فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۰، شمارهٔ ۶۸ (بهار و تابستان ۱۴۰۰) صص. ۱۹ تا ۵۶

دربارهٔ ماهیّت دوگانهٔ مفاهیم ریاضی: تأملاتی بر فرآیندها و اشیاء به‌عنوان دو روی یک سکه*

آنا اسفرد

مترجم: فاطمه احمدپور، شراره تقی دستجردی، شفیع شکرانی، مریم عادلی و مریم وحید دستگردی

چکیده

این مقاله، چارچوبی نظری برای بررسی نقش الگوریتم‌ها در تفکّر ریاضی ارائه می‌دهد. در این تحقیق، از یک دیدگاهِ ترکیبیِ هستی‌شناسانه-روان‌شناسانه استفاده شده است. تحلیل تعاریف و بازنمایی‌های مختلف ریاضی، ما را به این نتیجه می‌رساند که مفاهیم مجرّد، مانند عدد یا تابع را می‌توان به دو روش اساساً متفاوت، درک کرد: ساختاری و عملیاتی. این دو رویکرد، اگرچه در ظاهر ناسازگارند، در حقیقت مکمّل یکدیگرند. نشان داده خواهد شد که فرآیندهای یادگیری و حلّ مسئله، شامل تعامل پیچیده‌ای بین ادراک‌های عملیاتی و ساختاریِ یک مفهوم است. بر پایهٔ مثال‌های تاریخی و در سایهٔ نظریهٔ طرحوارهٔ شناختی، حدس می‌زنیم که ادراک عملیاتی برای اغلب افراد، اولین گام در اکتساب مفاهیم ریاضی جدید است. تحلیل کامل از مراحل شکل‌گیری مفهوم نشان می‌دهد که گذار از عملیات محاسباتی به اشیاء مجرّد، یک فرآیند طولانی و ذاتاً دشوار است که در سه مرحله انجام می‌گیرد: درونی‌سازی، چگالش و جسمیت‌سازی. در این مقاله، به پدیدهٔ پیچیدهٔ جسمیت‌سازی توجه ویژه‌ای شده است که البته در سطوحی خاص، امکان دارد عملاً برای برخی از دانش‌آموزان دست‌نیافتنی بماند.

عبارات و کلمات کلیدی. تفکّر ریاضی؛ ادراک ساختاری و عملیاتب؛ درونی‌سازی؛ چگالش؛ جسمیت‌سازی.

* نام و نشان مقاله به زبان اصلی از این قرار است:

Sfard, A., On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, **22** (1991), 1–36.

۱. سرآغاز

بیش از هشت دهه از آن زمان می‌گذرد که ریاضیدان و فیلسوف سرشناس فرانسوی، آنری پوانکاره[۱] با ناامیدیِ مشهودی نوشت (پوانکاره، ۱۹۵۲، ص. ۴۹، اصل فرانسوی در سال ۱۹۰۸ منتشر شده است):

> «یک ... حقیقت باید ما را متحیر کند یا بهتر بود متحیر می‌کرد، اگر تا این حد به آن خو نگرفته بودیم. چطور ممکن است افرادی باشند که ریاضی را نفهمند؟ اگر علم فقط تابع قوانین منطقی است، قوانینی که توسط همهٔ ذهن‌های خوش‌ساختْ پذیرفته شده، ... چطور ممکن است افرادی باشند که نتوانند ریاضیات را درک کنند؟»

علی‌رغم همهٔ دانشی که توسط روان‌شناسان و آموزشگران از آن زمان [تا به حال] گردآوری شده است، به نظر می‌رسد این سؤال همچنان مانند قبل، چالش‌برانگیز و آزاردهنده است. پیچیدگیِ خاص تفکّر ریاضی، مشکلاتِ بزرگ در فراگیری ریاضیات که گاهی غیرقابل حل هستند و در پی آنها، ناکامی‌های مداوم در تدریس آن، همهٔ این حقایق، همان‌قدر که آشکارند، گیج‌کننده هم هستند. در چند دههٔ اخیر، سرمایه‌گذاری‌های فزاینده‌ای برای بهبود تدریس ریاضی انجام شده است. با این حال، نتایج هنوز رضایت‌بخش نیست. پیدا کردن راه‌حل برای این مشکلات، مانند یافتنِ یک درمان مشخص برای سرماخوردگی معمولی، غیرممکن به نظر می‌رسد.

احتمالاً چیزی فراتر از قوانین منطقی در ریاضیات هست. برای اینکه بر روی منشأ سختی‌های متحیّرکنندهٔ ریاضی انگشت بگذاریم، ظاهراً باید از خودمان سؤال‌های پایه‌ایِ شناخت‌شناسانه[۲] دربارهٔ ماهیّت دانش ریاضی بپرسیم. در واقع، چون ریاضیات در قیاس با سایر رشته‌های علمی، دست‌نیافتنی‌تر به نظر می‌رسد، باید چیزی حقیقتاً خاص و یکتا در نوع تفکّری که یک عالَم ریاضیاتی را بنا می‌کند، وجود داشته باشد. اینکه بگوییم ریاضیات، مجرّدترینِ علوم است، کمکی نمی‌کند؛ این جملهٔ کلیشه‌ای چیزی را روشن نمی‌سازد. سؤال واقعی که باید اینجا پرسیده شود، بیشتر کیفی است تا کمّی: چگونه تجریدِ ریاضیاتی، در ماهیّتش، در شیوهٔ تکوینش، در عملکردش و در کاربردش از بقیهٔ انواع تجریدها متمایز می‌شود؟

این سؤال جدیدی نیست. بحران اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم در ریاضیات، ریاضیدانان را بر آن داشت که خود در مورد پایه‌ای‌ترین سؤالات مربوط به ماهیت تفکّر ریاضی از دیدگاه فلسفی بحث کنند[۳]. رویکرد روان‌شناسانه به این مسائل برای اولین بار در چارچوب شناخت‌شناسیِ تکوینی

[۳] [یادداشت مترجمان] از حدود سال ۱۸۸۰ که گئورگ کانتور (۱۸۴۵–۱۹۱۸) پایه‌های نظریهٔ مجموعه‌ها را بنا کرد، تا حدود سال ۱۹۳۰ که کورت گودل (۱۹۰۶– ۱۹۷۸) قضیهٔ ناتمامیّت را ثابت کرد، بحث‌هایی داغ میان فیلسوفان و ریاضیدانان بزرگ آن زمان صورت گرفت. این بحث‌ها از یک طرف در راستای از بین بردن بدفهمی‌ها یا بی‌دقتی‌ها در اثبات‌های ریاضی

[۱] Henri Poincaré [۲] epistemological

پیاژه[1] که چندین دهه پس از آن به‌وجود آمد، امکان‌پذیر شد. اما تاکنون به اندازهٔ کافی، در راستای تولید یک نظریهٔ واحد که همزمان به فلسفه و روان‌شناسیِ ریاضیات بپردازد و به تفکّر ریاضی هم به‌عنوان فرآیند و هم به‌عنوان محصول، به یک اندازه اهمیت دهد، کاری انجام نشده است. همچنین نکته‌ای که تأسّف بسیاری را برمی‌انگیزد، نادیده گرفتن ریاضیات پیشرفته است. تنها در موضوعات پیشرفته است که تفاوت میان ریاضیات و سایر علوم کاملاً آشکار می‌شود و ویژگی‌های اندیشهٔ انتزاعی را در ناب‌ترین صورتِ خود نمایان می‌کند.

به نظر می‌رسد برای فهم عمیق فرآیندهای روان‌شناسانه‌ای که مفاهیم ریاضی از آنها نشأت می‌گیرد، به نگاهی فلسفی بر ماهیّت این مفاهیم نیاز داریم. در این نوعِ پیشنهادیِ تحقیق، تحلیل شناخت‌شناسانه و هستی‌شناسانه‌ای از «عالَم کامل، غیر زمان‌مند و صوری از دانش [ریاضی] ایده‌آل»، ریشه‌های این سردرگمی بزرگ را که بر «جهان ارگانیک، درونی و فرآیندیِ دانش بشری» حاکم است، احتمالاً روشن می‌سازد (کاپوت، ۱۹۷۹).

۲. ماهیت دوگانهٔ مفاهیم ریاضی

موضوع این مقاله بررسی ویژگی‌های تفکّر ریاضی از طریق تأمل بر جایگاه معرفت‌شناسانه و هستی‌شناسانهٔ ساختارهای ریاضی است. بسته به اینکه از چه جنبه‌ای نگاه کنیم، دو کلمه برای معرفی سنگ‌های بنای ریاضیات (یا هر علم دیگر) استفاده می‌شود: کلمهٔ «مفهوم» هنگامی به‌کار می‌رود که یک ایدهٔ ریاضی به‌شکل «رسمی» به‌عنوان یک ساختار نظری درون «عالَمی صوری از دانش ایده‌آل» مورد نظر باشد؛ و کلمهٔ «ادراک[2]» که به کل مجموعهٔ بازنمایی‌ها[3] و پیوندهای داخلی اطلاق می‌شود که توسط آن مفهوم برانگیخته می‌شوند (همتای مفهوم در بخش ذهنیِ «عالَم دانش بشری»). نخست

بوده است؛ برای مثال، صورت‌بندی بعضی از اثبات‌ها به گونه‌ای بود که می‌شد از آن برداشت‌های متفاوتی کرد و یا بیش از حد بر شهود تکیه می‌شد مانند اینکه برای مدت طولانی بر پایهٔ شهود، گمان می‌رفت مشتق‌پذیریِ همهٔ تابع‌های پیوسته درست باشد. از سوی دیگر، بحث‌ها در راستای بنیانگذاری ریاضیات بر پایه‌هایی محکم و متقن بوده است؛ بدین معنا که هدف، نه‌تنها اثبات قضیه‌های ریاضی بود، بلکه نشان دادنِ درستی اصول موضوع زیربنایی این قضیه‌ها نیز مورد توجه بود. ریاضیدان‌ها و فیلسوفان دیگری همچون گوتلب فرگه (۱۸۴۸ –۱۹۲۵)، داوید هیلبرت (۱۸۶۲–۱۹۴۳)، لویتسن بروئوورِ (۱۸۸۱–۱۹۶۶)، هرمان وایل (۱۸۸۵ –۱۹۵۵)، برتراند راسل (۱۸۷۲–۱۹۷۰)، آلفرد نورث وایتهد (۱۸۶۱–۱۹۴۷) و آنری پوانکاره (۱۸۵۴ - ۱۹۱۲) از بنیانگذاران مکاتب فلسفهٔ ریاضی یا از تأثیرگذاران این جریان‌ها بوده‌اند. کلمهٔ *بحران* که ظاهراً اولین بار توسط هرمان وایل برای توصیف این موج از بحث‌های داغ به‌کاربرده شده است، شاید بهترین واژه برای آن نباشد. اما واژه‌ای است که در نوشتجات مربوط به فلسفه و تاریخِ ریاضیات، رایج است. اینکه بحران را در ریاضیات ببینیم، دربردارندهٔ پیش‌فرضی در فلسفهٔ ریاضیات است که ریاضیات را وابسته به جامعهٔ ریاضی می‌داند. ما استفاده از «در جامعهٔ ریاضیاتی» را به‌جای «در ریاضیات» پیشنهاد می‌کنیم.

[1]Piaget's genetic epistemology [2]conception [3]representations

بیایید به جهان ریاضیات آن‌گونه بنگریم که به‌وسیلهٔ توضیحات و بازنمایی‌های صوری، خودش را می‌نمایاند.

تا آنجا که به زبان مربوط می‌شود، شباهت‌های بین ریاضیات و علوم دیگر چشمگیرتر از تفاوت‌های آنها است. در واقع، مانند فیزیکدانان و زیست‌شناسان، ریاضیدانان هم دربارهٔ جهانی خاص صحبت می‌کنند که از تعدادی اشیاء خاص تشکیل شده است. این اشیاء، ویژگی‌هایی دارند و وابسته به فرآیندهایی خاص هستند که از قوانینی خوش‌تعریف پیروی می‌کنند. روشی که ریاضیدان برای مطالعهٔ ویژگی‌های مجموعه‌ها و اعداد به‌کار می‌برد، بسیار مشابه روشی است که دانشمند، ساختار مولکول و کریستال را بررسی می‌کند. عبارت‌هایی مانند «تابعی وجود دارد که ...» به همان اندازه در ریاضیات امروزی متداول است که ادعاهایی دربارهٔ وجود ذرات زیراتمیِ خاص در فیزیک.

برخلاف اشیاء مادی، ساختارهای ریاضیات پیشرفته از طریق حواس قابل دسترس نیستند. آنها صرفاً از طریق چشمِ ذهن دیده می‌شوند. در واقع، حتی هنگامی که تابعی را رسم می‌کنیم و یا عددی را می‌نویسیم، با دقت بسیار تأکید می‌کنیم که این علائمِ روی کاغذ، یکی از چندین بازنماییِ ممکن از یک موجود مجرّد است که نه می‌تواند دیده شود و نه می‌تواند لمس شود. ریاضیدان دربارهٔ وجود و ویژگی‌های این شیء لمس‌نشدنی ادعاهایی بیان می‌کند بدون اینکه دربارهٔ سؤالات فلسفی ناشی از آن بیندیشد. به‌ندرت پیش می‌آید که یک نویسندهٔ کتابِ درسی برای عذرخواهی بگوید: «نیازی نیست به این بپردازیم که این موجودات مجرّد چگونه از نظر فلسفی می‌توانند دسته‌بندی شوند. برای ریاضیدان ... تنها این مهم است که بداند تحت چه قوانینی این موجودات می‌توانند با هم ترکیب شوند» (کورانت و جان، ۱۹۶۲، ص. ۲). به نظر می‌رسد که یک عنصر اساسی از تواناییِ ریاضیاتی، توانایی دیدن این اشیاء غیرقابل مشاهده است؛ نداشتن این توانایی، به‌ظاهر یکی از دلایل اصلی نفوذناپذیریِ ریاضیات در بسیاری از «ذهن‌های خوش‌ساخت» است.

حتی اگر این ادعای آخر درست باشد (و من همهٔ تلاشم را خواهم کرد تا خواننده را نسبت به درستی آن قانع کنم)، تحلیل دقیق تعریف‌های کتاب درسی نشان می‌دهد که پرداختن به مفاهیم ریاضی که گویی به اشیائی مجرّد اشاره دارند، تنها امکانِ موجود نیست. هرچند این نوع از ادراک که از این پس آن را *ساختاری* می‌نامیم، به‌ظاهر ادراکی غالب در ریاضیات امروزی است، تعریف‌های ریاضی پذیرفته‌شده‌ای با رویکردی کاملاً متفاوت هم وجود دارند. تابع را نه‌تنها به‌مثابهٔ مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب، بلکه به‌عنوان یک فرآیند محاسباتیِ خاص و یا «روشی برای رفتن از یک دستگاه به‌دستگاهی دیگر» (اسکمپ[1]، ۱۹۷۱، ص. ۲۴۶) نیز می‌توان تعریف کرد. تقارن را می‌توان خاصیتی ایستا از یک شکل هندسی و یا یک نوع تبدیل تلقی کرد. نوع دوم تعریف، دربارهٔ فرآیندها، رَویه‌ها

[1]Skemp

و عمل‌ها صحبت می‌کند تا دربارهٔ اشیاء؛ بنابراین باید گفت که این نوع، درک عملیاتیِ مفهوم را منعکس می‌کند.

دیدن یک موجود ریاضی به‌عنوان یک شیء به این معنا است که قادریم به آن اشاره کنیم؛ گویی که یک چیز واقعی است؛ یک ساختار ایستا که جایی در مکان و زمان وجود دارد. نیز به این معنا است که قادریم با یک نگاه این ایده را تشخیص دهیم، با آن به‌سان یک کل، کار کنیم بدون اینکه به جزئیات بپردازیم. اگر از استعارهٔ آدامار[۱] استفاده کنیم (که خودش آن را در زمینه‌ای متفاوت استفاده کرده است)، می‌توان گفت تفکّر ساختاری به مفهومْ یک نوع *قیافه‌شناسی*[۲] می‌بخشد که به ما اجازه می‌دهد «دربارهٔ آن، هر اندازه هم که پیچیده باشد، به‌عنوان یک چیزِ واحد فکر کنیم؛ درست مانند وقتی که صورت مردی را می‌بینیم.» (آدامار[۳]، ۱۹۴۹، ص. ۶۵). در مقابل، تعبیر مفهوم به‌عنوان یک فرآیند، باعث می‌شود که به‌جای موجودی بالفعل، آن را به‌مثابهٔ موجودی بالقوه بنگریم که لزوماً طی دنباله‌ای از اَعمال به‌وجود می‌آید. بنابراین در حالی که ادراکِ ساختاری، ایستا (یا بهتر بگوییم «بی‌زمان»، چنان‌که فرگه[۴](۱۹۷۰) می‌گفت)، آنی و یکپارچه است، ادراکِ عملیاتی، پویا، پی‌درپی و با جزئیات است.

