فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۰، شمارهٔ ۶۸ (بهار و تابستان ۱۴۰۰) صص. ۱۰۱ تا ۱۱۸

برخی رهیافت‌های جدید به مسئلهٔ ضعیف‌شدهٔ شانزدهم هیلبرت

رسول کاظمی

تقدیم به استاد ارجمندم، جناب آقای دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

چکیده

در این مقاله، مسئلهٔ ضعیف‌شدهٔ شانزدهم هیلبرت را معرفی و جدیدترین رهیافت‌های به‌دست آمده دربارهٔ حل آن را مرور می‌کنیم. این مسئله، یکی از نسخه‌های ساده‌شدهٔ مسئلهٔ شانزدهم هیلبرت است که با وجود نزدیک به یکصد و بیست سال پژوهش جدی و چاپ صدها جلد کتاب و هزاران مقاله، همچنان یک مسئلهٔ باز است.

۱. مقدمه

بدون شک، داوید هیلبرت[۱] یکی از برجسته‌ترین ریاضیدانانی است که تأثیر بسیار زیادی در معماری علمی قرن بیستم میلادی داشته است. او در سال ۱۸۶۲ میلادی در کونیگسبرگ[۲] متولد شد. تحصیلات خود را در مدرسهٔ فریدریش اسکولگ[۳]، یکی از قدیمی‌ترین مدرسه‌های آلمان که امانوئل کانت[۴] فیلسوف بزرگ آلمانی نیز ۱۴۰ سال قبل از آن، در آنجا تحصیل کرده بود، آغاز کرد اما بعد از مدتی به‌علت نارضایتی، مدرسهٔ خود را تغییر داد و به مدرسهٔ ویلهلم[۵] رفت و از آنجا فارغ‌التحصیل شد. سپس تحصیلات دانشگاهی را در دانشگاه کونیگسبرگ آغاز کرد و در سال ۱۸۸۵ از دانشگاه کونیگسبرگ موفق به اخذ درجهٔ دکتری شد. در خلال سال‌های ۱۸۸۶ تا ۱۸۹۵ در دانشگاه کونیگسبرگ به تدریس ریاضیات پرداخت. بعد از این دوران، دیوید هیلبرت وارد دانشگاه گوتینگن شد و در دوران تدریس در آنجا، دانشجویان دکتری بسیاری

عبارات و کلمات کلیدی. مسئلهٔ ضعیف‌شدهٔ شانزدهم هیلبرت؛ انتگرال آبلی؛ صفر منزوی؛ چبیشف؛ یکنوایی.

[۱] David Hilbert [۲] Koenigsberg [۳] Friedrichskolleg [۴] Immanuel Kant [۵] Wilhelm

را پرورش داد که از جملهٔ بزرگترین ریاضیدانان قرن بیستم میلادی شدند. دیوید هیلبرت تا سال ۱۹۳۰ به تدریس و پژوهش در ریاضیات مشغول بود تا اینکه در این سال، خود را بازنشسته کرد و در سال ۱۹۴۳ درگذشت.

انتشار اولین اثر بزرگ هیلبرت دربارهٔ نظریهٔ تغییرناپذیرها، او را مورد توجه جهان دانش قرار داد. سپس در مدتی نزدیک به بیست سال، آثار و اکتشافات او یکی پس از دیگری منتشر شدند که منجر به شهرت جهانی وی شد. در سال ۱۹۰۰، دیوید هیلبرت که در آن زمان جزو ریاضیدانان تراز اول دنیا بود، در دومین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان که در پاریس برگزار شد، فهرستی شامل ۲۳ مسئله را مطرح کرد که به نظرش، از مشکل‌ترین مسائل ریاضی بودند که باید مورد توجه ریاضیدانان قرن بیستم قرار گیرند (برای مرور این مسائل، مطالعهٔ مقالهٔ [۲] توصیه می‌شود). آینده نشان داد که نظر او درست بوده است و به‌جرأت می‌توان گفت که با قرارگرفتن حل این مسائل در صدر اهداف ریاضیدانان، عملاً مسیر پیشبرد ریاضیات قرن بیستم مشخص شد. به‌دور از اغراق، نفوذ فکری هیلبرت در پیشرفت ریاضیات بسیار زیاد و در عین‌حال، پایدار بوده است. او در قسمتی از سخنرانی خود برای نشان دادن اهمیت آن مسائل در پیشبرد ریاضیات گفت: «هر شاخه از علم تا زمانی زنده است که انبوهی از مسائل را ارائه دهد....» هر ۲۳ مسئلهٔ هیلبرت، کم و بیش مورد توجه ریاضیدانان واقع شدند. برخی کاملاً حل شده‌اند، برخی کماکان مورد پژوهش واقع‌اند اما هنوز راه‌حل قطعی برای آنها به‌دست نیامده است و برخی نیز به‌طور کامل حل‌نشده باقی مانده‌اند. در این میان، یکی از مسائل حل‌نشده، مسئلهٔ شانزدهم است که قسمت دوم آن به بررسی تعداد ماکسیمم و موقعیت دورهای حدی معادلات دیفرانسیل چندجمله‌ای در صفحه مربوط می‌شود. بخش دوم این مقاله را به بیان این مسئله و مرور مختصری بر پیشرفت‌های حاصل‌شده برای حل آن، اختصاص می‌دهیم.

۲. قسمت دوم مسئلهٔ شانزدهم هیلبرت

برای بیان دقیق قسمت دوم مسئلهٔ شانزدهم هیلبرت، دستگاه معادلات دیفرانسیل مسطح

$$\dot{x} = P_n(x, y), \qquad \dot{y} = Q_n(x, y) \tag{۱.۲}$$

را در نظر می‌گیریم که در آن، $P_n(x, y)$ و $Q_n(x, y)$ چندجمله‌ای‌های حقیقی نسبت به متغیرهای x و y با درجهٔ حداکثر n هستند. قسمت دوم مسئلهٔ شانزدهم هیلبرت به این صورت بیان می‌شود که «برای عدد طبیعی n، در مورد ماکسیمم تعداد و همچنین موقعیت نسبی دورهای حدی دستگاه (۱.۲) برای همهٔ انتخاب‌های ممکن P_n و Q_n چه می‌توان گفت؟» توجه کنید که یک دور حدی از دستگاه (۱.۲) یک مدار تناوبی منزوی است. مطالعهٔ دورهای حدی، یکی از زمینه‌های اولیهٔ پژوهش در نظریهٔ دستگاه‌های دینامیکی و معادلات دیفرانسیل غیرخطی به‌شمار می‌رود که با کارهای ریاضیدان بزرگ فرانسوی، آنری

پوانکاره، در سال ۱۸۸۲ شروع شده است. پوانکاره ثابت کرد که «هر میدان برداری مسطح که بدون اتصالِ زینی باشد، تعداد متناهی دور حدی دارد.»

به‌لحاظ تاریخی، قسمت دوم مسئلهٔ شانزدهم هیلبرت به سه مسئلهٔ زیر تقسیم می‌شود [۱۶]:

مسئلهٔ اول: آیا هر میدان برداری چندجمله‌ای مسطح، تعداد متناهی دور حدی دارد؟

مسئلهٔ دوم: آیا تعداد دورهای حدی میدان‌های برداری چندجمله‌ای مسطح به عددی که فقط به درجهٔ چندجمله‌ای بستگی دارد، کراندار است؟ کران تعداد دورهای حدی مطرح شده در مسئلهٔ دوم، با $H(n)$ نشان داده می‌شود و آن را عدد هیلبرت می‌نامند. میدان برداری خطی اگرچه ممکن است مدار تناوبی داشته باشد اما این مدارها منزوی نیستند، پس هیچ دور حدی ندارد. از این‌رو $H(۱) = ۰$.

