فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۹، شمارهٔ ۶۷ (پاییز و زمستان ۱۳۹۹) صص. ۲۰۹ تا ۲۲۴

محاسبهٔ تقریبی انتگرال بیضوی کامل نوع سوم

رامتین گلبانگ

چکیده

در این مقاله، روشی برای محاسبهٔ انتگرال بیضوی کامل نوع سوم ارائه شده است. این روش، با تعمیم رابطهٔ گاوس در مورد انتگرال بیضوی نوع اول به‌دست آمده است و در شرایطی خاص (که ذکر خواهد شد)، جواب را با دقت قابل قبولی تخمین می‌زند.

۱. مقدمه

انتگرال‌های بیضوی در بسیاری از کاربردهای ریاضیات ظاهر می‌شوند؛ از جمله می‌توان به معادلات انتگرال، مکانیک سماوی، مکانیک سیالات و بسیاری از محاسبات مربوط به مساحت و حجم‌های شکل‌های هندسی اشاره کرد. به همین دلیل از قرن هجدهم، به محاسبات تقریبی آنها توجه شده است. لیوویل ثابت کرد که انتگرال‌های بیضوی را نمی‌توان برحسب توابع مقدماتی بیان کرد. لژاندر جداول گسترده‌ای برای محاسبهٔ این انتگرال‌ها برحسب دامنه‌ها و مدول‌های مختلف تنظیم کرد که در آنها، نه‌تنها آوند φ (به مفهوم زاویه) با درجه بیان شده بود، بلکه مدول k هم همچون سینوس یك زاویهٔ θ در نظر گرفته می‌شد که در جدول به‌جای مدول، برحسب درجه مشخص می‌شد. انتگرال‌های بیضوی در تاریخ ریاضیات، برای اولین بار در پیوند با مسئلهٔ محاسبهٔ محیط بیضی مطرح شد. این نوع انتگرال‌ها را برای جولیو فاگنانو[۱] و لئونارد اویلر[۲] بررسی کردند. پس از آن، آبل نشان داد که انتگرال‌های بیضوی در ویژگی‌های جمع‌پذیری گوناگونی صدق می‌کنند. او نخستین ریاضیدانی بود که انتگرال‌های بیضوی را در حالت مختلط بررسی کرد و وجود تناوب دوگانه را (در حالت مختلط) برای موارد خاصی ثابت کرد. پس از آبل، می‌توان از ژاکوبی و وایرشتراس به‌عنوان ریاضیدانانی نام برد که در این زمینه به پژوهش پرداختند.

[۱] Giulio Fagnano [۲] Leonhard Euler

انتگرال‌های بیضوی با نمادهای لژاندر به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$F(\varphi,k)=\int_{۰}^{\varphi}\frac{d\theta}{\sqrt{۱-k^{۲}\sin^{۲}\theta}},$$ نوع اول

$$E(\varphi,k)=\int_{۰}^{\varphi}\sqrt{۱-k^{۲}\sin^{۲}\theta}\,d\theta,$$ نوع دوم

$$\Pi(\varphi,n,k)=\int_{۰}^{\varphi}\frac{d\theta}{(۱+n\sin^{۲}\theta)\sqrt{۱-k^{۲}\sin^{۲}\theta}}$$ نوع سوم

که در آنها، $۱>k>۰$ و $n\neq ۰$. عدد k *مدول انتگرال* و φ دامنهٔ آن نام دارد. اگر $n=۰$، آن‌گاه انتگرال بیضوی نوع سوم، به نوع اول تبدیل می‌شود. ثابت می‌کنیم که در حالت $n=-۱$، انتگرال بیضوی نوع سوم واگرا است. با تعویض متغیرهای $v=\sin\theta$ و $x=\sin\varphi$، انتگرال‌های مذکور را می‌توان برحسب نمادهای ژاکوبی بیان کرد:

$$F(x,k)=\int_{۰}^{x}\frac{dv}{\sqrt{(۱-v^{۲})(۱-k^{۲}v^{۲})}},$$ نوع اول

$$E(x,k)=\int_{۰}^{x}\sqrt{\frac{۱-k^{۲}v^{۲}}{۱-v^{۲}}}dv,$$ نوع دوم

$$\Pi(x,n,k)=\int_{۰}^{x}\frac{dv}{(۱+nv^{۲})\sqrt{(۱-v^{۲})(۱-k^{۲}v^{۲})}}.$$ نوع سوم

انتگرال‌های بیضوی را کامل می‌نامیم اگر $\varphi=\frac{\pi}{۲}$ (با نمادهای لژاندر) یا به‌طور معادل، $x=۱$ (با نمادهای ژاکوبی). انتگرال‌های بیضوی کامل نوع اول و دوم را به‌ترتیب با نمادهای K و E نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر،

$$K=F(\pi/۲,k),\qquad E=E(\pi/۲,k).$$

۲. بسط انتگرال‌های بیضوی کامل نوع اول و دوم

با فرضِ $\Delta\theta=\sqrt{۱-k^{۲}\sin^{۲}\theta}$ و با استفاده از بسط دو جمله‌ای، داریم

$$\Delta\theta=۱-\frac{۱}{۲}k^{۲}\sin^{۲}\theta-\frac{۱}{۲\times ۴}k^{۴}\sin^{۴}\theta-\frac{۳}{۲\times ۴\times ۶}k^{۶}\sin^{۶}\theta-\cdots,$$
$$\frac{۱}{\Delta\theta}=۱+\frac{۱}{۲}k^{۲}\sin^{۲}\theta+\frac{۱\times ۳}{۲\times ۴}k^{۴}\sin^{۴}\theta+\frac{۱\times ۳\times ۵}{۲\times ۴\times ۶}k^{۶}\sin^{۶}\theta+\cdots$$

