فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۱ (پاییز ۱۳۸۷) صص. ۲۷ تا ۳۸

آشنایی با برنامه‌ریزی روی مخروط‌های درجه دوم

مازیار صلاحی

چکیده

در این مقاله با توجه به کاربرد روزافزون مسائل برنامه‌ریزی روی مخروط‌ها از جمله مخروط‌های درجه دوم به معرفی این مسائل می‌پردازیم. ابتدا مفاهیم پایه‌ای مربوط به این زمینه را بیان می‌نماییم. سپس به معرفی دوگان یک مسألهٔ برنامه‌ریزی روی مخروط درجه دوم می‌پردازیم و چند مثال متفاوت که قابل بیان شدن به صورت برنامه‌ریزی روی مخروط‌های درجه دوم هستند، معرفی می‌کنیم. در ادامه به معرفی جبر جردن روی مخروط‌های درجه دوم می‌پردازیم و با استفاده از آن شرایط بهینگی را برای مسائل مذکور بیان و اثبات می‌کنیم؛ سرانجام تفاوت‌های این مسائل را با مسائل برنامه‌ریزی خطی بیان می‌کنیم.

۱. مقدمه

معرفی روش سیمپلکس در سال ۱۹۴۷ توسط جرج دانتزیک و کاربردهای فراوان آن در علوم مختلف توجه دانشمندان را به استفاده از این شاخه جلب نمود [۵]. علی‌رغم کارایی بالای روش سیمپلکس در حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با ابعاد بزرگ، و استفاده از آن در حل برخی مسائل غیرخطی، این روش قابل تعمیم برای همه مسائل موجود نبود [۷]. روش‌های جریمه‌ای و مانعی[1] دستهٔ دیگری از الگوریتم‌ها هستند که با موفقیت در حل مسائل غیرخطی مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۷] و در حال حاضر نیز از جمله روش‌های موفق در این زمینه می‌باشند [۹]. ردهٔ خاصی از مسائل

1) Penalty and Barrier Methods

غیرخطی، برنامه‌ریزی روی مخروط‌های درجه دوم می‌باشد که مسائل زیادی مربوط به زمینه‌های مختلف همچون کنترل، سرمایه‌گذاری، علوم مهندسی، پزشکی و غیره را می‌توان به صورت آن بیان کرد [۳ ، ۴]. مثال‌های خاصی از این نوع مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، به عنوان نمونه، مثال ۴ در بخش ۳ حالت کلی مسألهٔ مشهور فرما ـ وبر می‌باشد [۱۰]. مقالهٔ لوبو مثال‌های متعددی از علوم مهندسی را در بر دارد که به صورت برنامه‌ریزی روی مخروط‌های درجه دوم بیان می‌شوند [۸]. با توجه به فراوانی مسائلی که به صورت برنامه‌ریزی روی مخروط‌های درجه دوم قابل بیان هستند. امروزه به جای حل این مسائل با استفاده از الگوریتم‌های کلی که در حل مسائل غیرخطی مورد استفاده قرار می‌گرفتند، الگوریتم‌های خاصی با استفاده از روش‌های نقطهٔ درونی معرفی شده‌اند که در اکثر نرم‌افزارهای تجاری و آموزشی مورد استفاده قرار می‌گیرند [۲، ۹].

در این مقاله ابتدا به معرفی مفاهیم پایه‌ای برنامه‌ریزی روی مخروط‌های درجه دوم می‌پردازیم، سپس دوگان آن را بیان و مثال‌های متعددی را معرفی می‌کنیم که در چارچوب این برنامه قابل بیان هستند. در بخش ۴ معرفی جبر جردن روی مخروط‌های درجه دوم با استفاده از شرایط بهینگی مسأله صورت می‌پذیرد. همچنین با ذکر مثال‌هایی به تفاوت‌های نظریهٔ دوگانی آنها با برنامه‌ریزی خطی می‌پردازیم.

