فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۰، شمارهٔ ۶۸ (بهار و تابستان ۱۴۰۰) صص. ۱۵۷ تا ۱۷۱

مروری بر تاریخچهٔ آنالیز تابعی

مسعود امینی و حسن پورمحمد

چکیده

در این مقاله، تاریخچهٔ آنالیز تابعی با نگاهی به مهم‌ترین دستاوردهایی که از ۱۶۸۷ تا ۱۹۴۵ این نظریه را شکل داده‌اند، مرور شده است. هدف مقاله معرفی ریشه‌ها و انگیزه‌های تاریخی پیدایش مفاهیم و نتایج آنالیز تابعی کلاسیک است. از پرداختن به مباحث آنالیز تابعی جدید (نیمهٔ دوم قرن بیستم) پرهیز شده است. این مقاله بر مبنای کتاب *تاریخچهٔ آنالیز تابعی*، اثر مشهور ژان دیودونه، تنظیم شده است.

۱. سرآغاز

نقطهٔ آغازین آنالیز تابعی را باید انتشار کتاب تاریخ‌ساز نیوتن[۱] تلقی کرد. آیزاک نیوتن کتاب مشهورش، *اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعی*، را در سال ۱۶۸۷ منتشر کرد [۵۹]. نقطهٔ پایان آنالیز تابعی کلاسیک را نیز می‌توان کار بنیادین لوران شوارتس[۲] روی نظریهٔ توزیع‌ها در سال ۱۹۴۵ قلمداد کرد (بخش ۶ را ببینید). نام **آنالیز تابعی** در سال ۱۹۲۲ توسط پل لوی[۳] ابداع شد [۵۵]. از میان آثاری که آنالیز تابعی را شکل دادند، موارد زیر اهمیت تاریخی دارند: رسالهٔ دکتری آنری لبگ[۴] در نظریهٔ انتگرال (۱۹۰۲) [۵۲]، مقالهٔ هیلبرت دربارهٔ نظریهٔ طیفی (۱۹۰۶) [۴۳]، رسالهٔ دکتری موریس رنه فرشه[۵] در زمینهٔ فضاهای متری (۱۹۰۶) [۲۵]، مقالات فریدیِش ریس[۶] در فضاهای باناخ کلاسیک (۱۹۰۱–۱۹۱۱) [۷۱]، رسالهٔ دکتری استفان باناخ[۷] دربارهٔ فضاهای نرمدار (۱۹۲۲) [۴] و مقالات هانس هان[۸] و باناخ در زمینهٔ دوگانی (مستقلاً در ۱۹۲۷ و ۱۹۲۹) [۴۰، ۵]. این پیشرفت‌ها با کتاب‌های فرشه (۱۹۲۸) [۲۷] و باناخ (۱۹۳۲) [۶] تکمیل شد.

---

[۱]Isaac Newton [۲]Laurent Schwartz [۳]Paul Lévy [۴]Henri Lebesgue [۵]Maurice René Fréchet
[۶]Frigyes Riesz [۷]Stefan Banach [۸]Hans Hahn

© ۱۴۰۰ (انجمن ریاضی ایران)

تاریخ آنالیز تابعی کلاسیک آکنده از تلاش برای درک، حل و تحلیل معادلات دیفرانسیل است. دلیل این امر، اهمیت بالایی است که ریاضیدانان عصر روشنگری به درک و تفسیر طبیعت و روش‌های تجربی می‌دادند. آغاز این پژوهش‌ها را می‌توان در حوزهٔ نجوم در انتشار آثار کپلر[۱] (در ۱۶۰۹ و ۱۶۱۹) و گالیله[۲] (در ۱۶۳۲ و ۱۶۳۸) دانست. در ریاضیات کارهای پیشگامانی چون کاوالیری[۳]، روبروال[۴] و فرما[۵] مقدمهٔ کار تاریخ‌ساز نیوتن و لایب‌نیتس[۶] بود. در ادامه شاهد تحوّلاتی هستیم که همگی دربارهٔ مسائل مربوط به معادلات دیفرانسیل و انتگرال است. ژوزف فوریه[۷] در کتاب *نظریهٔ تحلیلی گرما* به سال ۱۸۲۲، اولین مثال را از آنچه مسئله تبدیل (وارون) فوریه نامیده می‌شود، بررسی کرد [۲۳]. تقریباً همزمان، نیلس هنریک آبل[۸] جوابی از مسئله همزمانی ارائه داد که به شکل یک معادله انتگرالی بود [۱]. در یک صورت‌بندی عمومی‌تر، ژوزف لیوویل[۹] در پژوهش‌های خود دربارهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی از مرتبهٔ دوم (۱۸۳۷)، مسئله را به بررسی معادلات انتگرالی خاص تبدیل کرد [۵۶]. اولین بررسی دقیق نظریهٔ عمومی معادلات انتگرالی در حدود سال‌های (۱۹۰۰–۱۹۰۳) توسط اریک ایوار فردهلم[۱۰] انجام شد [۲۸، ۲۹]. داوید هیلبرت[۱۱] به این نظریهٔ جدید علاقه‌مند شد و در فاصلهٔ سال‌های ۱۹۰۴ تا ۱۹۰۶، پنج مقاله در این زمینه منتشر کرد [۴۳].