و با توجه به رابطهٔ

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta d\theta = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \times \frac{\pi}{2} \qquad (n \geq 1),$$

نتیجه می‌گیریم که

$$K = F(\frac{\pi}{2}, k) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 k^{2n}\right\}, \qquad (1.2)$$

$$E = E(\frac{\pi}{2}, k) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \sum_{n\geq 1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \frac{k^{2n}}{2n-1}\right\}. \qquad (2.2)$$

وقتی k کوچک است، دستورهای (۱.۲) و (۲.۲) برای محاسبهٔ تقریبی انتگرال‌های بیضوی کامل نوع اول و دوم بسیار مناسب‌اند. برای مثال، مقدار تقریبی $E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ را با استفاده از (۲.۲) به‌دست می‌آوریم (این مثال در [۱] آمده است):

$$E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{256} - \frac{5}{2048} - \frac{175}{262144} - \frac{441}{2097152} - \cdots\right). \qquad (3.2)$$

در اینجا اگر تنها از همین جمله‌هایی که نوشته‌ایم استفاده کنیم، خطا (که مقدار آن منفی است) این‌گونه برآورد می‌شود:

$$\begin{aligned}
|\Delta| &= \frac{\pi}{2}\left\{\left(\frac{11!!}{12!!}\right)^2 \times \frac{1}{2^6} \times \frac{1}{11} + \left(\frac{13!!}{14!!}\right)^2 \times \frac{1}{2^7} \times \frac{1}{13} + \left(\frac{15!!}{16!!}\right)^2 \times \frac{1}{2^8} \times \frac{1}{15} + \cdots\right\} \\
&< \frac{\pi}{2}\left(\frac{11!!}{12!!}\right)^2 \times \frac{1}{2^6} \times \frac{1}{11}\left\{1 + \left(\frac{13}{14}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{13\times 15}{14\times 16}\right)^2 \times \frac{1}{2^2} + \cdots\right\} \\
&< \frac{\pi}{2}\left(\frac{11!!}{12!!}\right)^2 \times \frac{1}{2^6} \times \frac{1}{11}\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right\} = \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{11!!}{12!!}\right)^2 \times \frac{1}{2^6} \times \frac{1}{11} \times 2 \\
&= \pi \times \left(\frac{11!!}{12!!}\right)^2 \times \frac{1}{2^6} \times \frac{1}{11} \approx 0.00027.
\end{aligned}$$

مقدار $E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ با احتساب جمله‌هایی که در (۳.۲) آمده‌اند، برابراست با ۱٫۳۵۰۸۲۵ و با توجه به اینکه Δ عددی منفی است، داریم

$$1.350825 - \Delta \leq E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq 1.350825,$$

یعنی

$$1/350557 \leq E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq 1/350825$$

و یا

$$E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1/350691 \pm \delta$$

که در آن، $\delta = 1/34 \times 10^{-4}$.

۳. انتگرال‌های بیضوی ناکامل نوع اول و دوم

چون هدف ما در این مقاله، بررسی انتگرال‌های کامل است، این بخش را به‌اختصار بیان می‌کنیم. لازم به ذکر است که از قرن هجدهم میلادی تاکنون، روابط بسیاری برای انتگرال‌های بیضوی نوع اول، دوم و سوم و همچنین ارتباط بین این انتگرال‌ها به‌دست آمده است که خیلی از آنها را می‌توان در [۷] و [۵] مشاهده کرد. اثبات رابطه‌هایی که در این بخش آمده‌اند، در بسیاری از مراجع سنّتی مربوط به این موضوع یافت می‌شود؛ برای مثال، می‌توان به [۴] یا [۶] اشاره کرد.

اگر تعریف کنیم

$$S_{2n} = \int_0^{\varphi} \sin^{2n}\theta d\theta \qquad (n \geq 0),$$

آن‌گاه خواهیم داشت

$$F(\varphi, k) = S_0(\varphi) + \sum_{n\geq 1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} S_{2n}(\varphi),$$
$$E(\varphi, k) = S_0(\varphi) - \sum_{n\geq 1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \frac{S_{2n}(\varphi)}{2n-1}.$$

در برخی موارد، استفاده از تبدیل لاندِن[1] نیز سودمند خواهد بود. با تعویض متغیر

$$k \sin\varphi = \sin(2\varphi_1 - \varphi)$$

خواهیم داشت

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} = \frac{2}{1+k} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - A_1^2 \sin^2\theta}}.$$