مسئلهٔ سوم: آیا کران بالایی برای $H(n)$ موجود است؟

توجه کنید که پاسخ مثبت به هر مسئله، پاسخ مثبت برای مسائل قبلی را در بر دارد. دولاک[۱] در سال ۱۹۲۳ ادعا کرد که مسئلهٔ اول را حل کرده است [۸]. پتروفسکی[۲] و لاندیس[۳] در سال‌های ۱۹۵۵ و ۱۹۵۷ به‌ترتیب در دو مقالهٔ [۲۵] و [۲۶] ادعا کردند که $H(۲) = ۲$ و $H(n) \leq P_۳(n)$ که در آن، $P_۳(n)$ یک چندجمله‌ای خاص از درجهٔ ۳ است. در واقع، آنها فکر می‌کردند پاسخی برای مسئلهٔ سوم ارائه داده‌اند تا اینکه در اوایل دههٔ ۱۹۶۰ میلادی ادعای آنها توسط نُویکف[۴] و ایلیاشنکو[۵] رد شد. در سال ۱۹۷۹ چن[۶] و وانگ[۷] در [۵] و در سال ۱۹۸۰ شی[۸] در [۲۸] میدان‌های برداری درجه‌دو با ۴ دور حدی ارائه دادند؛ یعنی نشان دادند که $H(۲) \geq ۴$.

در آغاز سال ۱۹۸۱ میلادی، ایلیاشنکو یک اشتباه بزرگ در اثبات دولاک یافت و در نتیجه پس از ۸۰ سال مطالعه و پژوهش، مسألهٔ شانزدهم هیلبرت تقریباً به نقطهٔ آغازش، زمانی که نخستین بار در سال ۱۹۰۰ مطرح شده بود، بازگشت. در سال ۱۹۸۵ بامُن[۹] ثابت کرد که هر دستگاه چندجمله‌ای مرتبه‌دو تعداد متناهی دور حدی دارد [۴]. سرانجام متناهی بودنِ تعداد دورهای حدی یک دستگاه مسطح چندجمله‌ای از درجهٔ $n > ۲$ در سال‌های ۱۹۹۱ و ۱۹۹۲ به‌ترتیب، توسط ایلیاشنکو [۱۷] و اِکال[۱۰][۹] ثابت شد. آنها با ارائهٔ قضیهٔ زیر، به مسئلهٔ اول پاسخ مثبت دادند.

قضیه ۱.۲. *یک میدان برداری مسطح چندجمله‌ای، دارای تعداد متناهی دور حدی است.*

قدم بعدی برای حل مسئلهٔ شانزدهم هیلبرت، اثبات متناهی بودن یکنواخت تعداد دورهای حدی، یعنی اثبات $H(n) < \infty$ است. همچنین در مورد موقعیت نسبی دورهای حدی برای دستگاه (۱.۲) بهترین نتیجهٔ کلی در سال ۲۰۰۴ توسط لیوره[۱۱] و رُدریگس[۱۲] در [۲۱] به‌دست آمده است که در اینجا به‌اختصار آن را بیان می‌کنیم.

[۱] Dulac [۲] Petrovskii [۳] Landis [۴] Novikov [۵] Ilyashenko [۶] Chen [۷] Wang [۸] Shi [۹] Bamon [۱۰] Ecalle [۱۱] Llibre [۱۲] Rodriguez

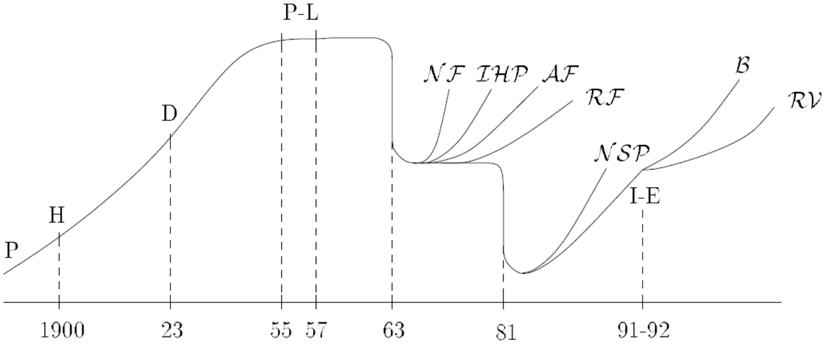
تعریف ۲.۲. یک پیکربندی[1] از دورهای حدی، یک مجموعهٔ متناهی $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ از خم‌های بستهٔ سادهٔ مجزا در صفحه است به گونه‌ای که برای هر $i \neq j$، $C_i \cap C_j = \emptyset$.

فرض کنیم پیکربندی $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ از دورهای حدی داده شده باشد. خم C_i را *اولیه* گوییم اگر هیچ خم C_j از $\mathcal{C}$ مشمول ناحیهٔ محدود به C_i نباشد. همچنین دو پیکربندی $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ از دورهای حدی را *توپولوژیکی هم‌ارز* گوییم اگر یک همانریختی در $\mathbb{R}^2$ موجود باشد که $\mathcal{C}$ را به $\mathcal{C}'$ بنگارد. گوییم دستگاه (۱.۲) دارای پیکربندی $\mathcal{C}$ از دورهای حدی است اگر مجموعهٔ دورهای حدی آن با $\mathcal{C}$ توپولوژیکی هم‌ارز باشد.

قضیه ۳.۲. [۲۱] *فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک پیکربندی از دورهای حدی و r تعداد خم‌های اولیهٔ آن باشد. در این صورت، یک پیکربندی $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ به‌عنوان دورهای حدیِ جبریِ دستگاه چندجمله‌ای* (۱.۲) *با درجهٔ $n \leq 2(m + r) - 1$ در دسترس است.*

قضیهٔ اخیر یک پاسخ جزئی به پرسشْ در مورد مکان نسبی دورهای حدی در قسمت دوم مسئلهٔ شانزدهم است. سؤال باقیمانده در این باره، این است که «برای عدد طبیعی n چه نوع پیکربندی از دورهای حدی برای دستگاه (۱.۲) ممکن است؟» با همهٔ این تلاش‌ها، مسئلهٔ شانزدهم علی‌رغم پژوهش‌های جدی دربارهٔ آن، با گذشت نزدیک به یکصد و بیست سال هنوز حتی برای $n = 2$ حل‌نشده است. به‌دلیل پیچیدگی مسئلهٔ شانزدهم هیلبرت، نسخه‌های ساده‌تری از این مسئله مطرح شد که بعضی از آنها حتی منجر به ایجاد و توسعهٔ شاخه‌هایی از دستگاه‌های دینامیکی شدند. در شکل ۱ که از [۱۷] اقتباس شده، تاریخچهٔ مسئلهٔ شانزدهم تا پایان قرن بیستم میلادی به‌طور مختصر نمایش داده شده است. یکی از نسخه‌های ساده‌تر مسئلهٔ شانزدهم، توسط آرنولد[2] در سال ۱۹۷۷ ارائه شد که به مسئلهٔ مماسی یا *مسئلهٔ ضعیف‌شدهٔ* شانزدهم هیلبرت یا مسئلهٔ شانزدهم بی‌نهایت کوچک هیلبرت معروف است. ولادیمیر ایگورویچ آرنولد، ریاضیدان اوکراینی‌تبار و از بزرگترین ریاضیدانان معاصر است که به علت گستردگی، عمق و تأثیرگذاری کارهایش در طیف وسیعی از شاخه‌های علمی از جمله دستگاه‌های دینامیکی، معادلات دیفرانسیل، هیدرودینامیک، مکانیک کلاسیک و سماوی، هندسه، توپولوژی، هندسهٔ جبری، هندسهٔ هم‌تافته، نظریهٔ فاجعه و نظریهٔ تکینگی شهره است. وی اولین کار شاخص خود را در سال ۱۹۵۷ میلادی، یعنی زمانی که ۱۹ سال بیشتر نداشت، زیر نظر استادش کولموگُرُف[3] ارائه کرد. کولموگُرُف در راستای حل سیزدهمین مسئلهٔ هیلبرت، نشان داده بود که هر تابع پیوستهٔ چندمتغیره را می‌توان از ترکیب تعداد متناهی تابع سه‌متغیره ساخت. آرنولد با بهبود این قضیه، نشان داد که عدد سه را می‌توان به دو کاهش داد و به‌عنوان نتیجه‌ای مهم، به

