فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۰، شمارهٔ ۶۸ (بهار و تابستان ۱۴۰۰) صص. ۵۷ تا ۷۷

راسل و گودل*

آلسادیر ارکارت
مترجم: احسان ممتحن

این مقاله به روابط دوجانبهٔ حرفه‌ای راسل و گودل می‌پردازد. پس از شرحی از تأثیر راسل بر گودل، مقاله با بحثی دربارهٔ واکنش راسل به قضیه‌های ناتمامیّت پایان می‌پذیرد.

۱. روابط شخصی گودل و راسل

گرچه راسل و گودل تنها دفعات اندک‌شماری یکدیگر را ملاقات کردند، محتمل است که در سال ۱۹۴۰ یکدیگر را ملاقات کرده باشند. آی. ای. ریچاردز[۱]، سخن‌سنج و منتقد ادبی، در کتاب خود با عنوان **فراسو**[۲] می‌نویسد:

> «به نظر می‌آید منطق‌دانان، از ارسطو به این سو، قادر نبوده‌اند چه برای خودشان و چه برای افراد عادی بگویند که منطق چیست. همان‌گونه که برتراند راسل[۳] با شَعَف به تارسکی[۴]، کارناپ [۵]، ویلارد فن کواین[۶]، گودل[۷] و چند تن دیگر که دقیقاً به‌منظور تصمیم‌گیری در باب همین مطلب ملاقاتشان کرده بود، یادآور می‌شد که آنها چون نمی‌دانند مشغول به انجام چه کاری هستند، مستحق اخراج‌اند.» [۱۹، ص. ۱۶]

ریچاردز به این پاراگراف یک پاورقی افزوده: «در سال ۱۹۴۰ در کمبریجِ ماساچوست، خیابان نهم کیرکلند، در پایان روزی که به گفتگویی بی‌سرانجام دربارهٔ این مسئله گذشته بود.» کواین در شرح حال خودنوشت،

عبارات و کلمات کلیدی. برتراند راسل؛ کورت گودل؛ پرینکیپیا ماتماتیکا؛ قضیهٔ ناتمامیّت.
نام و نشان مقاله به زبان اصلی از این قرار است:
Alasdair Urquhart, Russel and Gödel, *The Bulletin of Symbolic Logic*, **22** (2016), no. 4, 504–520.

[۱] I. A. Richards [۲] Beyond [۳] Bertrand Russell [۴] Tarski [۵] Carnap [۶] Willard Van Quine [۷] Gödel

گزارش می‌دهد که در ترم پاییزهٔ ۱۹۴۰، گردهمایی‌های دوره‌ایِ منطق‌دانان در هاروارد برگزار می‌شد و در توافق با نوشتهٔ ریچاردز، شرح می‌دهد که:

«راسل، کارناپ و تارسکی همگی حاضر بودند ... راسل در حال ایراد سخنرانی‌های ویلیام جیمز[۱] بود که با سمیناری تکمیل می‌شد. این سلسله درس‌گفتارها، *جستاری در معنا و صدق* را شکل دادند. از جانب دانشگاه براون، تلاشی صورت گرفته بود تا نشست‌های منظمی جهت تبادل‌نظر مورد حمایت قرار گیرد. هانتینگتون[۲]، لِویس[۳]، شِفِر[۴]، پرال[۵] و ایور ریچاردز[۶] در میان شرکت‌کنندگان هاروارد حاضر بودند و گروه دانشگاه براون مشتمل بر بیلیس[۷]، ای. ای. بِنِت[۸] و دوکاسه[۹] بود. مهمانان عالی قدر ما ترتیبی دادند که پس از دوتا از جلسات پُرشمار، کنار بکشند و یکدیگر را در خلوت، در دفتر کار ایور یا آپارتمان کارناپ، همراه تنی چند از ما مشتاقانِ جوانتر ملاقات کنند.» [۱۸، صص. ۱۴۹ و ۱۵۰]

روایت ریچاردز از خیابان نهم کیرکلند با توصیف کواین جور در می‌آید. کواین اسمی از گودل نمی‌برد اما گودل نطقی دربارهٔ سازگاریِ فرض پیوستار در پانزده نوامبر ۱۹۴۰ در دانشگاه براون ایراد کرده است. بنابراین حضور وی در هاروارد در حول و حوش آن زمان قابل قبول است؛ گرچه به نظر نمی‌رسد این حضور به شکل مستقلی به ثبت رسیده باشد.

در ماه‌های پایانی سال ۱۹۴۳، راسل در پرینستون زندگی می‌کرد جایی که در باب «مفروضات بنیادی استنتاج علمی» به ایراد درس‌گفتار پرداخت. همانجا درگیر بحث فلسفی با گودل شد:

«هنگامی که در پرینستون بودم، آشنایی نسبتاً خوبی با آینشتین[۱۰] پیدا کردم. عادت داشتم هفته‌ای یک‌بار برای بحث با او، گودل و پاولی[۱۱] به منزلش بروم. این گفتگوها از جنبه‌هایی مأیوس‌کننده بودند، زیرا هرچند این افراد یهودی و تبعیدی بودند و جهان‌وطن‌هایی پرشور، دریافتم که هر سهٔ آنها نسبت به متافیزیک نوعی سوگیریِ آلمانی دارند و علی‌رغم کوشش‌های شدید ما، هرگز به اصلی مشترک که از آنجا به استدلال بیاغازیم، دست نیافتیم. معلوم شد که گودل افلاطون‌گرایی بی‌عیب و نقص است و ظاهراً باور داشت که یک «چنین نیست که»ی جاودانی در آسمان جای گرفته است که منطق‌دانان پارسا پس از مرگ می‌توانند به دیدارش نایل آیند.» [۳۱، ص. ۳۴۱]

جملهٔ آخر راسل، پژواکی از تِذکاری قدیمی‌تر در ویراست دوم کتاب *اصول ریاضیات*[۱۲] دارد «... حتی پرشورترین افلاطون‌گرا نیز چنین فرض نمی‌کند که یک «یا»ی تمام و کمال در آسمان جای گرفته و همهٔ «یا»های روی زمین، نسخه‌های ناکاملی از آن نسخهٔ اصلیِ آسمانی هستند.» [۲۵، ص. ix]

[۱] William James [۲] Huntington [۳] Lewis [۴] Sheffer [۵] Prall [۶] Ivor Richards [۷] Baylis [۸] A. A. Bennett [۹] Ducasse [۱۰] Einstein [۱۱] Pauli [۱۲] Principles of Mathematics

در ماه سپتامبر ۱۹۷۱، کِنِت بلک‌ول[۱]، بایگان آثار راسل در دانشگاه مک‌مستر در اونتا ریو، توجه گودل را به این بخش از شرح حال خودنوشت راسل جلب کرد. گودل در پیش‌نویس سردستیِ ارسال‌نشده‌ای در پاسخ به نامهٔ بلک‌ول، نوشت:

> «نخست باید (به‌خاطر التزام به حقیقت) بگویم که من یهودی نیستم (هرچند فکر نمی‌کنم این موضوع اهمیتی داشته باشد). ۲) که قطعهٔ مذکور این احساس نادرست را القا می‌کند که من با راسل بحث‌های متعددی داشته‌ام که به هیچ‌وجه چنین نیست (تنها یکی را به یاد می‌آورم). ۳) دربارهٔ افلاطون‌گرایی 'بی‌عیب و نقص' من، این چیزی بیش از افلاطون‌گرایی «بی‌عیب و نقص» خودِ راسل در ۱۹۲۱ نیست؛ آنجا که در *مقدمه‌ای بر فلسفهٔ ریاضیات* می‌گوید: '...' در آن زمان راسل به‌روشنی این 'چنین نیست که' را حتی در همین جهان یافته بود اما سپس در اثر نفوذ فکری ویتگنشتاین[۲] تصمیم گرفت آن را کنار گذارد.» [۱۲، صص. ۳۱۶ و ۳۱۷]

گودل نقل قول از راسل را در پیش‌نویس سردستی‌اش ذکر نکرده است اما به احتمال زیاد، او این جمله را در ذهن داشته: «منطق، درست به اندازهٔ جانورشناسی با جهان واقعی سر و کار دارد؛ گرچه با خصوصیاتی مجرّدتر و کلی‌تر.» [۲۳، ص. ۱۶۹] این قطعه‌ای است که او در مقالهٔ خود برای مجلّد راسل [به ویراستاری شلیپ] [۳۷، ص. ۱۲۷] نقل می‌کند؛ هائو وانگ[۳] بعدها متوجه شد که «جملهٔ نقل شده توسط گودل، جملهٔ محبوب او است و تا اندازهٔ زیادی با دیدگاه خود او تطابق دارد.» [۴۱، ص. ۱۱۲]

۲. تأثیرات فکری متقابل گودل و راسل

در سال ۱۹۲۰ سه مجلّد مفصّل *پرینکیپیا ماتماتیکا* هرچند به‌طرز فزاینده‌ای از رواج می‌افتاد، هنوز از کتب شاخص حوزهٔ منطق قلمداد می‌شد. آخرین مرزهای پژوهش در منطق به لهستان و آلمان منتقل شده بود اما رسالهٔ وایتهد[۴] و راسل هنوز به‌صورت مرجعی بنیادی در این حوزه باقی بود. دیدگاه گودل نسبت به *پرینکیپیا ماتماتیکا* تا حدی آمیخته به نقد بود. او که نسخه‌ای شخصی از کتاب را در ۲۸ جولای ۱۹۲۸ سفارش داد و دریافت داشت [۴، ص. ۲۷۵] ، ضمن نامه‌ای به هربرت فایگل[۵] متذکر شد که:

> «مایلم بدانم با تابستانت دیگر چه کردی ...خودِ من تمام مدت در برنو بودم و ضمن انجام امور دیگر، بخشی از *پرینکیپیا ماتماتیکا* را خواندم؛ اگرچه در قیاس با انتظاری که از آوازه‌اش داشته‌ام، اشتیاق کمتری بدان یافتم.» [۱۲، ص. ۴۰۳]

گودل در مقالهٔ مشهورش دربارهٔ منطق راسل متذکر می‌شود:

[۱]Kenneth Blackwell [۲]Wittgenstein [۳]Hao Wang [۴]A. Whitehead [۵]Herbert Feigl

> «اسباب تأسف است که این نخستین ارائهٔ جامع و کامل از یک منطق ریاضی و اشتقاق ریاضیات از آن، به چنین نحو بارزی فاقد دقّت صوری در بنیادها (گنجانده‌شده در — ۱* ۲۱* *پرینکیپیا*) است که نحوهٔ ارائه‌اش از این نظر در مقایسه با کار فرگه[۱] پَسرفتی چشمگیر است.» [۸، ص. ۱۲۶]

۱.۲. تأثیر راسل بر گودل. علی‌رغم ملاحظات شدیداً انتقادی که در بالا نقل شد، آثار گودل از تمامیّت گرفته تا نتایج او دربارهٔ فرض پیوستار، نمایانگر تأثیر نیرومند *پرینکیپیا* است. گودل تمامیّتِ روایتی از نگرهٔ تسویری *پرینکیپیا ماتماتیکا* را ثابت کرد و در عنوان مقالهٔ معظمِ ناتمامیّت‌اش به سال ۱۹۳۱، نام اثر راسل و وایتهد را آورد؛ قضیهٔ ناتمامیّت برای روایتی به‌دقّت صورتبندی‌شده از نگرهٔ سادهٔ طبقات که در آن اعداد طبیعی طبقهٔ پایه هستند، ثابت شده است.

بهترین نمونهٔ شناخته‌شده از تأثیر راسل بر گودل، کارهای متأخر او دربارهٔ مجموعه‌های ساخت‌پذیر است که ملهم از سلسله‌مراتب طبقاتی منشعب[۲] است. گودل به این الهام‌پذیری در مقاله‌ای که برای مجلّد شلیپ نگاشته است، اشاره می‌کند:

> «نگرهٔ [سلسله] مراتب [طبقاتی منشعب] پربارتر است هرگاه از دیدگاهی کاملاً ریاضی مدّ نظر قرار گیرد، جدا از این پرسش فلسفی که آیا تعریف‌های غیرمحمولی قابل پذیرش‌اند یا خیر. اگر [نگرهٔ مذکور] این‌گونه دیده شود، یعنی نگره‌ای که در چارچوب ریاضیات رایج برساخته شده است و در آن، تعریف‌های غیرمحمولی پذیرفته شده‌اند، مشکلی برای تعمیم این نگره به مرتبه‌های ترامتناهی به‌دلخواه بزرگ وجود نخواهد داشت. ... با پذیرش مرتبه‌های ترامتناهی، یک بُنداشت تحویل‌پذیری را می‌توان ثابت کرد. ... قضیهٔ ترامتناهیِ تحویل‌پذیری، به اثباتی از سازگاریِ اصل انتخاب، فرض پیوستار کانتور و حتّی فرض پیوستار تعمیم‌یافته با بنداشت‌های نگرهٔ مجموعه‌ها همراه با *پرینکیپیا* مجال می‌دهد.» [۸، صص. ۱۴۶ و ۱۴۷]

درکمال شگفتی، گودل نه‌تنها کارش دربارهٔ مجموعه‌های ساخت‌پذیر را به‌سان تعمیمی ریاضی از سلسله‌مراتب طبقاتی منشعب توصیف می‌کند، بلکه لمّی کلیدی در اثبات قضیهٔ سازگاری‌اش را گونه‌ای از بنداشت تحویل‌پذیریِ تعمیم‌یافته می‌داند.

در جهان مجموعه‌های ساخت‌پذیر، هر زیرمجموعه از اعداد صحیح در سلسله‌مراتب ساخت‌پذیر، در مرتبهٔ عدد ترتیبی شمارایی ظاهر می‌شود، به نحوی که فرض پیوستار برای مجموعه‌های ساخت‌پذیر صادق است. گودل نام «قضیهٔ بنیادی» را بر این قضیه می‌نهد و (در درس‌گفتاری که در سال ۱۹۳۹ در دانشگاه گوتینگن ارائه شد) ادعا می‌کند که از بنداشت تحویل‌پذیری الهام گرفته است:

---
[۱] G. Frege [۲] ramified type hierarchy

«میل دارم اشاره کنم که قضیهٔ بنیادی، هستهٔ تصحیح‌شدهٔ بنداشت به‌اصطلاح *تحویل‌پذیریِ راسلی*را شکل می‌دهد. با این همه، چنان‌که کمی قبل اشاره شد، راسل پیش از این ساختمانی به‌دست داده بود مشابه با M_α اما خود را به مراتب متناهی محدود کرده بود. بنابراین بنداشت تحویل‌پذیری او می‌گوید مرتبه‌های مجموعه‌های از هر طبقه توسط عدد متناهی ثابتی کراندار می‌شوند. او به‌روشنی از اثبات این مطلب فاصلهٔ بسیار داشته است اما اکنون معلوم شده است که اگر ساختمان مراتب تا ترامتناهی ادامه می‌یافت، وجود کران‌های نامتناهی معیّنی، به‌واقع قابل اثبات می‌بود. این محتوای قضیهٔ بنیادی است.» [۱۱، صص. ۱۴۳–۱۴۵]

تأثیر سلسله‌مراتب طبقاتی منشعب، بر زاده‌شدنِ نگرهٔ مجموعه‌های ساخت‌پذیر، اظهرِ من الشمس است. پیوند کمتر شناخته‌شده میان آثار راسل و گودل، ارتباط میان *پرینکیپیا ماتماتیکا* و تعبیر *دیالکتیکا*[۱] است [۲]. گودل، در رساله‌اش در باب منطق راسل، اشاره‌ای تا حدّی رازآلود دارد:

«در اولین ویراست از *پرینکیپیا* آنجا که به‌واقع مسئلهٔ بنا نهادن منطق و ریاضیات مطرح است، نگرش ساخت‌گرایانه در بیشتر بخش‌ها غلبه داشت ... آنچه از نگرش ساخت‌گرایانه برجای می‌ماند، تنها (۱) معرفی رده‌ها 'به‌مثابهٔ چارچوب سخن=شیوهٔ گفتمان' است؛ (۲) تعریف $\sim$ ، $\vee$ و . و غیره وقتی در گزاره‌های سوردار به‌کار می‌روند (که از سر تصادف، ثمربخشی‌اش را در اثبات سازگاری حساب نشان داد)؛ ...» [۳۷، ص. ۱۴۳]

برتون دِربِن[۳] در نامه‌ای به تاریخ ۳۰ دسامبر ۱۹۶۰ [۱۲، ص. ۳۹۳] جویای این فراز از سخن گودل شد اما پاسخی دریافت نکرد. پاسخ به سؤال دربن نهایتاً در دست‌نوشته‌ای در آثار گودل پس از درگذشت او پدیدار شد. گودل در پایان یادداشت‌هایش به مناسبت درس‌گفتارهای ۱۹۴۱ در دانشگاه پرینستون، در مورد تعبیرِ تابعی از حساب که سرانجام به تعبیر دیالکتیکا معروف شد، رابطه‌اش با اثر راسل و وایتهد را روشن می‌سازد:

«در پایان، مایلم خاطرنشان کنم که همهٔ این برنامهٔ تعریف مفاهیم منطقی، رابطه‌ای مشخص داشت با آنچه راسل در بخش ۹ از *پرینکیپیا ماتماتیکا* بدان التفات کرده بود؛ یعنی این برنامه پیش از هر چیز مسئلهٔ تعریف معنای عملگرهای منطقی برای جمله‌های مسوّر بود به شرط آنکه معنای آنها در جمله‌های فاقد سور، دانسته فرض شود.» [۱۲، ص. ۳۹۱]

نقل است که ژاک هربران[۴] تشخیص داد که یکی از عجیب‌ترین و نامتعارف‌ترین قطعاتِ PM، یعنی ۹*ی *پرینکیپیا ماتماتیکا*، نه‌تنها شامل یک، بلکه دو بنیاد برای نگرهٔ تسویر است. نخستین آنها،

[۲] دیالکتیکا نام مجله‌ای است در فلسفهٔ تحلیلی که در سال ۱۹۴۷ تأسیس شد. در سال ۱۹۵۸ گودل مقاله‌ای در این مجله منتشر کرد که تعبیر مذکور را در آن به خدمت گرفت تا اثباتی برای سازگاریِ حساب فراهم آورد. نام تعبیر دیالکتیکا اشاره به تعبیر ارائه‌شده در این مقاله دارد–م.

[۱] Dialectica Interpretation [۳] Burton Dreben [۴] Jacques Herbrand

بنیاد نااستاندارد ارائه‌شده در ۹*، انگیزه‌بخشِ هربران بود، حال آنکه بنیاد بعدی در ۱۰* است که تقریباً توسط همهٔ منطق‌دانان بعدی دنبال شد. من این رابطه با کار هربران را در مقاله‌ای به‌مناسبت صدمین سالگرد بزرگداشت انتشار *پرینکیپیا ماتماتیکا* ، مورد بحث قرار داده‌ام [۳۹].