[1] Landen

رابطهٔ بالا، به *رابطهٔ لاندنِ* مشهور است که در آن، $A_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$. به عبارت دیگر،

$$F(\varphi, k) = \frac{2}{1+k} F(\varphi_1, A_1)$$

که در آن، $k < A_1 < 1$. با تکرار این عمل، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} F(\varphi, k) &= \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3 \cdots}{A_0}} \int_0^{\gamma} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\theta}} \\ &= \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3 \cdots}{A_0}} \log\Big(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right)\Big). \end{aligned}$$

که در آن،

$$A_0 = k, \quad A_1 = \frac{2\sqrt{A_0}}{1+A_0}, \quad A_2 = \frac{2\sqrt{A_1}}{1+A_1}, \ldots, \quad \lim \varphi_n = \gamma, \ldots.$$

با همین نمادگذاری، دستوری مشابه برای $E(\varphi, k)$ موجود است:

$$\begin{aligned} E(\varphi, k) = F(\varphi, k) &\left[1 + A_0\left(1 + \frac{2}{A_1} + \frac{2^2}{A_1 A_2} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{A_1 A_2 \cdots A_{n-1}} - \frac{2^n}{A_1 A_2 \cdots A_{n-1}}\right)\right] \\ - A_0 &\left[\sin\varphi + \frac{2\sin\varphi_1}{\sqrt{A_0}} + \frac{2^2 \sin\varphi_2}{\sqrt{A_0 A_1}} + \cdots + \frac{2^{n-1}\sin\varphi_{n-1}}{\sqrt{A_0 A_1 \cdots A_{n-1}}} - \frac{2^n \sin\varphi_n}{A_0 A_1 \cdots A_{n-1}}\right]. \end{aligned}$$

دستورهای بالا وقتی سودمند هستند که k خیلی کوچک باشد. اگر k نزدیک به ۱ باشد، تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} B_0 &= k, & B_p &= \frac{1 - \sqrt{1 - B_{p-1}^2}}{1 + \sqrt{1 - B_{p-1}^2}}, \\ \varphi_0 &= \varphi, & \tan(\varphi_p - \varphi_{p-1}) &= \sqrt{1 - B_{p-1}^2}\tan\varphi_{p-1}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

در این صورت،

$$F(\varphi, k) = \lim_{n \to \infty} (1 + B_1)(1 + B_2)\cdots(1 + B_n)\frac{\gamma}{2^n}.$$

که در آن، $\gamma = \lim \varphi_n$ و با نمادگذاری (۱.۳)، برای انتگرال بیضوی نوع دوم ناکامل داریم

$$\begin{aligned} E(\varphi, k) = F(\varphi, k) &\left[1 - \frac{1}{2}B_0^2\left(1 + \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2^2}B_1 B_2 + \frac{1}{2^3}B_1 B_2 B_3 + \cdots\right)\right] \\ + B_0 &\left[\frac{1}{2}\sqrt{B_1}\sin\varphi_1 + \frac{1}{2^2}\sqrt{B_1 B_2}\sin\varphi_2 + \frac{1}{2^3}\sqrt{B_1 B_2 B_3}\sin\varphi_3 + \cdots\right] \end{aligned}$$

و برای محاسبهٔ انتگرال‌های بیضوی کامل نوع اول و دوم، می‌توانیم از روابط زیر استفاده کنیم که در آن، از نمادگذاری‌های (۱.۳) استفاده شده است:

$$K = F(\frac{\pi}{۲}, k) = \frac{\pi}{۲}(۱ + B_۱)(۱ + B_۲)(۱ + B_۳)\cdots ,$$

$$E = E(\frac{\pi}{۲}, k) = F(\frac{\pi}{۲}, k)\left[۱ - \frac{۱}{۲}B_۰^۲\left(۱ + \frac{۱}{۲}B_۱ + \frac{۱}{۲}B_۱B_۲ + \frac{۱}{۲^۳}B_۱B_۲B_۳ + \cdots\right)\right].$$

لازم به ذکر است که کارلسون[۱] جدیدترین کارها را در این زمینه انجام داده است و الگوریتم‌هایی برای محاسبهٔ انتگرال‌های بیضوی کامل و ناکامل نوع اول ارائه کرده است که در اینجا آنها را مرور می‌کنیم (این الگوریتم‌ها در [۳] آمده است).