[1]Configuration [2]Arnold [3]Kolmogorov



شکل ۱. خلاصه‌ای از تاریخچهٔ مسئلهٔ شانزدهم، P: پوانکاره، H: هیلبرت، D: دولاک، $P-L$: پتروفسکی-لاندیس، E: اِکال، I: ایلیاشنکو، $\mathcal{NF}$: نرمال‌فرم، $\mathcal{IHP}$: مسئلهٔ شانزدهم بی‌نهایت کوچک هیلبرت، $\mathcal{AF}$: برگ‌بندی‌های تحلیلی، $\mathcal{RF}$: تابع برگردنده، $\mathcal{NSP}$: پدیدهٔ استوکس غیرخطی، $\mathcal{B}$: انشعاب، $\mathcal{RV}$: نسخه‌های تحدیدشدهٔ مسئلهٔ شانزدهم هیلبرت

حل سیزدهمین مسئلهٔ هیلبرت نائل آمد. بعدها با استفاده از این نتیجه، خودِ کولموگُرُف نیز موفق به حل ششمین مسئلهٔ هیلبرت شد. در بخش بعد به بیان دقیق مسئلهٔ ضعیف‌شدهٔ شانزدهم هیلبرت می‌پردازیم.

۳. مسئلهٔ ضعیف‌شدهٔ شانزدهم هیلبرت

برای بیان مسئلهٔ ضعیف‌شدهٔ شانزدهم هیلبرت، فرض کنیم $H(x,y)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ m باشد. دستگاه معادلات دیفرانسیل مسطح

$$\dot{x} = H_y(x,y), \quad \dot{y} = -H_x(x,y) \tag{۱.۳}$$

را *دستگاه همیلتونی*[۱] نظیر H می‌نامیم. به‌ویژه اگر H مضرب ثابتی از $y^2 + \Phi(x)$ باشد، آن‌گاه دستگاه نظیر، یک *دستگاه نیوتنی*[۲] نامیده می‌شود. در واقع، دستگاه نیوتنی حالتی خاص از دستگاه همیلتونی است. حال دستگاه مختل‌شدهٔ

$$\dot{x} = H_y(x,y) + \varepsilon p(x,y), \quad \dot{y} = -H_x(x,y) + \varepsilon q(x,y) \tag{۲.۳}$$

را در نظر می‌گیریم که در آن، p و q چندجمله‌ای‌های نسبت به x و y از درجهٔ حداکثر n هستند که ضرایب آنها معمولاً به‌عنوان پارامترهای متغیر در یک مجموعهٔ فشرده در نظر گرفته می‌شوند و ε یک پارامتر مثبت کوچک است. همچنین فرض کنیم $\gamma_h \subset H^{-1}(h)$ یک خانواده از منحنی‌های تراز فشردهٔ H باشد که به‌طور پیوسته به پارامتر $h \in (a,b)$ وابسته است. بنابراین برای هر $h \in (a,b)$، γ_h یک مدار تناوبی

[۱] Hamiltonian system [۲] Newtonian system

از دستگاه همیلتونی (۱.۳) است و اجتماع همهٔ γ_hها برای $h \in (a,b)$، یک *طوق تناوبی* برای دستگاه (۱.۳) نامیده می‌شود. حال انتگرال آبلی زیر معروف به *تابع ملنیکف*[۱] مرتبهٔ اول را در نظر می‌گیریم:

$$I(h) = \oint_{\gamma_h} q(x,y)dx - p(x,y)dy. \qquad (۳.۳)$$

یادآوری می‌کنیم که انتگرال یک تک‌فرمی گویا روی یک خم بستهٔ جبری، *انتگرال آبلی* نامیده می‌شود. مسئلهٔ شانزدهم ضعیف‌شده یا همان مسئلهٔ آرنولد، به این صورت بیان می‌شود که «برای ثابت‌های m و n، حداکثر تعداد صفرهای منزوی $I(h)$ چند است؟» این عدد را با $\mathcal{Z}(m,n)$ نشان می‌دهیم. در نگاه اول ممکن است به‌نظر آید که مسئلهٔ آرنولد و مسئلهٔ شانزدهم هیلبرت هیچ ارتباطی با هم ندارند. برای یافتن ارتباط بین این دو مسئله، نخست می‌پرسیم چه تعداد از مدارهای تناوبی γ_h، $h \in (a,b)$ برای دستگاه (۲.۳) به‌ازای ε به‌اندازهٔ کافی کوچک سالم باقی می‌مانند؟ (یعنی برای دستگاه مختل‌شده باز هم مدار تناوبی هستند.) توجه کنید که اگر این تعداد متناهی باشد، آن‌گاه همگی دور حدی هستند. البته عکس این سؤال را نیز می‌توان در نظر گرفت، یعنی آیا ممکن است $h \in (a,b)$ و مدار تناوبی Γ_ε از دستگاه مختل‌شدهٔ (۲.۳) را چنان یافت که اگر $\varepsilon \to ۰$، آن‌گاه Γ_ε نسبت به متر هاسدورف، به γ_h میل کند؟ برای هر h چه تعداد Γ_ε موجود است؟ یادآوری می‌کنیم که اگر A و B دو زیرمجموعهٔ ناتهی از فضای متری (X,d) باشند، فاصلهٔ هاسدورف آنها به‌صورت

$$d_H(A,B) = \max\{\sup_{x\in A}\inf_{y\in B} d(x,y), \sup_{y\in B}\inf_{x\in A} d(x,y)\}$$

تعریف می‌شود.

اگر $h^* \in (a,b)$ و $\varepsilon^* > ۰$ چنان موجود باشند که دستگاه (۲.۳) برای $۰ < |\varepsilon| < \varepsilon^*$ دارای یک دور حدی Γ_ε باشد و وقتی که ε به صفر میل می‌کند، Γ_ε نیز نسبت به متر هاسدورف به γ_{h^*} میل کند، آن‌گاه گوییم Γ_ε از γ_{h^*} منشعب می‌شود. همچنین گوییم دور حدی Γ برای دستگاه (۲.۳) از طوق تناوبی دستگاه (۱.۳) منشعب می‌شود اگر $h \in (a,b)$ چنان موجود باشد که Γ از γ_h منشعب شود.

قضیهٔ زیر که از قضیهٔ پوانکاره–پونتریاگین[۲][۲۷] نتیجه می‌شود پاسخ دو سؤال فوق را ارائه می‌دهد.

قضیه ۱.۳. [۶] *فرض کنیم $I(h)$ برای $h \in (a,b)$ متحد با صفر نباشد. در این صورت، گزاره‌های زیر برقرارند:*

(الف) *اگر دستگاه (۲.۳) دارای یک دور حدی منشعب از γ_{h^*} باشد، آن‌گاه $I(h^*) = ۰$؛*

(ب) *اگر $h^* \in (a,b)$ چنان موجود باشد که $I(h^*) = ۰$ و $I'(h^*) \neq ۰$، آن‌گاه (۲.۳) دارای یک دور حدی هذلولوی یکتا منشعب از γ_{h^*} است؛*

---
[۱] Melnikov [۲] Pontryagin

(پ) *اگر $h^* \in (a,b)$ چنان موجود باشد که*

$$I(h^*) = I'(h^*) = \cdots = I^{(k-1)}(h^*) = 0, \quad I^{(k)}(h^*) \neq 0,$$

آن‌گاه (۲.۳) دارای حداکثر k دور حدی منشعب از γ_{h^*} با احتساب تکرار است؛

(ت) *تعداد کل صفرهای منزوی انتگرال آبلی (۳.۳) با احتساب تکرار، یک کران بالا برای تعداد دورهای حدی دستگاه (۲.۳) منشعب شده از طوق تناوبی (۱.۳) است.*

حال اگر قرار دهیم $m = n + 1$، آن‌گاه دستگاه (۲.۳) حالتی خاص از دستگاه (۱.۲) می‌شود. در این حالت، $\mathcal{Z}(n+1, n)$ را با $H^*(n)$ نمایش می‌دهیم. روشن است که $H^*(n)$ یک کران پایین برای عدد هیلبرت $H(n)$ است. در حالی که یافتن کران‌های بالای یکنواخت برای $H(n)$ از چشم‌انداز روشنی برخوردار نیست، در یافتن کران‌های پایین برای $H^*(n)$ و در نتیجه برای $H(n)$، نتایج امیدوارکننده‌ای حاصل شده است [۱۴].