به چه دلیل راسل دو روایت از نگرهٔ تسویر به‌دست داد؟ مشکلی که به این فرآیندِ به‌ظاهر معماگونه منجر شد، از نگرهٔ طبقات نشأت می‌گیرد. در *پرینکیپیا ماتماتیکا*، ۱* تا ۵* به بسط حساب گزاره‌ها اختصاص یافته است؛ هرچند دامنهٔ متغیرهای p، q، r، . . . در بخش‌های مذکور باید گزاره‌های مقدماتی در نظر گرفته شوند. هنگامی که در ۹*، دو ایدهٔ اولیه، سورهای عمومی و سورهای وجودی، معرفی می‌شوند، مسئلهٔ برآمده [از دل این بحث]، بسط ادات گزاره‌ای به این قلمرو جدید از گزاره‌ها است. راسل متذکر می‌شود:

> «از آنجا که فاصل و ناقض وقتی بر گزاره‌های مقدماتی و گزاره‌های مرتبهٔ اول اعمال می‌شوند، معنای یکسانی ندارند، در بیان گزاره‌های اولیهٔ ۱* یا باید کاربرد آنها را به گزاره‌هایی از نوعی واحد محدود سازیم یا آنکه باید آنها را بیانِ همزمانِ عده‌ای گزارهٔ مقدماتی متفاوت بدانیم که با معانی متفاوتی از فاصل و ناقض متناظرند.» [۴۳، صص. ۱۲۷ و ۱۲۸]

هدف ۹* غلبه بر این مشکل به‌وسیلهٔ تعریف فاصل و ناقض برای گزاره‌های مسوّر است با این پیش‌فرض که آنها برای گزاره‌های مقدماتی تعریف شده‌اند. تعریف‌های ارائه‌شده در ۹.۰۱* تا ۹.۰۸* از قواعد آشنا یاری می‌گیرند تا گزاره‌ای را به صورت نرمال سوری تبدیل کنند. با تعریف این ادات به این شیوه، راسل با مشکلی دیگر مواجه است و آن، اثبات اَشکال مرتبهٔ اول گزاره‌های اولیهٔ حساب گزاره‌ها است. برای انجام این کار، دو گزارهٔ اولیهٔ جدید معرفی می‌کند.

$$* \text{۹.۱} \quad \vdash: \phi x. \supset .(\exists z).\phi z \quad Pp$$

$$* \text{۹.۱۱} \quad \vdash: \phi x \vee \phi y. \supset .(\exists z).\phi z \quad Pp$$

راسل با این افزوده‌های جدید، توانست همهٔ بنداشت‌ها و قواعد حساب گزاره‌ها را ثابت کند. دشوارترین بنداشت برای اثبات، عبارت است از

$$* \text{۱.۲} \quad \vdash P \vee P. \supset .P. \quad Pp$$

در واقع، دقیقاً برای اثبات شکل مرتبهٔ اول این گزارهٔ اولیه بود که راسل ناچار شد بخش ۹.۱۱ * را معرفی کند. همین‌جا پیوندی دیگر با *دیالکتیکای* گودل ظاهر می‌شود؛ بنداشت انقباضی $P \vee P. \supset .P$ دشوارترین بنداشت حساب گزاره‌ای است که باید روشن شود (در مورد گودل، وقتی بافتار بحثْ حساب

شهودگرایانهٔ گزاره‌ها است، بنداشت انقباض به‌شکلِ $P \supset (P \wedge P)$ در می‌آید؛ هرچند در منطق کلاسیک، گزارهٔ مذکور و صورت راسلیِ آن، قابل استنتاج از یکدیگر هستند).

با کامل شدن شرح و بسط‌های ۹*، *پرینکیپیا ماتماتیکا* در ۱۰* با عرضهٔ بنداشتیِ قراردادی‌تری از نظریهٔ تسویر دنبال می‌شود که از آن با عنوان «روش جایگزین» یاد می‌شود و در آن، به ۹* پیش از خود تنها به این دلیل ارجاع می‌دهد که استفاده از گزاره‌های مسوّر را موجّه کند و نیز به گزاره‌های اولیهٔ مورد نیاز در روش جایگزین، ارجاع دهد.

شرح و بسط‌های جالب اما به‌روشنی نامتعارف در ۹*، غالباً در بحث از *پرینکیپیا ماتماتیکا* مغفول می‌مانند. با وجود این، چنان‌که دیدیم، این شرح و بسط‌ها حاوی ایده‌های نوینی هم برای گودل و هم برای هربران بودند. هرچند در کار این منطق‌دانان متأخر، بسط‌های ۹* که بر اثر دغدغه‌های فلسفی پدید آمده بود، مبدّل به ابزارهای فنّی جهت بررسی مسئلهٔ سازگاری (در کار گودل) و پژوهش در مسئلهٔ تصمیم (در کار هربران) شد.

دیدیم که گودل در دو مورد متفاوت به دِیْنی که به راسل داشت اذعان کرد؛ هرچند باید بر این نکته تأکید کرد که کار گودل در هر دو مورد، متضمن دگرگونی‌های اساسی است. برخلاف روایت‌های دقیق ارائه‌شده توسط گودل، کار راسل فاقد روشنی و دقّت است. رابرت سلووی[۱] در یادداشت‌های آغازینش بر دو درس‌گفتار گودل دربارهٔ برهان سازگاری، متذکر می‌شود که آدمی در *پرینکیپیا ماتماتیکا* «آن نوع سلسله‌مراتب منشعبِ به‌لحاظ ریاضی دقیق را که گودل وصف می‌کند و به راسل نسبت می‌دهد، پیدا نمی‌کند» و نتیجه می‌گیرد که «ملاحظات مشهور گودل ... دالّ بر اینکه مفهوم ساخت‌پذیری‌اش می‌تواند چون تعمیمی طبیعی از سلسله‌مراتب منشعب راسل به ترامتناهی دیده شود، از نظر صاحب این قلم، بیش از اندازه سخاوتمندانه بوده است.» [۱۱، صص. ۱۱۹ و ۱۲۰]

۲.۲. نگره‌های جانشین‌سازی رده‌ها. در بالا دو موردی را شرح دادیم که کار راسل تأثیری مستقیم بر کار گودل داشت. در این زیربخش، پژوهشی از راسل را که همسوییِ قابل توجّهی با ساختن گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر دارد، مورد بحث قرار می‌دهیم. گرچه در این مورد، اثرپذیریِ مستقیم، محلی از اِعراب ندارد، زیرا پژوهش‌های راسل تنها همین اواخر در پنجمین مجلّد از مجموعهٔ *مقاله‌های*ش [۳۶] منتشر شده است.

مقالهٔ پرآوازهٔ راسل با عنوان *در باب دلالت*[۲] [۲۱] که نگرهٔ توصیفات او را شرح می‌دهد، اکنون بیشتر مورد علاقهٔ فیلسوفان است –این مقاله همچون مقاله‌ای در تحلیل معنای گزاره‌ها در زبان روزمره تفسیر می‌شود؛ هرچند چنان‌که پیش از این در مقاله‌ای [۳۸] استدلال کرده‌ام، وقتی برای نخستین بار [ایدهٔ آن] به ذهن راسل خطور کرد، آن را اساساً به چشم کوششی در منطق می‌دید. اهمیّت‌اش در ۱۹۰۵ برای راسل آن بود که به نظر می‌رسید این ایده در پژوهش‌هایی که در آن زمان بدان اشتغال داشت، راهی به پیش

[۱] Robert Solovay [۲] On denoting

می‌گشاید –کشمکش فراهم آوردن بنیادهایی سازگار برای منطق به‌منظور غلبه بر پارادُکس‌هایی که از بهار سال ۱۹۰۱ که به آنها پی بُرد، موجب آزارش بودند.

ابداعِ *تعریف بافتاری*[۱] که توسط نگرهٔ توصیفات فراهم شده بود، این امید را در دل راسل بیدار کرد که با ساده‌سازی هستی‌شناختی‌اش، می‌تواند بر پارادُکس‌ها فائق آید. نتیجه، نگرهٔ جانشین‌سازی به سال ۱۹۰۵ و ۱۹۰۶ بود (که صحیح‌ترش «نگره‌های جانشین‌سازی» است، زیرا در آن زمان، راسل پیوسته ایده‌هایش را مورد تجدید نظر قرار می‌داد). این نگره مبنای اولیّهٔ بسیار ساده‌ای دارد. علاوه بر نظام معمول ادات و سورها، تنها نماد اولیه، رابطه‌ای است چهار مکانی که راسل آن را به‌صورت $p(b/a)!q$، یا $p/a;b!q$ می‌نوشت و چنین خوانده می‌شد «q نتیجهٔ جانشین‌سازیِ b به‌جای a در p است.»

ایدهٔ مبناییِ نگرهٔ جانشین‌سازی این است که رده‌ها، رابطه‌ها و توابعِ گزاره‌ای نباید مسوّر شوند (یعنی به‌مثابهٔ عبارت دیده شوند)، بلکه باید به یاری چارچوبی مشتمل بر گزاره و آنچه گزاره را ساخته (سازه)، حذف شوند. برای مثال، زوج متشکل از گزارهٔ «۳، عددی اول است» و عدد ۳ را می‌توان نمایندهٔ مجموعهٔ اعداد اول دانست. لزومی ندارد که گزاره صادق باشد؛ ولی سازهٔ مشخص شده (در این مورد ۳) صرفاً نقش جانگه‌دار را ایفا می‌کند. رابطهٔ تعلق را می‌توان توسط جانشین‌سازی تعریف کرد؛ شیء b عضو رده‌ای است که با زوج p, a نمایش داده شده است هرگاه نتیجهٔ جانشین‌سازی b به‌جای a در p، گزاره‌ای صادق باشد.