قضیه ۱.۳. *فرض می‌کنیم $x_۰ = ۱$ و $y_۰ = \sqrt{۱ - k^۲}$ و تعریف می‌کنیم*

$$x_{m+۱} = \frac{۱}{۲}(x_m + y_m), \qquad y_{m+۱} = \sqrt{x_m y_m}$$

که در آن، $m \geq ۰$. اگر x_n و y_n مقادیر نهایی این دنباله‌های تکراری برای مقادیر مشخصی از m باشد، آن‌گاه

$$K = F(\frac{\pi}{۲}, k) \approx \frac{\pi}{x_n + y_n}.$$

قضیه ۲.۳. *فرض می‌کنیم*

$$A_۰ = \frac{۱}{۳}(x_۰ + y_۰ + z_۰), z_۰ = ۱, y_۰ = ۱ - k^۲\sin^۲\varphi, x_۰ = \cos^۲\varphi$$

و تعریف می‌کنیم

$$A_{m+۱} = \frac{۱}{۴}(A_m + \lambda_m), \quad \lambda_m = \sqrt{x_m y_m} + \sqrt{x_m z_m} + \sqrt{y_m z_m},$$
$$x_{m+۱} = \frac{۱}{۴}(x_m + \lambda_m), \quad y_{m+۱} = \frac{۱}{۴}(y_m + \lambda_m), \quad z_{m+۱} = \frac{۱}{۴}(z_m + \lambda_m)$$

که در آن، $m \geq ۰$. اگر A_n مقدار نهایی این دنباله‌های تکراری برای مقدار مشخص از m باشد، آن‌گاه

$$E_۳ = XYZ, \quad E_۲ = XY - Z^۲, \quad X = \frac{A_۰ - x_۰}{۴^n A_n}, \quad Y = \frac{A_۰ - y_۰}{۴^n A_n}, \quad Z = -X - Y.$$

در این صورت، خواهیم داشت

$$F(\varphi, k) \approx (\sin\varphi)A_n^{-۱/۲}\left(۱ - \frac{۱}{۱۰}E_۲ + \frac{۱}{۱۴}E_۳ + \frac{۱}{۲۴}E_۲^۲ - \frac{۳}{۴۴}E_۲E_۳\right).$$

---
[۱] Carlson

۴. رابطهٔ گاوس

نخست رابطهٔ گاوس را درباره انتگرال‌های بیضوی کامل نوع اول مرور می‌کنیم که در ادامه به آن نیاز خواهیم داشت. اگر $a > b > 0$، دو دنبالهٔ $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ را به‌صورت

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (n \geq 0) \qquad (۱.۴)$$

تعریف می‌کنیم. به‌سادگی ثابت می‌شود که

$$a_0 > a_1 \cdots > a_n > \cdots > b_n > \cdots > b_1 > b_0.$$

پس دنبالهٔ $\{a_n\}$ اکیداً نزولی و از پایین کراندار به b و دنبالهٔ $\{b_n\}$ اکیداً صعودی و از بالا کراندار به a است و لذا هر دو دنباله همگرا هستند. فرض می‌کنیم $\alpha = \lim a_n$ و $\beta = \lim b_n$. در این صورت، اگر از طرفین رابطهٔ $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ حد بگیریم، خواهیم داشت $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$، یعنی $\alpha = \beta$. پس دو دنبالهٔ $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به حد مشترک $\mu = \mu(a, b)$ میل می‌کنند که به‌پیروی از گاوس، آن را واسطهٔ حسابی ـ هندسی دو عدد a و b می‌نامیم.

قبل از ادامهٔ بحث، یادآوری می‌کنیم که هر انتگرال بیضوی کامل نوع اولِ

$$F(\frac{\pi}{2}, k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \qquad (۲.۴)$$

قابل بیان به‌صورت انتگرالِ

$$G(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \qquad (۳.۴)$$

است که در آن، $a > b > 0$. به‌عکس، هر انتگرال به‌شکل (۳.۴) را می‌توان به‌صورت (۲.۴) نوشت.
اکنون رابطهٔ گاوس چنین است:

$$\begin{aligned} G(a, b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}, \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \varphi + b_n^2 \sin^2 \varphi}} = G(a_n, b_n) \qquad (۴.۴) \end{aligned}$$

برای هر $n \geq ۱$ که در آن، دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ با (۱.۴)، تعریف شده‌اند. رابطهٔ گاوس در ادامهٔ مقاله ثابت می‌شود. از سوی دیگر، با توجه به (۴.۴)، برای هر $n \geq ۱$ داریم

$$\frac{\pi}{۲a_n} \leq G(a,b) \leq \frac{\pi}{۲b_n}$$

و پس از حدگیری،

$$G(a,b) = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^۲ \cos^۲ \varphi + b^۲ \sin^۲ \varphi}} = \frac{\pi}{۲\mu}. \tag{۵.۴}$$

در واقع، الگوریتمی که کارلسون در قضیهٔ اول خود ارائه کرده است (به بخش قبل رجوع کنید)، تکرار (۵.۴) است با بیانی متفاوت!

رابطهٔ (۵.۴)، دستوری سودمند و ساده برای محاسبهٔ انتگرال‌های بیضوی کامل نوع اول در اختیار می‌گذارد و با توجه به اینکه در عمل، دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ در بیشترِ حالات، با سرعت زیادی به سمت حد مشترک خود، μ، میل می‌کنند، با استفاده از (۵.۴)، می‌توان مقدار عددی انتگرال بیضوی کامل نوع اول را با دقت و سرعت زیاد محاسبه کرد. برای نمونه، مقدار تقریبی انتگرال زیر را به‌دست می‌آوریم (مجدداً این مثالی است که در [۱] آمده است):

$$G(\sqrt{۲},۱) = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{d\varphi}{\sqrt{۱+\cos^۲ \varphi}} = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{d\varphi}{\sqrt{۲\cos^۲ \varphi + \sin^۲ \varphi}}.$$