مقالهٔ حاضر توصیفی موجز از پیدایش ریشه‌ها و انگیزه‌های مفاهیم آنالیز تابعی تا سال ۱۹۴۵ ارائه می‌کند. به نظر می‌رسد تا این سال، عمدهٔ مفاهیم کلاسیک آنالیز تابعی شکل گرفته‌اند. برای اطلاع از پیشرفت‌های بعدی آنالیز تابعی، خواننده می‌تواند به [۶۳، ۶۲] مراجعه کند. اساس مقالهٔ حاضر، کتاب معروف ژان دیودونه[۱۲] [۱۷] است که در بخش‌های مهمی از آن (به‌ویژه بخش مربوط به در قرن هیجدهم)، از کتاب بِرکُف[۱۳] [۱۰] ایده گرفته شده است.

۲. اواخر قرن هیجدهم (۱۷۶۰–۱۸۰۰)

تا اواسط قرن هیجدهم، درک درستی از مفهوم تابع یک‌متغیره وجود نداشت. تصوّر می‌شد که در همسایگی هر نقطه مانند $x_\circ$ تابع با یک سری توانی حول $x_\circ$ قابل نمایش است. برای حل یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی از مرتبهٔ n مانند

$$y^{(n)} = F(x, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)})$$

ضابطهٔ $y = \sum_{k=\circ}^{\infty} c_k (x - x_\circ)^k$ جایگذاری می‌شد تا با به‌دست آمدنِ ضرایب سری توانی c_k، معادلهٔ دیفرانسیل حل شود. در سال‌های دههٔ ۱۷۶۰ ژان دالامبر[۱۴] مشاهده کرد که اگر L یک عملگر دیفرانسیلی

[۱] Johannes Kepler [۲] Galileo Galilei [۳] Bonaventura Cavalieri [۴] Gilles de Roberval [۵] Pierre de Fermat [۶] Gottfried Wilhelm Leibniz [۷] Joseph Fourier [۸] Niels Herik Abel [۹] Joseph Liouville [۱۰] Erik Ivar Fredholm [۱۱] David Hilbert [۱۲] Jean Dieudonné [۱۳] Garret Birkhoff [۱۴] Jean d’Alembert

خطی باشد، همهٔ جواب‌های معادلهٔ دیفرانسیل $L(y) = b(x)$ با داشتن جواب‌های معادلهٔ $L(y) = 0$ (جواب عمومی) و یک جواب از معادلهٔ $L(y) = b(x)$ (جواب خاص) به‌دست می‌آیند. در همان دوره، ژوزف لویی لاگرانژ[۱] با استفاده از روش تغییر ثابت‌ها[۲] همراه با به‌کارگیریِ دستور کرامر[۳]، موفق شد معادلهٔ $L(y) = 0$ را حل کند ([۵۰]، جلد چهارم، ص. ۱۵۹). لاگرانژ همچنین مفهوم الحاقی یک عملگر دیفرانسیلی خطی را معرفی کرد ([۵۰]، جلد اول، ص. ۴۷۱).

مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ اول توسط لئونهارت اویلر[۴] و لاگرانژ در سال‌های پس از ۱۷۷۰ شروع شد. پل شارپی[۵] و گاسپار مونژ[۶] مسئله حل یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی از مرتبهٔ اول را به حل دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل کردند. این روش بعدها توسط آگوستین لویی کُشی[۷] توسعه پیدا کرد. برای کسب اطلاعات بیشتر، فصل پنجم از [۸۳] و فصل دهم از [۱۰] را بخوانید.