در آن زمان، راسل گزاره را موجودی ساختارمند می‌دانست با شکلی مشابه با فرمولی در منطق مرتبه اول جز اینکه گزاره‌ها می‌توانند شامل ذواتی باشند (اشیاء فیزیکی فی‌المثل) که به‌جای ثوابت می‌نشینند. راسل در نامه‌ای به تاریخ ۱۲ دسامبر ۱۹۰۴ به فرگه می‌گوید:

> «باورم این است که مون بلان[۲] با وجود همهٔ یخچال‌هایی که دارد، خود جزء سازندهٔ آن چیزی است که به‌واقع در گزارهٔ 'مون بلان بیش از ۴۰۰۰ متر ارتفاع دارد' اظهار می‌شود. ما اندیشه را اظهار نمی‌کنیم، زیرا این موضوعی است مربوط به روانشناسیِ فردی: ما منظور (غایت) این اندیشه را اظهار می‌کنیم و این به‌زعم من، مجموعه‌ای است معین (می‌توان آن را گزاره‌ای عینی خواند) که مون بلان جزئی از آن است. اگر این [برداشت] را نپذیریم، آنگاه به این نتیجه می‌رسیم که به هیچ‌وجه چیزی دربارهٔ مون بلان نمی‌دانیم.» [۶، ص. ۱۶۹]

مفهوم جانشین‌سازی، بخشی از نظریهٔ راسل از ۱۹۰۵ تا ۱۹۰۶ دربارهٔ جانشین‌سازی یک شیء به‌جای یک شیء دیگر است. برای مثال، اگر پاتریشیا همسر سوم راسل و ادیت همسر چهارم باشد، آن‌گاه ادیت =(پاتریشیا/ادیت) پاتریشیا. بسط مشروح و تفصیلی این برداشت از گزاره‌های ساختارمند را می‌توان در مقاله‌ای از آلونسو چرچ[۳] [۲] و در مقالهٔ مشترک من و جودی پِلهام[۴] [۱۷] یافت.

---
[۱] contextual definition [۲] Mont BLanc [۳] Alonzo Church [۴] Judy Pelham

به‌عنوان مثال‌هایی از گزاره‌ها در نگرهٔ جانشین‌سازی، تعدادی از گزاره‌های اولیه یا بنداشت‌ها ارائه می‌شود که توسط راسل در یکی از نخستین دست‌نوشته‌های مربوط به بسط نگرهٔ جانشین‌سازی به فهرست در آمده است: [۳۶]

(۱) $p\frac{x}{p}!x$؛
(۲) $p\frac{x}{x}!p$؛
(۳) $p\frac{x}{a}!q\ .\ p\frac{x}{a}!r.\supset .q=r.$؛
(۴) $r\ in\ p\ .\ p\ in\ q.\supset .r\ in\ q$؛
(۵) $p\ in\ q\ .\ q\ in\ p.\supset .p=q$؛
(۶) $a\neq\sim p\ .\ p\frac{x}{a}!q.\supset .(\sim p)\frac{x}{a}!(\sim q)$.

در اینجا p در q باید «p جزء سازندهٔ q است» خوانده شود، حال آنکه $p=q$ نمایش اینهمانی (تساوی) است و در آن، p همان q است اگر هر یک از آنها را بتوان از دیگری با تبادل متغیرهای مقیّد به‌دست آورد [۲,۱۷]. در نگره‌های جانشین‌سازی راسل، اینها در حقیقت مفاهیم تعریف‌شده هستند اما در اینجا برای ساده کردن موضوع، با آنها چون مفاهیم اولیه رفتار می‌کنیم.

نگرهٔ جانشین‌سازی اصلی راسل فاقد طبقه بود، همراه با طبقه‌ای واحد از اشیاء مشتمل بر اشیاء فیزیکی و منطقی. این موضوع تا اندازه‌ای برای راسل حائز اهمیت بود، زیرا می‌خواست اصل موضوع بی‌نهایت، یک صدق منطقی باشد.[۱] راسل مقاله‌ای جهت پاسخ‌گویی به پوانکاره[۲] در سال ۱۹۰۶ منتشر و در این مقاله، اصل موضوع بی‌نهایت را با ساختن دنباله‌ای نامتناهی از گزاره‌ها ثابت کرد. در نسخهٔ اصلی انگلیسیِ پاسخ‌اش، این ساختن را چنین توصیف می‌کند. با شروع از دو شیء متمایز a و u، او ادامه می‌دهد:

«با به میان آوردن پای گزاره‌ها، می‌توانیم $\aleph_0$ شیء بسازیم. برای مثال، قرار دهید

$$p_0=.a=u,\qquad p_{n+1}.=.p_n=u.$$

[۱] در توضیح این مطلب در مدخل «تحلیلی» از **واژه‌نامهٔ توصیفی منطق** تألیف دکتر ضیاء موحد، مطلب زیر را می‌خوانیم: «'تحلیلی' در مورد جمله‌ای به‌کار می‌رود که نفی آن متناقض باشد. چنین جمله‌ای یا به‌اعتبار صورت منطقی خود صادق است (که در این حالت آن را **صدق منطقی** یا **منطقاً ضروری** می‌نامند) یا هم به اعتبار صورت منطقی و هم به‌اعتبار معنای اجزای آن. نمونه‌ای از صدق منطقی، جملهٔ «اگر باران می‌بارد، باران می‌بارد» است. نمونه‌ای از صدق تحلیلی که صدق منطقی نیست، این جمله است:«همهٔ عزبها غیرمتأهل هستند»...». در پرتو این توضیح، به نظر می‌رسد راسل می‌خواسته اصل موضوع بی‌نهایت، صدقی منطقی تلقی شود نه صدقی تحلیلی (ولی نامنطقی)-م.

[۲] Poincaré

اثبات اینکه pهای متوالی همگی متفاوت هستند، دشوار نیست و اینکه بنابراین دست‌کم $\aleph_0$ شیء وجود دارند. از این‌رو اعداد اصلی تا با $\aleph_0$ وجود دارند و اعداد ترتیبی، متناهی و از دومین رده، نیز وجود دارند.» [۳۴، ص. ۲۰۳]

شوربختانه فقدان تمایز طبقه‌ها نه‌تنها ما را به اثبات اصل موضوع بی‌نهایت قادر می‌سازد، که همچنین به اثبات تناقض‌ها توانا می‌کند. پارادُکسی سر بر می‌زند که آن‌طور که راسل در نامه به دوست ریاضیدانش، رالف هاوتری[۱]، بیان می‌کند «نگرهٔ جانشین‌سازی را با شکست روبه‌رو می‌کند.» [۳۶، ص. ۱۲۵] این پارادُکس آن‌طور که در نامه به هاوتری شرح داده شده، به‌صورت زیر است: گزارهٔ p_0 را با

$$p_0 = (\exists p, a)[a_0 = p\frac{b}{a}!q \wedge \neg p\frac{a_0}{a}]$$

تعریف کنید که در آن، a_0 و b را اشیایی فرض کرده‌ایم که به‌لحاظ منطقی بسیط‌اند (ممکن است به‌لحاظ فیزیکی (مادی) مرکب باشند). حال گزارهٔ R را به‌صورت

$$R = p_0\frac{p_0\frac{b}{a_0}q}{a_0}$$

تعریف کنید. گزارهٔ $\neg R$ هم‌ارز است با

$$(p, a)[(p_0\frac{b}{a_0}!q = p\frac{b}{a}!q) \supset p\frac{p_0\frac{b}{a_0}!q}{a}].$$

از این‌رو اگر $\neg R$ را بپذیریم، آن‌گاه با جانشین کردن p_0 به‌جای p و a_0 به‌جای a، داریم

$$p_0\frac{p_0\frac{b}{a_0}!q}{a_0};$$

یعنی

$$(\exists p, a)[p_0\frac{b}{a_0}!q = p\frac{b}{a}!q \wedge \neg p\frac{p_0\frac{b}{a_0}!q}{a}].$$

اما از اینهمانیِ $p_0\frac{b}{a}!q = p\frac{b}{a_0}!q$ و مفروضات پایه‌ای‌مان دربارهٔ معنای اینهمانی بین گزاره‌های ساختارمند، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $p = p_0$ و $a = a_0$. از این‌رو

$$\neg(p_0\frac{p_0\frac{b}{a_0}!q}{a_0})$$

که نشان می‌دهد R گزاره‌ای است هم‌ارز با نقیض خودش. راسل به هاوتری متذکر می‌شود که در تلاش برای اجتناب از این پارادُکس، نگرهٔ جانشین‌سازی را به روش‌های مختلف تغییر داده است اما پارادُکس

[۱] Ralph Hawtrey

همواره از نو به شکل‌های پیچیده و پیچیده‌تر ظاهر شده است. راسل به‌قصد اجتناب از این پارادُکس، مجبور به پذیرش نگرهٔ طبقات منشعب شد.

