\hbar^۲}{۴} \tag{۷.۵}$$

در می‌آید. برخی از فیزیکدانان، (۷.۵) را این‌گونه تعبیر می‌کنند که **یک ذرهٔ کوانتومی مسیر ندارد.**

اگر فرض کنیم که هر کنونهٔ فیزیکی دستگاه، یک تابع موج هموار با تکیه‌گاه فشرده باشد، آن‌گاه از ثابت بودنِ طرف راست نامساوی (۷.۵)، نتیجه می‌شود که همواره (یعنی، تحت هر کنونهٔ فیزیکی) اگر مختصات مکان ذره را با دقت زیاد بتوانیم اندازه بگیریم، آن‌گاه دقت اندازه‌گیری تکانه (و در نتیجه سرعت) ذره کم خواهد بود. به‌عکس، اگر خطای اندازه‌گیریِ سرعت ذره کم باشد، آن‌گاه خطای اندازه‌گیری مختصات مکان ذره زیاد خواهد بود. از سوی دیگر، وجود مسیر برای یک ذره، مستلزم وجود مکان دقیق و سرعت دقیق در هر لحظه از حرکت ذره است. بنابراین (۷.۵) این‌گونه تعبیر می‌شود که ما هیچ‌گاه نمی‌توانیم مسیر حرکت یک ذره کوانتومی را با دقت مطلوب اندازه بگیریم. با این اوصاف و با توجه به اینکه «فیزیک علم اندازه‌گیری است»، چندان هم نباید غیرمنطقی باشد که در نظریهٔ فیزیکی‌مان فرض کنیم «ذرهٔ کوانتومی مسیر ندارد».

به‌طور کلی، فیزیکدانان زوج $\{T, S\}$ از دو پدیدار (عملگر خودالحاقی) را هم‌آزما در نظر می‌گیرند اگر و تنها اگر باهم جابه‌جا شوند:

$$(\text{گردایهٔ } \{T,S\} \text{ هم‌آزما است}) \iff (TS = ST). \tag{۸.۵}$$

چون توصیف دقیق و ریاضی‌وارِ هم‌آزماییِ گردایهٔ $\{T, S\}$ و استنتاج (۸.۵)، مستلزم اضافه کردن اصولی به مدل کُلموگُرُفیِ نظریهٔ احتمال است، در اینجا آن را بررسی نمی‌کنیم و خوانندگان را به [۱۱] ارجاع می‌دهیم. اما می‌توان گفت که قضیهٔ ۵.۶ که در بخش بعدی بررسی می‌شود، بیانی مشابه با (۸.۵) دارد. همچنین دقت کنید که اگر T و S جابه‌جا شوند، آن‌گاه طرف راست نامساوی (۶.۵) برابر با صفر است.

۶. صورت‌بندی مفاهیم پایه‌ای فیزیک کوانتوم به‌کمک جبرهای C^*

در این بخش پایانی، به‌کمک جبرهای C^*، نظریهٔ پدیدار و کنونهٔ دیگری برای بررسی دستگاه‌های کوانتومی معرفی می‌کنیم که «اندکی» با نظریهٔ بخش ۵ تفاوت دارد. در واقع، این نظریه همان نظریهٔ

پیشین است با این تفاوت که پدیدارها دیگر «بی‌کران-مقدار» نیستند، بلکه مقادیرشان را در فضاهای فشرده می‌گیرند. از ویژگی‌های این نظریه، ارائه ساده‌ترِ مفهوم هم‌آزمایی به‌کمک دوگانیِ گلفاند است.