یکی از اولین معادله‌های دیفرانسیل با مشتقات جزئی کاربردی، معادلهٔ تار مرتعش

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

بود که در سال ۱۷۴۷ توسط دالامبر بررسی شد [۱۶]. در سال ۱۷۱۵ بروک تیلر[۸] جوابی برحسب توابع سینوس و کسینوس برای معادلهٔ موج پیدا کرد [۸۵] ولی دانیل برنویی[۹] در سال ۱۷۵۳ پیشنهاد کرد که جواب عمومی مسئله به‌ازای مقدارهای مناسب a_k و ϑ_k با یک سری مثلثاتی به‌شکل

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \cos kc(t-\vartheta_k)$$

داده می‌شود [۹]. همان‌طور که اویلر (۱۷۵۳) اشاره می‌کند، باور عمومی ریاضیدانان در آن زمان بر این بود که هر جواب به شکل سری مثلثاتی، یک تابع تحلیلی است [۱۹].

پی‌یر سیمون لاپلاس[۱۰] اولین تلاش‌ها برای رده‌بندی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه‌دو به معادلات بیضوی و هذلولی را انجام داد ([۵۱]، جلد نهم، صص. ۲۱–۲۸). وی همچنین مشاهده کرد (۱۷۸۲، ۱۷۸۵) که اگر V یک مادهٔ جامد با چگالی ρ و x نقطه‌ای خارج از V با فاصلهٔ r باشد، آن‌گاه میانگین $u = \rho/r$ جوابی از معادلهٔ لاپلاس است، یعنی

$$\triangle u = 0 \;(\text{خارج } V)$$

([۵۱]، صص. ۳۶۱–۳۶۳ از جلد دهم و صص. ۲۷۶–۲۸۰ از جلد یازدهم). در سال ۱۸۱۳ سیمون پواسن[۱۱] مشاهده کرد که اگر ρ پیوسته باشد، این میانگین در درون V معنی‌دار است و به‌علاوه u در معادلهٔ

[۱] Joseph Louis Lagrange [۲] method of variation of constants [۳] Cramer rule [۴] Leonhard Euler [۵] Paul Charpit [۶] Gaspard Monge [۷] Augustin Louis Cauchy [۸] Brook Taylor [۹] Daniel Bernoulli [۱۰] Pierre Simon Laplace [۱۱] Siméon Denis Poisson

پواسن

$$\triangle u + ۴\pi\rho = ۰ \ (V \text{ درون})$$

صدق می‌کند [۶۶].

۳. اوایل قرن نوزدهم (۱۸۰۰–۱۸۴۰)

در سال ۱۸۲۲ ژوزف فوریه دستور محاسبهٔ ضرایب سری مثلثاتی تابع f را با استفاده از رابطه‌های انتگرالی

$$a_k = \frac{۱}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx, \qquad b_k = \frac{۱}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx$$

به‌دست داد [۲۳]؛ البته قبلاً کلرو[۱] و اویلر این دستور را در حالت‌های خاص به‌دست آورده بودند. فوریه حدس زد که سری فوریه وابسته به تابع f در نقطهٔ $x_۰$ به مقدار $\frac{۱}{۲}[f(x_۰^+) + f(x_۰^-)]$ همگرا می‌شود. کُشی سعی کرد تا این حدس را ثابت کند امّا اولین برهان این ادعا در حالت خاص مربوط به یک تابع (تکه‌ای) یکنوا و پیوسته در سال ۱۸۲۹ توسط پیتر گوستاو دیریکله[۲] به‌دست آمد [۱۸]. فوریه با نشان دادن اولین مثال از جهش[۳] ویژه‌مقدارها و روابط تعامد، پیدایش نظریهٔ طیفی را رقم زد [۲۳]. پیدایش نظریهٔ پتانسیل با کار جرج گرین[۴] (۱۸۲۸) بر شرایط مرزی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی رقم خورد که به ابداع مفهوم توابع گرین منجر شد ([۳۷]، جلد پنجم، صص. ۱۹۷–۲۴۲). سرانجام، نتایج فوریه و پواسن به پیدایش یک نظریهٔ عمومی برای ویژه‌مقدارها و ویژه‌تابع‌ها توسط ژاک شارل فرانسوا استورم[۵] (۱۸۳۶) و ژوزف لیوویل (۱۷۳۷) منجر شد [۸۴، ۵۶].