نکتهٔ مهم در تخمین تعداد صفرهای منزوی انتگرال آبلی $I(h)$ این است که هر انتگرال آبلی به شکل (۳.۳) را می‌توان به‌صورت $I(h) = \oint_{\gamma_h} F(x,y)dx$ نوشت. برای مشاهدهٔ این مطلب، توجه کنید که با استفاده از قضیهٔ گرین[1]،

$$\begin{aligned} I(h) &= \oint_{\gamma_h} q(x,y)dx - p(x,y)dy \\ &= -\int\int_{int(\gamma_h)} (\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y})dxdy = \oint_{\gamma_h} F(x,y)dx \end{aligned}$$

که در آن، $\frac{\partial F}{\partial y} = (\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y})$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^y (\frac{\partial p}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial q}{\partial y}(x,y))dy \\ &= q(x,y) - q(x,0) + \int_0^y \frac{\partial p}{\partial x}(x,y)dy. \end{aligned}$$

فرض کنیم تابع $I(h)$ را بتوان به‌صورت ترکیب خطی

$$I(h) = \alpha_0 I_0(h) + \alpha_1 I_1(h) + \cdots + \alpha_n I_n(h) \tag{۴.۳}$$

نوشت که در آن، α_kها به پارامترهای اولیه (ضرایب p و q) بستگی دارند و برای هر $k = 0, \ldots, n$ داریم $I_k(h) = \oint_{\gamma_h} f_k(x)g(y)dx$. در این صورت، مسئلهٔ ضعیف‌شدهٔ شانزدهم هیلبرت را می‌توان به یافتن یک کران بالا برای تعداد صفرهای منزوی هر تابع متعلق به فضای برداری تولیدشده توسط $I_k(h)$ها

[1] Green's theorem

تبدیل کرد. این مسئله نیز قویاً با اثبات اینکه پایهٔ فضای برداری $\langle I_\circ(h), \ldots, I_n(h)\rangle$ یک دستگاه چبیشف[1] است، مرتبط است. بنابراین در بخش بعد به معرفی این مفهوم می‌پردازیم.

۴. دستگاه‌های چبیشف

مجموعهٔ $\mathcal{F} = \{f_\circ, f_\backslash, \ldots, f_n\}$ متشکل از $n+۱$ تابع مستقل خطی و تحلیلی روی بازهٔ باز I مفروض است. مسئلهٔ تخمین صفرهای حقیقی هر تابع ناصفر $F(x)$ به‌صورت

$$F(x) = \alpha_\circ f_\circ(x) + \alpha_۱ f_۱(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x)$$

یکی از مسائل جذاب و پُرکاربرد است. اگر تعداد صفرهای تابع $F(x)$ با احتساب تکرار روی بازهٔ I را با $z(F)$ نشان دهیم و در صورت وجود، قرار دهیم

$$\mathcal{Z}(\mathcal{F}) = \max_{F\in(\operatorname{span}\mathcal{F})\setminus\{\circ\}} z(F),$$

آن‌گاه به‌سادگی ملاحظه می‌شود که $\mathcal{Z}(\mathcal{F}) \geq n$. مسئله وقتی جالب‌تر می‌شود که $\mathcal{Z}(\mathcal{F}) = n$.

تعریف ۱.۴. مجموعهٔ $\mathcal{F} = \{f_\circ, f_۱, \ldots, f_n\}$ از توابع تحلیلی روی بازهٔ باز I مفروض است.

(الف) مجموعهٔ $\mathcal{F}$ را یک دستگاه چبیشف[2]($T-$دستگاه) روی بازهٔ I می‌نامیم اگر هر ترکیب خطی نابدیهی به‌صورت

$$\alpha_\circ f_\circ(x) + \alpha_۱ f_۱(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x)$$

حداکثر n ریشهٔ متمایز در I داشته باشد؛

(ب) مجموعهٔ $\mathcal{F}$ را یک دستگاه چبیشف کامل[3]($CT-$دستگاه) روی بازهٔ I می‌نامیم اگر برای هر $k = \circ, ۱, \ldots, n$، $\{f_\circ, f_۱, \ldots, f_k\}$ یک دستگاه چبیشف روی I باشد؛

(پ) مجموعهٔ $\mathcal{F}$ را یک دستگاه چبیشف کامل توسعه‌یافته[4]($ECT-$دستگاه) روی بازهٔ I می‌نامیم اگر برای هر $k = \circ, ۱, \ldots, n$، هر ترکیب خطی نابدیهی به‌صورت

$$\alpha_\circ f_\circ(x) + \alpha_۱ f_۱(x) + \cdots + \alpha_k f_k(x),$$

حداکثر k ریشه با احتساب تکرار در I داشته باشد؛

[1]Chebyshev [2]Chebyshev system [3]complete Chebyshev system [4]extended complete Chebyshev system

(ت) مجموعهٔ $\mathcal{F}$ یک دستگاه چبیشف با دقت k روی بازهٔ I است اگر هر ترکیب خطی نابدیهی به‌صورت

$$\alpha_\circ f_\circ(x) + \alpha_۱ f_۱(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x)$$

حداکثر دارای $n+k$ صفر با احتساب تکرار در I باشد.

روشن است که هر $ECT-$دستگاه روی بازهٔ I یک $CT-$دستگاه روی I نیز هست اما عکس این مطلب صادق نیست. معروف‌ترین مثال از یک $ECT-$دستگاه، مجموعهٔ $\{۱, x, x^۲, \ldots, x^n\}$ روی هر بازهٔ باز است. از دیگر مثال‌ها می‌توان به مجموعهٔ

$$\{۱, \log x, x, x\log x, x^۲, x^۲\log x, \ldots, x^n, x^n\log x\}$$

روی بازهٔ $(\circ, \infty)$، مجموعهٔ

$$\{۱, \cos x, \cos ۲x, \ldots, \cos nx\}$$

روی بازهٔ $(\circ, \pi)$ و مجموعهٔ

$$\left\{\frac{۱}{x+a_\circ}, \frac{۱}{x+a_۱}, \ldots, \frac{۱}{x+a_n}\right\}$$

روی بازهٔ (a, ∞) که در آن، $a = \max_{j=\circ,\ldots,n}(-a_j)$، اشاره کرد [۱۰]. پیش از بیان آخرین قضیهٔ این بخش، به تعریف زیر نیازمندیم.

تعریف ۲.۴. رونسکین توابع تحلیلی $f_\circ$،$f_۱$،...،f_n روی بازهٔ باز I در نقطهٔ $x \in I$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W[f_\circ, f_۱, \ldots, f_n](x) = \begin{vmatrix} f_\circ(x) & \cdots & f_n(x) \\ f'_\circ(x) & \cdots & f'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_\circ^{(n)}(x) & \cdots & f_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

قضیهٔ زیر محکی برای تعیین $ECT-$دستگاه بودن یک مجموعه از توابع ارائه می‌دهد.