در اینجا $a = \sqrt{۲}$ و $b = ۱$ و دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ که با (۱.۴) تعریف می‌شوند، به‌سرعت به سمت μ میل می‌کنند. $a_۴$ و $b_۴$ هر دو با تقریب، برابر ۱٫۱۹۸۱۴۱ می‌شوند و می‌توان μ را برابر همین عدد گرفت. در این صورت، مقدار تقریبی G چنین می‌شود:

$$G(\sqrt{۲},۱) = \frac{\pi}{۲\mu} \approx ۱٫۳۱۱۰۲۸.$$

۵. تقریب انتگرال بیضوی کامل نوع سوم

بدیهی است که هر انتگرال بیضوی کامل نوع سومِ

$$\Pi(\frac{\pi}{۲},n,k) = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{d\varphi}{(۱+n\sin^۲\varphi)\sqrt{۱-k^۲\sin^۲\varphi}} \tag{۱.۵}$$

قابل بیان به‌صورت انتگرالِ

$$\sum(n,a,b) = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{d\varphi}{(۱+n\sin^۲\varphi)\sqrt{a^۲\cos^۲\varphi + b^۲\sin^۲\varphi}} \tag{۲.۵}$$

است که در آن، $a > b > 0$ و به‌عکس، هر انتگرال به‌صورت (۲.۵) را می‌توان به‌شکل (۱.۵) نمایش داد. در بررسی انتگرال بیضوی کامل نوع سوم، خود را محدود می‌کنیم به حالتی که $n > -1$ و حالت‌های $n > 0$ و $-1 < n < 0$ را جداگانه بررسی می‌کنیم. انتگرال (۲.۵) وقتی $n = -1$ واگرا است:

$$\sum(-1, a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1 - \sin^2\varphi)\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} \geq \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 - \sin^2\varphi}$$

و انتگرال آخر به‌روشنی واگرا است. برای تقریب انتگرال (۲.۵)، از تعویض متغیر

$$\sin\varphi = \frac{2a\sin\theta}{(a+b) + (a-b)\sin^2\theta} \tag{۳.۵}$$

استفاده می‌کنیم. به‌سادگی دیده می‌شود که اگر φ از 0 تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر کند، آن‌گاه θ نیز در همان محدوده تغییر خواهد کرد. از (۳.۵) دیفرانسیل می‌گیریم:

$$\cos\varphi d\varphi = 2a\frac{(a+b) - (a-b)\sin^2\theta}{\left[(a+b) + (a-b)\sin^2\theta\right]^2}\cos\theta d\theta.$$

به‌علاوه از (۳.۵) نتیجه می‌گیریم که

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2\sin^2\theta}}{(a+b) + (a-b)\sin^2\theta}\cos\theta.$$

از این دو به‌دست می‌آوریم

$$d\varphi = 2a \times \frac{(a+b) - (a-b)\sin^2\theta}{(a+b) + (a-b)\sin^2\theta} \times \frac{d\theta}{\sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2\sin^2\theta}}.$$

از طرف دیگر،

$$\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} = a\frac{(a+b) - (a-b)\sin^2\theta}{(a+b) + (a-b)\sin^2\theta}$$

و سرانجام،

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} &= \frac{d\theta}{\sqrt{(\frac{a+b}{2})^2\cos^2\theta + ab\sin^2\theta}} \\ &= \frac{d\theta}{\sqrt{a_1^2\cos^2\theta + b_1^2\sin^2\theta}}.\end{aligned} \tag{۴.۵}$$

یعنی $G(a,b) = G(a_۱, b_۱)$ و با تکرار این عمل، خواهیم داشت $G(a,b) = G(a_n, b_n)$ برای هر $n \geq ۱$ که همان رابطهٔ گاوس است. اکنون با توجه به (۳.۵)، داریم

$$۱ + n\sin^۲\varphi = ۱ + n\frac{۴a^۲\sin^۲\theta}{\left[(a+b)+(a-b)\sin^۲\theta\right]^۲},$$

و بنابر (۴.۵)،

$$\sum(n,a,b) = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{d\theta}{\left\{۱ + n\frac{۴a^۲\sin^۲\theta}{\left[(a+b)+(a-b)\sin^۲\theta\right]^۲}\right\}\sqrt{a_۱^۲\cos^۲\theta + b_۱^۲\sin^۲\theta}}.$$

اما $(a+b)+(a-b)\sin^۲\theta = a + a\sin^۲\theta + b\cos^۲\theta$ و بنابراین

$$\frac{۴a^۲\sin^۲\theta}{\left[(a+b)+(a-b)\sin^۲\theta\right]^۲} = \left(\frac{۲a\sin\theta}{a + a\sin^۲\theta + b\cos^۲\theta}\right)^۲.$$