۲. آشنایی با مخروط‌های درجه دوم و خواص آنها

تعریف ۱.۲. گوییم مجموعهٔ $C \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مخروط است هرگاه برای هر $x \in C$ و $\alpha \geq 0$ داشته باشیم $\alpha x \in C$. همچنین گوییم مجموعهٔ C یک مخروط محدب است هرگاه هم مخروط و هم محدب باشد.

به عنوان مثال مجموعه‌های زیر محدب هستند [۳]:

- فضای بردارهای نامنفی n بعدی R^n_+.
- $Q_n = \{(x_1;\bar{x}) \in R^n | x_1 \geq ||\bar{x}||\}$ که $\bar{x} = (x_2, ..., x_n)^T \in R^{n-1}$ و $x_1 \in R$. Q_n به مخروط درجه دوم[1] (مخروط لورنتز[2] و یا مخروط بستنی [3]) معروف است.
- فضای تمام ماتریس‌های نیمه معین مثبت و متقارن که با S^n_+ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲.۲. C^* را دوگان مخروط C گوییم هرگاه

$$C^* = \{y : \ x^T y \geq 0, \ \forall x \in C\}.$$

همچنین مخروط C را خود دوگان می‌نامیم اگر $C^* = C$.

به عنوان مثال مخروط‌های $S^n_{+1}, Q_n, \mathbb{R}^n_+$ همگی خود دوگان هستند. در اینجا ثابت می‌کنیم که مخروط درجه دوم خود دوگان است. برای سایر موارد خواننده می‌تواند به [۴] مراجعه کند.

1) Second Order Cone 2) Lorentz Cone 3) ice cream Cone

لم ۱.۲ مخروط Q_n خود دوگان است.

اثبات. فرض کنید $(x_1;\bar{x}) \in Q_n$ دلخواه باشد. نشان می‌دهیم که $(x_1;\bar{x}) \in Q_n^*$. اگر $x_1 = 0$ آنگاه حکم واضح است. فرض کنید $x_1 \neq 0$ و $(y_1;\bar{y}) \in Q_n$ داریم $x_1y_1 + \bar{x}^T\bar{y} \geq x_1y_1 - ||\bar{x}||||\bar{y}|| \geq 0$. در نتیجه $(x_1;\bar{x}) \in Q_n^*$. $Q_n \subseteq Q_n^*$. برای اثبات رابطهٔ عکس، فرض کنید که $(x_1;\bar{x}) \in Q_n^*$. همچنین واضح است که $y = (1, 0, 0, ..., 0) \in Q_n$. حال از تعریف Q_n^* داریم که $x^Ty \geq 0$. بنابراین $x_1 \geq 0$. برای ادامهٔ اثبات دو حالت را در نظر می‌گیریم:

- $\bar{x} = 0$، که در این حالت حکم واضح است.
- $\bar{x} \neq 0$. ابتدا نشان می‌دهیم که $x_1 > 0$. فرض کنید چنین نباشد، یعنی $x_1 \leq 0$. چون از قبل داریم $x_1 \geq 0$ پس $x_1 = 0$. از طرفی می‌دانیم که $z = (||\bar{x}||; -\bar{x}) \in Q_n$. حال چون $x \in Q_n^*$ و $z \in Q_n$، پس از تعریف Q_n^* داریم که $x^Tz \geq 0$. از طرفی $x_1 = 0$، پس $x^Tz = -||\bar{x}||^2$. بنابراین $||\bar{x}|| = 0$ که با فرض $\bar{x} \neq 0$ در تناقض است. حال باید نشان دهیم که $x \in Q_n$. فرض کنیم چنین نباشد یعنی $x_1 < ||\bar{x}||$. بردار $u = (x_1, \frac{-x_1}{||\bar{x}||}\bar{x})$ را در نظر بگیرید. به آسانی می‌توان نشان داد که $u \in Q_n$. چون $u \in Q_n$ و $x \in Q_n^*$ پس داریم $u^Tx \geq 0$. از طرفی $u^Tx = x_1(x_1 - ||\bar{x}||) < 0$ که با نامساوی قبلی در تناقض است. بنابراین فرض این که $x_1 < ||\bar{x}||$ نمی‌تواند درست باشد، پس $x \in Q_n$. این نتیجه می‌دهد که $Q_n^* \subseteq Q_n$.