قضیه ۳.۴. [۱۸] *مجموعهٔ $\{f_\circ, f_۱, \ldots, f_n\}$ یک $ECT-$دستگاه روی بازهٔ I است اگر و تنها اگر برای هر $k = \circ, ۱, \ldots, n$ و هر $x \in I$، $W[f_\circ, f_۱, \ldots, f_k](x) \neq \circ$.*

۵. محک چبیشف برای تخمین تعداد صفرهای منزوی انتگرال‌های آبلی

از آنجا که مسئلهٔ شانزدهم ضعیف‌شده معادل با یافتن یک کران بالا برای تعداد صفرهای منزوی $I(h)$ در (۳.۳) است، پژوهش‌های فراوانی در باب تخمین تعداد صفرهای انتگرال آبلی انجام شده است (برای مرور برخی از آنها، مطالعهٔ مقالهٔ [۳] توصیه می‌شود). روش‌ها و استدلال‌های به‌کار رفته در اکثر این پژوهش‌ها، معمولاً بسیار طولانی و پیچیده است. برای مثال، در برخی از آنها، نویسندگان به مطالعهٔ ویژگی‌های هندسی منحنی مرکزوار[۱] صادق در معادلهٔ ریکاتی[۲] به‌دست آمده از معادلات پیکار–فوکس[۳] متناظر با انتگرال‌های آبلی می‌پردازند [۷، ۱۵]. در برخی دیگر، نویسندگان از آنالیز مختلط (ادامهٔ تحلیلی و اصل شناسه)، توپولوژی جبری و فرمول پیکار–لفشتس[۴] برای فائق آمدن بر مسئله استفاده می‌کنند [۱۱، ۱۲]. در سال ۲۰۱۱ نویسندگان مقالات [۱۳، ۲۴] فرض کردند $I(h)$ در (۳.۳) را بتوان به‌صورت (۴.۳) نوشت که در آن، برای هر $k=0,\dots,n$،

$$I_k(h) = \oint_{\gamma_h} f_k(x)g(y)dx. \qquad (۱.۵)$$

سپس با وضع شرایطی روی توابع انتگرالده در I_kها یک محک جبری برای تشخیص چبیشف بودن دستگاه $\mathcal{F}=\{I_0(h),\dots,I_n(h)\}$ ارائه دادند. مزیت این روش نسبت به روش‌های معمول که از محاسبات پیچیدهٔ انتگرالی و دیفرانسیلی استفاده می‌کنند، استفاده از محاسبات جبری محض برای مطالعهٔ تعداد ریشه‌های انتگرال‌های آبلی است. از این‌رو در ادامهٔ این بخش به مرور این محک می‌پردازیم.

فرض کنیم $H(x,y)=\Phi(x)+\Psi(y)$ تابعی تحلیلی باشد که دارای یک مینیمم موضعی در مبدأ با شرط $H(0,0)=0$ است. در این صورت، همسایگی محذوف $\mathcal{P}$ از مبدأ موجود است که توسط بادامی‌های $\gamma_h\subset\{(x,y)|H(x,y)=h\}$ برگ‌بندی شده است. بنابراین $h_0\in(0,\infty]$ چنان موجود است که γ_hها برای $h\in(0,h_0)$ تشکیل یک خانواده از مدارهای تناوبی موسوم به طوق تناوبی برای دستگاه همیلتونی (۱.۳) می‌دهد. تصویر $\mathcal{P}$ بر محور x را با (x_l,x_r) و بر محور y را با (y_l,y_r) نشان می‌دهیم. تحت این شرایط، $\Phi(0)=0$ و Φ دارای یک مینیمم موضعی در $x=0$ است. پس برای هر $x\in(x_l,x_r)\setminus\{0\}$ داریم $x\Phi'(x)>0$. به همین ترتیب $\Psi(0)=0$ و برای هر $y\in(y_l,y_r)\setminus\{0\}$ داریم $y\Psi'(y)>0$. بنابراین برگردان‌های[۵] تحلیلی σ_1 و σ_2 موجود هستند به‌طوری که به‌ازای هر $x\in(x_l,x_r)$، $\Phi(x)=\Phi(\sigma_1(x))$ و به‌ازای هر $y\in(y_l,y_r)$، $\Psi(y)=\Psi(\sigma_2(y))$. متذکر می‌شویم که نگاشت σ را یک *برگردان* نامیم اگر $\sigma\circ\sigma=Id$ و $\sigma\neq Id$. بنابراین یک برگردان، یک وابریختی با یک نقطهٔ ثابت یکتا است. در نتیجه با شرایط فوق،

[۱] centroid curve [۲] Riccati [۳] Picard-Fuchs [۴] Picard-Lefschetz [۵] involution

داریم $\sigma_i(\circ)=\circ$. همچنین برای تابع مفروض κ، توازن[1] آن را نسبت به برگردان σ به‌صورت

$$\mathcal{B}_\sigma(\kappa)(x)=\kappa(x)-\kappa(\sigma(x)),$$

تعریف می‌کنیم. با نمادهای اخیر قضیهٔ زیر را داریم.

قضیه ۱.۵. [۱۳] *برای هر $k=\circ,\dots,n$، انتگرال‌های آبلی $I_k(h)$ را به‌صورت (۱.۵) در نظر می‌گیریم که در آن، برای هر $h\in(\circ,h_\circ)$، γ_h یک بادامی از منحنی تراز $\{\Phi(x)+\Psi(y)=h\}$ حول مبدأ است. فرض کنیم $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ به‌ترتیب، برگردان‌های متناظر با Φ و Ψ باشند. قرار می‌دهیم $g_\circ=g$ و تعریف می‌کنیم $g_{k+۱}=\dfrac{g'_k}{\Psi'}$. در این صورت، $\{I_\circ,I_۱,\dots,I_n\}$ یک $ECT-$دستگاه روی بازهٔ $(\circ,h_\circ)$ است اگر شرایط زیر برقرار باشند:*

الف) $\{\mathcal{B}_{\sigma_۱}(\frac{f_\circ}{\Phi'}),\mathcal{B}_{\sigma_۱}(\frac{f_۱}{\Phi'}),\dots,\mathcal{B}_{\sigma_۱}(\frac{f_n}{\Phi'})\}$ یک $CT-$دستگاه روی بازهٔ $(\circ,x_r)$ باشد؛

ب) $\{\mathcal{B}_{\sigma_۲}(g_\circ),\mathcal{B}_{\sigma_۲}(g_۱),\dots,\mathcal{B}_{\sigma_۲}(g_n)\}$ یک $CT-$دستگاه روی بازهٔ $(\circ,y_r)$ باشد؛

پ) داشته باشیم $\mathcal{B}_{\sigma_۲}(g_\circ)(y)=o(y^{۲m(n-۱)})$ که در آن، عدد $e>\circ$ موجود است چنان‌که

$$\psi(y)=e\,y^{۲m}+o(y^{۲m}).$$

با فرض‌های قبلی، گیریم تابع همیلتونی به‌شکل

$$H(x,y)=A(x)+B(x)y^{۲m},$$

باشد و $g(y)=y^{۲s-۱}$ که $s\in\mathbb{N}$. چون بنابر فرض، H دارای یک مینیمم موضعی در مبدأ است، پس $B(\circ)>\circ$ و A دارای یک مینیمم موضعی در $x=\circ$ است. با این شرطها به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که برای هر $x\in(x_l,x_r)$، $A(x)>\circ$ و برای هر $x\in(x_l,x_r)\setminus\{\circ\}$، $xA'(x)>\circ$. بنابراین A دارای ریشه‌ای از مرتبهٔ فرد در $x=\circ$ است و بنابراین برگردان σ چنان موجود است که برای هر $x\in(x_l,x_r)$، $A(x)=A(\sigma(x))$. در این صورت، قضیهٔ زیر را داریم که قسمت اولِ آن از [۱۳] و قسمت دومِ آن از [۲۴] اقتباس شده است.