اکنون تعریف می‌کنیم $f(\theta) = \frac{۲a\sin\theta}{a+a\sin^۲\theta+b\cos^۲\theta}$. به‌سادگی ثابت می‌شود که اکسترمم‌های نسبی این تابع در نقاط $\theta = ۰$ و $\theta = \frac{\pi}{۲}$ به دست می‌آید: $f(۰) = ۰$ و $f(\frac{\pi}{۲}) = ۱$ و چون $a > b > ۰$، پس

$$a + b \leq a + a\sin^۲\theta + b\cos^۲\theta \leq ۲a.$$

از این‌رو

$$\sin\theta = \frac{۲a\sin\theta}{۲a} \leq \frac{۲a\sin\theta}{a + a\sin^۲\theta + b\cos^۲\theta} = f(\theta) \leq ۱.$$

پس در حالتی که $n > ۰$ داریم

$$۱ \leq ۱ + n\sin^۲\theta \leq ۱ + n(f(\theta))^۲ \leq ۱ + n$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{۱}{۱+n} \leq \frac{۱}{۱ + n\left(f\left(\theta\right)\right)^۲} \leq \frac{۱}{۱ + n\sin^۲\theta} \leq ۱,$$

یعنی

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{۱+n}\frac{d\theta}{\sqrt{a_۱^۲\cos^۲\theta + b_۱\sin^۲\theta}} \leq \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{d\theta}{(۱ + n(f(\theta))^۲)\sqrt{a_۱^۲\cos^۲\theta + b_۱^۲\sin^۲\theta}}$$

$$\leq \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{d\theta}{(۱ + n\sin^۲\theta)\sqrt{a_۱^۲\cos^۲\theta + b_۱^۲\sin^۲\theta}} \leq \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{d\theta}{\sqrt{a_۱^۲\cos^۲\theta + b_۱^۲\sin^۲\theta}}.$$

بنابراین

$$\frac{1}{1+n}G(a_1,b_1) \leq \sum(n,a,b) \leq \sum(n,a_1,b_1) \leq G(a_1,b_1).$$

پس با توجه به رابطهٔ گاوس،

$$\frac{1}{1+n}G(a,b) \leq \sum(n,a,b) \leq \sum(n,a_1,b_1) \leq G(a,b)$$

و با تکرار این عمل، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{1}{1+n}G(a,b) \leq \sum(n,a,b) \leq \sum(n,a_k,b_k) \leq G(a,b) \tag{۵.۵}$$

که برای هر $k \geq 1$ درست است. اکنون می‌گوییم چون

$$\sum(n,a,b) \leq \sum(n,a_k,b_k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{a_k^2\cos^2\varphi + b_k^2\sin^2\varphi}}$$

$$\leq \frac{1}{b_k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1+n\sin^2\varphi} = \frac{1}{b_k} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

اگر $k \to \infty$ به‌دست می‌آوریم

$$\sum(n,a,b) \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \times \frac{\pi}{2\mu}. \tag{۶.۵}$$

از سوی دیگر، روشن است که

$$\sum(n,a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}$$

$$\geq \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)} = \frac{\pi}{2a}\frac{1}{\sqrt{1+n}}.$$

بنابراین

$$\sum(n,a,b) \geq \frac{\pi}{2a}\frac{1}{\sqrt{1+n}}. \tag{۷.۵}$$

با ادغام (۵.۵)، (۶.۵) و (۷.۵) نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2\mu} \leq \sum(n,a,b) \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}\frac{\pi}{2\mu}, \tag{۸.۵}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}\frac{\pi}{2a} \leq \sum(n,a,b) \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}\frac{\pi}{2\mu}. \tag{۹.۵}$$

برای تقریب $\sum(n,a,b)$، در مواقعی که $a \approx \mu$ (متناظراً $k \approx ۰$)، رابطهٔ (۹.۵) سودمند است و اگر n نسبتاً کوچک باشد، (۸.۵) به‌کار خواهد آمد.

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که $-۱ < n < ۰$. در این حالت،

$$\frac{۱}{n+۱} \geq \frac{۱}{۱+n(f(\theta))^۲} \geq \frac{۱}{۱+n\sin^۲\theta} \geq ۱$$

و با روشی مشابه قبل، برای هر $k \geq ۱$ داریم

$$\frac{۱}{۱+n}G(a,b) \geq \sum(n,a,b) \geq \sum(n,a_k,b_k) \geq G(a,b). \qquad (۱۰.۵)$$

با توجه به (۱۰.۵) و اینکه $n < ۰$، داریم

$$\sum(n,a,b) \geq \sum(n,a_k,b_k) \geq \frac{۱}{a_k}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{d\varphi}{۱+n\sin^۲\varphi} = \frac{۱}{a_k} \times \frac{\pi}{۲} \times \frac{۱}{\sqrt{۱-n^۲}}.$$

حال اگر $k \to \infty$، به‌دست می‌آوریم

$$\sum(n,a,b) \geq \frac{\pi}{۲\mu}\frac{۱}{\sqrt{۱-n^۲}}. \qquad (۱۱.۵)$$

از (۱۰.۵) و (۱۱.۵) نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\pi}{۲\mu}\frac{۱}{\sqrt{۱-n^۲}} \leq \sum(n,a,b) \leq \frac{\pi}{۲\mu} \times \frac{۱}{n+۱}. \qquad (۱۲.۵)$$

در این وضعیت، (۱۲.۵) تنها در صورتی تقریب خوبی برای $\sum(n,a,b)$ به‌دست می‌دهد که $n \approx ۰$.
رابطه‌های اساسی ماحصل این مقاله عبارت‌اند از (۸.۵)، (۹.۵) و (۱۲.۵) که همان‌طور که ذکر شد، در برخی حالات، تقریب‌های مناسبی برای محاسبه به‌دست می‌دهند.