مشخص کردن همهٔ جنبه‌های جزئیِ تمایز بالا عملاً ناممکن است چه رسد به اینکه بخواهیم تعریف‌هایی دقیق از شیوهٔ تفکّر ساختاری و عملیاتی را صورت‌بندی کنیم. تا اینجا باید کاملاً روشن شده باشد که نحوهٔ تفکّر ساختاری نسبت به تفکّر عملیاتیْ مجرّدتر، یکپارچه‌تر و دارای جزئیات کمتری است اما باید توجه داشت که چنین مقایسه‌ای به هیچ‌وجه همهٔ ابعاد را نمی‌پوشاند. درجات تجرید و یکپارچگی، خصوصیاتی کمّی هستند در حالی که تفاوت اساسی و کیفی میان این دو طرز تفکّر، در باورهای[۵] پایه‌ای و ضمنی[۶] دربارهٔ ذات موجودات ریاضی نهفته است. به عبارت دیگر، یک شکاف عمیق هستی‌شناسانه میان ادراکات ساختاری و ادراک عملیاتی وجود دارد. نویسنده امیدوار است بحث چنان پیش رود که این جنبهٔ اساسی اما دشوار و دیرفهمِ تمایز، روشن و روشن‌تر شود.

با توجه به آنچه گفتیم، بسیار مهم است که تأکید کنیم ادراک‌های عملیاتی و ساختاریِ یک مفهوم ریاضی، دو چیز مجزا و یکتا نیستند. اگرچه به‌طور ظاهری ناسازگارند (چطور ممکن است که یک چیز همزمان هم فرآیند باشد و هم شیء؟) اما در حقیقت، مکمل یکدیگرند. معنای عبارت «مکملیّت[۷]» بسیار شبیه به آن چیزی است که در فیزیک هم به‌کار می‌رود؛ برای مثال، در سطح زیراتمی باید به موجودات به هر دو صورت ذره و موج نگاه کرد تا بتوان تشریح و توصیف کاملی از

---

[۳] [یادداشت مترجمان] ژاک آدامار (۱۸۶۵–۱۹۶۳)، ریاضیدان برجستهٔ فرانسوی و از شاگردان آنری پوانکاره بود. او مؤلف کتاب *روان‌شناسی ابداع در ریاضیات* است.

[۱] Jacques Hadamard [۲] physiognomy [۴] Frege [۵] beliefs [۶] implicit [۷] complementarity

پدیدهٔ مشاهده‌شده ارائه داد (برای مطالعهٔ بحثی کامل‌تر در مورد مکملیّت در حوزهٔ آموزش، به (اوت[۱]، ۱۹۸۴) و (اشتاینر[۲]، ۱۹۸۵) مراجعه کنید). در بخش بعد، به‌طور مشابه بحث خواهیم کرد که برای حصول فهمی عمیق از ریاضیات، با هر تعریفی که از «فهم[۳]» داشته باشیم، توانایی دیدن یک تابع و یا یک عدد به هر دو صورت فرآیند و شیء، ضروری است.

اگر به هر مفهوم ریاضی نگاهی موشکافانه‌تر بکنیم، بیشتر درمی‌یابیم که آن مفهوم می‌تواند هم به‌طور ساختاری و هم به‌طور عملیاتی تعریف و درک شود. در شکل ۱، چند مثال کاملاً تصادفی آورده شده است.

	ساختاری	عملیاتی
تابع	مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب (بورباکی[۴]،۱۹۳۴)	فرآیندهای محاسباتی یا یک روش خوش تعریفِ انتقال از یک سیستم به سیستم دیگر (اسکمپ،۱۹۷۱)
تقارن	خاصیت یک شکل هندسی	تبدیل اشکال هندسی
عدد طبیعی	خاصیت یک مجموعه یا کلاس همه مجموعه‌هایی با کاردینال متناهی یکسان	صفر یا هر عدد به دست آمده از یک عدد طبیعی دیگر به وسیله‌ی جمع با یک (نتیجه‌ی شمارشی)
عدد گویا	زوج‌هایی از اعداد صحیح (عضوی از مجموعه‌های زوج‌های مرتبِ به طور خاص تعریف شده)	[نتیجه‌ی] تقسیم اعداد صحیح
دایره	مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی داده شده به یک فاصله‌اند	[منحنی به دست آمده با]چرخش پرگار حول یک نقطه‌ی مشخص شده

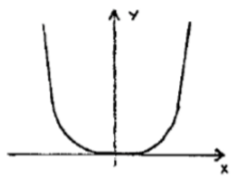
شکل ۱.توصیف‌های عملیاتی و ساختاری از مفاهیم ریاضی

ماهیت دوگانهٔ ساختارهای ریاضی را نه‌تنها در توضیح کلامی، بلکه از طریق بازنمایی‌های نمادینِ متفاوت می‌توان مورد توجه قرار داد. اگرچه خصوصیتی مانند ساختاری بودن، از نگاه فرد نشأت می‌گیرد تا از خودِ نمادها، به نظر می‌رسد بعضی از بازنمایی‌ها نسبت به سایرین، برای پذیرش تعبیر ساختاری سزاوارتر هستند.

برای مثال، در سه روش متفاوت ارائهٔ نگاشت $y = ۳x^۴$ در شکل ۲، رویکردهای گوناگونی برای مفهوم تابع مشهود است. به نظر می‌رسد برنامهٔ رایانه‌ای، متناظر با یک مفهومِ فرآیندی است تا یک مفهوم ساختاری، چراکه تابع را نه به‌صورت یک موجود یکپارچه، بلکه به‌عنوان یک فرآیند

[۱]Otte [۲]Steiner [۳]understanding

محاسباتی ارائه می‌دهد. از سوی دیگر، در بازنمایی نموداری، بی‌نهایت مؤلفه از تابع در یک خط هموار با هم ترکیب شده‌اند و لذا می‌توانند همزمان، یک کل یکپارچه باشند. پس نمودار، یک رویکرد ساختاری ارائه می‌دهد. بازنماییِ جبری را به‌سادگی می‌توان به هر دو روش تعبیر کرد: عملیاتی به‌شکل توصیف مختصری از یک محاسبه و ساختاری به‌شکل یک رابطهٔ ایستا میان دو اندازه (این دوگانگی در تعبیر، به‌معنایِ دوگانهٔ علامت تساوی مربوط است که بسیار مورد توجه و بحث قرار گرفته است. علامت تساوی: «=» را می‌توان نمادی برای یکی بودن، یا «دستوری» برای اجرای اَعمالی که در سمت راستش ظاهر می‌شود، در نظر گرفت. برای مثال، (بیر[1] و همکارانش، ۱۹۷۶، کاپوت، ۱۹۷۹ و کیرَن،[2] ۱۹۸۱) را ببینید.

نمودار	عبارت جبری	برنامه کامپیوتری
	$y = 3x^4$	10 INPUT X 20 Y=1 30 FOR I=1 TO 4 40 Y=Y*X 50 NEXT I 60 Y=3*Y

شکل ۲.بازنمایی‌های مختلف یک تابع

وقتی می‌خواهیم دانش را در ذهن خود پردازش کنیم، از بازنمایی‌های خاصی که در آنها انواع گوناگونی از ادراکات عملیاتی و ساختاری نشان داده می‌شود، بهره می‌گیریم. بنابر آنچه که از کدگذاری درونی می‌دانیم (پیویو[3]، ۱۹۷۱؛ کلمنتس، ۱۹۸۱؛ بیشاپ، ۱۹۸۸؛ آیزنبرگ و دریفوس[4]، ۱۹۸۹)، مفاهیم ریاضی گاهی اوقات به‌کمک «تصاویر ذهنی[5]» مجسم می‌شوند در حالی که در موارد دیگر، همان ایده‌ها عمدتاً از طریق بازنمایی‌های کلامی مورد بررسی قرار می‌گیرند. ظاهراً تصاویر ذهنی که فشرده و یکپارچه‌کننده هستند، تأییدی بر ادراک ساختاری هستند. مشاهدات درون‌گرایِ آدامار از نقش تصوّر، این فرض را تقویت می‌کند: «من [به تصویری] نیاز دارم تا بتوانم یک دید همزمان از همهٔ اجزا داشته باشم ... تا آنها را کنار هم نگه‌دارم که یک کل از آنها بسازم ...؛ تا به پیوندها دست یابم ... و به مفهوم، صورت دهم» (آدامار، ۱۹۴۹، ص. ۷۷). بنابراین تصوّر، ایده‌های مجرّد را محسوس‌تر می‌کند و موجب می‌شود آنها را موجودات مادی بپنداریم. در حقیقت، می‌توان با تصاویر ذهنی، مانند اشیاء واقعی دست‌ورزی کرد. همانند تشخیص صورت، تصاویری که از دیدگاه‌های متفاوت و در زمینه‌های متفاوت «مشاهده شده‌اند»، هویت و معنای خود را حفظ می‌کنند. بازنمایی دیداری، ذاتاً

[1]Behr [2]Kieran [3]Paivio [4]Dreyfus [5]mental pictures

کلی است و جنبه‌های مختلف از یک ساختار ریاضی را می‌توان با «دسترسی تصادفی» استخراج کرد. در مقابل، کدگذاری کلامی را نمی‌توان «با یک نگاه» بیرون کشید و باید به‌طور دنباله‌ای پردازش شود؛ از این‌رو ظاهراً برای بازنمایی رَویه‌های محاسباتی مناسب‌تر است. بنابراین بازنمایی درونیِ غیرتصویری با تفکّر عملیاتی بیشتر تناسب دارد [لطفاً توجه کنید: ادعاهای بالا را نباید این‌گونه تعبیر کرد که یک تناظر یک‌به‌یک میان ادراکاتِ عملیاتی/ساختاری و بازنمایی‌های درونی کلامی/تصویری وجود دارد. پیشنهاد ما فقط این است که بعضی از انواع بازنمایی‌های درونی با یک نوع ادراک متناسب‌ترند تا با دیگری].

قبل از آنکه این بخش را پایان بدهیم، بجاست متذکر شویم که پیشینهٔ ریاضیات، روان‌شناسی و فلسفه پُر است از اشاره به دوگانگی‌ها[۱] در عالم ریاضیات. تمایز میان «دو نوع دانش/اندیشه/فهم ریاضی» در همهٔ انواع نوشته‌های اخیر دیده می‌شود و بعضی از آنها به دوگانگیِ عملیاتی–ساختاریِ مطرح در این مقاله پرداخته‌اند. اجازه دهید از فهرست بلندی از این دوگانگی‌ها که توسط نویسندگان مختلف ارائه شده است، به تعداد کمی از آنها اشاره کنیم (برای مشاهدهٔ فهرست کامل‌تر، هیبرت، ۱۹۸۵، صص. ۲–۱ را ببینید). طبق نظر برخی از پژوهشگران، ریاضیات را می‌توان به دو نوع مجرّد و الگوریتمی (برای مثال هالموس[۲]، ۱۹۸۵ را ببینید) یا خبری[۳] و رویه‌ای[۴] (اندرسون[۵]، ۱۹۷۶) تقسیم کرد. این نامگذاری‌ها تقریباً گویا هستند و بنابراین حتی بدون هیچ‌گونه تعریف صوری، پیوند میان تمایزها و ایده‌های ارائه‌شده در این مقاله کاملاً روشن است. مشاهداتی که پیش از این در مقاله‌ای دربارهٔ دوگانهٔ فرآیند/محصولِ نمادگرایی ریاضی ذکر شد (کاپوت[۶]، ۱۹۷۹؛ دیویس[۷]، ۱۹۷۵)، گرچه حوزه‌اش محدود شده است، ظاهراً با این نوع تقسیم‌بندی‌ها هماهنگ است. دسته‌بندی دیگری که احتمالاً اشتراک بیشتری با پیشنهادات ما دارد، دسته‌بندی‌ای است که ریاضی را به دو نوع دیالکتیک و الگوریتمی تقسیم می‌کند (هنریتسی[۸]، ۱۹۷۴). در حالی‌که ریاضیاتِ الگوریتمی عمدتاً با هر نوع از فرآیندهای محاسباتی سروکار دارد، «ریاضیات دیالکتیک علم منطقی دقیقی است که در آن، گزاره‌ها یا راست هستند یا دروغ و اشیاء با ویژگی‌های مشخص یا وجود دارند یا وجود ندارند». هر وقت جنبهٔ روانشناختیِ ریاضیات بیشتر از جنبهٔ فلسفی آن مورد توجه بوده، نوعی خاص از دوگانگی نیز مشاهده شده است. پیاژه دو نوع مختلف از تفکّر ریاضی را از هم تفکیک کرده است (۱۹۷۰، صفحه ۱۴): *شکلی*[۹] که «حالت‌ها را آنی و ایستا» در نظر می‌گیرد و بنابراین به ادراک ساختاری ما مربوط است؛ و *عملیاتی* که «به تبدیلات[۱۰] می‌پردازد ...» و بنابراین به رویکرد عملیاتی ما بسیار مربوط است.

[۱] dichotomies [۲] Halmos [۳] declarative [۴] procedural [۵] Anderson [۶] Kaput [۷] Davis [۸] Henrici
[۹] figurative [۱۰] transformations

تصادفاً این تمایز ریشهٔ عمیقی در نظریهٔ تجرید بازتابی[۱] [۲] پیاژه دارد که به‌ویژه در بسط‌های بعدی آن (تامپسون[۳]،۱۹۸۵؛ دابینسکی[۴] و لوین[۵]، ۱۹۷۶)، به‌طور مشخص بر روی نقش فرآیندها و اشیاء در تفکّر ریاضی دست می‌گذارد. حتی دسته‌بندی‌های پذیرفته‌شده از درک (یا دانش) ریاضی، به *مفهومی* و *رَویه‌ای* (برای مثال مراجعه کنید به لِش[۶] و لاندائو[۷]، ۱۹۸۳؛ هیبرت، ۱۹۸۵) یا به *ابزاری* و *رابطه‌ای* (اسکمپ،۱۹۷۶) نیز به‌ظاهر در همین راستا هستند. در واقع، در بخش بعدی سعی می‌کنیم نشان دهیم که چگونه توانایی ما برای گسترش ادراکات عملیاتی و ساختاری، تحت تاثیرِ نوع فهمی است که به‌دست می‌آوریم.

بنابراین دسته‌بندی پیشنهادی در این مقاله مناسب است. حتی اگر تمایز ما آشکار نباشد، بقیهٔ دسته‌بندی‌ها نیز چنین است. برای مثال، هنگامی که دربارهٔ دانش فرآیندی و ادراکی صحبت می‌کنیم، هیبرت و لفور[۸] گله می‌کنند که: «پیوند میان این دو شکل از دانش، هنوز به‌خوبی شناخته نشده است» و «تعریفِ خودِ انواع دانش مشکل است؛ هستهٔ هر کدام را راحت می‌توان تشریح کرد اما تعیین مرز آنها سخت است»(۱۹۸۶، صفحه ۳). هدف من در باقیماندهٔ این مقاله، «تعیین مرزها» دست‌کم در مورد تمایز عملیاتی–ساختاری است.

در آغاز، اجازه دهید تقسیم‌بندیمان را در برابر آنهایی که در بالا آورده شده است، قرار دهیم. در نگاه اول، ایدهٔ ادراک‌های عملیاتی و ساختاری با بعضی از دوگانگی‌های بالا تفاوت ندارد. در برابر همهٔ این شباهت‌ها، دو مشخصهٔ اساسی تمایز ما، آن را از اکثر دسته‌بندی‌های دیگر متفاوت می‌کند: ماهیت ترکیبیِ هستی‌شناسانه–روان‌شناسانه و مکمّلیت آن. اولاً اکثر آنهایی که نوعی دوگانگی پیشنهاد داده‌اند، به‌ندرت به سؤال دربارهٔ فرضیاتِ فلسفیِ نهفته در پشت هر فعالیت ریاضی توجه کرده‌اند. آنها ترجیح داده‌اند یا به جنبه‌های آشکارتری از موضوع اشاره کنند (از جمله ساختار آن یا نقش مؤلفه‌های گوناگون آن در حل مسئله) یا به فرآیندهای شناختی‌ای که در بررسی دانش دخیل هستند، توجه نمایند. ما در دسته‌بندی خود سعی کردیم به موضوع اول و آخر با تمرکز بر *ماهیّت موجودات ریاضی* (منظر هستی‌شناسانه) و آن‌طور که توسط یک متفکّر درک می‌شود (منظر روان‌شناسانه) به‌طور همزمان بپردازیم. ثانیاً در حالی که دیگر تمایزها، دانش ریاضی را به دو مؤلفهٔ جدا (برای مثال، مفاهیم در مقابل فرآیندها) *تجزیه* می‌کنند، رویکرد مکملیّت بر یگانگی آن تأکید دارد. در واقع، به

---

[۲] [یادداشت مترجمان] تجرید بازتابی، مفهومی است که به‌زعم پیاژه، در مرحلهٔ عملیات صوری (۱۱ تا ۱۵ سالگی) توسعه می‌یابد. این مفهوم توصیف می‌کند که چگونه نوجوانان با اندیشیدن به ذهنیات خود و تجریدِ این بازتاب‌های شخصی، موفق به کسب دانش می‌شوند. آنها به‌کمک تجرید بازتابی می‌توانند به ناسازگاری‌های موجود در مجموعه‌های ذهنی خود توجه و از جنبه‌های اخلاقی و اجتماعی به آن فکر کنند. همان‌طور که نوجوانان این توانایی را به‌دست می‌آورند، می‌توانند دیدگاه‌های دیگران را درک کنند و بر اساس آن جهان را ببینند.