قضیه ۲.۵. *برای $k=\circ,\dots,n$، انتگرال‌های آبلی $I_k(h)=\int_{\gamma_h}f_k(x)y^{۲s-۱}dx$ مفروض است که در آن، برای هر $h\in(\circ,h_\circ)$، γ_h یک بادامی از منحنی تراز $\{A(x)+B(x)y^{۲m}=h\}$ حول مبدأ است. فرض کنیم σ، برگردان متناظر با A باشد. با فرضِ*

$$l_k=\mathcal{B}_\sigma\Big(\frac{f_k}{A'B^{\frac{۲s-۱}{۲m}}}\Big),$$

---
[1] balance

الف) اگر $\{l_\circ,\dots,l_n\}$ روی بازهٔ $(\circ,x_r)$ یک $CT-$دستگاه باشد و $s>m(n-۱)$، آن‌گاه $\{I_\circ,I_۱,\dots,I_n\}$ یک $ECT-$دستگاه روی بازهٔ $(\circ,h_\circ)$ است؛

ب) اگر $\{l_\circ,\dots,l_{n-۱}\}$ روی بازهٔ $(\circ,x_r)$ یک $ECT-$دستگاه باشد، $W[l_\circ,\dots,l_n]$ روی بازهٔ $(\circ,x_r)$ با احتساب تکرار دارای k ریشه باشد و $s>m(n+k-۱)$، آن‌گاه $\{I_\circ,I_۱,\dots,I_n\}$ یک دستگاه چبیشف با دقت k روی بازهٔ $(\circ,h_\circ)$ است.

گاهی شرایط $s>m(n-۱)$ یا $s>m(n+k-۱)$ برقرار نیستند اما می‌توانیم انتگرال‌های آبلی جدیدی بیابیم که در آنها s به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد تا برحسب نیاز در یکی از شرایط فوق صدق کند. فرآیند یافتن این انتگرال‌های آبلی جدید، در لم زیر ارائه می‌شود.

لم ۳.۵. [۱۳] *فرض کنیم γ_h یک بادامی از منحنی تراز $\{A(x)+B(x)y^۲=h\}$ باشد و تابع F چنان باشد که تابع $\frac{F}{A'}$ در $x=\circ$ تحلیلی است. در این صورت، برای هر $k\in\mathbb{N}$ داریم*

$$\int_{\gamma_h}F(x)y^{k-۲}dx=\int_{\gamma_h}G(x)y^kdx$$

که در آن، $G(x)=\frac{۲}{k}\left(\frac{BF}{A'}\right)'(x)-\left(\frac{B'F}{A'}\right)(x)$.

برای مطالعهٔ کاربردهایی از قضیهٔ ۲.۵ برای نمونه، [۱۹، ۲۹] پیشنهاد می‌شود.

۶. محکی برای یکنوایی نسبت دو انتگرال آبلی

مجدداً فرض می‌کنیم انتگرال آبلی (۳.۳) را بتوان به‌صورت $\sum_{k=\circ}^{n}\alpha_kI_k(h)$ نوشت که در آن، برای هر $k=\circ,\dots,n$، α_kها ثابت و I_kها مستقل خطی و به‌شکل (۱.۵) هستند. این حالت را هم‌بُعد $n+۱$ می‌نامیم. حال اگر یکی از I_kها مثلاً $I_\circ(h)$ ناصفر باشد، آن‌گاه قرار می‌دهیم

$$u(h)=\frac{I_۱(h)}{I_\circ(h)},\quad v(h)=\frac{I_۲(h)}{I_\circ(h)}.$$

یکنوایی $u(h)$، یکنوایی $\frac{I(h)}{I_\circ(h)}$ در هم‌بُعد ۲ را نتیجه می‌دهد، زیرا در این حالت داریم

$$\frac{I(h)}{I_\circ(h)}=\alpha_\circ+\alpha_۱\frac{I_۱(h)}{I_\circ(h)}=\alpha_\circ+\alpha_۱u(h).$$

بنابراین اگر $u(h)$ یکنوا باشد، آن‌گاه $I(h)$ در هم‌بُعد ۲ حداکثر یک ریشهٔ یکتا دارد. همچنین اگر یکی از $u(h)$ یا $v(h)$ مثلاً $u(h)$ یکنوا باشد، آن‌گاه تعداد صفرهای $I(h)$ در حالت هم‌بُعد ۳ با تعداد نقاط تقاطع خط راست $\{(u,y)|\ y=\alpha_\circ+\alpha_۱u\}$ و منحنی $\{(u,y)|\ y=-\alpha_۲v(h(u))\}$ در صفحهٔ

uy برابر است که در آن، $h = h(u)$، وارون تابع $u = u(h)$ است. برای اثبات این مطلب، ملاحظه کنید که در این حالت با فرض اینکه $I_0(h) \neq 0$، داریم

$$\frac{I(h)}{I_0(h)} = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{I_1(h)}{I_0(h)} + \alpha_2 \frac{I_2(h)}{I_0(h)} = \alpha_0 + \alpha_1 u(h) + \alpha_2 v(h) = 0.$$

در نتیجه $\alpha_0 + \alpha_1 u(h) = -\alpha_2 v(h)$. بنابراین یکنوایی نسبت دو انتگرال آبلی برای تعیین تعداد صفرهای $I(h)$ در مسئلهٔ شانزدهم هیلبرت ضعیف‌شده، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. لذا پژوهش‌هایی در مورد یافتن روش‌هایی برای اثبات یکنوایی نسبت دو انتگرال آبلی انجام شده است (برای مرور برخی از آنها، مطالعهٔ مقالهٔ [۱] توصیه می‌شود). به‌ویژه در سال ۱۹۹۶ میلادی، لی[1] و ژنگ[2] دو تابع محک که به‌صورت مستقیم توسط توابع ظاهر شده در انتگرال‌های آبلی به‌دست می‌آیند، ارائه دادند که یکنوایی این توابع محک، یکنوایی نسبت دو انتگرال آبلی را نتیجه می‌دهد [۲۰]. گفتنی است که قضیهٔ ۱.۵ در واقع تعمیم محک لی و ژنگ از هم‌بُعد ۲ به هم‌بُعد $n + 1$ است. در سال ۲۰۱۳ لیو[3] و ژائو[4] در [۲۳] یک محک بسیار ساده‌تر و مؤثرتر از محک لی و ژنگ برای یکنوایی نسبت دو انتگرال آبلی ارائه دادند که برخی مسائلی که با روش‌های پیشین قابل بررسی نیستند را می‌توان با استفاده از آن حل کرد. محدودیت این محک نسبت به روش‌های قبل این است که تنها برای دستگاه‌های نیوتنی قابل استفاده است. برای مرور محک اخیر، فرض کنید تابع همیلتونی به‌صورت

$$H(x, y) = y^2 + \Phi(x) \tag{۱.۶}$$

باشد که $\Phi(x)$ در بازهٔ (α, A) شامل صفر، تحلیلی است و برای هر $x \in (\alpha, A) \setminus \{0\}$ داریم

$$x\Phi'(x) > 0. \tag{۲.۶}$$

با توجه به شرط (۲.۶)، نقطهٔ $(0, 0)$ یک مینیمم موضعی برای تابع Φ است. بدون کم شدن از کلیت، فرض کنیم $\Phi(0) = 0$. بنابراین $h_0 > 0$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $h \in (0, h_0)$ منحنی تراز γ_h حول $(0, 0)$ یک مؤلفهٔ فشرده از سطح تراز $\{(x, y) : H(x, y) = h\}$ است. در واقع، اجتماع γ_hها برای $h \in (0, h_0)$ یک طوق تناوبی برای دستگاه نیوتنی