از خواص مهم دیگری که یک مخروط در برنامه‌ریزی روی مخروط باید داشته باشد این است که مخروط نوک تیز باشد [۳، ۴].

تعریف ۳.۲ گوییم مخروط C نوک تیز[1] است هرگاه C شامل هیچ خطی نباشد یا به عبارتی دیگر $C \cap \{-C\} = \{0\}$.

با استفاده از این خاصیت می‌توان همانند برنامه‌ریزی خطی یک ترتیب را روی مخروط مورد نظر تعریف کرد، زیرا بسیاری از خواص برنامه‌ریزی خطی از ترتیب $\geq$ روی R_+^n نتیجه می‌شود. بنابراین هروقت صحبت از برنامه‌ریزی روی مخروط به میان می‌آید منظور مخروطی است که محدب، نوک تیز، بسته و دارای درون ناتهی می‌باشد. قضیهٔ زیر برخی خواص مخروط دوگان را بیان می‌کند.

قضیهٔ ۱.۲ فرض کنید $C \subseteq R^n$ یک مخروط باشد.

- اگر $intC \neq \emptyset$ آنگاه C^* نوک تیز است.
- اگر C محدب، بسته و نوک تیز باشد آنگاه $intC^* \neq \emptyset$.

1) Pointed Cone

- اگر C بسته و محدب باشد آنگاه $C^{**} = C$ که C^{**} دوگان مخروط C^* است.

یک نتیجهٔ واضح قضیهٔ فوق به صورت زیر است:

نتیجهٔ ۱.۲ زیرمجموعهٔ دلخواه C از R^n یک مخروط محدب بسته و نوک تیز با درون ناتهی است اگر و تنها اگر C^* هم چنین باشد.

۳. برنامه‌ریزی روی مخروط‌های درجه دوم

در این بخش برای سادگی فرض می‌کنیم که مسألهٔ مورد نظر فقط دارای یک مخروط درجه دوم است. نتایج کلی را در انتهای مقاله می‌آوریم. مسألهٔ برنامه‌ریزی روی مخروط درجه دوم می‌تواند به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} &\min\ c^T x \\ &Ax = b \\ &x \in Q_n, \end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن $c \in R^n$، $b \in R^m$، $A \in R^{m\times n}$، $x \in R^n$ متغیر مسأله و Q_n نیز یک مخروط درجه دوم در R^n می‌باشند. ملاحظه می‌کنیم که تنها تفاوت این مسأله با برنامه‌ریزی خطی در قید آخر می‌باشد که به جای مخروط R^n_+ مخروط Q_n در نظر گرفته شده است. حال با پیروی از آنچه برای پیداکردن دوگان یک مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی انجام می‌شود، به معرفی دوگان مسألهٔ (۱) می‌پردازیم. با استفاده از نظریهٔ دوگانی لاگرانژ، دوگان این مسأله به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} &\max\ \ b^T y \\ &A^T y + z = c \\ &z \in Q_n. \end{aligned} \tag{۲}$$

قبل از بیان شرایط بهینگی این مسأله، مجموعه و تابعی را معرفی می‌کنیم که به صورت یک مخروط درجه دوم با بعد مناسب قابل بیان هستند. سپس به ذکر چند مسألهٔ برنامه‌ریزی غیر خطی می‌پردازیم که به صورت برنامه‌ریزی روی مخروط درجه دوم بیان می‌شوند.