[۱] reflective abstraction [۳] Thompson [۴] Dubinsky [۵] Lewin [۶] Lesh [۷] Landau [۸] Lefevre

نظر می‌رسد اخیراً موضع پیشین به‌تدریج کنار گذاشته شده است. هیبرت و لفور هنگام بررسی مفاهیم و فرآیندها مشاهده کردند: «به‌طور تاریخی دو نوع دانش، به‌عنوان موجودات جدا از هم دیده شده است ... که در همسایگیِ هم زیست می‌کنند... در مقابل، امروزه علاقهٔ رو به رشدی دربارهٔ چگونگی پیوند مفاهیم و فرآیندها وجود دارد.» (همان، ص. ۲). با وجود این، رویکرد جدید هنوز مکملیّتی نیست: «بحث‌های جاری، دو شکلِ دانش را مجزا در نظر می‌گیرد» هرچند «اتصالی بین آنها وجود دارد که برای هر دو طرف حیاتی و سودمند است». دوباره تأکید می‌کنم: برخلاف رویکرد «مفهومی» و «رویه‌ای»، یا «الگوریتمی» و «مجرّد»، عبارت‌های «عملیاتی» و «ساختاری» به دو جنبهٔ جدایی‌ناپذیر اما خیلی متفاوت از یک چیز اشاره می‌کنند. بنابراین در اینجا با دوگانی[۱] سروکار داریم تا دوگانگی[۲].

رویکردی وجود دارد که برخی نویسندگان هنگام صحبت دربارهٔ انواع مختلف ریاضیات، آن را برمی‌گزینند. برای تکمیل بحث، اجازه دهید که دربارهٔ این رویکرد نکته‌ای را یادآوری کنم. برای مثال، ریاضیات «الگوریتمی» و «مجرّد» طوری ارزیابی و در برابر هم قرار داده می‌شوند که انگار رقابتی میان آن دو است. در حالی که همه به ارزش بالای ریاضیات مجرّد اذعان دارند، جنبه‌های الگوریتمی و رَویه‌ای آن بحث‌برانگیزند. اخیراً بحث دربارهٔ این موضوع از همیشه داغ‌تر شده است: «بهترین راه زندگی، [روش] الگوریتمی است» (مائورر[۳]، ۱۹۸۵)، مبالغه‌ای بحث‌برانگیز است که از طرف کسانی که احساس می‌کردند «الگوریتم، اندیشه را از بین می‌برد» (اشتاین[۴]، ۱۹۸۸)، عکس‌العمل‌های شدیدی را برانگیخت. هرچند همه اذعان دارند که ریاضیات الگوریتمی مهم است، بیشترِ افراد معتقدند که این نوع از ریاضیات، در مرتبهٔ دوم اهمیت قرار دارد.

رویکرد مکملیّتی ما، این نوع بحث‌ها را بی‌معنی می‌کند. چه در مورد کاربردها صحبت کنیم و چه در مورد آموزش، اجزای ساختاری و عملیاتی نمی‌توانند از هم دیگر جدا شوند. بنابراین همان چیزی را می‌گوییم که هالموس گفته است: «تلاش برای اینکه مشخص کنیم کدام‌یک از اجزا مهم‌تر است، مانند این است که بپرسیم هنگام راه رفتن، پای راست مهم‌تر است یا پای چپ». شواهدی بر اثبات این ادعا در بخش‌های بعدی آورده و وابستگی و اهمیت متقابلِ هر دوی ادراک ساختاری و عملیاتی به‌دقت شرح و نمایش داده خواهد شد. بحث کامل دربارهٔ نقشی که این دو بازی می‌کنند، در همهٔ فرآیندهای شناختی به ما کمک می‌کند تا بفهمیم چرا ریاضیات مجرّد که بیشتر بر اساس رویکرد ساختاری بنا شده است، دارای امتیازی بالا است. در واقع، نشان داده خواهد شد که دید حقیقی لازم برای ابداع در ریاضیات، بدون توانایی «دیدن» اشیای مجرّد امکان‌پذیر نیست و اینکه از سوی دیگر، ادراک‌های ساختاری بسیار سخت به‌دست می‌آیند (احتمالاً به همین دلیل است که برخی به‌طور شهودی احساس می‌کنند که قدرت ایجادِ درک ساختاری، نقطهٔ تمایز ریاضیدانان از «فناپذیرها» است). با همهٔ توجهاتی که [در اینجا] به رویکرد ساختاری شده است، تفکّر عملیاتی، سهم خودش

[۱] duality [۲] dichotomy [۳] Maurer [۴] Stein

را خواهد داشت: [برای این ادعا] استدلال خواهیم آورد که درک عمیق از فرآیندهای زیربناییِ پشتِ مفاهیم ریاضی و حتی شاید، مقدار خاصی از تبحّر اجرای این فرآیندها، باید به‌جای نتیجه، بیشتر به‌عنوان پایه‌ای برای فهم چنین مفاهیمی در نظر گرفته شوند. بنابراین پس از اینکه «مهارت‌های فنی» در واکنشی مبالغه‌آمیز مقابل رفتارگرایی[۱]، بی‌جهت جایگاه خود را از دست داده بودند، اکنون جایگاهشان را باز خواهند یافت. سرانجام حتی ممکن است ناچار شویم به این سؤال آزاردهنده که معمولاً توسط آموزشگران پرسیده می‌شود، یک جواب تجربی بدهیم:

> «چرا بسیاری از معلم‌های باهوش و خوش‌نیت که به‌خوبی آموزش دیده‌اند، به پیشرفت مهارت‌های دانش‌آموزان در انجام الگوریتم‌های حسابی و جبری، تا این اندازه اهمیت می‌دهند در حالی که متخصصان در طی ده‌ها سال خلاف آن را توصیه کرده‌اند؟ آن چیست که معلم‌ها می‌دانند اما بقیه نمی‌دانند؟» (کیلپاتریک[۲]، ۱۹۸۸)

۳. نقش ادراکات عملیاتی و ساختاری در ایجاد مفاهیم ریاضی–چشم‌انداز تاریخی

از دو نوع تعریف ریاضی، به نظر می‌رسد که نسخهٔ ساختاری، مجرّدتر باشد. در واقع، برای صحبت دربارهٔ اشیای ریاضی، باید بتوانیم به محصولاتِ چند فرآیند، بدون نگرانی در مورد خود فرآیندها، بپردازیم. در مورد تابع‌ها و مجموعه‌ها (به معنای امروزی)، مجبوریم سؤال‌های ساختاری دربارهٔ آنها را نادیده بگیریم. بنابراین به نظر می‌رسد رویکرد ساختاری می‌بایست به‌عنوان مرحله‌ای پیشرفته‌تر در فرآیند شکل‌گیری[۳] مفهوم در نظر گرفته شود. به عبارت دیگر، دلایل خوبی داریم که انتظار داشته باشیم *در فرآیند شکل‌گیری مفهوم، درک عملیاتی مقدم بر درک ساختاری است.* در این مقاله، شواهدی گوناگون آورده می‌شود تا نشان دهیم که این ادعا چه از دیدگاه سیر تاریخی و چه از دیدگاه یادگیریِ فردی، اساساً درست است.

اما قبل از هر مثالی باید اشاره کنیم که هرچند معتقدیم مدل پیشنهادی قلمرویی بسیار گسترده دارد، برای برخی از حالات خاص نامناسب است. برای مثال، ایده‌های هندسی که برای آنها نمایش‌های ترسیمی یکپارچه و ایستا بیشتر از بقیهٔ ایده‌ها طبیعی به نظر می‌رسند، می‌توانند احتمالاً حتی قبل از اینکه آگاهی کاملی نسبت به توصیف فرآیندی آنها به‌دست آمده باشد، به‌طور ساختاری درک شوند. برای نمونه، مفهوم دایره می‌تواند در گام‌هایی که توسط م. بول[۴] (تاتا[۵]، ۱۹۷۲) به تصویر کشیده شده است، شکل بگیرد: «هندسه‌کارِ ابتدایی که نخستین بار مفهوم دایره را درک کرد، ایده‌اش را از نگاه به چیزهایی که تقریبا گرد هستند، گرفت اما به‌محض اینکه قانون گرد بودن [الگوریتمی برای به‌دست آوردن یک دایره] را از طریق ذهن خودش درک کرد، توانست گرد بودن را در مادهٔ جدیدی بیان کند.» اگرچه این داستانِ شکل‌گیری [مفهوم] به نظر محتمل می‌رسد، [امیدواریم] تجزیه و تحلیل‌های

[۱]behaviorism [۲]Kilpatrick [۳]develop [۴]M. Boole [۵]Tahta

تاریخیِ مفاهیم دیگر که در ادامه می‌آید، خواننده را قانع کند که در ریاضیات محاسباتی، اغلب ایده‌ها از فرآیندها سرچشمه گرفته‌اند تا از اشیاء. در واقع، یک نگاه دقیق به تاریخ پیدایش مفاهیمی مانند عدد یا تابع، نشان خواهد داد که بسیار قبل‌تر از آنکه تعریف‌ها و بازنمایی‌های ساختاری آنها ابداع شوند، به‌صورت عملیاتی درک شده‌اند. آنچه اکنون در پیش می‌آید، بازنمایشی خلاصه از تاریخِ پرتلاطمِ چند مفهوم مهم و اصلی ریاضی است که [البته] به هیچ‌وجه کامل نیست. در این مقاله، من تنها به حقایق و اتفاقاتی تاریخی که نکات مورد نظرم را بیان می‌کنند، می‌پردازم (برای دانستن جزئیات تاریخی، کجوری[۱]، ۱۹۸۵ و کلینر[۲]، ۱۹۸۹ را بخوانید).

اجازه دهید تجزیه و تحلیل خود را با مفهوم عدد شروع کنیم. برای مدت طولانی این اصطلاح، فقط به آنچه که امروز اعداد طبیعی می‌نامیم، اشاره داشت. این نوع عدد، از فرآیند شمارش نشأت می‌گیرد. پس حتی قبل از اینکه به تاریخ برگردیم، اجازه دهید پدیدهٔ مشهور و خاصی را در نظر بگیریم که نزد کودکان مشاهده شده است. در پژوهش‌ها مشاهده شده است (برای مثال، پیاژه، ۱۹۵۲، ص. ۶۲) که وقتی کودکی شمارش را یاد می‌گیرد، مرحله‌ای وجود دارد که [در آن] می‌تواند بین کلمات «یک»، «دو»، «سه»، ... و اشیای یک مجموعهٔ معین یک تناظر یک‌به‌یک برقرار کند اما برای پاسخ به سؤال «چندتا هستند؟»، نمی‌تواند عددِ آخرِ استفاده‌شده در این فرآیند را نام بَرَد. هرگاه از کودک سؤال می‌شود، فقط روند شمارش را تکرار می‌کند. این پدیده به‌روشنی ریشه‌های عملیاتیِ اعداد طبیعی را نشان می‌دهد: برای کودک وقتی اصطلاح «عدد» مطرح می‌شود، خودِ فرآیند شمارش تداعی می‌شود نه محصول مجرّد آن.

معنی «عدد» در طی سه هزار سال گذشته، چندین بار تعمیم داده شده است. برای مدت‌های طولانی، ریاضیدانان با انواع اعداد شناخته‌شده در زمان خود، دست‌ورزی‌های بسیاری انجام داده‌اند تا محصول مجرّدی را از این فرآیندها انتزاع کنند و آن را به‌عنوان نوع جدیدی از اشیای ریاضی بپذیرند. برای مثال، نسبتِ دو عدد صحیح در آغاز، شرحِ کوتاهی از یک فرآیند اندازه‌گیری بود تا یک عدد. به‌طور تصادفی، پژوهشگران (کارپنتر[۳] و همکاران، ۱۹۸۰) در پنجاه درصد دانش‌آموزان سیزده سالهٔ امروزی که نمی‌توانستند «تقسیم ۷ بر ۴ را به‌صورت یک کسر نمایش دهند»، متوجه ردپاهایی از رویکرد کاملاً عملیاتی به اعداد گویا شدند. برای این دانش‌آموزان، تقسیم اعداد صحیح فقط یک فرآیند بود که هنوز نمی‌توانست به‌عنوان یک موجود ایستا پذیرفته شود.

مدت‌ها واژهٔ «عدد» عمدتاً در زمینهٔ فرآیندهای اندازه‌گیری ظاهر می‌شد. کشف فیثاغورسیان مبنی بر اینکه در بعضی مربع‌ها، روند معمول برای پیدا کردن طول قطر با اعداد طبیعی و نسبت‌های

[۱] Cajori [۲] Kleiner [۳] Carpenter

آنها ممکن نیست (چراکه قطر و اضلاع، واحد اندازه‌گیری مشترک ندارند[۱])، با حیرانی و سردرگمی همراه شد (گفته می‌شود که هیپاسوس اهل متاپونتوم، کاشف بدبختِ سنجش‌ناپذیری[۲]، به‌علت ارتداد به دریا انداخته شد[۳]). زمان زیادی گذشت تا ریاضیدانان بتوانند بین مفهوم عدد و فرآیندهای اندازه‌گیری تمایز قائل شوند و این حقیقت را تصدیق کنند که طول هر پاره‌خط بیانگر عددی است حتی اگر [آن عدد] از راه متداول به‌دست نیاید. سرانجام، مجموعهٔ اعداد باز هم توسیع یافت و اعداد گنگ مثبت را نیز شامل شد.

در پی آن، این مجموعهٔ وسعت‌یافته خود انواعِ جدیدِ فرآیندهایِ محاسباتی و به‌دنبال آن، انواعِ جدیدِ اعداد را به‌وجود آورد. دستورالعمل کاردانو[۴] برای حل معادلات درجه‌سه و درجه‌چهار که در سال ۱۵۴۵ منتشر شد، شامل تفریق یک کسر مثبت از یک کسر مثبت کوچکتر و حتی پیدا کردن ریشهٔ آنچه که امروزه اعداد منفی نامیده می‌شود، است. با این حال، علی‌رغم استفادهٔ گسترده از این روش‌ها، ریاضیدانان از پذیرش این محصول فرعی خودداری می‌کردند و برای چندین قرن، به آنها «بی‌معنی» یا «موهومی» می‌گفتند. اصطلاح «عدد منفی» و نماد $\sqrt{-1}$ در ابتدا چیزی بیش از خلاصه‌نویسی یک مجموعه عملیات عددیِ «بی‌معنی» نبودند. زمانی ریاضیدانان، این اشیاء ریاضیِ تکامل‌یافته[۵] را نامگذاری کردند که به این محاسبات عجیب ولی سودمند عادت کرده بودند.

برای درک بهتر منشأ علمیاتیِ اعداد منفی و مختلط، می‌توان به نوشته‌های تاریخیِ پی. ای. ژوردین[۶] (۱۹۱۹–۱۸۷۹)، منطق‌دان و فیلسوف، رجوع کرد. در متن زیر، ژوردِین به‌صراحت می‌گوید که عدد منفی چیزی بجز یک نوع فرآیند نیست:

> «$a - b$ را برابر c فرض کنید. برای به‌دست آوردن c از a، باید عمل برداشتن b را انجام دهیم. این عملیات که اجرای دستور «کم کن b را» است، «یک عدد منفی» است. ریاضیدانان آن را عدد می‌نامند و صرفاً به‌سبب شباهت، با $-b$ نشانش می‌دهند: برای اعداد منفی و اعداد مثبت قواعد محاسباتی یکسانی برقرار است.»

توضیح ژوردِین، شکافِ [مربوط به] شکل‌گیری [مفاهیم]، بین ادراکات خود از اعداد «بی‌علامت» و اعداد منفی را پُر رنگ می‌کند: در حالی که نویسنده، اوّلی را اشیایی اصیل و «واقعی» می‌داند که

[۱] [یادداشت مترجمان] منظور نگارنده در اینجا احتمالاً همهٔ مربع‌ها بوده است و نه برخی از مربع‌ها (certain squares)، زیرا در هر مربع نسبت طول قطر مربع به طول ضلع آن $\sqrt{2}$ است و در نتیجه این دو درازا نسبت به هم سنجش‌ناپذیرند.

[۳] [یادداشت مترجمان] این یکی از افسانه هایی است که از یامبلیخوس (۳۲۵–۲۵۰)، مفسر نوفیثاغورسی، نقل می‌شود. یامبلیخوس در این باره پنج روایت می‌دهد که با هم متناقض هستند. برای مطالعهٔ متنی دقیق و نسبتاً کوتاه دربارهٔ کشف سنجش‌ناپذیری و نقش آن، مطالعهٔ بخش ۳.۸ کتاب *ریاضیات آکادمی افلاطون* نوشتهٔ دیوید فاولر توصیه می‌شود: (Fowler, D., *The Mathematics of Plato's Academy: A new Reconstruction,* Oxford University Press Inc., New York, 1999.)

[۲] incommensurable [۴] Gerolamo Cardano [۵] fully-fledged mathematical object [۶] P. E. Jourdain

منشأ عملیاتی‌شان کاملاً فراموش شده است، دومی هنوز با فرآیندها هویت پیدا می‌کند و فقط به‌اجبارِ قرارداد، می‌توان آنها را به‌عنوان موجوداتی ایستا در نظر گرفت. از آنجا که ایدهٔ اعداد مختلط از دست‌ورزی‌های خاصِ اجرا شده روی اعداد منفی منشعب شد، تعبیر کاملاً عملیاتیِ ژوردِین از اعداد موهومی، کسی را شگفت‌زده نمی‌کند: او دربارهٔ عدد i می‌گوید که « i همانند اعداد منفی، یک عمل را نشان می‌دهد اما به طریقی متفاوت»(ص. ۳۰).