۱.۶. چند تعریف ابتدایی از نظریهٔ جبرهای C^*. در این زیربخش، برخی از مفاهیم پایه‌ای مورد نیاز از نظریهٔ جبرهای C^* را مرور می‌کنیم. برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه، خواننده را به [۹] ارجاع می‌دهیم. فرض کنیم A یک جبر مختلط باشد. (A یک فضای برداری مختلط به‌همراه یک ضرب دوخطی شرکت‌پذیر است طوری که A همراه با این ضرب، تشکیل یک حلقهٔ یکدار می‌دهد). مقصود از یک برگشت یا نگاشت $*$ روی A، یک نگاشت مزدوج خطی $a \mapsto a^*$ از A به A است به‌طوری که به‌ازای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $(ab)^* = b^*a^*$ و $a^{**} = a$. به یک جبر مختلط همراه با یک برگشت، $*$-جبر گوییم. مقصود از یک C^*-جبر، یک $*$-جبر A همراه با نرمی مانند $\|\cdot\|$ است به‌طوری که $(A, \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ باشد و به‌ازای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ و $\|a^*a\| = \|a\|^2$. مجموعهٔ اعداد مختلط $\mathbb{C}$، ساده‌ترین مثال از یک جبر C^* است.

فرض کنیم Ω فضای توپولوژیک فشرده و هاوسدُرف باشد. در این صورت، مجموعهٔ توابع مختلط-مقدار و پیوسته روی Ω که با $\mathbf{C}(\Omega)$ نشان می‌دهیم، همراه با عمل‌های جمع، ضرب، ضرب در عدد و مزدوج‌گیری به‌عنوان برگشت، و نرم سوپرمم، یک جبر C^* تعویض‌پذیر است. حال فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد. $\mathbf{B}(H)$، مجموعهٔ عملگرهای پیوسته از H به H، همراه با اعمال جمع، ترکیب و الحاقی عملگرها همراه با نرم عملگری، یک جبر C^* است.

فرض کنیم A و B جبر C^* باشند. به نگاشت $\phi : A \to B$ یک $*$-*هم‌ریختی* گوییم اگر ϕ خطی و حافظ ضرب، برگشت و عضو واحد باشد. اگر بُعد فضای هیلبرت مختلط H متناهی و برابر با n باشد، آن‌گاه هر پایهٔ هیلبرتی H، یک $*$-یک‌ریختی بین $\mathbf{B}(H)$ و $\mathbf{M}_n$ القا می‌کند. در اینجا $\mathbf{M}_n$ جبر C^* ماتریس‌های مختلط و مربعی از مرتبهٔ $n \times n$ همراه با اعمال جمع، ضرب و الحاقیِ ماتریس‌ها است.

فرض کنیم A یک جبر C^* باشد. به عضو a از A *خودالحاقی* گوییم اگر $a = a^*$. به a *مثبت* گوییم اگر عضو خودالحاقی b از A موجود باشد که $a = b^2$. مقصود از یک کنونه برای A، یک تابعک خطی و کراندار s روی A است (یعنی s یک عملگر پیوسته از A به $\mathbb{C}$) به‌گونه‌ای که نرم تابعکی (عملگری) آن برابر با ۱ است و عضو واحد A را نیز به ۱ می‌نگارد. می‌دانیم که s عضوهای خودالحاقی A را به اعداد حقیقی و عضوهای مثبت A را به اعداد حقیقی مثبت می‌نگارد. مجموعهٔ کنونه‌های A را با $\mathcal{S}(A)$ نمایش می‌دهیم. $\mathcal{S}(A)$ یک زیرمجموعهٔ محدب از دوگان A، یعنی فضای باناخ متشکل از تابعک‌های خطی و کراندار روی A است. همچنین $\mathcal{S}(A)$ همراه با توپولوژی ضعیف-$*$ فشرده و هاوسدُرف است. به هر کنونه که در کرانهٔ مجموعهٔ محدب $\mathcal{S}(A)$ قرار داشته باشد، یک *کنونهٔ خالص* برای A گوییم.