جانشین‌سازی هوشمندانه‌ای که پارادُکس جانشین‌سازی راسل را تولید کرد، مشابهت خیره‌کننده‌ای با جانشین‌سازی در گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر گودل دارد. حقیقت آن است که این موضوع اتفاقی نیست، چراکه گودل مشغول اجرای برنامه‌ای بود که شباهت زیادی به برنامهٔ راسل داشت. در تابستان سال ۱۹۳۰، گودل شروع به بررسی مسئلهٔ اثبات سازگاری آنالیز کرد. بر طبق یادداشت‌هایی که هائو وانگ دربارهٔ کارهای گودل پس از درگذشت‌اش منتشر کرد،

> «مسئله‌ای که او در آن زمان برای خودش طرح کرده بود، سازگاری نسبی آنالیز نسبت به نظریهٔ اعداد بود. ... او اعداد حقیقی را با فرمول‌ها (یا جمله‌هایی) از نظریهٔ اعداد نمایش داد و دریافت که باید مفهوم صدق را برای جمله‌های نظریهٔ اعداد مورد استفاده قرار دهد تا بنداشت شمول را برای آنالیز روشن کند. او خیلی زود به پارادُکس‌هایی برخورد کرد (به‌ویژه پارادُکس دروغگو و پارادُکس ریچارد)[1] که با صدق و تعریف‌پذیری مرتبط بودند. دریافت که صدق در نظریهٔ اعداد نمی‌تواند در نظریهٔ اعداد تعریف شود و بنابراین برنامه‌اش برای سازگاری نسبی آنالیز قابل اجرا نبود. او کارش را تا اخذ این نتیجه پی گرفت که در نظام‌های مناسب به‌اندازهٔ کافی قوی نظیر پرینکیپیا ماتماتیکا (نظریهٔ طبقات) و نگرهٔ مجموعه‌ها (تسرملو-فرانکل[2]) گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر وجود دارند.» [۴۱، ص. ۴۲]، [۴۰، ص. ۶۵۴]

بنابراین شباهت میان برساخته‌های راسل و گودل از این واقعیت برمی‌خیزد که هر دوی آنها در تلاش برای ارائهٔ روایت‌هایی جانشین برای مجموعه‌ها بودند –با جانشین کردن سخن از توابع گزاره‌ایِ معرِّف مجموعه‌ها به‌جای سخن از مجموعه‌ها.

۳.۲. اختلاف‌های میان راسل و گودل. تاکنون شاهد سه فقره از هم‌سوییِ آثار راسل با کارهای گودل بوده‌ایم؛ در دو فقرهٔ اول، گودل به تأثیر مستقیمِ راسل معترف بود و در فقرهٔ سوم، تأثیر مستقیم وجود نداشت اما همسوییِ خیره‌کننده‌ای در کار دو منطق‌دان دیده می‌شد. اگرچه اختلاف‌های زیادی میان کار این دو وجود دارد، چشم‌گیرترین تفاوت، عدم دقّت در کار راسل و متناظراً دقّت و صحّت در کار گودل است. دیدیم که سولووی چطور میان کار راسل در مورد نگرهٔ طبقات منشعب و کار پیشگامانهٔ گودل در مورد سلسله‌مراتب مجموعه‌های ساخت‌پذیر تمایز قائل شد. ارائهٔ نگرهٔ طبقات منشعب در *پرینکیپیا ماتماتیکا*، چنان مبهم و ناروشن است که مورّخان منطق به مناقشه بر سر تفسیر درستِ آن، ادامه می‌دهند ولی هیچ ابهامی از این دست، در کار گودل وجود ندارد.

[1]The Liar and Richard's Paradoxes [2]Zermelo-Fraenkel

پرینکیپیا ماتماتیکا با ارائهٔ امروزی از یک نظام صوری فاصلهٔ بسیار دارد. نحوِ نظام هرگز به‌دقت توصیف نمی‌شود و بنداشت‌ها و قواعد استنتاج به گونه‌ای ارائه شده‌اند که نحو و معنای مورد نظر در هم می‌آمیزند. صورت‌گرایی به شکلی جدایی‌ناپذیر با تعبیرهای غیرصوری در هم تنیده شده است. چنان‌که در بخش آخر مشاهده خواهیم کرد، به نظر می‌رسد همین جنبه از منطق راسل است که به برخی بدفهمی‌ها از سوی راسل منجر شده است.

۳. واکنش راسل به قضیهٔ گودل

برتراند راسل پس از انتشار سومین مجلّدِ *پرینکیپیا ماتماتیکا* در سال ۱۹۱۳، منطق را رها کرد [۴۲]. او در سال ۱۹۴۸، ضمن صحبت از همکاری خودش با وایتهد نوشت:

> «هیچ‌کدام از ما به‌تنهایی قادر به نوشتن کتاب نبوده‌ایم؛ حتی با وجود یاری به یکدیگر و گفتگوهای دونفره‌ای که رنج نوشتن را کاهش می‌داد، این تلاش آن‌چنان شدید و کاهنده بود که در پایان، هر دوی ما از منطق ریاضی با نوعی دلزدگی رویگردان شدیم.» [۲۸، ص. ۱۳۸]

تنها نوشته‌های [بعدیِ] منتشر شده از راسل در منطق، مقدمه‌اش بر ویراست دوم *پرینکیپیا*[۴۳] و مقاله‌ای متأخّر است که به بحث دربارهٔ ساختن آنات[۱] در زمان، به‌یاریِ روش تجرید فراگیر وایتهد[۲] می‌پردازد [۲۴]. این مقاله، از کار او در فلسفهٔ فیزیک نشأت می‌گیرد. چنان‌که در بخش ۲.۲ دیدیم، هرچند راسل برخی از عناصر سازندهٔ جملهٔ تصمیم‌ناپذیر گودل را پیش‌بینی کرده بود، این معمایی است که آیا او اصولاً به‌تمامی، قضیهٔ ناتمامیّت را دریافته است یا نه. قرائن پراکنده‌اند و به‌دشواری تن به تفسیر می‌دهند.

راسل از قضیه‌های ناتمامیّت، کوتاه‌زمانی پس از انتشارشان آگاه شد. یک نسخهٔ چاپی از مقالهٔ ناتمامیّتِ سال ۱۹۳۱ در بایگانی آثار راسل در دانشگاه مک‌مستر موجود است [۷] اما شامل تقدیم‌نامه‌ای است که نشان می‌دهد این نسخه در اساس، به کنتس آمت فون زِپلین[۳]، مترجم کتاب «نحو منطقیِ زبان»[۴] کارناپ متعلق بوده است؛ نسخهٔ مذکور فاقد حاشیه‌نویسی قابل ذکری است. نسخهٔ چاپی دومی در بایگانی راسل وجود دارد که در منزل دورا راسل[۵] پس از درگذشتش پیدا شد و با کمال تأسف، فاقد هرگونه نوشتهٔ اهدایی یا حاشیه‌نویسی است. گرچه از طریق نامه‌ای از ماکس نیومن[۶]، می‌دانیم که راسل کمی پس از انتشار قضیه از آن اطلاع یافته است؛ این نامه نیز در بایگانی راسل در هامیلتن پیدا شده است. در این نامه، مورخ ۲۷ سپتامبر ۱۹۶۶، نیومن حمایت راسل را برای پیشنهاد دادن گودل برای عضویت در انجمن سلطنتی خواهان است. در پاورقی دست‌نوشته‌ای بر این نامه، وی می‌افزاید: «یادم می‌آید دربارهٔ اثبات گودل، کمی پس از انتشارش با شما صحبت کردم.»

---

[۱] The construction of instants in time [۲] Whitehead's method of extensive abstraction [۳] Countess Amethe von Zeppelin [۴] Logical Syntax of Lanquage [۵] Dora Russell [۶] Max Newman

توصیف روشنی از کدگذاری عددی گودل از نحو منطقی در تک‌نگاشت راسل بر فلسفهٔ زبان در سال ۱۹۴۰، با عنوان *جستاری در معنا و صدق*[۱] وجود دارد [۲۶، صص. ۸۷ و ۸۸]. اما متن بحث قضیه‌های ناتمامیّت نیست بلکه راسل با مسئلهٔ توصیف یک گزاره بدون تولید آن، سروکار دارد.

پال آرتور شلیپ[۲] در مجموعهٔ کتابخانهٔ فیلسوفان زنده[۳] مجلّد راسل [۱۳، ص. ۲۱۷]، ضمن نامه‌ای به تاریخ ۱۸ نوامبر ۱۹۴۲، از گودل جهت نوشتن مقاله‌ای برای این مجلّد دعوت به عمل می‌آورد. برای ویراستاران، سر و کله زدن با گودل دشوار بود؛ با وجود این، شلیپ با ملغمه‌ای از چرب‌زبانی و پیگیری مداوم، سرانجام موفق شد برای این مجلّد که ویراستار آن بود، مقاله‌ای از گودل به‌دست آورد. گودل دست‌نوشته‌اش را در ۱۸ می ۱۹۴۳ برای شلیپ ارسال کرد؛ گرچه شلیپ او را انذار داده بود که راسل همان موقع پیش‌نویس پاسخ‌هایش به نقدها را در جولای فراهم ساخته اما گودل ارسال نسخهٔ ماشین‌شده و تصحیح‌شدهٔ مقاله‌اش را تا ۲۷ سپتامبر به تأخیر انداخت؛ آن هم با وجود پیغام‌های فوری رو به تزاید شلیپ.