مهم‌ترین چیزی که باید از این واقعهٔ تاریخی کوتاه آموخت این است که شکل‌گیریِ مفهوم عدد، یک فرآیندِ چرخه‌ای بود که در آن، هر بار که نوع جدیدی از عدد متولد می‌شود، تقریباً همان توالی از رویدادها مشاهده می‌شود. این تکرارها به‌صورت نموداری، در شکل ۳ جمع‌آوری شده است. هر کدام از چرخه‌ها در نمودار، یک فرآیند طولانی را بازنمایی می‌کند که شامل سه مرحله است:

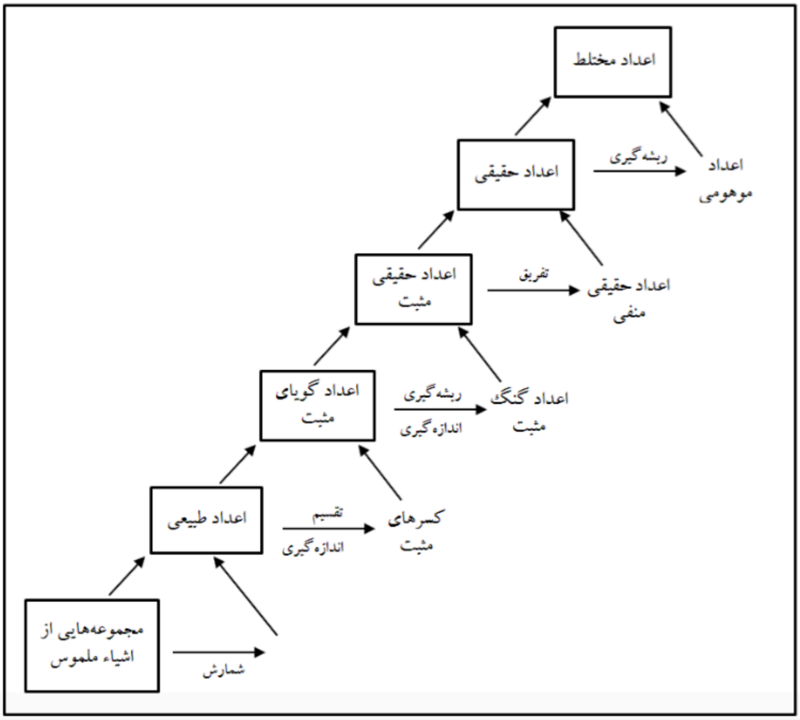
(آ) مرحلهٔ پیش‌ادراکی[۱] که در آن، ریاضیدانان به عملیات مشخصی روی اعدادِ شناخته‌شدهٔ قبلی (یا در حالت شمارش – روی اشیاء ملموس) عادت کرده‌اند. در این مرحله، محاسبات سرراست را باید همان چیزی که هست، دانست: فرآیند و نه چیزی دیگر (نیازی به اشیای جدید نبود، زیرا هنوز همهٔ محاسبات به آن فرآیندهایی محدود بودند که عددهای پذیرفته‌شدهٔ قبلی را تولید می‌کردند).

(ب) یک دورهٔ طولانی از رویکرد عمدتاً عملیاتی که در طی آن، نوعِ جدید عدد از دل فرآیندهایی که با آنها مانوس بودند، پدیدار شد (آنچه که باعث این تغییر شد، یک سلسله عملیات غیرمعمول بود که پیشتر، کاملاً ممنوع انگاشته می‌شد ولی حالا به‌رغم نامأنوس بودن، سودمند بودنشان پذیرفته شده بود). در این مرحله، نام عددِ تازه معرفی‌شده، به‌جای اینکه نشان‌دهندهٔ یک شیء واقعی باشد، نام کدِ عملیاتیِ مشخصی بود. ایدهٔ ساختار مجرّد جدید، هرچند تا به حال به‌صورت گسترده مورد استفاده قرار گرفته است، هنوز اعتراض‌های شدید و بحث‌های فلسفی داغی برمی‌انگیزد.

(پ) مرحلهٔ *ساختاری*؛ وقتی که بالأخره عدد مورد بحث به‌عنوان یک شیء ریاضی تکامل‌یافته شناخته می‌شود. از اینجا به بعد، فرآیندهای متفاوتی روی این عدد جدید اجرا می‌شود. بنابراین حتی انواعی پیشرفته‌تر از اعداد، متولد خواهند شد.

به‌طور خلاصه، در اینجا تاریخ اعداد به‌عنوان یک زنجیرهٔ طولانی ازگذارهایی از ادراکات عملیاتی به ادراکات ساختاری ارائه شد: روی اشیاء مجرّدِ تا به حال پذیرفته‌شده، بارها و بارها فرآیندهایی صورت می‌گیرد تا این فرآیندها به یک کل فشرده تبدیل شوند و یا جسمیّت[۲] یابند و به نوعی جدید از ساختارهای ایستای مستقل تبدیل شوند. حدس ما این است که این مدل را می‌توان برای بسیاری از ایده‌های ریاضی دیگر تعمیم داد.

[۱] preconceptual [۲] reified



شکل ۳.توسعهٔ مفهوم عدد

برای نمونه، مدل ارائه‌شده، در تاریخ تابع هم دیده می‌شود. این ایدهٔ مهم که در پایان قرن هفدهم (حداقل به‌طور رسمی) متولد شد، نتیجهٔ جستجوی طولانی یک مدل ریاضی برای پدیده‌های فیزیکی شامل مقادیر متغیر بود. وقتی که اصطلاح «تابع» نخستین بار (در یکی از کارهای لایب‌نیتس[۱] در سال ۱۶۹۲ ظاهر شد، نمادگذاری جبری که در آن زمان تازه ابداع شده بود، در حال رواج یافتن و ورود تدریجی به همهٔ شاخه‌های ریاضی بود. پس تعجبی ندارد که مفهوم تابع اساساً رابطه‌ای تنگاتنگ با فرآیندهای جبری داشته باشد. این واژهٔ جدید، در ابتدا برای اشاره به «کمیتی شامل هر ترکیبی از متغیرها و ثابت‌ها» (توسط یوهان برنویی[۲] در ۱۷۱۸) و یا برای به‌اصطلاح «عبارت تحلیلی» (توسط اویلر[۳] در ۱۷۴۷) استفاده شد. بنابراین به یک معنا، مفهوم تابع برای دست‌ورزی‌های جبری با متغیرها، همان چیزی است که ایدهٔ عددهای منفی برای تفریق است: چیزی بین محصول و خودِ فرآیند.

[۱]Gottfried Wilhelm (von) Leibniz (1646–1716) [۲]Johann Bernoulli (1667–1748) [۳]Leonhard Euler (1707-1783)

مشکل اصلی تعریف‌های اولیهٔ تابع این بود که آنها به‌شدت متّکی به مفهوم متغیر بودند. مفهومی که خودش چندان روشن نبود و تلاش‌ها برای جسمیت‌سازی آن فایده‌ای نداشت. احتمالاً این یکی از دلایلی بود که اویلر در سال ۱۷۵۵ پس از بحثی طولانی با دالامبر[۱] تعریف دیگری را که در آن اصطلاح «متغیر» به‌طور واضح بیان نشده بود، پیشنهاد داد: کمیتی تابع نامیده می‌شود که به کمیت دیگری وابسته باشد به‌طوری که اگر دومی تغییر کند اولی نیز خود، دست‌خوش تغییر می‌شود. گرایش عملیاتی در این توصیف، بیشتر از توصیف‌های قبلی دیده می‌شود.

کل تاریخِ این مفهوم از اینجا به بعد را می‌توان دنباله‌ای از تلاش‌های سخت ولی شکست‌خورده برای جسمیت‌سازی آن در نظر گرفت. اویلر تلاش کرد به «کمیت‌های متغیر» یک بازنمایی نموداری متبلورکننده[۲] اختصاص دهد تا به یک نسخهٔ ساختاری تکامل‌یافته برسد. با این حال، چون نه اویلر و نه هیچ یک از هم‌عصرانش نتوانستند یک ارتباط قانع‌کننده بین رویکرد جبری و نموداری بسازند، ایدهٔ او خیلی سودمند نبود: هر بار که تعریفی ارائه می‌شد که با شهود جبری–عملیاتی منطبق بود، پس از مدتی مثالی پیدا می‌شد که نشان می‌داد این توصیف جدید در نسخهٔ ساختاری–نموداری ناقص است؛ و به‌عکس (برای دیدن جزئیات بیشتر به کلاینر[۳]، ۱۹۸۹ مراجعه کنید).

باید خاطرنشان کنیم که در مقطع مشخصی، ریاضیدانان و فیلسوفان به آنچه که برای مدتی احتمالاً فقط شهودی انجام شده بود، کاملاً آگاه شدند: اول تلاش برای جسمیت‌سازی و دوم، نیاز به تعریفی که استفادهٔ متداول از تابع را به‌عنوان یک شیء واقعی توجیه کند. برای مثال، اجازه دهید به تذکر زیر از اوایل قرن بیستم نگاهی بیندازیم:

> «اخیراً کلمهٔ ’متغیر‘ نقشی برجسته در تعریف‌های [تابع] دارد. در نتیجه آنالیز باید با یک فرآیند زمانی سروکار داشته باشد، چراکه پای متغیرها را وسط می‌کشد. ولی در واقع، هیچ کاری با زمان ندارد. قابلیت به‌کار بردن آن برای رخدادهای زمانی، نامربوط است. ... به‌محض اینکه به یک متغیر اشاره کنیم، با چیزی مواجه می‌شویم که با زمان تغییر می‌کند و بنابراین متعلق به آنالیز محض نیست و با این حال، اشاره به متغیری که شامل چیزی بیرون از حساب نیست، باید امکانپذیر باشد؛ تازه اگر متغیرها اشیایی متعلق به آنالیز باشند.» (فرگه، ۱۹۷۰، اصل آلمانی آن: ۱۹۰۴)

نظر فرگه برای حذف زمان، یک درخواست شفاف برای جسمیت‌سازی بود. همچنین این توضیح، سختیِ تلاش برای نسخهٔ ساختاری این مفهوم را در آن زمان نشان می‌دهد. تلاش‌های ناموفق متعدد برای تبدیل شهود عملیاتی به تعریف ساختاری، منجر به طغیان دیریکله[۴] علیه رویکرد الگوریتمی و سرانجام منجر به تعریف کاملاً ساختاری و رایج بورباکی شد. این توصیف ساده، تابع را مجموعه‌ای

[۱] Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783) [۲] solidifying [۳] Kleiner [۴] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

از زوج‌های مرتب می‌داند که هیچ پیوندی با هیچ نوع فرآیند محاسباتی ندارد. گروه بورباکی مسئلهٔ زمان–محور را از طریق حذف مفهوم جسمیت‌ناپذیرِ متغیر و جایگزینی آن با مفاهیم نظریه‌مجموعه‌ایِ کاملاً ساختاری، حل کردند. جای تعجب نیست که این تعریف جدید که اشتراک بسیار کمی با منشأ عملیاتی شهودیِ خودش داشت، هنگامی که برای اولین بار ارائه شد، انتقادات بسیاری را برانگیخت. اما بعد از مدتی طولانی، تابعی که مدت‌ها دوام آورده بود ـ در آغاز فقط یک فرآیند محاسباتی بود ـ به یک شیء ریاضی تبدیل شد. اکنون طرح ما از شکل‌گیری مفهوم می‌تواند یک بار دیگر خودش را تکرار کند: روی این اشیاء جدید عملیات جدیدی می‌تواند صورت گیرد. این عملیات جدید امروزه با نام تابعک شناخته می‌شود.

آنچه را که تا اینجا مشاهده کرده‌ایم، دوباره جمع‌بندی می‌کنیم. در همهٔ مثال‌های ما یک پدیده می‌تواند بارها و بارها دیده شود. فرآیندهای متنوع باید به کل‌های فشردهٔ ایستایی تبدیل شوند که واحدهای پایه‌ایِ یک نظریهٔ جدید و از مرتبه‌ای بالاتر خواهند بود. اگر نگاهی کلی‌تر به ریاضیات داشته باشیم (یا دست‌کم به بخش‌های بزرگی از آن)، درمی‌یابیم که ریاضیات نوعی سلسله‌مراتب است که در آن، چیزی که در یک سطح به‌طور کاملاً عملیاتی درک شده است، در سطحی بالاتر، به‌طور ساختاری درک می‌شود. یک چنین سلسله‌مراتبی در دنباله‌ای بلند از جسمیت‌سازی‌ها پدیدار می‌شود که هر یک از آنها از جایی شروع می‌شود که قبلی تمام شده است و هر کدام از آنها لایه‌ای جدید به‌دستگاه پیچیدهٔ مفاهیم مجرّد اضافه می‌کند. البته در موارد خاص، این تصویر می‌تواند اندکی ساده‌انگارانه به نظر برسد. فرآیند شکل‌گیری مفهوم می‌تواند پیچیده‌تر از آن به نظر برسد که مدل یک‌سویهٔ ما بر آن دلالت دارد. با این حال، این مدل نباید چیزی بیش از یک تقریب اولیه باشد که نشان‌دهندهٔ تمایل غالب است.

۴. نقش مفاهیم عملیاتی و ساختاری در شکل‌گیری مفاهیم ریاضی– نگاه روان‌شناسانه

در مثال‌هایی که تا اینجا آوردیم، چیزی که به چشم می‌آید این است که شکل‌گیریِ یک ادراک ساختاری، فرآیندی طولانی و اغلب بسیار مشکل است. سؤالی که پیش می‌آید در مورد منشأ این دشواری است. به‌طور طبیعی این مسئله از دیدگاه روان‌شناسانه مورد بررسی قرار می‌گیرد و این دقیقاً همان کاری است که در بخش بعدی انجام خواهد شد. در ادامهٔ این بخش، فقط به این مسئلهٔ مقدماتی می‌پردازم: آیا مدل پیشنهادی برای شکل‌گیریِ مفاهیم، در مورد یادگیری فردی نیز معتبر خواهد بود؟ به عبارت دیگر، آیا این درست است که وقتی شخصی با یک مفهوم ریاضی جدید آشنا می‌شود، درک عملیاتی، اغلب اولین چیزی است که ایجاد می‌شود؟ احتمالاً پاسخ به این سؤال باید مثبت باشد.

اجازه دهید این را روشن‌تر کنم: به نظر می‌رسد طرحی که بر پایهٔ مثال‌های تاریخی ساخته شده است، می‌تواند برای توصیف فرآیندهای یادگیری نیز مورد استفاده قرار گیرد.

در اینجا خوانندهٔ دقیق می‌تواند ایراداتی وارد کند. نخست، از عبارت بالا می‌توان نتیجه گرفت که یک روند طبیعی از رویدادها وجود دارد که نمی‌تواند خود به خود به‌وجود آمده باشد. در واقع، یادگیری ریاضیات به‌ویژه در سطح‌های پیشرفته‌تر، نمی‌تواند بدون دخالت خارجی (به‌کمک معلم و کتاب درسی) صورت بگیرد و بنابراین به نوع محرّکی (روش تدریسی) که به‌کاربرده شده است، بسیار وابسته است. علاوه بر این، حتی با داشتن یک طرح‌درس مشخص برای تدریس، گاهی تقریباً ناممکن است که بدانیم فرآیندِ یادگیریِ مشاهده‌شده تا چه اندازه تحت تأثیر این روش خاص است و در شرایطی دیگر، چقدر می‌تواند متفاوت باشد. ساده‌ترین راه برای پرداختن به این نوع شک، این است که در زمینهٔ روان‌شناسانه، عبارت «عملیاتی پیش از ساختاری» را صرفاً باید دستورالعملی برای تدریس، انگاشت. این تفسیر نباید کنار گذاشته شود، ولی کاملاً هم مدل ما را توجیه نمی‌کند. تمام استدلال ما بر پایهٔ این فرض (که اتفاقاً به نظر می‌رسد مبنای بیشتر پژوهش‌های شناختیِ بعد از پیاژه بوده است) بنا شده است که در فرآیند یادگیری از هر نوع، ویژگی‌های ثابت مشخصی مشاهده می‌شوند که ظاهراً تغییرات در محرک‌های بیرونی بر آنها اثری ندارند. تقدمِ ادراکاتِ علمیاتی بر ادراکات ساختاری یکی از این گونه ویژگی‌های پایا است.

دوم، باید بلافاصله تأکید کرد که این مدل پیشنهادی از اکتساب مفهوم را به هیچ‌وجه نباید نتیجه‌ای روان‌شناسانه از بازتاب روشنفکرانه و خودبه‌خودی نسبت به تاریخ دانست. ادعاهای طرح‌شده توسط نویسندگان متعدد دربارهٔ منشأ عملیاتیِ مفاهیم ریاضی، اغلب بدون ارجاع به تاریخ بوده است. پیاژه، پیشگام این حوزه، در کتاب خود دربارهٔ معرفت‌شناسی تکوینی (۱۹۷۰، ص. ۱۶) نوشته است: «مفهوم انتزاع‌شده [ریاضی]، از شیئی که عمل بر روی آن انجام گرفته است، بیرون کشیده نمی‌شود، بلکه از خودِ عمل انتزاع می‌شود. به نظر من این، پایهٔ تجرید منطقی و ریاضی است». در بیست سال گذشته، پژوهش‌های نظری و عملی بر روی تفکّر ریاضی، تحت تأثیر این فرضیه بوده است. در پژوهش‌های اخیر، ایده‌های اصلی پیاژه به‌دقت مورد بررسی قرار گرفته و به آنها محتواهای جدیدی افزوده شده است (تامپسون[۱]، ۱۹۸۵؛ سینکلر و سینکلر[۲]، ۱۹۸۶؛ دوبینسکی[۳] و لوین[۴]، ۱۹۸۶؛ دورفلر[۵]، ۱۹۸۷ و ۱۹۸۹ را ببینید). حدسِ کم و بیش گسترده‌ترِ ما در مورد دوگانگی تفکّر ریاضی و تقدمِ ایجادیِ ادراکات عملیاتی، می‌تواند به طرق گوناگون توجیه و اثبات شود. برخی از شواهد تجربی وجود دارند که دلایل تاریخی ما را تأیید می‌کنند و بسیاری از یافته‌های اخیر دیگر در حوزه‌های یادگیری ریاضیات نیز می‌توانند تأییدهای دیگری باشند (اسفرد، ۱۹۸۷، ۱۹۸۸ و ۱۹۸۹

[۱] Thompson [۲] Sinclair & Sinclair [۳] Dubinsky [۴] Lewin [۵] Dörfler

را ببینید). ولی مهم‌تر از همه، یک دلیل محکم نظری وجود دارد که از دیدگاه ما دفاع می‌کند. اگر رویکرد ساختاری، مجرّدتر از رویکرد عملیاتی باشد، اگر از دیدگاه فلسفی، اعداد و توابع چیزی غیر از فرآیندها نباشند، اگر دست‌ورزی، تنها راه ارتباط برقرارکردن با ساختارهای مجرّد باشد، اگر همهٔ اینها درست باشد، آن‌گاه اینکه انتظار داشته باشیم کسی بدون فهمِ عملیاتیِ پیشین، به ادراک ساختاری دست یابد، همان اندازه غیرمنطقی است که امیدوار باشیم کسی بتواند طرح دو بُعدی یک مکعب را درک کند بدون آنکه با مدل سه‌بُعدی آن در زندگی واقعی آشنا شده باشد.