مثال ۱: مخروط

$$K = \{(x, \sigma_۱, \sigma_۲) \in R^n \times R \times R |\ \sigma_۱, \sigma_۲ \geq ۰, x^T x \leq \sigma_۱\sigma_۲\}$$

$$x_۱^۲ + \cdots + x_n^۲ \leq \sigma_۱\sigma_۲ = (\frac{\sigma_۱ + \sigma_۲}{۲})^۲ - (\frac{\sigma_۱ - \sigma_۲}{۲})^۲$$

که به وضوح معادل است با

$$K = \{(x,\sigma_1,\sigma_2) \mid \|(x;\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2})\| \leq \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\}$$

یک مخروط درجه دوم است.

مثال ۲: تابع کسری زیر را در نظر بگیرید [۳]:

$$g(x,s) = \begin{cases} \frac{x^Tx}{s}, & s>0 \\ 0, & s=0, x=0 \\ +\infty, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حال با فرض این که $\frac{x^Tx}{0}$ برابر ۰ یا $+\infty$ است بسته به این که $x=0$ یا $x \neq 0$ و با توجه به تساوی $ts = \frac{(t+s)^2}{4} - \frac{(t-s)^2}{4}$ داریم:

$$\{\frac{x^Tx}{s} \leq t, s \geq 0\} \leftrightarrow \{x^Tx \leq ts, t \geq 0, s \geq 0\}$$

$$\leftrightarrow \{x^Tx + \frac{(t-s)^2}{4} \leq \frac{(t+s)^2}{4}, t \geq 0, s \geq 0\} \leftrightarrow \|(x;\frac{t-s}{2})\| \leq \frac{t+s}{2}.$$

به وضوح نابرابری اخیر به صورت نابرابری مخروط درجه دوم است.

مثال ۳: برنامه‌ریزی اکیداً محدب زیر را در نظر بگیرید [۱]:

$$\begin{aligned} \min \quad & x^TQx + a^Tx + \beta \\ & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

تابع هدف این مسأله را می‌توان به صورت $\|\bar{u}\|^2 + \beta - \frac{1}{4}a^TQ^{-1}a$ نوشت که $\bar{u} = Q^{\frac{1}{2}}x + \frac{1}{2}Q^{-\frac{1}{2}}a$. حال مسألهٔ زیر را که به صورت برنامه‌ریزی روی مخروط است در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & u_1 \\ & Q^{\frac{1}{2}}x - \bar{u} = \frac{1}{2}Q^{-\frac{1}{2}}a \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, (u_1;\bar{u}) \in Q_{n+1}. \end{aligned}$$

لازم به ذکر است که جواب بهینهٔ این مسأله با جواب بهینه مسألهٔ اصلی یکی است و تنها اختلاف آنها در مقدار ثابت $\beta - \frac{1}{4}a^TQ^{-1}a$ در تابع هدف می‌باشد.

مثال ۴: مسألهٔ مینیمم کردن مجموع نُرم‌ها [۱]:

$$\min \sum_{i=1}^{m} ||A_i x + b_i||.$$

معادل است با

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{m} v_{i1} \\ & A_i x + b_i = \bar{v}_i \\ & v_i \in Q_{n_i}, \end{aligned}$$

که $v_i = (v_{i1}; \bar{v}_i)$. به وضوح به شکل یک مسألهٔ برنامه‌ریزی روی مخروط درجه دوم است.

مثال ۵: مسألهٔ مینیمم‌سازی ماکسیمم نرم بردارها [۱]:

$$\min_{x} \max_{1 \leq i \leq r} ||A_i x + b_i||$$

معادل است با:

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ & A_i x + b_i = v_i \\ & (t; v_i) \in Q_{n_i}, \forall i = 1, ..., r. \end{aligned}$$

مثال ٦: مسألهٔ مینیمم‌سازی میانگین توافقی توابع آفین مثبت [۱]:

$$\min \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{a_i^T x + \beta_i}$$

را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^{r} u_i \\ & v_i = a_i^t x + \beta_i \\ & u_i v_i \geq 1 \\ & u_i \geq 0. \end{aligned}$$