آن زمان، راسل پاسخ به نویسندگان دیگر را تکمیل کرده و مشغول طرح‌های دیگری بود. او به‌سختی کار می‌کرد تا *تاریخ فلسفهٔ غرب* را به سرانجام رساند؛ مجموعه‌ای از درس‌گفتارها که برای ارائه در برین ماور آماده می‌شد و علاوه بر این، آمادهٔ ترک امریکا به قصد انگلستان می‌شد (هرچند تا ماه جون ۱۹۴۴ به آن سرزمین بازنگشت). در نتیجه در نامه‌ای به تاریخ ۸ آگوست به شلیپ نوشت: «فکر کنم هیچ‌چیز دربارهٔ گودل نخواهم گفت بجز پی‌نوشتی که مقالهٔ او بسیار دیر واصل شد. در هر صورت، محتملاً نوشته‌ام مناقشه‌برانگیز نمی‌شود.» [۱۳، ص. ۲۲۹]

تنها نامهٔ به‌دست آمده از گودل خطاب به راسل، یادداشتی کوتاه به تاریخ ۲۸ سپتامبر ۱۹۴۳ است [۱۳، صص. ۲۰۷ و ۲۰۸] که در آن، گودل به‌اصرار از راسل می‌خواهد نظرش را مبنی بر عدم پاسخگویی تغییر دهد و تأکید بر این نکته دارد که مقاله‌اش در واقعِ امر، مناقشه‌برانگیز است. اگرچه او موفق به تغییر دادن تصمیم راسل نشد و یادداشت مذکور تنها پاسخی از راسل به مقالهٔ گودل است که در این مجلّد یافت می‌شود:

> «مقالهٔ بسیار جالب دکتر گودل دربارهٔ منطق ریاضیِ من، پس از آنکه پاسخ‌هایم به دیگران تکمیل شده بود، به دستم رسید و در زمانی که شوقی به کار بر روی آن در من باقی نمانده بود. از آنجا که اکنون حدود ۱۸ سال از زمان آخرین اثرم در منطق ریاضی می‌گذرد، وقتی بس طولانی از من ستانده می‌شد تا به برآوردی نقّادانه از نظرات دکتر گودل دست یابم. قابلیت‌های سترگ وی چنان‌که کار اخیر او نشانگر آن است، مرا به این اندیشه فرو بُرد که به احتمال زیاد، نقدهای او از اثر من، موجّه باشند. نوشتن *پرینکیپیا ماتماتیکا*، ۳۳ سال

[۱] An Inquiry into Meaning and Truth [۲] Paul Arthur Schilpp [۳] The Library of Living Philosophers

پیش از این به سرانجام رسید. با توجه به پیشرفت‌های متعاقب در این حوزه، این اثر در ابعاد گوناگون نیاز به اصلاح و تجدید نظر دارد. اگر شور و شوقی باقی می‌بود، از آن خرسند می‌شدم که در بازبینیِ بخش‌های مقدماتی آن بکوشم اما اوضاع و احوال بیرونی، این امر را ناممکن می‌سازد. بنابراین باید از خواننده بخواهم که بر کار دکتر گودل زمانی را که درخور آن است، بگذارد و داوری سنجش‌گرانهٔ خودش را شکل دهد.» [۳۷، ص. ۷۴۱]

دلیلی ندارد که به استدلال راسل جهت فراهم نیاوردن گزارشی جامع دربارهٔ مقالهٔ گودل باور نداشته باشیم؛ علی‌رغم اینکه او نقد و نظرهای پُردامنه و مفصلی بر دیگر مقاله‌های مجلّد شلیپ نوشته بود. در واکنش به نامهٔ ۲۸ سپتامبر گودل، او نامه‌ای در ۵ اکتبر به شلیپ نوشت که در آن می‌گوید:

«مقالهٔ گودل را دریافت کرده‌ام و نامه‌ای از او، که از من مصّرانه می‌خواهد مقاله را پاسخ دهم. برای من فراهم ساختن پاسخی مشروح، کاملاً ناممکن است. من از سال ۱۹۲۷ در منطق ریاضی جهدی نورزیده‌ام و فراهم آوردن پاسخ، دست‌کم یک ماه از من وقت می‌ستاند. آماده می‌شوم پاراگراف کوتاهی نوشته، بگویم قادر نیستم برآوردی نقّادانه از مقاله‌اش فراهم کنم اما فکر کنم کاملاً محتمل است که بیشتر نقدهای او موجّه باشند. امیدوارم این کار اسباب رضایت او و شما را فراهم آورد.» [۱۳، ص. ۲۳۱]

جای تأسف است که مقالهٔ مشهور گودل [۸] پاسخی از سوی راسل در پی نداشت. مقالهٔ گودل به همراه پارهٔ دیگرش دربارهٔ فرض پیوستار [۹] مشروح‌ترین اظهارات او در باب فلسفهٔ منطق و فلسفهٔ ریاضیات است[۱]. با توجه به این فقدان ناامید کننده، باید خود را به ارجاعات اندک‌شمار و پراکنده دربارهٔ کار گودل در نوشته‌های بعدی راسل قانع کنیم.

راسل در مقاله‌ای دربارهٔ پوزیتیویسم منطقی[۲] که به سال ۱۹۴۵ منتشر شد، به‌طور ضمنی قضیهٔ ناتمامیّت گودل را چون پارادُکس توصیف می‌کند:

«کارناپ نشان داده است که امکان دارد یک زبان، چیزهایی دربارهٔ نحو خودش بگوید اما همواره چیزهایی باقی می‌مانند که در زبان اصلی قابل گفتن نیست و تنها در فرازبان گفتنی است... بسط نحو منطقی در این راستا، به‌ویژه توسط کارناپ بسیار پیچیده و به‌لحاظ فنی دشوار است. نمی‌توان گفت که نحو منطقی اکنون به شکل نهایی خود دست یافته است. مجموعه‌ای از پارادُکس‌ها توسط گودل کشف شده است و تضمینی وجود ندارد که پارادُکس‌های دیگری سر بر نیاورند.»

---

[۱] آقای دکتر ضیاء موحد این پارهٔ دیگر از نوشته‌های گودل، یعنی «فرض پیوستار کانتور چیست؟» را استادانه به فارسی برگردانده و در مجلهٔ *نشر ریاضی*، ۱۳۶۸، سال دوم، شمارهٔ اول، ص. ۴۶-۵۴، به چاپ رسانده است–م.

[۲] logical positivism

در مقاله‌ای دیگر دربارهٔ پوزیتیوزیسم منطقی، که به سال ۱۹۵۰ منتشر شده است، راسل قضیه‌های گودل را به‌جای پارادُکس، چون «معماها» وصف می‌کند. پس از بحث از کار کارناپ و تارسکی دربارهٔ پارادُکس دروغگو و سلسله‌مراتب زبانی مرتبط با آن، راسل چنین ادامه می‌دهد:

> «مجموعه‌ای جدید از معماها از پژوهش‌های گودل نتیجه شده است به‌ویژه مقالهٔ 'دربارهٔ گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر در *پرینکیپیا ماتماتیکا* و نظام‌های مرتبط' (۱۹۳۱) که در آن، ثابت می‌کند در هر نظام صوری می‌توان جمله‌هایی ساخت که صدق یا کذب آنها درون آن نظام قابل تصمیم‌گیری نیست. در اینجا نیز دوباره با نیاز مبرم به سلسله‌مراتب روبه‌رو هستیم که تا بی‌نهایت برود و به‌لحاظ منطقی ناتوان از تمامیّت.» [۲۹، ۱۲۰۹]

روایت نقل‌شده از قضیه‌های گودل در اینجا به‌یقین درست است؛ هرچند استفاده از کلمهٔ «معما» این گمان را پیش می‌نهد که راسل عامدانه اراده کرده بود جملهٔ تصمیم‌ناپذیر گودل را در زمرهٔ پارادُکس‌هایی نظیر پارادُکس دروغگو و پارادُکس راسل جای دهد که پیشتر در مقاله‌اش مورد بحث قرار گرفته بودند.

حیرت‌انگیزترین اظهارنظر راسل دربارهٔ قضیه‌های ناتمامیّت گودل در نامه‌ای به لئون هنکین[۱] به تاریخ ۱ آوریل ۱۹۶۳ آمده است. هنکین نسخه‌ای چاپی از مقاله‌اش دربارهٔ منطق‌گرایی را که برندهٔ جایزه شده بود [۱۵]، برای راسل ارسال کرد. پاسخ راسل شامل فراز زیر است:

> «از نامهٔ شما به تاریخ ۲۶ مارس و مقالهٔ جالب توجه‌تان که در جوف آن قرار دادید، بسیار ممنونم. مقاله را به‌دقت خواندم و اطلاعات جدید بسیاری از آن به‌دست آوردم. اکنون پنجاه سال از زمانی که در منطق ریاضی به‌جدّ کوشیده‌ام، می‌گذرد و تقریباً تنها اثری که از آن تاریخ تا به حال خوانده‌ام، مقالهٔ گودل بوده است. البته می‌فهمم که اثر گودل از اهمیّت بنیادی برخوردار است اما مرا سردرگم کرده است. این مقاله باعث شد از اینکه دیگر در منطق ریاضی کار نمی‌کنم، خوشحال باشم. اگر مجموعه‌ای از بنداشت‌ها به تناقض منجر شود، روشن است که دست‌کم یکی از آن بنداشت‌ها کاذب است. آیا این موضوع به حساب بچه‌–مدرسه‌ای‌ها قابل اعمال است و اگر هست، دیگر به هیچ‌چیز که در عهد شباب به ما آموخته‌اند، نمی‌توانیم باور داشته باشیم؟ آیا باید گمان کنیم که ۲+۲، ۴ نیست بلکه ۴/۰۰۱ است؟ به‌وضوح، مقصود این نیست.» [۱۴، ص. ۵۹۲]