با توجه به طرح شکل‌گیری و توسعهٔ تاریخیِ ارائه‌شده، می‌توان در روند شکل‌گیری مفهوم، سه مرحله مشخص نمود. این سه مرحله متناظرند با سه «درجهٔ ساختاری‌سازی» که می‌توان بر پایهٔ تحلیل کاملاً نظری دربارهٔ پیوند میان فرآیندها و اشیاء، از آنها نام برد. در پرتو همان تحلیل، مدل ما از یادگیری می‌تواند دقیق‌تر شود: اگر حدس ما دربارهٔ منشأ عملیاتیِ اشیاء ریاضی درست باشد، آن‌گاه ابتدا باید فرآیندی بر روی اشیاء آشنا اعمال شود؛ سپس باید ایدهٔ تبدیل این فرآیند به یک موجود مستقل، شکل گیرد و سرانجام، باید توانایی دیدن این موجود جدید به‌عنوان یک کلِ شیءوارِ یکپارچه کسب شود. این سه مرحله از ایجاد مفهوم را به‌ترتیب *درونی‌سازی، چگالش و جسمیت‌سازی* می‌نامیم.

در اینجا باید شرحی مفصّل برای هر کدام از این مراحل داده شود. با این حال، مشکلی بزرگ از منظر روش‌شناسی وجود دارد، زیرا در این پژوهش، ما با باورهای ضمنی دانش‌آموزان دربارهٔ ماهیت اشیاء ریاضی سروکار داریم. وقتی به‌طور مستقیم قادر به بررسی این مشکل نباشیم، چگونه می‌توانیم مراحل متفاوت ایجاد مفهوم را در فراگیر تشخیص دهیم؟ به نظر می‌رسد که چاره‌ای نداریم جز اینکه هر مرحله از شکل‌گیری اشیاء مجرّد را در قالب مشخصه‌های *بیرونی* دانش‌آموزان از جمله *رفتارها، حالت‌ها و مهارت‌ها* توصیف کنیم. امیدواریم که مشخصات حاصل، آنقدر روشن باشند که بتوان از آنها به‌عنوان ابزاری برای تشخیص و یا حتی اندازه‌گیری توانایی دانش‌آموزان در تفکّر ساختاری دربارهٔ مفهوم مورد نظر، استفاده کرد.

در مرحلهٔ *درونی‌سازی*، فراگیر با فرآیندی آشنا می‌شود که به یک مفهوم جدید می‌انجامد (مانند شمارش که به اعداد طبیعی، تفریق که به اعداد منفی، یا دست‌ورزی‌های جبری که به توابع منجر می‌شود). این فرآیندها، عملیاتی هستند که بر روی اشیاء ریاضی سطح پایین‌تر انجام می‌شوند. به‌تدریج، فراگیر در انجام این فرآیندها ماهر می‌شود. اصطلاح «درونی‌سازی» در اینجا به همان معنایی که پیاژه (۱۹۷۰، ص ۱۴) به آن نسبت داده است، استفاده می‌شود: می‌گوییم یک عملیات درونی‌سازی‌شده است هرگاه «بتواند از طریق بازنمایی‌هایی [ذهنی] انجام گیرد» و برای در نظر گرفتن، تحلیل کردن و مقایسهٔ آن احتیاج به اجرای عملیِ آن نباشد. این مرحله در مورد اعداد منفی، آن وقتی است که مهارت در انجام دادن تفریق ایجاد می‌شود. در مورد اعداد مختلط، آن وقتی است که مهارت

در استفاده از ریشهٔ دوم ایجاد می‌شود و در مورد توابع، آن وقتی است که ایدهٔ متغیر را یاد می‌گیریم و توانایی استفاده از یک فرمول برای یافتن مقادیر متغیر «وابسته» به‌دست می‌آید.

در مرحلهٔ *چگالش*، دنباله‌های طولانی از عملیات به واحدهایی که کارکردن با آنها راحت‌تر است، «فشرده» می‌شوند. در این مرحله شخص بدون آنکه نیازی به پرداختن به جزئیات احساس کند، می‌تواند بیشتر و بیشتر به فرآیند داده‌شده به‌عنوان یک کل فکر کند. مثل این است که در برنامه‌نویسی رایانه‌ای، قسمت بازگشتی برنامه، خود یک رَویهٔ مستقل شود: از حالا به بعد، فراگیر فرآیند را در قالب رابطه‌های ورودی–خروجی می‌بیند تا به‌صورت یک عملیات. همانند رویه‌های رایانه‌ای، می‌توان به این کلِ فشرده یک نام نسبت داد. اینجا است که مفهوم جدید «به‌طور صوری» متولد می‌شود. هر مشکلی برای نشان دادنِ خروجیِ فرآیند اصلی (مانند کم کردن عددی بزرگتر از یک عدد کوچکتر، هنگامی که فقط اعداد بدون علامتْ شناخته شده‌اند) به‌عنوان محرکی اضافه برای ایدهٔ یک موجودِ ریاضیِ جدید به‌کار می‌رود. به‌کمک چگالش، ترکیب فرآیند با فرآیندهای دیگر، انجام مقایسه و تعمیم دادن بسیار آسان‌تر می‌شود. پیشرفت در چگالش باعث می‌شود بازنمایی‌های مختلف از یک مفهوم، با سهولتِ فزاینده‌ای با یکدیگر جایگزین شوند.

در مورد اعداد منفی، چگالش را می‌توان از طریق مهارت دانش‌آموز در ترکیب کردنِ فرآیندهای اصلی با دیگر عملیات محاسباتی یا به عبارت دیگر، در توانایی او برای انجام دست‌ورزی‌های حسابی مانند جمع یا ضرب اعداد منفی و مثبت، ارزیابی کرد. در مورد اعداد مختلط، چگالش مرحله‌ای است که به فراگیر کمک می‌کند تا به فایدهٔ معکوس کردن عمل مجذور، به‌عنوان بخشی از محاسبات طولانی پی ببرد؛ حتی اگر به خودیِ خود، به یک شیء ریاضیِ مشروع منجر نشود. نمادی مانند $۵ + ۲i$ ممکن است هنوز در چشم یک دانش‌آموز، فقط اختصاری برای یک فرآیندِ مشخص به نظر آید؛ با این حال، در این مرحله، این موضوع باعث نمی‌شود که او به‌طور ماهرانه از آن به‌عنوان یک قسمت از یک الگوریتم پیچیده استفاده نکند. در مورد تابع هرچه با یک نگاشت به‌عنوان یک کل، راحت‌تر کار کنیم بدون آنکه مقادیر خاص را در نظر بگیریم، در سطح پیشرفته‌تری از فرآیندِ چگالش قرار داریم. نهایتاً فراگیر می‌تواند توابع را بررسی کند، نمودارهای آنها را رسم کند، هر جفت از توابع را ترکیب کند و حتی می‌تواند معکوس یک تابع را پیدا کند.

مرحلهٔ چگالش تا زمانی ادامه می‌یابد که آن موجود جدید، رابطهٔ تنگاتنگش را با یک فرآیندِ مشخص حفظ کند. تنها زمانی که کسی قادر به درک یک مفهوم به‌عنوان یک شی تکامل‌یافته باشد، می‌توان گفت که مفهومْ جسمیت یافته است. بنابراین جسمیت‌سازی به‌عنوان یک گذار هستی‌شناسانه تعریف می‌شود: توانایی ناگهانی برای دیدن چیزی آشنا در پرتوی کاملاً جدید. بنابراین در حالی که درونی‌سازی و چگالش، تغییرات تدریجی و کمّی هستند تا کیفی، جسمیت‌سازی، یک جهش کوانتومی

ناگهانی است: فرآیندی در یک شیء یا ساختارِ ایستا متبلور می‌شود. بازنمایی‌های متفاوت از مفهوم، از لحاظ معنایی، با این ساختار انتزاعی و کاملاً پنداری، یکی می‌شود. موجود جدید به‌زودی از فرآیندی که آن را تولید کرده است، جدا می‌شود و معنای خود را از این حقیقت که عضو یک دستهٔ خاص است، بیرون می‌کشد. زمانی می‌رسد که مبنای نهایی ادعاها در مورد این شیء جدید، دسته‌ای است که به آن تعلق دارد نه هیچ نوع ساختار عینی. می‌توان ویژگی‌های کلی این دسته و روابط بین نماینده‌های آن را بررسی کرد. می‌توان مسائلی را حل کرد که شامل یافتن همهٔ نمونه‌های دسته‌ای است که یک شرط معین را برآورده می‌کند. فرآیندهایی را می‌توان اجرا کرد که شیء تازه متولد، ورودی آنها است. حالا اشیاء ریاضی جدیدتری را می‌توان از اشیاء موجود ساخت. نظر پنرز[۱] (۱۹۸۹، ص. ۶۷)، دربارهٔ حسابان لاندای چرچ[۲]، مثال گویایی است: «[۳] [در اینجا،] شخص به جهانی از اشیای نامگذاری شده مثلاً با a، b، c و ... می‌اندیشد که هر کدام نمایندهٔ یک عمل یا تابع ریاضی هستند ... شناسه‌های آنها، یعنی چیزهایی که این توابع بر آنها عمل می‌کنند، چیزهای دیگری از همین نوع هستند، یعنی آنها هم تابع هستند» (اتفاقاً، این گفته جنبهٔ جالب دیگری دارد: ارجاع به تابع، در ابتدا به‌عنوان یک «شیء» یا «چیز» و سپس به‌عنوان عملگر ریاضی، دوگانگیِ عملیاتی–ساختاری را در رویکرد نویسنده، به‌روشنی نشان می‌دهد).

مرحلهٔ جسمیت‌سازی آن زمانی است که درونی‌سازیِ مفاهیمِ سطح بالاتر[۴] (آنهایی که از فرآیندهای اجرا شده روی شیء مورد نظر ریشه می‌گیرند) شروع می‌شود. قابلیت کار با اعداد منفی به‌عنوان یک زیرمجموعه از حلقهٔ اعداد صحیح (بدون لزوم آگاهی از تعریف صوریِ حلقه)، می‌تواند نشانه‌ای از جسمیت یافتن [اعداد منفی] برای فراگیر به حساب آید. هنگامی می‌توان گفت اعداد مختلط جسمیت یافته‌اند که نماد $۵ + ۲i$ به‌عنوان اسمی برای یک شیء پذیرفته‌شده و عضوی از یک مجموعهٔ خوش‌تعریف خاص تعبیر شود و نه‌تنها نسخه‌ای برای یک دستورالعمل خاص. در مورد تابع، مشاهده جسمیت‌سازی احتمالاً از طریق این سه مرحله صورت می‌گیرد: مهارت در حل معادله‌هایی که «مجهولات» آنها، توابع هستند (مانند معادلات دیفرانسیل و معادلات تابعی، معادلات پارامتری)، تواناییِ به کلام آوردنِ ویژگی‌های کلی فرآیندهای مختلفی که روی توابع اجرا شده‌اند (مانند ترکیب

[۳] [یادداشت مترجمان] همان‌طور که مشاهده می‌کنید، اسفرد بخش‌هایی از این نقل قول پنرز را حذف کرده است. با توجه به اهمیت و دشواریِ مطلب، مترجمان نقل قول کامل این مطلب را از منبع اصلی، در این پانویس برای خواننده فراهم کرده‌اند.

In this scheme, one is concerned with a ‘universe’ of objects, denoted by say a, b, c, d, … , z, a’, b’, … , z’, a’’, b’’, … a’’’, … , a’’’’, … each of which stands for a mathematical operation or function. (The reason for the primed letters is simply to allow an unlimited supply of symbols to denote such functions.) The ‘arguments’ of these functions that is to say, the things on which these functions act are other things of the same kind, i.e. also functions.

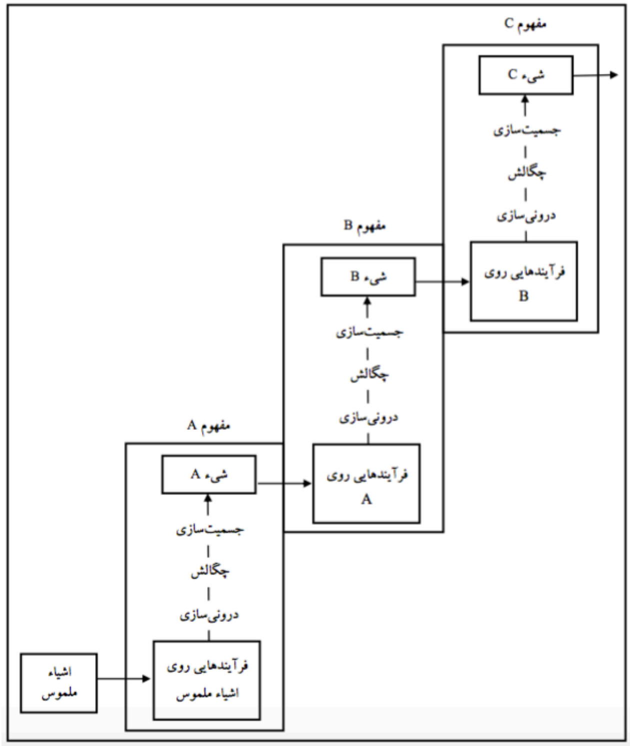
[۱] Penrose [۲] Church’s lambda-calculus [۴] higher- level concepts

یا معکوس کردن توابع) و سرانجام، این شناخت که مجموعهٔ زوج‌های مرتبِ تشکیل‌دهندهٔ یک تابع لزوماً محاسبه‌پذیر نیستند.

اینکه چگونه و تا چه میزان طرحی که ما برای شرح رَوَند شکل‌گیریِ مفهوم ارائه کردیم، ممکن است تحت تأثیر فعالیت‌های آموزشی هدفمند باشد، سؤالی مهم است که باید در یک مقالهٔ جدا بررسی شود. با این حال، نکتهٔ اساسی دیگری هست که نباید در سکوت از آن گذشت؛ آن هم نقش بالقوهٔ نام‌ها، نمادها، نمودارها و دیگر بازنمایی‌ها در مراحل چگالش و جسمیت‌سازی است. تاریخ نشان داده است که اهمیت این عامل بسیار زیاد است. برای مثال، معرفی محور اعداد به‌عنوان محرک نهایی جسمیت‌سازی اعداد منفی و ابداع آنچه را که امروزه با نام صفحهٔ آرگان[۱] [صفحهٔ مختلط] شناخته می‌شود، می‌توان یک قدم اصلی در تبدیل اعداد مختلط به اشیاء ریاضی پذیرفته‌شده دانست. انتظار اینکه بازنمایی‌ها، نقشی مشابه در یادگیری فردی ایفا کنند، معقول و منطقی است. گرچه این موضوع در زمینه‌ای مشابه (برای مثال دُرفلر[۲]، ۱۹۸۷ نگاه کنید) مطالعه شده است، پژوهش‌های تجربی بیشتری را می‌طلبد. تا اینجا احتمالاً روشن شده است که طرح سه مرحله‌ای ما را باید در قالب یک سلسله‌مراتب نگریست؛ به این معنی که یک مرحله نمی‌تواند کسب شود مگر آنکه همهٔ مراحل قبلی گذرانده شده باشد (شکل ۴ را ببینید). با وجود این، با توجه به مسیرهای فرعی که فراگیر می‌تواند طی کند، نکتهٔ دیگری باید اضافه کرد. دانش‌آموز ممکن است به‌جای یک مفهوم، با یک نمونهٔ اولیه[۳] خاص کار کند (برای مثال، داده‌های جمع‌آوری شده توسط مارکوویتس[۴] و همکارانش در سال ۱۹۸۵، نشان می‌دهد که هر وقت مفهوم تابع ذکر می‌شود، مبتدی به تصوّر نگاشت‌های خطی تمایل دارد) یا وقتی که نمی‌تواند این «اشیاء» نامرئی را درک کند، می‌تواند یک رویکرد شبه‌ساختاریِ نازل را ایجاد کند، یعنی تمایل دارد که مفهوم مورد نظر را با یکی از بازنمایی‌هایش (در مورد تابع: فرمول یا نمودار) بشناسد. این مرحله که به‌روشنی با طرح ما مغایرت دارد، ممکن است موقتی یا همیشگی باشد.