خود این مسأله معادل است با مسألهٔ برنامه‌ریزی روی مخروط درجه دوم زیر:

$$\min \sum_{i=1}^{r} u_i$$

$$v_i = a_i^T x + \beta_i$$
$$u_i \geq 0,\ \left(\frac{u_i + v_i}{2}; \frac{u_i - v_i}{2}; 1\right) \in Q_3.$$

مثال ۷: فرض کنید در یک مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی ماتریس ضرایب قیدها، A، با خطای جزئی در دست باشند. به عبارت دیگر، مسأله [۳، ۴]:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & a_i^T x \leq b_i,\ \forall i = 1, ..., m, \\ & a_i \in E_i = \{\bar{a}_i + P_i u |\ \ ||u|| \leq 1\}, \forall i = 1, ..., m, \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید، که در اینجا E_i نمایانگر یک بیضی، P_i نیز یک ماتریس $n \times n$ و $\bar{a}_i$ نیز مقدار معلوم و نادقیق a_i است. قید خطی $a_i{}^T x \leq b_i,\ a_i \in E_i$ را به صورت $\sup\{a_i^T x | a_i \in E_i\} \leq b_i$ می‌نویسیم که این خود معادل است با:

$$\bar{a}_i{}^T x + ||P_i^T x|| \leq b_i.$$

به وضوح این قید به شکل مخروط درجه دوم است. بنابراین مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی با خطای بیضوی در ماتریس ضرایب را می‌توان به شکل یک برنامه‌ریزی روی مخروط درجه دوم بیان کرد.

لازم به ذکراست که مسائل فراوانی به صورت برنامه‌ریزی روی مخروط درجه دوم قابل بیان هستند که خواننده می‌تواند برای کسب اطلاعات بیشتر به [۱، ۳، ۴] مراجعه کند.

۴. خواص جبری مخروط‌های درجه دوم و شرایط بهینگی

برای بیان شرایط بهینگی برنامه‌ریزی روی مخروط‌های درجه دوم از جبر خاصی موسوم به جبر جردن استفاده می‌شود [٦]. در ادامه ابتدا به معرفی این جبر و برخی خواص آن می‌پردازیم، سپس قضایای ضعیف و قوی دوگانی و شرایط بهینگی برنامه‌ریزی روی مخروط را بیان و اثبات می‌کنیم [۱، ۳]. مشابه بخش قبل برای سادگی فرض می‌کنیم که مسأله شامل فقط یک مخروط درجه دوم است.

تعریف ۱.۴. حاصل ضرب xoy دو بردار $x = (x_1; \bar{x}) \in R^n,\ y = (y_1; \bar{y}) \in R^n$، که $x_1, y_1 \in R$ و $\bar{x}, \bar{y} \in R^{n-1}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$y = (y_1, y_2, y_3)^t$$
$$x = (x_1, x_2, x_3)^t$$

که

$$xoy = (x^T y, x_1 y_2 + y_1 x_2, ..., x_1 y_n + y_1 x_n)^T = Arw(x) y,$$

که

$$Arw(x) = \begin{pmatrix} x_1 & \bar{x}^T \\ \bar{x} & x_1 I \end{pmatrix}.$$

مثلاً اگر $x = (x_1, x_2, x_3)^t$ و $y = (y_1, y_2, y_3)^t$ آنگاه

$$xoy = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & 0 \\ x_3 & 0 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

ساختار $(\mathbb{R}^n, o)$ را جبر جردن بر $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم.
برخی خواص جبر (R^n, o) به شرح زیر است.