فرض کنیم T یک ماتریس مثبت با ویژگی $\mathbf{tr}(T) = 1$ در $\mathbf{M}_n$ باشد. در این صورت، T یک کنونه s_T برای $\mathbf{M}_n$ به‌شکل زیر تعریف می‌کند:

$$s_T(M) = \mathbf{tr}(TM) \qquad (M \in \mathbf{M}_n).$$

می‌دانیم که تناظر $T \mapsto s_T$ از مجموعهٔ ماتریس‌های مثبت با اثر ۱ در $\mathbf{M}_n$، به $\mathcal{S}(\mathbf{M}_n)$ یک تناظر یک‌به‌یک و پوشا است. فرض کنیم h برداری با ویژگی $\|h\| = 1$ از فضای هیلبرت H باشد. در این صورت، h یک کنونهٔ خالص s_h برای $\mathbf{B}(H)$ به‌شکل زیر تعریف می‌کند:

$$a \mapsto \langle ah, h\rangle \qquad (a \in \mathbf{B}(H)).$$

۲.۶. قضیهٔ ریس و قضیهٔ دوگانی گلفاند. فرض کنیم Ω یک فضای توپولوژیک فشرده و هاوسدُرف باشد. هر اندازهٔ احتمال μ روی Ω به‌صورت کانونی یک کنونهٔ s_μ برای C^*–جبر $\mathbf{C}(\Omega)$ تعریف می‌کند:

$$s_\mu(a) := \int_\Omega a \mathrm{d}\mu \qquad (a \in \mathbf{C}(\Omega)).$$

به یک اندازهٔ احتمال μ روی Ω منظم گوییم اگر به‌ازای هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر E از Ω داشته باشیم

$$\mu(E) = \inf \mu(U) = \sup \mu(K)$$

که در آن، $\inf$ روی همهٔ زیرمجموعه‌های باز مانند U شامل E و $\sup$ روی همهٔ زیرمجموعه‌های بسته مانند K در E گرفته می‌شود.

قضیه ۱.۶ (ریس). *نگاشت $\mu \mapsto s_\mu$ یک تناظر یک‌به‌یک از مجموعهٔ همهٔ اندازه‌های احتمال منظم روی Ω به $\mathcal{S}(\mathbf{C}(\Omega))$ است.*

فرض کنیم $\omega \in \Omega$. در این صورت، برای کنونهٔ $s_\omega := s_{\delta_\omega}$ به‌سادگی دیده می‌شود که

$$s_\omega(a) = a(\omega) \qquad (a \in \mathbf{C}(\Omega)).$$

بنابراین s_ω یک $*$–همریختی از $\mathbf{C}(\Omega)$ به $\mathbb{C}$ است. همچنین s_ω یک کنونهٔ خالص برای $\mathbf{C}(\Omega)$ است.

قضیه ۲.۶. *تناظر $\omega \mapsto s_\omega$ یک همانریختی از Ω به مجموعهٔ همهٔ کنونه‌های خالص $\mathbf{C}(\Omega)$ است.*

فرض کنیم $f : \Omega \to \Omega'$ یک نگاشت پیوسته بین فضاهای توپولوژیک فشرده و هاوسدُرف باشد. به‌سادگی دیده می‌شود که نگاشت $\mathbf{C}(f) : \mathbf{C}(\Omega') \to \mathbf{C}(\Omega)$ با تعریفِ

$$\mathbf{C}(f)(a') := a' \circ f \qquad (a' \in \mathbf{C}(\Omega'))$$

یک $*$-همریختی است. در نتیجه $\mathbf{C}$ را می‌توان یک تابعگون پادهم‌ورد از رستهٔ فضاهای توپولوژیک فشرده و هاوسدُرف (همراه با نگاشت‌های پیوسته به‌مثابهٔ ریختارهای رسته) به رستهٔ جبرهای C^* تعویض‌پذیر (همراه با $*$-همریختی‌ها به‌مثابه ریختارهای رسته) در نظر گرفت. فرض کنیم A یک جبر C^* تعویض‌پذیر باشد. $\Delta(A)$ را مجموعهٔ همهٔ $*$-همریختی‌ها از A به $\mathbb{C}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، $\Delta(A)$ دقیقاً با مجموعهٔ کنونه‌های خالص A برابر است و با توپولوژی القایی از $\mathcal{S}(A)$، یک فضای توپولوژیک فشرده و هاوسدُرف است.