این بخش از مطالعه را با دو تذکر برای خوانندهٔ منتقد جمع‌بندی می‌کنیم. اول، آنهایی که احساس می‌کنند نویسنده گاهی بیش از حد مدعی است، باید به خاطر داشته باشند که بیشتر ادعاهایی که در این بخش مطرح شده است، تحلیلی بودند و نه ترکیبی[۵]. برای مثال، طبیعتِ سلسله‌مراتبی طرح، به‌طور ضمنی در تعریف‌های درونی‌سازی، چگالش و جسمیت‌سازی وجود دارد. به‌طور کلی، مدل اکتسابِ مفهوم که در این بخش معرفی شد، از یک فرضیهٔ پایه استنباط شده است: از نظریه‌ای دربارهٔ منشأ عملیاتیِ اشیای ریاضی. مانند بسیاری از ایده‌های دیگر طرح‌شده توسط کسانی که هنوز به امکان یک چارچوب نظری برای تحقیق شناختی ایمان دارند، طرح سه مرحله‌ای ما نیز بسیار بر

[۱] Argand plane [۲] Dörfler [۳] prototype [۴] Zvia Markovits [۵] synthetic



شکل ۴.مدل کلی از شکل‌گیری مفهوم

اساس حدس و گمان است و این کاملاً طبیعی است. این طرح علی‌رغم اینکه ساده و فرضی در نظر گرفته شده است، تاکنون سودمندی خودش را به‌عنوان ابزاری برای برنامه‌ریزی، یکپارچه‌سازی و تفسیر پژوهش‌های تجربی نشان داده است (اسفرد ۱۹۸۷، ۱۹۸۹ را ببینید) و در نهایت می‌تواند به نتایج مهم آموزشی بیانجامد (اسفرد، ۱۹۸۸).

دوم، این ادعا که ادراک‌های عملیاتی نسبت به ادراک‌های ساختاری در روند شکل‌گیری مقدم هستند، ظاهراً با روش متداول معرفیِ مفاهیمِ جدید در تضاد است؛ هرچند از نظر تاریخی، قابل قبول و از نظر تجربی، قابل تأیید باشد، زیرا در این روش، مفاهیم به‌کمک تعریف‌های ساختاری‌ای معرفی می‌شوند که معمولاً ارجاع صریح به هیچ نوع رَوَندی ندارند. یک کتاب درسی ریاضی امروزی در بیشتر موارد، معرفی مفهوم عدد مختلط را با این عبارت آغاز می‌کند: «مجموعهٔ همهٔ زوج‌های مرتب از اعداد حقیقی با ویژگی‌های زیر را در نظر بگیرید....» ریاضیدان معاصر با اعتقاد به اینکه ساختار مجرّد، می‌تواند از طریق اِعمال یک تعریف مناسب به‌وجود آید، ایده‌ای کاملاً جدید را در

قالب یک شیء از قبل ساخته‌شده پیشنهاد می‌دهد. بنابراین این احتمال را باید در نظر گرفت که در نهایت، ادراک ساختاری ممکن است بعضی مواقع مقدّم باشد. برای ریاضیدانان حرفه‌ای این حالت مطمئناً درست است و به‌راستی ذهن‌های ورزیدهٔ آنها، بدون واسطهٔ فرآیندهای محاسباتی، قادر است بی‌درنگ با اشیای مجرّد کار کند. حتی اگر چنین باشد، در پرتو استدلال‌های نظری و یافته‌های تجربی، به نظر می‌رسد مدل ما گرایش غالب را ارائه می‌دهد. در واقع، این گرایش می‌تواند آنقدر توانمند باشد که حتی اگر یک مفهوم جدید به‌صورت ساختاری معرفی شود، دانش‌آموز ابتدا تعریف را به‌صورت عملیاتی تفسیر کند (شواهد تجربی زیادی برای این امر در مطالعات اخیر دربارهٔ جبر و مفهوم تابع موجود است. رجوع کنید به وینر[۱] و دریفوس، ۱۹۸۹؛ اسفرد، ۱۹۸۷،۱۹۸۹).

۵. نقش مفاهیمِ عملیاتی و ساختاری در فرآیندهای شناختی

پیش از آنکه بخواهیم سختیِ ذاتیِ جسمیت‌سازی را توضیح دهیم، اجازه دهید به یک موضوع مهم دیگر بپردازیم. مدلی که هم‌اکنون برای شکل‌گیری مفهوم پیشنهاد شد، ایجاب می‌کند که مفاهیمِ ریاضیِ مشخص، تنها زمانی می‌توانند کاملاً تکامل‌یافته در نظر گرفته شوند که هم عملیاتی و هم ساختاری درک شوند. در اینجا سؤالی پیش می‌آید: آن چیست که این نگاه دوگانه را ضروری می‌کند؟ به عبارت دیگر، وقتی یک مفهوم هم به‌صورت عملیاتی و هم به‌صورت ساختاری دیده شود، چه چیزی به‌دست می‌آید که با نبودِ یکی از این رویکردها، حاصل نمی‌شود؟

۱.۵. رویکرد عملیاتی: قطعاً لازم، بعضی مواقع هم‌کافی. به‌ظاهر، یک نگاه عملیاتی محض به ریاضیات، کاملاً مناسب است. در واقع، برای یک شخص غیرمتعصب و با ذهنی باز، خودِ مفهوم «شیء ریاضی» ممکن است زاید به نظر برسد: از آنجا که می‌توان فرآیندها را تنها دغدغهٔ واقعی ریاضیات دانست، چرا باید به «چیزهایی» که دور از دسترس و دارای مشکلات فلسفی هستند، مانند مجموعه‌های نامتناهی یا «توده‌های زوج‌های مرتب[۲]» بپردازیم؟ از لحاظ نظری، تقریباً همهٔ ریاضیات را می‌توان به‌صورت عملیاتیِ محض انجام داد: ما می‌توانیم از فرآیندهای ابتدایی تا فرآیندهای سطح بالاتر و پس از آن، حتی فرآیندهای پیچیده‌تر پیش رویم بدون اینکه هرگز به اشیای مجرّد برخورد کنیم.

در واقع، نگاهی دقیق به تاریخ نشان می‌دهد که برای مدت زمانی طولانی، به بخش‌های بزرگی از ریاضیات تقریباً به همین نحو پرداخته شده است. همان‌طور که دیویس[۳] و هرش[۴] (۱۹۸۳، ص. ۱۸۲) ذکر کردند، «ریاضیات مصر، بابل و شرق باستان همگی از نوع الگوریتمی بودند .... فقط در دوران معاصر است که ریاضیات دارای هیچ یا حداکثر مقدار کمی محتوای الگوریتمی است که می‌توان آن را صرفاً دیالکتیکی یا وجودی نامید.» در واقع، علم محاسبات که امروزه با نام نسبتاً جدید

[۱] Vinner [۲] aggregates of ordered pairs [۳] Davis [۴] Hersh

«جبر» شناخته می‌شود، برای هزاران سال، یک ویژگی عملیاتی مشخص را حفظ کرده است. تا قبل از قرن شانزدهم که جبرِ خلاصه‌شده و نمادین به‌وجود نیامده بود، جبر به‌اصطلاح «کلامی» فی‌نفسه با فرآیندهای محاسباتی سروکار داشت؛ در حالی که تنها اشیای مجرّد در مباحث اعداد بودند. حتی پیچیده‌ترین دنباله‌های عملیات عددی که به‌صورت کلامی ارائه می‌شدند، به‌روشنی ویژگی دنباله‌ای را القا می‌کردند و چگالش و جسمیت‌سازی را نتیجه نمی‌دادند. تا زمانی که فرآیندهای محاسباتی، به روش عملیاتی محض ارائه می‌شده‌اند، نمی‌توانستند به‌صورت موجودات مجرّد ایستا فشرده شوند، بنابراین آمادگی پذیرش آنها به‌عنوان شیء وجود نداشت.

۲.۵. لزوم مفاهیم ساختاری. به هر حال به نظر می‌رسد که نگاه ساختاری در ریاضیاتِ قرن بیستم آن‌قدر نفوذ کرده است که یک ریاضیدان امروزی می‌بایست ذهن خیلی بازی داشته باشد (در واقع، اصلاً خودش نباشد) تا تشخیص دهد که از دیدگاه فلسفی (و نه روان‌شناختی!) می‌تواند بدون «اشیاء ریاضی» کار کند. در چشمان او، این مفهوم چنان در ریاضیاتْ ذاتی است که ایدهٔ ماده در فیزیک (آیا کسی می‌تواند حرکت را بدون اجسام فیزیکی تصوّر کند؟ آیا کسی می‌تواند دربارهٔ انجام فرآیندهای محاسباتی روی هیچ چیز صحبت کند؟). چرا چنین گرایشی قوی به تجرید، در تصویر جهان مادی وجود دارد؟ این سؤال مهم را می‌توان در سطوح مختلف طرح کرد. روشن‌ترین جواب سطحی این است که تصوّر ما توسط حواس ما شکل می‌گیرد. شاید این [جواب]، دلیلی برای این حسّ غالب باشد که بدون داشتن شیئی که فرآیند روی آن انجام شود و شیء دیگری که فرآیند، آن را تولید کند، نمی‌توانیم فرآیندی را اجرا کنیم.

برای شرح عمیق‌تر موضوع، به نظریهٔ طرحواره‌های شناختی می‌پردازیم. اما قبل از این کار، خواننده را به انجام یک آزمایش دعوت می‌کنیم که امیدواریم ادعاهای آتی ما را به‌طور قانع‌کننده‌ای روشن کند.

تمرین ما در دو گام انجام می شود. بیایید با تعریف‌های ریاضی شکل ۵ آغاز کنیم. اولین گام، انجام دادن سه فعالیت فهرست‌شده در کادر است اما قبل از آن، باید تعریف گردش[۱] را بدانیم. از خواننده دعوت می‌شود که مسائل را یکی یکی و به‌ترتیب حل کند.

جواب دادن به دو فعالیت اول، به‌ویژه دومی، می‌تواند سخت باشد. همچنین برای آنها که بتوانند مسئلهٔ اول را حل کنند، جواب دادن به سؤال سوم ممکن است اصلاً سرراست نباشد؛ هرچند این سؤال بدیهی به نظر می‌رسد. حتی اگر هر سه فعالیت با موفقیت به انجام نرسیدند، اکنون به سراغ قسمت دوم آزمایشمان می‌رویم. از خواننده دعوت می‌شود که توصیف جدیدی از مفهوم گردش را که در شکل ۶ ارائه شده است، مطالعه و یک بار دیگر سه مسئله را حل کند.

[۱] stroll

تعریف: مجموعه P، شامل همه‌ی اعداد طبیعی ۱ تا ۲۵، همراه ۴ تابع زیر، *گردشگاه*[۲] است. $S(x) = x + 5, \quad x \in P, x \leq 20$ $N(x) = x - 5, \quad x \in P, x > 5$ $E(x) = x + 1, \quad x \in P, x \bmod 5 \neq 0$ $W(x) = x - 1, \quad x \in P, x \bmod 5 \neq 1$ **هر ترکیبی از توابع بالا، یک *گردش* نامیده می‌شود. گوییم گردش s از a به b *می‌رود اگر و تنها اگر* $s(a) = b$**
مثال: گردش SoW^3oS^2 از ۵ به ۱۷ می‌رود: $SoW^3oS^2(5) = W^3oS^2(10) = W^2oS^2(9) = \ldots = S^2(7) = S(12) = 17$
فعالیت‌ها: **۱. مثالی از یک گردش ارائه دهید که از ۱۱ به ۳ برود.** **۲. تمام اعدادی را پیدا کنید که با گردش‌هایی با شروع از ۹، بدون استفاده از گام‌های N و W قابل دسترسی باشند.** **۳. بدون نگاه کردن به پاسخ‌تان به سؤال ۱ در بالا، دوباره مثالی از یک گردش ارائه دهید که از ۱۱ به ۳ برود.**

شکل ۵.آزمایش- گام اول

اگر همه چیز به‌خوبی پیش برود، باید تغییری قابل‌توجه بین تلاش‌های اول و دوم برای حل مسائل وجود داشته باشد. خواننده به احتمال زیاد می‌تواند با اندکی تأمل دریابد که نگارنده چه چیزی را در هر بار اجرای آزمایشْ در کلاس درس به‌روشنی مشاهده کرده است: با تعریف دوم (ارائه‌شده در شکل ۶) هر سه فعالیت به‌مراتب آسان‌تر می‌شوند. چه چیزی در این تعریف جدید هست که چنین تفاوتی را ایجاد می‌کند؟ احتمالاً ویژگی مشخصاً ساختاری آن است: *گردشگاه*[۱] که در آغاز، چیزی جز دسته‌ای الگوریتم نبود، اکنون به ترکیب یک ساختارِ شیء‌مانندِ خوش‌دست در آمده است. «گردش» که در تعریف اول یک فرآیند محاسباتی بود، اکنون می‌تواند به‌چشم مسیری از یک شکل ثابت –خط شکسته– دیده شود. مهم است که با گذار از رویکرد عملیاتی به ساختاری، هیچ اطلاعاتی اضافه نشده است: فرآیندهای محاسباتی مانند آب که با سرما به یک قطعه یخ تبدیل می‌شود، به‌صورت یک ساختار ثابت درآمده‌اند.

برای به‌دست آوردن شرحی روشن‌تر از نقش مفاهیم ساختاری، نظریهٔ طرحواره‌های شناختی را به‌کار می‌گیریم. مثال ما به روشی ساده اما قانع‌کننده نشان می‌دهد که بر پایهٔ ملاحظات صرفاً نظری، چه چیزی می‌تواند کشف شود: اطلاعاتی که به‌طور عملیاتی درک شده است، اگرچه کاملاً ضروری‌اند و به‌ظاهر برای حل مسئله کافی به نظر می‌رسند، به‌سادگی قابل پردازش نیستند. این نوع اطلاعات فقط می‌تواند در طرحواره‌های غیرساختاریِ دنباله‌ای ذخیره شود که برای ابعاد ناچیز حافظهٔ فعّال انسان نامناسب هستند. در نتیجه ایده‌های صرفاً عملیاتی می‌بایست به شیوه‌ای پُرزحمت و

[۱] promenade

غیرنظام‌مند پردازش شوند که ممکن است تلاش شناختی زیادی بخواهد و حسی آزاردهنده را از درک صرفاً موضعی و بنابراین ناکافی به دنبال داشته باشد. به‌طور طبیعی چنین تلاشی برای هر کسی که سعی در حل یک مسئلهٔ پیچیده دارد، کاملاً ناموفق خواهد بود. برای نمونه، فکر کنید اگر می‌خواستیم دو تمرین اول در آزمایش بالا را تنها با تعریف‌های عملیاتی حل کنیم، چقدر دشوار می‌بود؛ یا تصوّر کنید حل یک مسئلهٔ کلامی پیشرفته، بدون استفاده از نمادهای جبری و صرفاً به روش «کلامی» چقدر مشکل است. همچنین باید اشاره کرد که در یک طرحوارهٔ شناختیِ دنباله‌ای، هضم دانش جدید که معمولاً آن را یادگیری معنادار می‌نامیم، به‌سختی رخ می‌دهد. احتمالاً به همین دلیل، تمرین سوم که نیاز به فراخوانی جواب سؤال اول را داشت، تا زمانی که فقط بازنمایی عملیاتی در دسترس بود، بسیار سخت به نظر می‌رسید.

این بازنماییِ شیءمانندِ ایستاست که اطلاعات عملیاتی را در یک کلِ فشرده، خلاصه و طرحوارهٔ شناختی را به ساختاری مناسب‌تر تبدیل می‌کند. برای فهمیدن ماهیت و نتایج چنین تغییری، طرحواره‌های A و B را در شکل ۷ مقایسه کنید (طبعاً من قصد ندارم نتیجه بگیرم که این طرحواره‌ها تصاویر وفاداری از ساختارهای ذهنی «واقعی» هستند که دانش ما در آنها ذخیره شده است؛ من از این تصاویر فقط به‌عنوان ابزارهای مناسبی برای توضیح جنبه‌های فنی ادعاهایمان استفاده می‌کنم). از دیدگاه کاملاً فنی، اشیاء ریاضی «رئوس» بالایی در طرحوارهٔ سلسله‌مراتبی هستند که از مرحلهٔ جسمیت‌سازی نتیجه می‌شوند. هر کدام از آنها یک مورد جداگانه در فهرست[1] ذهن ما هستند. آنها برای فردی که در حال شناختن است، مثل تصاویر ساده‌شده عمل می‌کنند که در یک نگاه قابل درک هستند و ممکن است به‌جای «چیز واقعی» (فرآیند متناظر) در مراحل خاصی از حل مسئله استفاده شوند. به‌طور طبیعی، اغلب، این ساختارهای مجرّد فقط با چشم ذهن ما می‌توانند دیده شوند؛ با تأسف بسیار، خیلی به‌ندرت می‌توانیم به خوش‌شانسی وضعیت مسئلهٔ گردشگاه و گردش باشیم که به‌سادگی می‌شد آن را در قالب تصاویر و نمادهای «جسمیت‌ساز»، روی کاغذ به‌طور واقعی کشید.

هر دو فرآیند حل مسئله و فراگیری می‌توانند مانند کشتی‌ای که از روی نقشه‌های ناوبری هدایت می‌شود، به‌کمک این بازنمایی‌های کلیِ فشرده البته در صورتی که همراه با جزئیات نباشند، به‌طور مؤثری هدایت شوند.