- $xo(\alpha y + \beta z) = \alpha xoy + \beta xoz$ برای هر $\alpha, \beta \in R$ و $x, y, z \in R^n$.
- $xoy = yox$ برای هر $x, y \in R^n$.
- بردار $e = (1, 0, 0, ..., 0)^T$ بردار یکه (R^n, o) است، یعنی $eox = xoe$ برای هر $x \in \mathbb{R}$.
- جبر جردن شرکت پذیر نیست، در حالی که شرکت‌پذیر توانی است، یعنی $xo(xox) = (xox)ox$. برای سادگی ترکیب p مرتبه از بردار x به‌وسیلهٔ عمل o را با x^p نمایش می‌دهیم. داریم $x^p o x^q = x^{p+q}$.

سه خاصیت اول به آسانی قابل اثباتند، بنابراین در اینجا به اثبات خاصیت چهارم می‌پردازیم. برای این که نشان دهیم o شرکت‌پذیر نیست کافیست یک مثال ارائه دهیم. فرض کنید $x = (3, 1, 2)^T$، $y = (3, -1, -2)^T$ و $z = (1, 2, 1)^T$. به آسانی می‌توان دید که $xo(yoz) \neq (xoy)oz$. بنابراین o شرکت‌پذیر نیست. اثبات شرکت‌پذیری توانی این جبر نیازمند تعریف تجزیهٔ طیفی می‌باشد که خواننده می‌تواند برای مشاهدهٔ جزئیات آن به [1] مراجعه کند.

همچنین لازم است ذکر شود که مخروط درجه دوم نسبت به جبر جردن بسته نیست. به عنوان مثال اگر $x = (1.5, 1, 1)^T$ و $y = (1.5, 1, -1)^T$. آنگاه $x, y \in Q_3$، اما $xoy \notin Q_3$.

در ادامه به بیان شرایط بهینگی مسألهٔ برنامه‌ریزی روی مخروط می‌پردازیم و تفاوت‌های آن را با برنامه‌ریزی خطی بیان می‌کنیم. ابتدا قضیهٔ ضعیف دوگانی را بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۴. (قضیهٔ ضعیف دوگانی) اگر x یک جواب شدنی دلخواه برای مسألهٔ اولیه (۱) و (y, z) یک جواب شدنی دلخواه برای مسأله دوگان (۲) باشد، آنگاه $c^T x \geq b^T y$.

اثبات. مشابه برنامه‌ریزی خطی است.

تعریف ۲.۴ گوییم $(x_1; \bar{x}) \in intQ_n$ اگر $||\bar{x}|| < x_1$.

قبل از این که به بیان قضیهٔ قوی دوگانی بپردازیم، به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۸: دوگان مسأله

$$\begin{aligned} \min \quad & (1,-1,0)x \\ & (0,0,1)x = 1 \\ & x \in Q_3. \end{aligned}$$

در $\mathbb{R}^3$، به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \max \quad & (0,0,1)y \\ & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} y + z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & z \in Q_3. \end{aligned}$$

قید مسأله اولیه نتیجه می‌دهد که $x_3 = 1$، در نتیجه این مسأله به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - x_2 \\ & x_1 \geq \sqrt{x_2^2 + 1}. \end{aligned}$$

از قید این مسأله نتیجه می‌شود که $x_1 - x_2 > 0$ و هر اندازه که بخواهیم می‌تواند به صفر نزدیک شود ولی صفر نمی‌شود. از قید مسأله دوگان داریم $z^T = (1,-1,-y)^T$. بنابراین می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \max \quad & y \\ & 1 \geq \sqrt{1 + y^2}, \end{aligned}$$

که این خود نتیجه می‌دهد $y = 0$. بنابراین مسألهٔ دوگان جواب بهینه یکتای خود را که همان صفر است می‌گیرد در حالی که اگرچه مسألهٔ اولیه جواب دارد اما شدنی است. به عبارت دیگر، در مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی شکاف دوگانی[1] در صورتی که هر دو مسأله اولیه و دوگان شدنی باشند صفر است در حالی که این شکاف در برنامه‌ریزی روی مخروط درجه دوم لزوماً صفر نیست. یکی از این مسائل می‌تواند جواب بهینه داشته باشد و مسألهٔ دوم می‌تواند از این ویژگی بهره‌مند نباشد. در مثال زیر برعکس مثال قبلی مسألهٔ اولیه دارای جواب بهینه است ولی دوگان آن نشدنی می‌باشد:

مثال ۹: مسألهٔ

$$\begin{aligned} \min \quad & x_2 \\ & x_1 - x_3 = 0 \\ & x \in Q_3. \end{aligned}$$

1) Duality gap

در $\mathbb{R}^3$ معادل است با

$$\begin{aligned} \min \quad & x_2 \\ & x_2 = 0 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

که مقدار بهینه آن نیز به وضوح صفر است. حال دوگان این مسأله، یعنی

$$\begin{aligned} \max \quad & 0 \\ & y + z_1 = 0 \\ & z_2 = 1 \\ & -y + z_3 = 0 \\ & z \in Q_3 \end{aligned}$$

شدنی نیست. این نیز یک نمونه از ضعف های نظریهٔ دوگانی در برنامه‌ریزی روی مخروط درجه دوم در مقایسه با برنامه‌ریزی خطی می‌باشد. دو مثال فوق نشان می دهند که برای داشتن نتایجی مشابه برنامه‌ریزی خطی نیازمند فرضیات قویتری روی مسائل اولیه و دوگان هستیم.

قضیهٔ زیر شرایطی را بیان می‌کند که تحت آن‌ها هر دو مسألهٔ اولیه و دوگان جواب بهینه دارند و مقدار تابع هدف آنها نیز یکی است.

قضیهٔ ۲.۴ (قضیه قوی دوگانی) اگر هر دو مسألهٔ اولیه و دوگان نقاط شدنی درونی داشته باشند، آنگاه هر دو جواب‌های بهینه دارند و مقدار تابع هدفشان نیز برابر می‌باشد.

اثبات: روند اثبات مشابه حالت برنامه‌ریزی خطی می‌باشد و به دلیل طولانی بودن آن در اینجا از آوردن آن صرف نظر می‌کنیم [۳].

واضح است که قضیهٔ فوق ضعیف‌تر از قضیهٔ قوی دوگانی در حالت برنامه‌ریزی خطی می‌باشد. زیرا در برنامه‌ریزی خطی نیازی به این که مسائل اولیه و دوگان دارای نقاط شدنی درونی باشند نیست. درحالی که همانطور که در مثال‌های ۸ و ۹ دیدیم در برنامه‌ریزی روی مخروط درجه دوم بدون این شرط نمی‌توان برابر بودن توابع هدف مسائل اولیه و دوگان را در حالت کلی نتیجه گرفت.

در قضیهٔ زیر به بیان شرایط بهینگی می‌پردازیم.

قضیهٔ ۳.۴ (شرایط بهینگی) اگر مسائل اولیه و دوگان به ترتیب دارای جواب‌های شدنی درونی x و (y, z) باشند، آنگاه x و (y, z) جواب‌های بهینه هستند اگر و فقط اگر

$$\begin{aligned} & Ax = b,\ x \in Q \\ & A^T y + z = c,\ z \in Q \qquad (3) \\ & x o z = 0. \end{aligned}$$

اثبات: اگر برای نقاط اکیداً شدنی x و (y,z) شرایط (۳) برقرار باشند، آنگاه از $xoz=0$ نتیجه می‌شود که $x^Tz=0$ یا $c^Tx=b^Ty$ که این خود بیانگر این است که نقاط داده شده جواب‌های بهینه برای مسائل اولیه و دوگان هستند. برای اثبات عکس قضیه فرض کنید که x و (y,z) نقاط شدنی درونی و بهینه برای مسائل اولیه و دوگان باشند. در این صورت دو شرط اول (۳) برقرارند. برای درستی شرط آخر با توجه به $x^Tz=0$ داریم: $||\bar{x}||||\bar{z}|| \le x_1z_1 = -\bar{x}^T\bar{z} \le ||\bar{z}||||\bar{x}||$. بنابراین یا $x,z=0$ که در این صورت حکم قضیه واضح است و یا $\bar{x}=-\alpha\bar{z}$ برای $\alpha>0$، $||\bar{x}||=x_1$ و $||\bar{z}||=z_1$. در این حالت نیز به وضوح $xoz=0$.