فرض کنیم $\phi : A \to A'$ یک $*$-همریختی بین جبرهای C^* تعویض‌پذیر باشد. به‌سادگی دیده می‌شود که نگاشت $\Delta(\phi) : \Delta(A') \to \Delta(A)$ با تعریف

$$\Delta(\phi)(t') := t' \circ \phi \qquad (t' \in \Delta(A'))$$

پیوسته است. بنابراین Δ را می‌توان یک تابعگون پادهم‌ورد از رستهٔ جبرهای C^* تعویض‌پذیر به رستهٔ فضاهای توپولوژیک فشرده و هاوسدُرف در نظر گرفت.

قضیه ۳.۶ (دوگانی گلفاند). *تابعگون‌های $\mathbf{C}$ و Δ وارون یکدیگر هستند. بنابراین رستهٔ فضاهای توپولوژیک فشرده و هاوسدُرف و رستهٔ جبرهای C^* تعویض‌پذیر دوگان یکدیگر هستند.*

بنابراین اگر A یک جبر C^* تعویض‌پذیر باشد، آن‌گاه یک $*$-یکریختی طبیعی $a \mapsto \hat{a}$ از A به $\mathbf{C}(\Delta(A))$ موجود است که به‌صورت

$$\hat{a}(t) := t(a) \qquad (a \in A, t \in \Delta(A))$$

تعریف می‌شود. همچنین اگر $s \in \mathcal{S}(A)$، آن‌گاه بنابر قضیهٔ ریس، یک اندازهٔ احتمال منظم و یکتا مانند μ_s روی $\Delta(A)$ موجود است که به‌طور کامل با اتحاد زیر مشخص می‌شود:

$$s(a) = \int_{\Delta(A)} \hat{a} \mathrm{d}\mu_s \qquad (a \in A).$$

۳.۶. نظریهٔ پدیدار و کنونهٔ دوم برای توصیف دستگاه‌های کوانتومی. فرض کنیم A یک جبر C^* باشد. به A یک نظریهٔ پدیدار و کنونه $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ به‌شرح زیر نسبت می‌دهیم. مجموعهٔ کنونه‌های نظریهٔ را با مجموعهٔ کنونه‌های A یکی می‌گیریم: $\mathfrak{S} \equiv \mathcal{S}(A)$. مجموعهٔ پدیدارهای این نظریه را نیز مجموعهٔ همهٔ C^*-زیرجبرهای تعویض‌پذیر از A (که شامل عضو واحد A نیز باشند) در نظر می‌گیریم:

$$\mathfrak{A} \equiv \{B \subseteq A : \text{تعویض‌پذیر } C^* \text{ جبر } B\}.$$

فضای اندازه‌پذیر منسوب به یک پدیدار B را فضای توپولوژیک فشرده و هاوسدُرف $\Delta(B)$ تعریف می‌کنیم. برای تکمیل تعریف، باید اندازهٔ احتمال $P_{B,s}$ را که هر کنونه مانند s از نظریه روی $\Delta(B)$ القا می‌کند، مشخص کنیم. فرض کنیم s یک کنونه از نظریه باشد. بنابراین $s \in \mathcal{S}(A)$ و لذا تحدید s به B نیز یک کنونه برای C^*-جبر B است: $s|_B \in \mathcal{S}(B)$. حال $P_{B,s}$ را آن اندازهٔ احتمال منظم و یکتایی روی $\Delta(B)$ تعریف می‌کنیم که در

$$s(b) = s|_B(b) = \int_{\Delta(B)} \hat{b} \mathrm{d}P_{B,s} \qquad (b \in B)$$

صدق می‌کند.