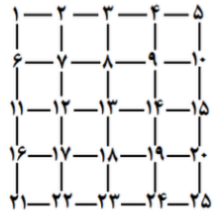
در برخورد با یک مسئلهٔ واقعاً مشکل، اگر با عملیات ملموس شروع کنیم، همیشه نمی‌توانیم خیلی پیش برویم؛ معمولاً بهتر است به نسخهٔ ساختاری مفاهیم‌مان بازگردیم. این بازنمایی‌های بالاسطحی به ما «نمایی کلی» می‌دهند که با آن می‌توانیم از دستگاه اشیای مجرّدمان استفاده کنیم؛ مانند فردی که برای جستجوی اطلاعات از فهرست استفاده می‌کند یا شخصی که برای رفتن به خیابانی، قبل از اینکه به آنجا برود، نقشه را بررسی می‌کند. به بیان دیگر، در فرآیندهای حل مسئله، موجودات

[1] catalogue

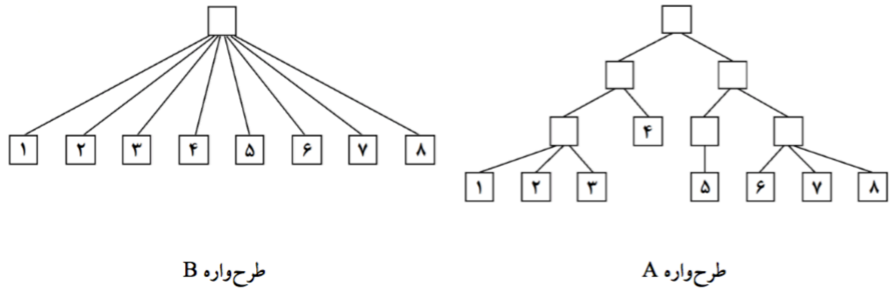
تعریف: تفرجگاهِ P گرافی است که در زیر نمایش داده شده است.

اگر x راسی از P باشد، آنگاه $S(x)$, $N(x)$, $W(x)$ and $E(x)$ و راس‌های مجاور آن هستند که به ترتیب در جنوب، شمال، غرب و شرق قرار گرفته‌اند.

تعریف گردش همان است که در شکل ۵ آمده است.



شکل ۶.آزمایش - گام ۲



هر اطلاعاتی می‌تواند در طرح‌واره‌های متفاوتی ذخیره شود. برای مثال، دو طرح‌واره که در این شکل رسم شده‌اند شامل اطلاعات یکسانی هستند (که با (۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸) نمایش داده شده‌اند). طرح‌واره A دنباله‌ای، سطحی و گسترده است. طرح‌واره می‌تواند به عنوان نتیجه‌ای از جسمیت‌یابی به صورت ساختاری عمیق‌تر و باریک‌تر مانند طرح‌واره B دوباره سازمان یابد، با این سازمان جدید همه‌ی فرآیندهای شناختی (چه بازیابی، چه ذخیره‌سازی) بسیار سریع‌تر می‌شوند.

شکل ۷.سازمان‌دهی‌های متفاوت از یک طرحوارهٔ سلسله مراتبی

مجرّد فشرده مانند نشانگرهایی عمل می‌کنند که رو به سوی اطلاعات جزئی‌تر دارند. بنابراین تقریباً هر فعالیت ریاضی را می‌توان تعاملی پیچیده میان نسخه‌های عملیاتی و ساختاریِ ایده‌هایِ ریاضیِ یکسان دید: هنگامی که با یک مسئلهٔ پیچیده برخورد می‌کنیم، مرتباً از یک رویکرد به رویکردی دیگر روی می‌آوریم تا بتوانیم در حد امکان از دانشمان ماهرانه استفاده کنیم. از قول هنریتسی (۱۹۷۴) کسی که ریاضیاتِ الگوریتمی و دیالکتیک را معرفی کرده است، می‌توانیم بگوییم که «رویکرد ساختاری، به تفکّر وامی‌دارد؛ رویکرد عملیاتی، به فعالیت وامی‌دارد؛ رویکرد ساختاری، بینش می‌دهد؛ رویکرد عملیاتی، به نتیجه می‌رساند». یک شرح عالی از فرآیندِ حلِ مسئلهٔ شیء‌ـ هدایت‌گر[1] در اظهارنظر آدامار دربارهٔ تفکّر خودش یافت می‌شود (آدامار ۱۹۴۹، ص. ۷۶–۷۷): این ریاضیدان به قانع‌کننده‌ترین روش به

[1]object-navigated

خواننده می‌گوید که چگونه می‌توان از طریق رفت و آمد بین اشیاء (اعداد و مجموعه‌های اعداد) و محاسبات، نکات اصلی یا خلاصهٔ استدلالی را برای وجودِ بی‌نهایت عدد اول بیان کرد.

اکنون تأثیرات سودمندی را که جسمیت‌سازی می‌تواند بر یادگیری داشته باشد، فهرست می‌کنیم. همان‌طور که پیش از این توضیح داده شد، شکل‌گیریِ یک مفهوم ساختاری به معنای سازمان‌دهی مجدد طرحوارهٔ شناختی با اضافه کردن لایه‌های جدید به‌وسیلهٔ تبدیل انباشت‌های پی‌درپی به ساختارهای سلسله‌مراتبی است. آشکارا هرچه سلسله‌مراتب عمیق‌تر و باریک‌تر باشد، ظرفیت طرحواره بیشتر خواهد بود. برای آنکه ایدهٔ بهتری درباره تغییر حاصل از بازسازی داشته باشیم، اجازه دهید دو طرحوارهٔ ارائه‌شده در شکل ۷ را با هم مقایسه کنیم. در طرحوارهٔ A موارد جدید را به‌ندرت می‌توان اضافه کرد، زیرا تعداد «پسران» رأس سطح بالایی، الان هم خیلی زیاد است. در مقابل، هنوز هیچ رأسی در طرحوارهٔ B «اشباع» نشده است، چراکه میانگین تعداد «پسران» به «عدد جادویی ۲±۷» نرسیده است (طبق کار میلر[۱] (۱۹۵۶) این عدد بیشترین تعداد تکه‌های اطلاعات است که به‌طور همزمان در حافظهٔ کاری[۲] ما می‌تواند حفظ شود). بنابراین با رویکرد ساختاری، فضای بیشتری برای وارد کردن اطلاعات جدید در دسترس است. در نتیجه یادگیری، مؤثرتر و معنادارتر می‌شود. همچنین هنگامی که اطلاعات ضروری در ساختارهای درختیِ سلسله‌مراتبیْ ذخیره شده است، فرآیندهای بازیابی سریع‌تر اتفاق می‌افتد. خواننده احتمالاً قادر خواهد بود که تفاوت را هنگام پرداختن مجدد به فعالیت سومِ شکل ۵، مشاهده کند.

اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم به سؤال مربوط به لزوم رویکرد ساختاری در آغاز این بخش، یک جواب محتاطانه بدهیم: با در نظر گرفتن توضیحات و مثال‌های اخیر، به نظر می‌رسد که بدون اشیای مجرّد همهٔ فعالیت‌های ذهنی ما مشکل‌تر خواهد بود. چون ما اَبَررایانه نیستیم، نمی‌توانیم فرآیندهای خیلی پیچیده را بفهمیم بدون آنکه آنها را به تکه‌های کوچک‌تر بشکنیم و هر قسمت را به یک کل کنترل‌پذیر، فشرده کنیم. به عبارت دیگر، فاصلهٔ میان فرآیندهای محاسباتی پیشرفته و موجودات ریاضی عینی‌ای که اشیاء از ابتدایی‌ترین فرآیندها (مانند شمارش) هستند، آن چنان زیاد است که نمی‌توانیم آن را یک‌باره درک کنیم. برای فائق آمدن بر این مشکل، اشیای مجرّد میانجی را خلق می‌کنیم که در سیرهای عقلی، به‌نوعی نقش ایستگاه را بازی می‌کنند. این موجوداتِ شناختیِ فشرده، به‌طور مؤثر حافظهٔ کاری را از سرریز شدن باز می‌دارد. اشیای مجرّد، همان‌هایی که به‌صورت یک طرحوارهٔ شناختی خوش‌ساختار به‌طور منظمی سازمان‌دهی شده‌اند، احتمالاً دلیل این اظهارنظر پوانکاره بودند (۱۹۵۲، ص ۵۱): «... من می‌توانم کل یک استدلال [طولانی ریاضی] را در یک نگاه درک کنم. [بنابراین] نیازی نیست که نگران فراموش کردن یکی از اجزای آن باشم؛ هر

[۱] Miller [۲] working memory

یک از آنها خود را به‌طور طبیعی در مکانی که برایش فراهم شده است، جا می‌دهد بدون آنکه احتیاج به حفظ کردنشان داشته باشم.»

در مراحل خاصی از شکل‌گیری (یا اکتساب) دانش، عدم حضور درک ساختاری می‌تواند از توسعهٔ بیشتر جلوگیری کند. هرچه میزان اطلاعات افزایش می‌یابد، طرحواره قبلی اشباع‌تر می‌شود و عملاً در برابر هرگونه غنی‌تر شدن مقاومت می‌کند. قطعاً این یک تصادف محض نبود که انتقال از جبر کلامی به جبر نمادین (انتقال از رویکرد عملیاتی به رویکرد ساختاری در ریاضیات محاسباتی) در قرن شانزدهم اتفاق افتاد و این فقط یک تصادف تاریخی نبود که چندین دستگاه متنوع تقریباً به‌طور همزمان توسط ریاضیدانان مستقل از هم ابداع شدند. در آن زمان، بالا بودن پیچیدگی‌های فرآیندهای محاسباتی باعث شد جبر کلامی در حالت پات[1] ([حالتی از بازی شطرنج که در آن، یک طرف در حالت کیش نیست اما هر حرکتی موجب کیش شدن او می‌شود]) قرار گرفته و عملاً پایانی باشد بر توسعهٔ آن. حتی اگر به پیشتر از آن بنگریم، می‌توانیم جسورانه این حدس را بزنیم که نبودِ بازنمایی‌های ساختاری (و بنابراین مفاهیم ساختاری) یکی از عواملی بود که از سرعت توسعهٔ علوم محاسباتی در یونان باستان کاست و باعث شد جبر برای قرن‌ها از هندسه عقب بیفتد.

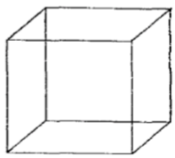
من تا اینجا تفکّر ساختاری را به‌عنوان یک سلاح خیلی قوی در مقابل محدودیت‌های حافظهٔ کاری‌مان معرفی کردم. اگر به‌جای نگاه فنی، نگاه فلسفی داشته باشیم، می‌توانیم بگوییم که در ریاضیات، گذار از فرآیندها به اشیای مجرّد، دریافت ما را از فهم ریاضیات بهبود می‌دهد، چراکه جسمیت‌سازی، مهارت‌های حل مسئله و یادگیری را افزایش می‌دهد. بنابراین هرچه رویکرد ما ساختاری‌تر باشد، حس اعتماد به نفس ما در آنچه که انجام می‌دهیم، بیشتر می‌شود. هنگامی که مفهوم گردش با تعریف ساختاری ارائه شد، حداقل تعدادی از خوانندگان بارقهٔ نوری را دیدند که دلیلی بر صحت ادعای ما است. به‌طور خلاصه، ادراک ساختاری احتمالاً پیش‌زمینهٔ فهم رابطه‌ایِ تعریف شده توسط اسکمپ است که می‌گوید: «هم بدانیم چه کار می‌کنیم و هم بدانیم چرا آن کار را می‌کنیم»؛ به عبارت دیگر، قوانین و دلائل را همزمان داشته باشیم. رویکرد عملیاتیِ محض معمولاً چیزی فراتر از فهم ابزاری نمی‌دهد که پیش از این توسط اسکمپ به‌عنوان داشتن قوانین بدون دلیل ارائه شد. باید بی‌درنگ تأکید کنیم که این توصیفِ نسبتاً توهین‌آمیز (که ظاهراً توسط خود اسکمپ بعد از نگاهی عمیق‌تر به موضوع، بازنگری شد) حق مطلب را در مورد این فهم که در برخی از مراحل یادگیری، هم ارزشمند و هم غیرقابل اجتناب هستند، ادا نمی‌کند. این ادعا در پایان این بخش روشن و ثابت خواهد شد. با این حال، قبل از آن، کمی از ایدهٔ اسکمپ فراتر خواهم رفت و دربارهٔ دلایل بدون قوانین که نوع سومی از فهم است، صحبت خواهم کرد. منظور من نوعی فهم شهودیِ محض است که در حالت‌های نادری به‌دست می‌آید. در این حالت‌ها، ادراک ساختاری مبهمی به‌دست می‌آید بدون آنکه پایهٔ عملیاتی

[1] stalemate

کاملی شکل گرفته باشد. احتمالاً این همان فهمی است که ریاضیدانان هنگام معرفی اولین نسخهٔ مفهوم تابع داشته‌اند. تاریخ نشان داده است که داشتن «دلایل بدون قوانین» برای خلق یک نظریهٔ ریاضیِ تکمیل‌شده، کافی نیست اما مطمئناً در کشف قضیه‌ها و در تعیین جهت‌های پیشرفت‌های بعدی، بسیار سودمند خواهند بود. نقش‌ها و ویژگی‌های ادراک‌های ساختاری و عملیاتی در شکل ۹ خلاصه شده‌اند.

۳.۵. سختیِ ذاتیِ جسمیت‌سازی. بعد از اینکه اهمیت ادراک‌های ساختاری را نشان دادیم، نوبت به سؤالی می‌رسد که در بخش قبل مطرح شد: چرا جسمیت‌سازی این‌قدر مشکل است؟ چرا خود ریاضیدانان قرن‌ها زمان لازم داشتند تا به نسخه‌های کاملاً ساختاریِ مفاهیم اولیه مانند عدد و تابع برسند؟ اگر به خاطر آوریم که جسمیت‌سازی یک تغییر هستی‌شناسانه و بنابراین یک پرش کیفی است، این مسئله کمتر پرسش‌برانگیز خواهد بود. این تحوّل مفهومی، پدیده‌ای پیچیده است به‌ویژه هنگامی که همراه با تغییرات نامحسوس در معنا و کاربردها باشد (که چنین اتفاقی معمول است؛ برای مثال تعریف ساختاری نظریه‌مجموعه‌ایِ تابع، افق دید این مفهوم را بسیار وسعت داد). به‌دست آوردنِ توانایی دیدن چیزی آشنا به‌گونه‌ای کاملاً جدید، هیچ‌وقت آسان نبوده است. مشکلات ناشی از تبدیل یک فرآیند به یک شیء، از یک نظر مانند مشکلاتی هستند که در هنگام گذار از یک پارادایم علمی به پارادایمی دیگر حاصل می‌شود؛ یا برای اینکه مقایسه‌مان کمتر بلندپروازانه و بیشتر متقاعدکننده باشد، مانند موانعی است که شخص در دیدن یک مکعب ترسیم‌شده روی کاغذ با آنها مواجه می‌شود هنگامی که سعی می‌کند آن را از زاویه‌ای دیگر تصوّر کند (شکل ۸ را ببینید).

اگر حس می‌کنید این مکعب از بالا دیده می‌شود –
سعی کنید خود را قانع کنید که از پایین دیده می‌شود؛
و برعکس.



شکل ۸.مکعب

طرحوارهٔ سه‌مرحله‌ای از شکل‌گیری مفهوم، این مشکلات را روشن‌تر می‌سازد. با توجه به مدل، جسمیت یافتن یک فرآیند دلخواه، همزمان با درونی‌سازی فرآیندهای بالاسطحی رخ می‌دهد. برای مثال، در مورد اعداد منفی، هنگامی که عملیات جبری روی این نوع اعداد حداقل به‌صورت جزئی درونی‌سازی شده باشند، جسمیت‌سازی بسیار محتمل‌تر است. در واقع، چیزی که به بازشناسی عملیاتی مانند ۵−۲ و ۶−۰ به‌عنوان اعداد می‌انجامد، شباهت الگوریتم‌های شامل این عملیات، به

الگوریتم‌هایی است که روی اعداد آشناتر انجام شده‌اند (یا این حقیقت است که جمع و ضرب دو مقدار منفی یا ناهم‌علامت بسیار شبیه جمع و ضرب اعداد مثبت است). با این حال، برای دیدن این شباهت، باید در انجام عملیات بر روی مقادیر منفی مهارت کافی پیدا کرد. به‌طور مشابه، برای دیدن یک تابع به‌عنوان یک شیء، می‌بایست با آن به‌صورت یک کل، دست‌ورزی کرد. دلیلی برای تغییر فرآیند به شیء وجود ندارد مگر آنکه فرآیندهایی بالاسطحی وجود داشته باشند که روی این فرآیند ساده‌تر اجرا شده باشند. اما یک دور باطل[1] وجود دارد: از یک طرف، بدون تلاش برای درونی‌سازیِ بالاسطحی، جسمیت‌سازی اتفاق نمی‌افتد و از طرف دیگر، وجود اشیایی که بر روی آنها، فرآیندهای بالاسطحی انجام می‌گیرند، برای درونی‌سازی غیرقابل اجتناب به نظر می‌رسند. بدون چنین اشیایی، فرآیندها حتماً کاملاً بی‌معنا خواهند بود. به عبارت دیگر، جسمیت‌سازیِ پایین سطحی و درونی‌سازیِ بالا سطحی، پیشنیاز یکدیگر هستند!