راسل این نامه را زمانی نوشت که ۹۰ سال سن داشت، بنابراین امکان دارد این اظهارات حیرت‌انگیز، ثمرهٔ کِبَرِ سن باشد، به‌ویژه از آن روی که در ۳۱ مارس ۱۹۶۰ هنگامی که رابین گاندی[۲] را همراه مارتین لوب[۳] و جورج کرایسل[۴] به صرف چای دعوت کرده بود، متذکر شد: «روح من هم از آثار اخیر در منطق بی‌خبر است و همگی شما حق دارید مرا فردی جاهل بدانید.» [۵، ص. ۱۲۶] علی‌رغم این، روپرت کرواشی–ویلیامز[۵] در دفتر روزنگاشت خود می‌نویسد:

---

[۱]Leon Henkin [۲]Robin Gandy [۳]Martin Löb [۴]Georg Kreisel [۵]Rupert Crawshay-Williams

«کرایسل گفته بود چقدر شگفت‌انگیز بود که برداشت راسل آنقدر دقیق به نظر می‌رسید؛ اگرچه سی سال می‌شد هیچ کاری در منطق نکرده بود. چنین نیست که ذهن او صرفاً به دلیل اینکه ۸۷ ساله است، به این نحوِ عالی درخشان به نظر می‌آید؛ چنین ذهنی برای هر کسی در هر سنی، فوق‌العاده درخشان است. به‌خصوص کرایسل، راسل را در جریان برخی پیشرفت‌های اخیر در مورد مفهوم [روش] مؤثر[۱] گذاشت –همان کار تورینگ[۲]. راسل چندان به‌وضوح با این مفهوم آشنا نبود اما همان سرِ ضرب، قادر به دنبال کردن همهٔ پیچیدگی‌ها و الزامات آن شده بود.» [۳، صص. ۱۲۹ و ۱۳۰]

ایروینگ آنلیس[۳] در نامه‌ای به FOM گزارش می‌دهد که نامهٔ راسل (و تاریخ «دروغ آوریلی» آن)، هنکین را بر آن داشت که طی نشستی ویژه دربارهٔ نظریهٔ برهان درگردهمایی سالانهٔ انجمن ریاضی آمریکا، از ۵ تا ۹ ژانویه ۱۹۸۳ در دنورکلرادو، از او بپرسد آیا راسل قصد مطایبه داشته است. باور آنلیس آن بود که فحوای نامه به‌همراه عقبهٔ فلسفی‌ای که بر اساس آن، راسل به این نتیجه رسیده که نتایج گودل متخصصان نظریهٔ اعدادِ بچه–مدرسه‌ای‌ها را مجاز می‌دارد بگویند ۴/۰۰۱ =۲+۲، نشان می‌داد راسل واقعاً صداقت داشته است.

در سال ۱۹۷۳ لئون هنکین، به تشویق آبراهام رابینسون[۴] نسخه‌ای از نامهٔ راسل را برای کورت گودل فرستاد. گودل ضمن پاسخ به نامهٔ پیشین رابینسون دربارهٔ اشارات راسل، این‌طور اظهارنظر کرد:

«راسل به‌روشنی تعبیری نادرست از قضیهٔ من می‌کند ولی این کار را به‌طرز جالبی انجام می‌دهد که با بعضی از پرسش‌هایی که چند ماه پیش مورد بحث قرار دادیم، مرتبط است. برخلاف این، ویتگنشتاین درکتاب انتشاریافته پس از درگذشتش[5]، به اظهار سوء تعبیری پیش پاافتاده و غیرجالب می‌پردازد.» [۱۳، ص. ۲۰۱]

اگر ما (و به‌گمانم باید) به پیروی از آنلیس، همان معنای ظاهری اظهارات راسل را در نظرگیریم. چه چیز دلیل سوء تعبیر بوده است؟ راسل در عبارت «اگر مجموعه‌ای از بنداشت‌ها به تناقض منجر شود، روشن است که دست‌کم یکی از آن بنداشت‌ها کاذب است» سرِ نخی در اختیار ما می‌گذارد. به نظر می‌رسد راسل قادر نبود خود را از سپهر مفهومی *پرینکیپیا ماتماتیکا* رها سازد که در آن، بسط صوری به‌نحوی ناگسستنی با تعبیر غیرصوری پیوند خورده است. وایتهد و راسل، به‌ویژه در تمایز گذاردن میان مفهوم صدق و مفهوم

[5] ممکن است منظور گودل ازکتاب انتشاریافته پس از درگذشت ویتگنشتاین، «پژوهش‌های فلسفی» او و منظور از «سوء تعبیر پیش پاافتادهٔ» ویتگنشتاین پاراگراف معروفی موسوم به پاراگراف بدنام (Notorious) باشد و اگر چنین باشد، موضوع قدری عجیب است، چراکه ایرادی که منطق‌دانان به پاراگراف ویتگنشتاین وارد می‌کنند درست همانی است که در این مقاله به راسل وارد می‌آید؛ اینکه ویتگنشتاین اثبات و صدق، یا به بیان دیگر، نحو و دلالت‌شناسی را در هم آمیخته و با یکدیگر خلط کرده است–م.

[۱] effectiveness [method] [۲] A. Turing [۳] Irving Anellis [۴] Abraham Robinson

اثبات‌پذیری ناکام ماندند. بیان آنها را از قاعدهٔ جداسازی یا وضع مقدم به خاطر بیاورید: «هرچه که از یک گزارهٔ مقدماتیِ صادق نتیجه شود، صادق است.» [۴۳، صص. ۹۲–۹۴] اگر این خوانش از *پرینکیپیا ماتماتیکا* را دنبال کنیم، آن‌گاه پیامدش این است که گزارهٔ تصمیم‌ناپذیر گودل باید همچون تناقضی نمودار گردد؛ در واقع شکلی از پارادُکس دروغگو.

تمام آنچه گذشت، صرفاً نظریه‌پردازی است چنان‌که تنها می‌توانیم از آنچه راسلِ نود ساله در ذهن داشته به گمانه‌زنی بپردازیم. در برخی اظهارات بعدی درباب قضیهٔ ناتمامیّت، به نظر می‌رسد که درک بهتری از موضوع داشته است. در سال ۱۹۷۱ ویراست چهارمِ *فلسفهٔ*برتراند راسل منتشر شد به‌همراه تکمله‌ای به قلم راسل به «پاسخ به نقدها»ی پیشینش. این تکمله پس از درگذشت او منتشر شد ولی در پاسخ به دعوت شلیپ در سال ۱۹۶۵، قلمی شده بود. در این تکمله، راسل دربارهٔ کار گودل چنین اظهارنظر می‌کند:

> «مدت زمانی نه‌چندان طولانی پس از انتشار *پرینکیپیا ماتماتیکا*، گودل مشکل جدیدی را مطرح ساخت. او ثابت کرد که در هر زبان منطقیِ نظام‌مند، گزاره‌هایی وجود دارند که می‌توانند بیان شوند اما نمی‌توان آنها را ثابت یا رد کرد. این موضوع توسط بسی کسان (و به‌گمانم، نه توسط گودل) به منزلهٔ ایرادی مهلک بر شکلی از منطق ریاضی که من و دیگران به آن بخشیدیم، در نظر گرفته شده است. من هرگز قادر به پذیرش این دیدگاه نبوده‌ام. این دیدگاه توسط کسانی اختیار شده است که پیش‌فرضشان این است که هیچ نگرهٔ منطقی نظام‌مندی نمی‌تواند از هر لحاظ صادق باشد. طرفه اینکه، اینان هرگز باورشان را به حساب معمولی مقدماتی اعمال نمی‌کنند. زمانی که چنین کنند، به‌گمانم مورد بی‌اعتنایی قرار گیرند. همواره قبول داشته‌ام که گزاره‌هایی در منطق ریاضی وجود دارند که می‌توانند بیان شوند اما نه ثابت شوند نه باطل. دوتا از این گزاره‌ها جایگاه نسبتاً مهمی در *پرینکیپیا ماتماتیکا* داشتند، یعنی اصل موضوع انتخاب و اصل موضوع بی‌نهایت. گرچه نزد بسیاری از منطق‌دانان ریاضی، تأثیر ویرانگر کار گودل بسیار بزرگتر جلوه کرده تا نزد من و چنین پنداشته شده است که کار گودل محدودیت عظیمی در چشم‌انداز منطق ریاضی موجب شده است ...، من به این دیدگاه خود را ملتزم می‌دانم که آدمی باید بهترین مجموعه از بنداشت‌هایی را که به نظرش می‌رسد کنار هم بگذارد و به آن باور داشته باشد تا آن زمان که تناقضات واقعی آشکار شوند.» [۳۳، ص. xviii]

به نظر می‌آید که آرای فوق روایتی بسیار بهتر از کار گودل به‌دست می‌دهند تا نامهٔ راسل به هنکین. با این حال، امکان آشفتگی‌هایی وجود دارد. به نظر می‌آید در اظهار نظرِ «این دیدگاه توسط کسانی اختیار شده که پیش‌فرضشان این است که هیچ نگرهٔ منطقی نظام‌مندی نمی‌تواند از هر لحاظ صادق باشد»، سازگاری با تمامیّت خلط می‌شود (همان‌گونه که در نامه به هنکین به‌روشنی چنین است).

سرانجام اینکه احتمالاً ناممکن است اظهارات راسل را دربارهٔ قضیهٔ ناتمامیّت به طریقی یکسره منسجم و در توافق با هم تفسیر کرد. این اظهارات، چکیده‌های صحیحی از کار گودل را با آنچه به‌نظر ایده‌هایی کاملاً آشفته و پریشان می‌آیند، درهم آمیخته است. فرانسیسکو رودریگز کونسیگرا[۱] قرائتی همدلانه‌تر از اظهارات راسل به‌دست می‌دهد؛ خواننده را برای این تفسیر به مقالهٔ او [۲۰] ارجاع می‌دهیم.