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\Phi'(x) \tag{۳.۶}$$

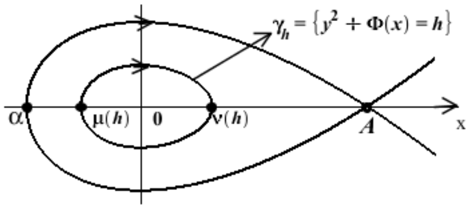
تشکیل می‌دهد. بدون کم شدن از کلیت، فرض می‌کنیم $\Phi(\alpha) = \Phi(A) = h_0$. بنابراین با شرط (۲.۶)، نگاشت‌های $\Phi : (\alpha, a) \longrightarrow (0, h_0)$ و $\Phi : (a, A) \longrightarrow (0, h_0)$ یکنوای اکید هستند و

[1] Li [2] Zhang [3] Liu [4] Xiao

در نتیجه وارون تحلیلی دارند. توابع وارون متناظر را به‌ترتیب با μ و υ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر، برای هر $\circ < h < h_\circ$،

$$\Phi(\mu(h)) \equiv \Phi(\upsilon(h)) \equiv h \quad \text{که} \quad \alpha < \mu(h) < \circ < \upsilon(h) < A.$$

قرار می‌دهیم $U(h) = \mu(h) + \upsilon(h)$. تابع $U(h)$ روی بازهٔ $(\circ, h_\circ)$ تحلیلی است، زیرا حاصل‌جمع



شکل ۲. موقعیت $\mu(h)$ و $\upsilon(h)$

دو تابع تحلیلی است. حال متناظر با (۳.۶)، دستگاه مختل‌شدهٔ

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\Phi'(x) - \varepsilon(\beta_\circ + \beta_\backslash x)y$$

را در نظر می‌گیریم. در این صورت، مسئلهٔ ضعیف‌شدهٔ شانزدهم هیلبرت به یافتن کران بالای تعداد صفرهای منزوی برای $I(h) = \oint_{\gamma_h}(\beta_\circ + \beta_\backslash x)y\,\mathrm{d}x$ تبدیل می‌شود. به‌ویژه اگر قرار دهیم

$$I_\backslash(h) = \oint_{\gamma_h} xy\,\mathrm{d}x, \quad I_\circ(h) = \oint_{\gamma_h} y\,\mathrm{d}x,$$

آن‌گاه $I(h) = \beta_\circ I_\circ(h) + \beta_\backslash I_\backslash(h)$. توجه کنید که بنابر قضیهٔ گرین،

$$I_\circ(h) = \iint_{H(x,y)\leq h} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

و این یعنی $I_\circ(h)$ برابر با مساحت ناحیهٔ محصور درون γ_h و در نتیجه ناصفر است. قرار می‌دهیم

$$P(h) = \frac{I_\backslash(h)}{I_\circ(h)}.$$

اگر نشان دهیم $P(h)$ یکنوا است، آن‌گاه نتیجه می‌شود که کران بالای تعداد صفرهای منزوی $I(h)$ برابر با یک است. در این مورد، محک زیر بسیار سودمند است.

قضیه ۱.۶. [۲۳] *فرض کنیم تابع $H(x,y)$ به‌صورت (۱.۶) و شرط (۲.۶) برقرار است. اگر در بازهٔ $(\circ, h_\circ)$، $U'(h) > \circ$ ($U'(h) < \circ$) آن‌گاه $P'(h) > \circ$ ($P'(h) < \circ$).*

شایان ذکر است که در قضیهٔ اخیر، تابع محک $U(h)=\mu(h)+\upsilon(h)$ است که یکنوایی آن، یکنوایی $P(h)$ را نتیجه می‌دهد. این در حالی است که اگر محک لی و ژنگ را تحت شرایط و نمادهای اخیر بیان کنیم، تابع محک به‌صورت

$$\frac{\mu(h)\Phi'(\upsilon(h))-\upsilon(h)\Phi'(\mu(h))}{\Phi'(\upsilon(h))-\Phi'(\mu(h))}$$

خواهد بود.

اخیراً لیو، چِن[۱] و سان[۲] در [۲۲] تعمیمی از محک قبلی ارائه دادند. برای مرور محک آنها، تابع همیلتونی (۱.۶) را با فرض‌های قبل و همچنین شرط (۲.۶) در نظر می‌گیریم. چون Φ در $x=0$ یک مینیمم موضعی دارد، پس برگردان تحلیلی σ روی (α, A) موجود است که $\Phi(x)=\Phi(\sigma(x))$. حال برای $k=0,1$ انتگرال‌های آبلی $I_k(h)=\oint_{\gamma_h} f_k(x)y\,\mathrm{d}x$ را در نظر می‌گیریم که در آن، $f_k\in C^1(\alpha, A)$ و برای هر $x\in(0, A)$ داریم

$$\frac{f_1(x)}{\Phi'(x)}-\frac{f_1(\sigma(x))}{\Phi'(\sigma(x))}>0.$$

اگر قرار دهیم

$$\xi(x)=\frac{\int_{\sigma(x)}^{x} f_1(t)\mathrm{d}t}{\int_{\sigma(x)}^{x} f_0(t)\mathrm{d}t} \tag{۴.۶}$$

و مانند قبل فرض کنیم $P(h)=\frac{I_1(h)}{I_0(h)}$، آن‌گاه قضیهٔ زیر را داریم:

قضیه ۲.۶. [۲۲] *تحت شرایط اخیر، اگر برای هر $x\in(0, A)$، $\xi'(x)>0$ ($\xi'(x)<0$)، آن‌گاه برای هر $h\in(0, h_0)$، $P'(h)>0$ ($P'(h)<0$).*

در قضیهٔ اخیر تابع محک $\xi(x)$ دارای ضابطهٔ (۴.۶) است که یکنوایی آن، یکنوایی $P(h)$ را نتیجه می‌دهد. این در حالی است که اگر محک لی و ژنگ را تحت شرایط و نمادهای اخیر بیان کنیم، تابع محک به‌صورت

$$\frac{f_1(x)\Phi'(\sigma(x))-f_1(\sigma(x))\Phi'(x)}{f_0(x)\Phi'(\sigma(x))-f_0(\sigma(x))\Phi'(x)}$$

خواهد بود. همچنین محک لیو و ژائو حالت خاص محک اخیر است، زیرا اگر در (۴.۶) قرار دهیم $f_0(x)=1$ و $f_1(x)=x$، آن‌گاه $\xi(x)=\frac{1}{2}(x+\sigma(x))$ که نصف تابع محک لیو و ژائو است.

به‌عنوان یک کاربرد از قضیهٔ ۲.۶، مثال سادهٔ زیر را بررسی می‌کنیم.

---

[۱] Chen [۲] Sun

مثال ۳.۶. متناظر با تابع همیلتونی $H(x,y)=\frac{۱}{۲}y^۲+\Phi(x)$ که $\Phi(x)=\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۳}{۳}$، دستگاه

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-\Phi'(x)=x(x-۱)$$

داری یک مرکز در مبدأ مختصات، یک زین هذلولوی در $(۱,۰)$ و یک خانوادهٔ پیوسته از مدارهای تناوبی $\gamma_h=\{(x,y)|H(x,y)=h\}$ برای $h\in(۰,\frac{۱}{۶})$ است. تصویر این طوق تناوبی بر محور x بازهٔ $(-\frac{۱}{۲},۱)$ است. همچنین برگردان تحلیلی $\sigma:(-\frac{۱}{۲},۱)\to(-\frac{۱}{۲},۱)$ موجود است که $\Phi(x)=\Phi(\sigma(x))$. حال برای $k=۰,۱$ انتگرال‌های آبلی $I_k(h)=\oint_{\gamma_h}x^k y\,\mathrm{d}x$ را در نظر می‌گیریم. بنابر قضیهٔ ۲.۶، برای اثبات یکنوایی $P(h)=\frac{I_۱(h)}{I_۰(h)}$ روی بازهٔ $(۰,\frac{۱}{۶})$، کافی است نشان دهیم که تابع

$$\xi(x)=\frac{\int_{\sigma(x)}^{x}t\mathrm{d}t}{\int_{\sigma(x)}^{x}۱\mathrm{d}t}=\frac{۱}{۲}(x+\sigma(x))$$