۶. چند مثال از محاسبات تقریبی

لازم به ذکر است که در هر مثال، محاسبهٔ دقیق مقدار انتگرال (یعنی I) تا ۶ رقم اعشار و با استفاده از نرم‌افزار ریاضی میپل ۱۱ به‌دست آمده است و در هر مورد، مقدار تقریبی انتگرال (یعنی I^*) و مقدار خطای نسبی (یعنی $E = |I-I^*|/|I|$) محاسبه شده است.

الف)

$$I = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{d\varphi}{(۱+۹۹\sin^۲\varphi)\sqrt{\cos^۲\varphi + ۰{,}۹\sin^۲\varphi}}.$$

در این مثال،

$$n = ۹۹, \quad b^{۲} = ۰/۹, \quad a^{۲} = ۱.$$

بنابراین $a = ۱$ و $b = ۰/۹۴۸۶۸۳$ و چون همواره $b < \mu < a$، داریم $\mu \approx a$ و (۹.۵) در این حالت، مفید خواهد بود.

$$\begin{cases} a = ۱ \\ b = ۰/۹۴۸۶۸۳ \end{cases} \qquad \begin{cases} a_۱ = ۰/۹۷۴۳۴۶ \\ b_۱ = ۰/۹۷۴۰۰۴ \end{cases} \qquad \begin{cases} a_۲ = ۰/۹۷۴۱۷۵ \\ b_۲ = ۰/۹۷۴۱۷۵ \end{cases}$$

چنان‌که قبلاً تذکر دادیم، معمولاً سرعت همگراییِ دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به سمت حد مشترک μ، سریع اتفاق می‌افتد. در این مثال، $\mu \approx ۰/۹۷۴۱۷۵$ و

$$\frac{۱}{\sqrt{۱+n}}\frac{\pi}{۲a} = \frac{\pi}{۲۰} \approx ۰/۱۵۷۰۸۰, \qquad \frac{۱}{\sqrt{۱+n}}\frac{\pi}{۲\mu} \approx ۰/۱۶۱۲۴۴.$$

پس بنابر (۹.۵)،

$$۰/۱۵۷۰۸۰ \leq I \leq ۰/۱۶۱۲۴۴.$$

به عبارت دیگر،

$$I = ۰/۱۵۹۱۶۲ \pm \Delta, \qquad \Delta = ۲/۰۸۲ \times ۱۰^{-۳}.$$

مقدار دقیق انتگرال برابر است با $I = ۰/۱۵۷۸۲۵$ و مقدار تقریبی $I^* = ۰/۱۶۱۲۴۴$ و خطای نسبی این محاسبه، عبارت است از

$$E = \frac{|I - I^*|}{|I|} = \frac{۰/۰۰۳۴۱۹}{۰/۱۵۷۸۲۵} \approx ۲/۲ \times ۱۰^{-۲}.$$

ب)

$$I = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{d\varphi}{(۱ + ۰/۲\sin^{۲}\varphi)\sqrt{۴\cos^{۲}\varphi + \sin^{۲}\varphi}}.$$

در اینجا $a = ۲$، $b = ۱$ و $n = ۰٫۲$ با توجه به کوچک بودنِ n، رابطهٔ (۸.۵) برای تقریب این انتگرال مناسب است:

$$\begin{cases} a = ۲ \\ b = ۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} a_۱ = ۱٫۵ \\ b_۱ = ۱٫۴۱۴۲۱۴ \end{cases} \qquad \begin{cases} a_۲ = ۱٫۴۵۷۱۰۷ \\ b_۲ = ۱٫۴۵۶۴۷۶ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_۳ = ۱٫۴۵۶۷۹۲ \\ b_۳ = ۱٫۴۵۶۷۹۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} a_۴ = ۱٫۴۵۶۷۹۲ \\ b_۴ = ۱٫۴۵۶۷۹۲ \end{cases}$$

داریم

$$\mu \approx ۱٫۴۵۶۷۹۲, \quad \frac{۱}{n+۱}\frac{\pi}{۲\mu} \approx ۰٫۸۹۸۵۴۸, \quad \frac{۱}{\sqrt{n+۱}}\frac{\pi}{۲\mu} \approx ۰٫۹۸۴۳۱۰.$$

و بنابر (۸.۵)،

$$۰٫۸۹۸۵۴۸ \le I \le ۰٫۹۸۴۳۱۰$$

یعنی

$$I = ۰٫۹۴۱۴۲۹ \pm \Delta, \quad \Delta = ۴٫۲۸۸۱ \times ۱۰^{-۲}.$$

مقدار دقیق و تقریبی این انتگرال به‌ترتیب عبارت‌اند از

$I = ۰٫۹۶۹۳۱۶$ و $I^* = ۰٫۸۹۸۵۴۸$.