۴. سرنوشتِ *پرینکیپیا ماتماتیکا*

ناقدانِ اثر وایتهد و راسل اغلب تصریح می‌کنند که کار گودل بر ایده‌های *پرینکیپیا ماتماتیکا* خط بطلان کشیده است. به نظر می‌رسد شخص راسل این نظر را پذیرفته بود. او در نامه‌ای به آلیس ماری هیلتن به تاریخ ۹ جون ۱۹۶۳ نوشت:

> «پیروان گودل تقریباً مرا متقاعد کرده بودند که این همه سالِ آزگار، کار مردافکن بر روی *پرینکیپیا ماتماتیکا* به هرز رفته بود و بهتر آن بود که کتاب به‌دست فراموشی سپرده می‌شد. باعث خرسندی است که می‌بینم شما چنین نظری ندارید.» [۳۲، ص. ۱۷۴]

به کدام معنا کار گودل بر اثر وایتهد و راسل خط بطلان کشید؟ اگر بپذیریم که این نویسندگان پیشکسوت ادعای تمامیّت نظامشان را داشتند، پس با آنچه به فعل درآوردند یکسره بر این ادعا خط بطلان کشیده‌اند. این دو حتی اصل موضوع بی‌نهایت را هم مفروض نگرفتند، بلکه آن را چون مقدّمِ تلویحی گزاره‌هایی که از آن منتج می‌شدند، حتی گزاره‌های حساب بچه‌–مدرسه‌ای‌ها، رها کردند. همان‌گونه که نقل‌قول ۱۹۷۱ در بالا نشان می‌دهد، راسل کاملاً با این ایده موافق بود که ممکن است بنداشت‌های بیشتری برای بسط مبانی ریاضیات مورد نیاز باشد.

پس از قریب به یک قرن بازنگری، مشاهده می‌کنیم که راسل نسبت به سرنوشت *پرینکیپیا ماتماتیکا* بیش از حد در موضع تدافعی قرار گرفته بود. درست است که این کتاب بجز جماعت فیلسوفان و مورّخان منطق، خوانندهٔ دیگری ندارد. اما درست به همان‌گونه که *پرینکیپیا ماتماتیکای* سِر ایزاک نیوتن مبنای دانش فیزیک ریاضی بود، این کتاب اثری بنیادین بود که انگیزه‌بخش آثار بعدی در منطق ریاضی شد. این دستاوردی بود که راسل به‌واقع باید بدان می‌بالید.

مراجع

[1] I. Anellis, *Did Gödel's result come as a surprise to Bertrand Russell?*, Posting to the FOM email list, March 30, 2010.

[2] A. Church, Russell's theory of identity of propositions, *Philosophia Naturalis*, **21** (1984), 513–522.

[۱] Francisco Rodrigues-Consuegra

[3] R. Crawshay-Williams, *Russell Remembered*, Oxford University Press, London, New York, 1970.

[4] J. W. Dawson, *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel*, A. K. Peters, ellesley, MA, 1997.

[5] B. Feinberg, R. Kasrils (eds.), *Dear Bertrand Russell ... A Selection of his correspondence with the General Public 1950–1968*, George Allen and Unwin Ltd, London, 1969.

[6] G. Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence,* (G. Gabriel, H. Hermes, Kambartel, C. Thiel, and A. Veraart, eds.), University of Chicago Press, Chicago, 1980, bridged from the German edition by Brian McGuinness and translated by Hans Kaal.

[7] K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I., *Monatshefte für Mathematik und Physik*, **38** (1931), 173–198.

[8] —, Russell's mathematical logic, *The Philosophy of Bertrand Russell* (Library of ving Philosophers Volume 5) (P. A. Schilpp, ed.), Northwestern University, Evanston, 1944, pp. 123–153 [10, pp. 119–141].

[9] —, What is Cantor's continuum problem?, *American Mathematical Monthly,* **54** (1947), 515–525 [10, pp. 176–187].

[10] —, *Collected Works*, Volume II: Publications 1938–1974 (S. Feferman, W. Dawson, Jr., S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Solovay, and J. van Heijenoort, editors), Oxford University Press, New York, 1990.

[11] —, *Collected Works*, Volume III: Unpublished Essays and Lectures (S. Feferman, W. Dawson, Jr., W. Goldfarb, C. Parsons, and R. M. Solovay, eds.), Oxford University ess, New York, 1995.

[12] —, *Collected Works*, Volume IV: Correspondence A-G (S. Feferman, W. Dawson, Jr. (editors-in-chief), W. Goldfarb, C. Parsons, and W. Sieg, editors), Oxford University Press, New York, 2003.

[13] —, *Collected Works*, Volume V: Correspondence H-Z (S. Feferman, W. Dawson, Jr. (editors-in-chief), W. Goldfarb, C. Parsons, and W. Sieg, editors), Oxford University Press, New York, 2003.

[14] I. Grattan-Guinness, The search for mathematical roots, 1870–1940: *Logics, Set Theories and the Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000.

[15] L. Henkin, Are logic and mathematics identical?, *Science,* **138** (1962), 788–794.

[16] A. Irvine (ed.), *Bertrand Russell: Critical Assessments*, Volume II: Logic and Mathematics, Routledge, London, New York, 1999.

[17] J. Pelham, A. Urquhart, Russellian propositions, *Logic, Methodology and Philosophy of Science IX*, Proceedings of the Ninth International Congress of Logic, Methodology, and Philosophy of Science, Uppsala, Sweden, August 7–14, 1991, North Holland, msterdam, New York, 1994, pp. 307–326.

[18] W. V. Quine, *The Time of My Life: An Autobiography*, MIT Press, Cambridge, MA, 1985.

[19] I. A. Richards, *Beyond*, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1974.

[20] F. Rodriguez-Consuegra, Russell, Godel and logicism, *Philosophy of Mathematics*, Proceedings of the 15th International Wittgenstein Symposium, Part 1, 1993, Reprinted in [16], pp. 320–329, pp. 233–242.

[21] B. Russell, On Denoting, *Mind*, **14** (1905), 479–493.

[22] —, Les paradoxes de la logique, *Revue de Metaphysique et de Morale*,**14** (1906), 627–650.

[23] —, *Introduction to Mathematical Philosophy*, 2nd edn., George Allen and Unwin, London, 1920.

[24] —, On order in time, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **32** (1936), 216–228.

[25] —, *The Principles of Mathematics*, George Allen and Unwin, London, 1937, 2nd edn., first published 1903.

[26] —, *An Inquiry into Meaning and Truth*, 1st edn., W. W. Norton and Company, New York, 1940.

[27] —, Logical positivism, *Polemic*, **1** (1945), 6–13, Reprinted in [35, p. 148–155].

[28] —, Whitehead and Principia Mathematica, *Mind*, **57** (1948), 137–138, printed in [35, pp. 190–191].

[29] —, Logical positivism, *Revue internationale de philosophie*, **4** (1950), 3–19, printed in [30, pp. 323–343].

[30] —, *Logic and Knowledge*, (R. C. Marsh, ed.), George Allen and Unwin, London, 1956.

[31] —, *The Autobiography of Bertrand Russell 1914–1944*: Volume II, Little, Brown and Company, Boston, Toronto, 1968, An Atlantic Monthly Press Book.

[32] —, *The Autobiography of Bertrand Russell 1944–1967*: Volume III, George Allen and Unwin, London, 1969.

[33] —, Addendum to my ‘Reply to Criticisms’, *The Philosophy of Bertrand Russell* (A. Schilpp, ed.), The Library of Living Philosophers, Volume V, Fourth Edition, Open ourt, La Salle, IL, 1971, pp. xvii–xx.

[34] —, On ‘Insolubilia’ and their solution by symbolic logic, *Essays in Analysis, by Bertrand Russell* (D. Lackey, ed.), George Braziller, New York, 1973, pp. 190–214.

[35] —, *Collected Papers*, Volume 11: Last Philosophical Testament 1943–1968, (G. Slater with the assistance of Peter Kollner, eds.), Routledge, London, New York, 1997.

[36] —, *Collected Papers*, Volume 5; Toward "Principia Mathematica" 1905–1908, (G. H. Moore, editor), Routledge, London, New York, 2014.

[37] P. Arthur Schilpp (editor), The philosophy of Bertrand Russell, *Library of Living Philosophers*, vol. 5, Northwestern University, Evanston, IL, 1944.

[38] A. Urquhart, Logic and denotation, *Russell vs. Meinong: The legacy of "On denoting"* (N. Griffin and D. Jacquette, eds.), Routledge, New York, 2008.

[39] ––, Principia Mathematica: The first 100 years, *The Palgrave Centenary Companion to Principia Mathematica* (N. Griffin and B. Linsky, editors), Palgrave Macmillan, Houndmills, Basingstoke, Hampshire, 2013, pp. 3–20.

[40] H. Wang, Some facts about Kurt Gödel, *The Journal of Symbolic Logic*, **46** (1981), 653–659.

[41] ––, *Reflections on Kurt Gödel,* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1987.

[42] A. North Whitehead, B. Russell, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, 1910–1913, Volume 1, 1910, Volume 2, 1913, Volume 3, 1913.

[43] ––, *Principia Mathematica*, vol. 1, 2nd edn., Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

احسان ممتحن: یاسوج، دانشگاه یاسوج، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی
رایانامه: e_momtahan@yu.ac.ir