بر بازهٔ $(۰,۱)$ یکنوا است. با توجه به $\Phi(x)=\Phi(\sigma(x))$، داریم $\sigma'(x)=\frac{\Phi'(x)}{\Phi'(\sigma(x))}$ و در نتیجه $۲\xi'(x)=۱+\frac{\Phi'(x)}{\Phi'(\sigma(x))}$. حال نشان می‌دهیم که $\xi'(x)$ بر $(۰,۱)$ مثبت است. به این منظور، تابع $g(x)=۲\Phi(x)-(\Phi'(x))^۲$ را در نظر می‌گیریم. برای هر $x\in(-\frac{۱}{۲},۱)$ داریم

$$g'(x)=۲\Phi'(x)-۲\Phi'(x)\Phi''(x)=۴x^۲(۱-x)>۰$$

و چون روی $(۰,۱)$، $-\frac{۱}{۲}<\sigma(x)<۰<x<۱$ پس $g(x)<g(\sigma(x))$؛ یعنی

$$۲\Phi(\sigma(x))-(\Phi'(\sigma(x)))^۲<۲\Phi(x)-(\Phi'(x))^۲.$$

از آنجا که $\Phi(x)=\Phi(\sigma(x))$، پس $|\Phi'(\sigma(x))|>|\Phi'(x)|$ و در نتیجه $\xi'(x)>۰$.

این مقاله صرفاً مروری بر بخش کوچکی از پژوهش‌های برجستهٔ اخیر در رابطه با مسئلهٔ ضعیف‌شدهٔ شانزدهم هیلبرت است و هدف اصلی آن، روشن شدن وضعیت فعلی این مسئله است که می‌تواند به آشنایی هرچند جزئی خوانندگان با یکی از فعال‌ترین زمینه‌های پژوهشی در دستگاه‌های دینامیکی منجر شود.

سپاسگزاری: نگارنده از داوران محترم مقاله که نظرات ارزندهٔ آنها موجب بهبود مقاله شد و همچنین از سردبیر محترم فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، جناب آقای دکتر روح‌الله جهانی‌پور و دیگر اعضای هیئت تحریریه، برای تلاش‌های صادقانهٔ آنها در ترویج علوم ریاضی، تشکر و قدردانی می‌نماید.

مراجع

[۱] الهی، د.، ظهوری زنگنه، ح.، ارتباط مسئلهٔ ۱۶ هیلبرت با انتگرال‌های آبلی و چند روش برای بررسی یکنوایی نسبت دو انتگرال آبلی، *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی*، سال ۲۳، شمارهٔ ۳۲ (بهار ۱۳۸۳)، ۳۱–۴۴.

[۲] ظهوری زنگنه، ح.، عاشقی، ر.، ۲۳ مسئلهٔ هیلبرت و نگاهی به مسئلهٔ شانزدهم آن، *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی*، سال ۲۴، شمارهٔ ۳۴ (بهار ۱۳۸۴)، ۳۳–۴۷.

[۳] ظهوری زنگنه، ح.، عطابیگی، ع.، روش‌های تخمین تعداد صفرهای انتگرال آبلی، *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی*، سال ۲۸، شمارهٔ ۴۲ (پاییز ۱۳۸۷)، ۷۵–۸۹.

[4] Bamon, R., The solution of Dulac's problem for quadratic vector fields, *Ann. Acad. Bros. Ciênc.*, **57** (1985), 111–142.

[5] Chen, L. S., Wang, M. S., The relative position and the number of limit cycles of a quadratic differential system, *Acta Math. Sinica*, **22** (1979), 751–758.

[6] Christopher, C., Li, C., *Limit Cycles of Differential Equations*, Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[7] Dumortier, F., Li, C., Zhang, Z., Unfolding of a quadratic integrable system with two centers and two unbounded heteroclinic loops, *J. Differential Equations*, **139** (1997), 146–193.

[8] Dulac, H., Sur les cycles limites, *Bull. Soc. Math. France*, **51** (1923), 45–188.

[9] Ecalle, J., *Introduction aux Fonctions Analysables et Preuve Constructive de la Conjecture de Dulac* (French), Hermann, Paris, 1992.

[10] Gasull, A., Lázaro,J. T., Torregrosa, J., On the Chebyshev property for a new family of functions, *J. Math. Anal. Appl.*, **387** (2012), 631–644

[11] Gautier, S., Gavrilov, L., Iliev, I., Perturbations of quadratic centers of genus one, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **25** (2009), no. 2, 511–535.

[12] Gavrilov, L., The infinitesimal 16th Hilbert problem in the quadratic case, *Invent. Math.*, **143** (2001), 449–497.

[13] Grau, M., Mañosas, F., Villadelprat, J., A Chebyshev criterion for Abelian integrals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **363** (2011), 109–129.

[14] Han, M., Li, J., Lower bounds for the Hilbert number of polynomial systems, *J. Differential Equations*, **252** (2012), 3278–3304.

[15] Horozov, E., Iliev, I., On the number of limit cycles in perturbations of quadratic Hamiltonian systems, *Proc. London Math. Soc.*, **69** (1994), 198–224.

[16] Ilyashenko, Y., Centennial history of Hilbert's 16th problem, *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.), **39** (2002), no. 3, 301–354.

[17] Ilyashenko, Y., *Finiteness Theorems for Limit Cycles*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.

[18] Karlin, S., Studden, W., *Tchebycheff Systems: with Applications in Analysis and Statistics*, Interscience Publishers, 1966.

[19] Kazemi, R., Zangeneh, H. R. Z., Bifurcation of limit cycles in small perturbations of a hyper-elliptic Hamiltonian system with two nilpotent saddles, *J. Appl. Anal. Comput.*, **2** (2012), no. 4, 395–413.

[20] Li, C., Zhang, Z., A criterion for determining the monotonocity of the ratio of two Abelian integrals, *J. Differential Equations*, **124** (1996), 407–424.

[21] Llibre, J., Rodrıguez, G., Configuration of limit cycles and planar polynomial vector fields, *J. Differential Equations*, **198** (2004), 374–380.

[22] Liu, C., Chen, G., Sun, Z., New criteria for the monotonicity of the ratio of two Abelian integrals, *J. Math. Anal. Appl.*, **465** (2018), no. 1, 220–234.

[23] Liu, C., Xiao, D., The monotonicity of the ratio of two Abelian integrals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **365** (2013), no. 10, 5525–5544.

[24] Mañosas, F., Villadelprat, J., Bounding the number of zeros of certain Abelian integrals, *J. Differential Equations*, **251** (2011), 1656–1669.

[25] Petrovski, I. G., Landis, E. M., On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, where P and Q are polynomials of 2nd degree, *Mat. Sb. N.S.*, **79** (1955), 209–250.

[26] Petrovski, I. G., Landis, E. M., On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, where P and Q are polynomials (Russian), *Mat. Sb. N.S.*, **85** (1957), 149–168.

[27] Pontryagin, L., On dynamical systems close to Hamiltonian ones, *Zh. Exp. & Theor. Phys.*, **4** (1934), 234–238.

[28] Shi, S. L., A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems, *Sci. Sinica*, **23** (1980), 153–158.

[29] Sun, X., Xi, H., Zangeneh, H. R. Z., Kazemi, R., Bifurcation of limit cycles in small perturbation of a class of Liénard systems, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **24** (2014), no. 1, 1450004, 23 pp.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۸/۵/۲۷؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۷/۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۷/۵

رسول کاظمی: دانشگاه کاشان، دانشکدهٔ علوم ریاضی

تارنما: https://faculty.kashanu.ac.ir/rkazemi/fa

رایانامه: r.kazemi@kashanu.ac.ir