بنابراین خطای نسبی برابر است با

$$E = \frac{|I - I^*|}{|I|} = \frac{۰٫۰۷۰۷۶۸}{۰٫۹۶۹۳۱۶} \approx ۷٫۳ \times ۱۰^{-۲}.$$

ج)

$$I = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{d\varphi}{(۱ - ۰٫۰۳\sin^۲\varphi)\sqrt{\cos^۲\varphi + ۰٫۹\sin^۲\varphi}},$$

در این مثال داریم

$$n = -۰٫۰۳,\ b^۲ = ۰٫۹,\ a^۲ = ۱$$

و

$$\begin{cases} a = ۱ \\ b = ۰٫۹۴۸۶۸۳ \end{cases} \qquad \begin{cases} a_۱ = ۰٫۹۷۴۳۴۲ \\ b - ۱ = ۰٫۹۷۴۰۰۴ \end{cases} \qquad \begin{cases} a_۲ = ۰٫۹۷۴۱۷۳ \\ b_۲ = ۰٫۹۷۴۱۷۳ \end{cases}$$

بنابراین $\mu \approx ۰٫۹۷۴۱۷۳$. با توجه به اینکه $n < ۰$، در این مثال باید از (۱۲.۵) استفاده کنیم:

$$\frac{۱}{n+۱}\frac{\pi}{۲\mu} \approx ۱٫۶۶۲۳۱۱, \qquad \frac{۱}{\sqrt{۱-n^۲}}\frac{\pi}{۲\mu} \approx ۱٫۶۱۳۱۶۷.$$

در نتیجه

$$۱٫۶۱۳۱۶۷ \leq I \leq ۱٫۶۶۲۳۱۱.$$

به عبارت دیگر،

$$I = ۱٫۶۳۷۷۳۹ \pm \Delta, \quad \Delta = ۲٫۴۵۷۲ \times ۱۰^{-۲}.$$

در این مثال، $I = ۱٫۶۳۷۵۱۵$ و $I^* = ۱٫۶۶۲۳۱۱$ و خطای نسبی برابر است با

$$E = \frac{|I - I^*|}{|I|} = \frac{۰٫۰۲۴۷۹۶}{۱٫۶۳۷۵۱۵} \approx ۱٫۵ \times ۱۰^{-۲}.$$

در محاسبهٔ $\sum(n,a,b)$، اگر تفاوت a و μ زیاد باشد و مقدار n نیز به بهتر شدن تقریب‌ها کمک نکند، ممکن است (۸.۵)، (۹.۵) و (۱۲.۵) به تقریب‌های مناسبی منجر نشوند. مثال‌های زیر گویای این امر است:

د)

$$I = \sum(۷,۵,۱) = ۰٫۱۵۴۴۹۱,$$
$$I^* = ۰٫۲۱۳۲۷۲,$$
$$E = \frac{|I - I^*|}{|I|} = \frac{۰٫۰۵۸۷۸۱}{۰٫۱۵۴۴۹۱} \approx ۰٫۳۸.$$

هـ)

$$I = \sum(۱,۵,۱) = ۰٫۳۷۸۳۸۶,$$
$$I^* = ۰٫۳۰۱۶۱۲,$$
$$E = \frac{|I - I^*|}{|I|} = \frac{۰٫۰۷۶۷۷۴}{۰٫۳۷۸۳۸۶} \approx ۰٫۲۰.$$

و)

$$I = \sum(۷, ۳, ۱) = ۰/۲۳۵۴۳۳,$$
$$I^* = ۰/۲۹۸۰۰۱,$$
$$E = \frac{|I - I^*|}{|I|} = \frac{۰/۰۶۲۵۶۸}{۰/۲۳۵۴۳۳} \approx ۰/۲۷.$$

مراجع

[۱] فیختن گولتس، گریگوری میخائیلویچ، *آنالیز ریاضی*، جلد دوم. ترجمهٔ باقر امامی و پرویز شهریاری، انتشارات فردوس، ۱۳۶۸.

[2] Barrios, J., A Brief History of Elliptic Integral Addition Theorems, *Rose Hulman Undergraduate Mathematics Journal*, **10** (2009), Article 2.

[3] Carlson, B. C., *Numerical Computation of Real or Complex Elliptic Integrals*, Ames Laboratory and Department of Mathematics, Iowa State University, 1995.

[4] Davis, Harold T., *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*, Dover Publications, 1962.

[5] Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M., *Tables of Integrals*, Series and Products, Elsevier Inc. Publications, 1990.

[6] Spiegel, Murray R., *Advanced Calculus*, Schaum's Outline Publications, 1974.

[7] Whittaker, E. T., Watson, G. N., *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, 1973 (Reprinted).

تاریخ ارسال: ۱۳۹۷/۱۱/۲۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۱۱/۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۵

رامتین گلبانگ: تهران، دانشکدهٔ شهید شمسی‌پور
رایانامه: rt.golbang@gmail.com