۴.۶. هم‌آزمایی. در پایان، مفهوم هم‌آزمایی را در نظریهٔ پدیدار و کنونه $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ منسوب به یک C^*-جبر A بررسی می‌کنیم. فرض کنیم A، $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{S}$ مانند زیربخش ۳.۶ باشند. برای $B, B' \in \mathfrak{A}$ که $B' \subseteq B$، گیریم $\phi_{B'B} : B' \to B$ نگاشت نشاننده باشد. بنابراین $\phi_{B'B}$ یک $*$-هم‌ریختی است و بنابر دوگانی گلفاند،

$$f_{BB'} := \Delta(\phi_{B'B}) : \Delta(B) \to \Delta(B')$$

نگاشتی پیوسته و پوشا است. اگر $s \in \mathcal{S}(A)$ یک کنونه از نظریه باشد، آن‌گاه می‌توان (نه‌چندان دشوار) نشان داد که $P_{B',s} = P_{B,s}\rceil_{f_{BB'}}$. به‌بیان دیگر، $P_{B',s}$ همان توزیع احتمال متغیر تصادفی $f_{BB'}$ روی فضای احتمال $(\Delta(B), P_{B,s})$ است. بنابراین

قضیه ۴.۶. *اگر B و B'، C^*-زیرجبرهای تعویض‌پذیر از A باشند طوری که $B' \subseteq B$، آن‌گاه پدیدار منسوب به B'، به‌صورت کانونی تابعی از پدیدار منسوب به B است.*

گیریم B_1 و B_2 دو C^*-زیرجبر تعویض‌پذیر از A باشند. می‌گوییم B_1 و B_2 باهم جابه‌جا می‌شوند اگر به‌ازای هر $b_1 \in B_1$ و $b_2 \in B_2$ داشته باشیم $b_1 b_2 = b_2 b_1$.

قضیه ۵.۶. *در $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ هر گردایه از پدیدارها که اعضایش دوبه‌دو باهم جابه‌جا شوند، هم‌آزما است.*

اثبات. گیریم $\{B_i\}_{i\in I}$ گردایه‌ای از C^*-زیرجبرهای تعویض‌پذیر A باشد به‌طوری که به‌ازای هر $i, j \in I$، B_i و B_j باهم جابه‌جا شوند. فرض کنیم B کوچک‌ترین C^*-زیرجبر از A باشد که شامل هر B_i است. به‌سادگی دیده می‌شود که B یک C^*-زیرجبر تعویض‌پذیر است. بنابر قضیهٔ ۴.۶، هر پدیدار B_i تابعی از پدیدار B است. حال از قضیهٔ ۱۰.۴ نتیجه می‌شود که گردایهٔ $\{B_i\}_{i\in I}$ هم‌آزما است. □

مراجع

[1] Araki, H., *Mathematical Theory of Quantum Fields*, Vol. **101**, Oxford University Press, Oxford, 1999.

[2] Atiyah, M., *Topological quantum field theories*, *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.* **68** (1988), no. 1, 175–186.

[3] Bogoliubov, N. N., Logunov, A. A., Oksak, A. I., Todorov, L.T., *General Principles of Quantum Field Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.

[4] Connes, A., Marcolli, M., *Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives*, Vol. **55**, American Mathematical Soc., New York, 2008.

[5] Givental, A. B., *Gromov–Witten invariants and quantization of quadratic Hamiltonians*, *Moscow Mathematical Journal*, **1** (2001), no. 4, 551–568.

[6] Hall, B. C., *Quantum Theory for Mathematicians*, Springer-Verlag, New York, 2013.

[7] Holevo, A. S., *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, Scuola Normale Superiore de Pisa, Pisa, 2011.

[8] Minio, R., *An interview with Michael Atiyah*, *The Mathematical Intelligencer*, **6** (1984), 9–19.

[9] Murphy, G. J., *C*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, New York, 2014.

[10] Rudin, W., *Functional Analysisy*, John Wiley & Sons, London, 1991.

[11] Sadr, M. M., *Abstract theory of observable and state*, (Preprint).

[12] Tao, T., *An Introduction to Measure Theory*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[13] Turaev, V. G., *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds*, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Gottingen, 2010.

[14] Zeidler, E., *Quantum Field Theory I: Basics in Mathematics and Physics, a Bridge Between Mathematicians and Physicists*, Springer-Verlag, New York, 2016.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۷/۹/۲۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۲/۲۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۳/۵

میثم میثمی صدر: دانشگاه تحصیلات تکمیلی در علوم پایه، زنجان

رایانامه: sadr@iasbs.ac.ir