از دیدگاه روان‌شناختی به نظر می‌آید آنچه گفتیم می‌تواند نتایج کاملاً مهمی داشته باشد. «دور باطلِ» جسمیت‌سازی اکنون به فهم و توضیح اینکه چرا برای بسیاری از افراد، «ریاضیات در مدرسه مجموعه‌ای از قوانین غیرقابل درک است که اگر درست به خاطر سپرده و به‌کار گرفته شود به جواب درست منجر می‌شود»، کمک خواهد کرد (اسکمپ، ۱۹۷۱، ص. ۳).

ترتیبِ مهارت‌های مختلفِ ریاضی که باید پرورش یابند، همواره مسئله‌ای مهم برای روان‌شناسان و آموزشگران بوده است. همان‌طور که کیلپاتریک (۱۹۸۸) بیان می‌کند، «یکی از قابل احترام‌ترین و آزاردهنده‌ترین مسائل آموزش ریاضی، تبادلات میان مهارت و ادراک، میان ارتقای اجرای خوب رَویه‌های ریاضی و رشد درک چرایی و چگونگی کارکرد این رَویه‌ها و معنای آنها است ... ». مکاتب مختلف روان‌شناسی به این مسئله پاسخ‌های متفاوتی داده‌اند. دیدگاه کلی رفتارگرایان این بود که مهارت‌ها باید [با تکرار و تمرین] فرا گرفته شوند در حالی که به نظر می‌رسد نظریه‌های جدیدتر، این دیدگاه را ترجیح می‌دهند که «تکرار و تمرین تنها زمانی توصیه می‌شود که ایده‌ها و فرآیندهایی که قبلاً درک شده‌اند، برای ارتقای مهارت، تمرین شوند» (برونل[2]، ۱۹۳۵، ص. ۱۹). با این حال، بر پایهٔ مدل ما از شکل‌گیری مفهوم، هیچ ترتیب آشکاری برای قابلیت‌ها نمی‌توان قائل شد. نظریهٔ «دور باطل» بالا، بیان می‌دارد که یک قابلیت نمی‌تواند بدون دیگری به‌طور کامل رشد کند: از یک طرف، شخص برای دستیابی به فهمی خوب از «اشیاء» باید مهارت کاملی در اجرای الگوریتم‌هایی که شامل این اشیاء هستند داشته باشد و از طرف دیگر، برای کسب خُبرگی فنی، باید قبل از آن، اشیاء را داشته باشد، زیرا بدون آنها فرآیندها بی‌معنا هستند و در نتیجه اجرا و به خاطرسپاریِ آنها مشکل خواهد بود. برای مثال، مفهوم عدد مختلط زمانی جسمیت می‌یابد که شخص قادر به انجام محاسبات

[1] vicious circle [2] Brownell

شامل این اعداد باشد اما در عین حال، درک چنین ساختارهایی مانند i یا $۲ + ۳i$ به‌عنوان اعداد تکامل‌یافته (و نه‌تنها نمادهایی برای عملیاتِ «بدون نتیجه») پیشنیازی برای تسلط در دست‌ورزی با آنها است. این ادعا مطابق با نتایج مطالعه‌ای در مقیاس بزرگ است که در امریکا روی نوجوانان ۱۳ و ۱۷ ساله انجام گرفته است (کارپنتر و همکاران، ۱۹۸۰). بر طبق این نتایج، «رشد یک مهارت، کاملاً به درک مفهوم پشت آن مهارت بستگی دارد».

در پرتو این ادعاها نباید تعجب کنیم که اغلب، «دانش‌آموزان بیشترِ مهارت‌های ریاضی را ظاهراً در سطح دست‌ورزی‌های طوطی‌وار فرا می‌گیرند و مفاهیمِ نهان در محاسبات را درک نمی‌کنند» (همان). برای مثال، دانش‌آموزان علی‌رغم اینکه نمی‌توانند کسرها را به‌عنوان عدد در نظر بگیرند، می‌توانند محاسباتِ کسرها را به‌خوبی انجام دهند. به‌دلیل ماهیت پیچیدهٔ وابستگی دوطرفهٔ آنها، به نظر می‌رسد در فرآیند یادگیری، گاهی درک و فهم دانش‌آموز (این احساس مهارت و تسلطی که به همراه توانایی «دیدن» ساختارهای مجرّد می‌آید) ناگزیر در پشت زبردستی فنی قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر، در برخی از موارد، فراگیر باید [سختیِ] انجام مقدار مشخصی تمرین مکانیکی را تحمّل کند که همراه با شک به معنا و احساس ناکافی بودنِ فهم (صرفاً ابزاری) است. حتی ریاضیدان حرفه‌ای نمی‌تواند از این سرنوشت فرار کند و اغلب، از لزوم تلاش سخت برای درک معنای ایده‌های ظاهراً ساده، شکایت می‌کند. هالموس[۱] (۱۹۸۵ الف) زمان‌هایی را به یاد می‌آورد که دانشجو بوده است و علی‌رغم «کار مجدّانه» روی مفهوم لاندا–ماتریس‌ها، «تا ۴ یا ۵ سال بعد حقیقتاً نتوانسته درک درستی از موضوع به‌دست آورد» (صص. ۴۰–۴۱). می‌توان حدس زد که ابتدا چگالش صورت گرفته بود و سپس جسمیت‌یافتنی که بسیار طول کشید.

معلمان و دانش‌آموزان غالباً این حقیقت را که یکی از مهم‌ترین نتایج طرحوارهٔ سه‌مرحله‌ای ما است، نمی‌پذیرند: نمی‌توان همیشه انتظار داشت که نتیجهٔ تلاش یک فرد برای درک یک ایدهٔ جدید، فوراً به بینش منجر شود. جسمیت‌سازی که درکِ رابطه‌ای به همراه می‌آورد، به‌سختی حاصل می‌شود و تلاش زیادی را می‌طلبد و ممکن است زمانی به‌دست بیاید که اصلاً انتظارش نیست؛ گاهی با یک جرقهٔ ناگهانی. آدامار (۱۹۴۹) در کتاب پیشگامش دربارهٔ روان‌شناسی ریاضی، به «اثر روشنگرانه[۲]»ای اشاره می‌کند که احتمالاً بعد از یک دوره کار سخت و به‌دنبال آن، چند روز استراحت («دورهٔ نهفتگی[۳]») می‌تواند رخ دهد.

از دیدگاه آموزشی، مشکل اصلیِ تأخیر در جسمیت‌سازی و در نتیجه شک‌هایی که در معنا به‌وجود می‌آید، این است که با خود، یک آسیب دائمی به دنبال خواهد داشت: ترس مادام‌العمر از ریاضیات و این باور که ریاضیات قابل یادگیری نیست. برخی ممکن است نتوانند از شک ناشی از برخورد

[۱] Halmos [۲] illumination effect [۳] incubation period

اول‌شان با این موقعیت مشکل رها شوند. آنهایی که آمادهٔ تلاش فعّالانه برای دست‌یابی به معنی (برای جسمیت‌سازی) [مفاهیم ریاضی] نیستند، سریع متقاعد می‌شوند که ریاضیات را هرگز نمی‌فهمند. توانایی هماهنگ ساختن دقیق و بی‌دردسر جسمیت‌سازی پایین‌سطحی با درونی‌سازی بالاسطحی، ممکن است یکی از مهم‌ترین مشخصه‌های فردی باشد که از پس ریاضیات برمی‌آید. «خُبره‌ترین‌ها در ریاضی» حتی اگر گاهی در ادراک خود تزلزلی احساس کنند، ظاهراً به‌اندازهٔ کافی انگیزه، صبر و نظم فکری دارند تا بتوانند با یک حدس قابل اعتماد از بینشی سالم و درست، از پسِ این موقعیت برآیند. قطعاً این چیزی است که می‌توان از تاریخ آموخت. همان‌طورکه ژوردِین (۱۹۵۶) بیان می‌کند، «هنگامی که مردانِ با ذهن منطقی» به مفاهیم «بی‌معنیِ» اعداد منفی و موهومی (مختلط) معترض می‌شوند، «ریاضیدانان به آنها توجه نمی‌کنند و می‌گویند 'باز هم ادامه بدهید؛ باورتان خواهد شد'». آنهایی که می‌توانستند زیبایی درونیِ ایده را ببینند، فکر می‌کردند که این اعداد جدید، «هرچند به‌ظاهر غیرقابل تفسیر و حتی متناقض با خود هستند، باید منطق داشته باشند. بنابراین آنها از این [اعداد] با باور تقریباً محکمی استفاده کردند و بعدها توجیهی برایشان پیدا شد» (صص. ۲۹-۳۰).

	ادراک عملیاتی	ادراک ساختاری
مشخصه‌ی کلی	یک موجود ریاضی، یا به عنوان محصولی از یک فرآیند معین درک می‌شود یا خودش به عنوان فرایند شناسایی می‌شود	یک موجود ریاضی، به عنوان یک ساختار ایستا درک می‌شود – مانند اینکه یک شیء واقعی باشد
بازنمایی‌های درونی	توسط بازنمایی‌های کلامی حمایت می‌شود	توسط تصاویر دیداری حمایت می‌شود
جایگاه آن در ایجاد توسعه	در مراحل اولیه‌ی شکل‌گیری مفهوم ایجاد می‌شود	از ادراک عملیاتی استخراج می‌شود
نقش آن در فرآیندهای شناختی	برای حل مسئله و یادگیری کارآمد لازم است، اما کافی نیست	همه فرآیندهای شناختی (یادگیری، حل مسئله) را تسهیل می‌کند

شکل ۹.مفاهیم عملیاتی و ساختاری-خلاصه

در پرتو نظریهٔ «دور باطل»، به نظر می‌رسد که در جهت بهبود آموزش ریاضیات، باید بر این سؤال تمرکز کنیم که برای بازکردن این گره و برانگیختنِ جسمیت‌سازی، چه کاری و تا چه حد می‌توان انجام داد. همچنین باید این پرسش را از خود بپرسیم که هنگامی که دانش‌آموزان هنوز درباره شیئی که باید با آن کار کنند، آشفته‌اند و در نتیجه احساس می‌کنند که درک‌شان به‌اندازهٔ کافی رضایت‌بخش

نیست، از چه ابزاری باید استفاده کنیم تا مطمئن شویم آنها از این مراحل شکِ در معنی، به‌سلامت بگذرند. مقالهٔ دیگری به این موضوع اختصاص داده خواهد شد.

مراجع

[1] Anderson, J. R.: 1976, Language, Memory, and Thought, Erlbaum, Hillsdale, N.J. Behr, M., Erlwanger, S., and Nichols, E.: 1976, How children view equality sentences (PMDC Technical Report No. 3), Florida State University (ERIC Document Reproduction Service No. ED144802).

[2] Bishop, A. J., A review of research on visualisation in mathematics education, in: *Proceedings of The Twelfth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Hungary, vol. 1, 170–176, 1988.

[3] Brownell, W. A., Psychological considerations in learning and teaching arithmetic, in: *The Teaching of Arithmetic: Tenth Yearbook of the NCTM*, Columbia University Press, New York, 1935.

[4] Cajori, F. A., *History of Mathematics*, 4th edn., Chelsea Publishing Company, New York, 1985.

[5] Carpenter, T. P., Corbitt, M. K., Kepner, H. S., Lindquist, M. M., and Reys, R., Results of the second NAEP mathematics assessment: Secondary school, *The Mathematics Teacher,* **73** (1980), no. 5, 329–338,

[6] Clements, K., 1981, Visual imagery and school mathematics, *For the Learning of Mathematics*, **2** (1981), no. 2, 33–38.

[7] Courant, R. and John, F., *Introduction to Calculus and Analysis*, vol. I, Interscience Publishers, New York, 1965.

[8] Davis, R. B., Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations *Journal of Children's Mathematical Behavior,* **1** (1975), no. 3, 7 – 35.

[9] Davis, P. J. and Hersh, R., *The Mathematical Experience*, Penguin Books, London, 1983.

[10] Dörfler, W., Empirical investigation of the construction of cognitive schemata from actions, in Proceedings of the Eleventh International Conference of PME, vol. III, 1987, 3–9.

[11] Dörfler, W., Protocols of actions as a cognitive tool for knowledge construction, in Proceedings of the Thirteenth International Conference of PME, Paris, vol. I, 1987, 212–219.

[12] Dubinsky, E., Lewin, P., Reflective abstraction and mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness, *Journal of Mathematical Behavior,* **5** (1986), 55 –92.

[13] Eisenberg, T., Dreyfus, T. (eds.), Visualization in the mathematics curriculum, Special issue of *Focus on Learning Problems in Mathematics* **11** (1989), no. 1,2.

[14] Frege, G., What is function, in Geach, P. and Black, M. (eds.), *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Blackwell, Oxford, 1970.

[15] Hadamard, J. S., *The Psychology of Invention in the Mathematics Field,* Princeton University Press, N. J., 1949.

[16] Halmos, P. R., Pure thought is better yet . . . , *The College Mathematics Journal,* **16** (1985), 14–16.

[17] Halmos, P. R., *I Want to be a Mathematician, An Autobiography*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[18] Henrici, P., The influence of computing on mathematical research and education, in: *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, vol. 20, American Mathematical Society, Providence, 1974.

[19] Hiebert, J., Lefevre P., Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis, in: Hiebert, J. (ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1986.

[20] Jourdain, P. E. B., The nature of mathematics, in: Newman, J. R. (ed.), *The World of Mathematics*, Simon and Schuster, New York, 1956.

[21] Kaput, J. J., Mathematics and learning: Roots of epistemological status, in: Lochhead, J., Clement, J. (eds.), *Cognitive Process Instruction*, Franklin Institute Press, 1979.

[22] Kieran, C., Concepts associated with the equality symbol, *Educational Studies in Mathematics,* **12** (1981), no. 3, 317–326.

[23] Kilpatrick, J., 'Editorial', *Journal for Research in Mathematics Education* **19** (1988), no. 4.

[24] Kleiner, I., Evolution of the function concept: A brief survey, *College Mathematics Journal* **20** (1988), no. 4, 282–300.

[25] Lesh, R., Landau, M. (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Academic Press, New York, 1983.

[26] Markovits, Z., Eylon, B., Bruckheimer, M., Functions today and yesterday, *For the Learning of Mathematics,* **6** (1986), no. 2, 18–24.

[27] Maurer, S. B., The algorithmic way of life is best, *College Mathematics Journal* **16** (1985), 2–5.

[28] Miller, G. A., The magic number seven plus minus two: Some limits on our capacity for processing information, *Psychological Review,* **63** (1956), 81–96.

[29] Otte, M., Komplementarit it, *Dialektik* **8** (1984), 60–75.

[30] Paivio, A., *Imagery and Verbal Processes*, Holt, Rinehart, and Winston, New York, 1971.

[31] Penrose, R., *The Emperor's New Mind*, Oxford University Press, Oxford, 1989.

[32] Piaget, J., *The Child's Conception of Number*, Routledge and Kegan, London, 1952.

[33] Piaget, J., *Genetic Epistemology*, W. W. Norton, New York, 1970.

[34] Poincaré, H., *Science and Method,* Dover Publications, New York, 1952.

[35] Sfard, A., Two conceptions of mathematical notions: operational and structural, in: *Proceedings of the Eleventh International Conference of PME*, Montreal, vol. 3, 1987, 162–169.

[36] Sfard, A., Operational vs structural method of teaching mathematics: A case study, in: *Proceedings of the Twelfth International Conference of PME*, Hungary, 1988, 560–567.

[37] Sfard, A., Transition from operational to structural conception: the notion of function revisited, in: Proceedings of the Thirteenth International Conference of PME, Paris, vol. 3, 1989, 151–158.

[38] Sinclair, H., Sinclair A., Children's mastery of written numerals and the construction of basic number concepts, in: Hiebert, J. (ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, Erlbaum, Hillsdale, N. J., 1986.

[39] Skemp, R. R., *The Psychology of Learning Mathematics*, Penguin Books, Harmondsworth, England, 1971.

[40] Skemp, R. R., Relational understanding and instrumental understanding, *Mathematics Teacher,* **77** (1976), 20–26.

[41] Stein, S. K., Gersham's law: Algorithm drives out thought, *Journal of Mathematical Behavior*, **7** (1988), 79–84.

[42] Steiner, H. G., Theory of mathematics education: An introduction, *For the Learning of Mathematics,* **5** (1985), no. 2, 11–17.

[43] Tahta, D. (ed.), *A Boolean Anthology*, Derby, ATM, 1972.

[44] Thompson, P. W., 'Experience, problem solving, and learning mathematics: considerations in developing mathematical curricula', in: E. A. Silver (ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*, Erlbaum, Hillsdale, N. J., 1985.

[45] Vinner, S., Dreyfus, T., 1989, Images and definitions for the concept of function, *Journal for Research in Mathematics Education,* **20** (1989), no. 5, 356–66.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۷/۸/۱۸؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۶/۳۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۷/۵

فاطمه احمدپور: بوشهر، دانشگاه خلیج فارس، گروه ریاضی
رایانامه: f.ahmadpour@math.pgu.ac.ir
شراره تقی دستجردی: خانه ریاضیات اصفهان
رایانامه: sh.dastjerdi@gmail.com
شفیع شکرانی: آلمان، دانشگاه زیگن، دانشکدهٔ ریاضی
تارنما: https://www.uni-siegen.de/fb6/phima/member/whk/vkshokrani.html
رایانامه: shokrani@mathematik.uni-siegen.de
مریم عادلی: جیرفت، دبیرستان شهدای هسته‌ای
رایانامه: madelisardo79@gmail.com
مریم وحید دستگردی: فرانسه، مرکز بین‌المللی پژوهش دربارهٔ محیط زیست و توسعه
رایانامه: maryam.vahid@gmail.com