توجه ۱.۴ در این مقاله برای سادگی در بیان قضایا و مفاهیم فرض کردیم که در مسألهٔ برنامه‌ریزی روی مخروط درجه دوم فقط یک مخروط داریم. در حالی که مسأله می‌تواند دارای چندین مخروط درجه دوم از ابعاد مختلف باشد. مثلاً مسألهٔ:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1x_1+...+c_kx_k \\ & A_1x_1+...+A_kx_k=b \\ & x_i\in Q_{n_i}, \quad \forall i=1,...,k, \end{aligned}$$

و دوگان آن

$$\begin{aligned} \max \quad & b^Ty \\ & A_i^Ty_i+z_i=c_i, \forall i=1,...,k, \\ & z_i\in Q_{n_i}, \end{aligned}$$

که Q_{n_i} ها مخروط‌های درجه دوم با ابعاد متفاوت‌اند، از این گونه مسائل‌اند. در نهایت شرایط بهینگی برای این مسأله نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} & A_1x_1+...+A_kx_k=b,\ x_i\in Q_{n_i}, \forall i=1,...,k, \\ & A_iy_i+z_i=c_i,\ z_i\in Q_{n_i}, \quad \forall i=1,...,k, \\ & x_ioz_i=0, \forall i=1,...,k. \end{aligned}$$

توجه ۲.۴ برای حل مسائل برنامه‌ریزی روی مخروط‌های درجه دوم نرم‌افزارهای آموزشی و تجاری متعددی طراحی شده است. به عنوان مثال، $LOQO$، $SeDumi$ و $Mosek$ چند نمونه از آنها هستند. نرم‌افزار $LOQO$ از روش‌های مانعی لگاریتمی[1] و تکنیک‌های نوین در هموار نمودن قیدهای ناهموار [۹] استفاده می‌کند در حالی که $SeDumi$ و $Mosek$ از روش‌های نقطه درونی و شرایط بهینگی به‌دست آمده و از جبر جردن [۲] استفاده می‌کنند.

1) Logarithmic Barrier Methods

مراجع

[1] F. Alizadeh and D. Goldfarb, Second order cone programming, *Mathematical Programming*, 95(1), 3–51, 2003.

[2] E. D. Andersen and K.D. Andersen. The MOSEK interior point optimizer for linear programming: an implementation of the homogeneous algorithm. In: H. Frenk, K. Roos, T. Terlaky, and S. Zhang, editors, *High Performance Optimization*, Kluwer Academic Publishers, 197–232, 2000.

[3] A. Ben-Tal and A. Nemirovski, Lectures on Modern Convex Optimization. Analysis, Algorithms, and Engineering Applications, SIAM, 2001.

[4] S. Boyd and L. Vandenberghe,*Convex Optimization,* Cambridge University Press, 2004.

[5] G. B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions,* Princeton University Press, 1963.

[6] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on Symmetric Cones,* Oxford University Press, Oxford, UK, 1994.

[7] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization,* John Wiley, Chichester, 1980.

[8] M. S. Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd, and H. Lebret, Applications of second order cone programming, *Linear Algebra Appl.*,284, 193– 228, 1998.

[9] R. J. Vanderbei and D. Shanno, Using LOQO to solve second order cone programming problems, Technical Report SOR-98-09, Statistics and Operations Research, Princeton University, 1998.

[10] G. O. Wesolowsky, The Weber problem: history and perspectives, Location Sci. 1, 5–23, 1993.

مازیار صلاحی
گروه ریاضی، دانشگاه گیلان
salahim@guilan.ac.ir