۴. اواخر قرن نوزدهم (۱۸۴۰–۱۹۰۰)

تا اواسط قرن نوزدهم نتایج پراکنده‌ای دربارهٔ معادلات دیفرانسیلی معمولی و با مشتقات جزئی وجود داشت. برای نمونه می‌توان از قضیهٔ کُشی دربارهٔ وجود و یکتایی موضعیِ جواب‌های معادلات دیفرانسیل معمولی، روش کُشی (جواب‌های تحلیلی) و نتایج کُشی و سوفیا کوالفسکایا[۶] در مورد جواب دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب تحلیلی (که به‌نام قضیهٔ کُشی–کوالفسکایا شناخته می‌شود) نام برد.

در دههٔ ۱۸۴۰ کارل فریدریش گاوس[۷] پژوهش در زمینهٔ مغناطیس را به پایان برد که در آن، به بیانی از دستور گرین و دیگر نتایج در نظریهٔ پتانسیل دست یافت ([۳۱]، جلد پنجم، صص. ۱۹۷–۲۴۲). گاوس برخی روش‌های دقیق در حساب تغییرات را توسعه داد که او را به شکلی از مسئله دیریکله هدایت کرد.

[۱] Alexis Claude Clairaut [۲] Peter Gustav Lejeune Dirichlet [۳] blow-up [۴] George Green [۵] Jacques Charles François Sturm [۶] Sofia Kovalevskaya [۷] Carl Friedrich Gauss

بعدها برنهارت ریمان[۱] سعی کرد استدلال دیریکله را در حالت دو متغیره به کار گیرد، مبحثی که ریمان آن را «اصل دیریکله» نامگذاری کرد ([۶۹]، ص. ۹۷). وجود جواب‌های مسئلهٔ دیریکله برای معادلهٔ لاپلاس توسط کارل هرمان شوارتس[۲] (۱۸۷۰)، کارل گوتفریت نویمان[۳] (۱۸۷۷) و ژول آنری پوانکاره[۴] (۱۸۸۷) نشان داده شد. روش شوارتس و پوانکاره بر این اساس بود که جواب‌های معادله در دامنه‌های کلی با جواب‌های آن در دامنه‌های خاص (چندضلعی‌ها) تقریب زده شود ([۷۵]، جلد دوم، صص. ۱۳۳–۲۱۰ و [۶۵]، جلد نهم، صص. ۳۳–۵۴). امّا کارهای نویمان (و آگوست بِر[۵]) بر مفهومی استوار بود که اکنون یک «معادلهٔ انتگرالی فردهلم از نوع دوم» نامیده می‌شود. این اولین مثال از «جواب ضعیف» برای یک مسئلهٔ مقدار مرزی بود [۵۸، ۸].

در سال ۱۸۷۰ کارل وایرشتراس[۶] بیان کرد که در رهیافت وجودی برای مسائل حساب تغییرات (برای مثال در کارهای لُرد کلوین[۷]، دیریکله و ریمان) فرض‌هایی بدون اثبات به‌کار گرفته شده‌اند که او نمی‌تواند صحّت آنها را تأیید کند ([۱۰]، صص. ۳۹۰–۳۹۱). اثبات درستیِ این فرض‌ها در سال ۱۸۹۹ توسط هیلبرت انجام شد ([۴۳]، جلد سوم، صص. ۱۰–۳۷). همچنین در برخی از استدلال‌ها ایرادهایی وجود داشت؛ برای مثال در برخی از کارهای نویمان که بعدها در سال ۱۹۳۷ توسط لبگ اصلاح شد ([۵۳]، جلد چهارم، صص. ۱۵۱–۱۶۶).

برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی از دستورهای کرامر استفاده می‌شد. برای تبدیل یک دستگاه معادلات به دستگاهی دیگر، تبدیل خطی معادلات به‌شکل

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$$

به‌کار گرفته می‌شد. در حدود سال‌های ۱۸۵۰ این تغییر خطیِ متغیرها با به‌کارگیری ایده‌ای از گاوس توسط جیمز جوزف سیلوستر[۸] و آرتور کیلی[۹] صورت‌بندی شد و به این ترتیب، نظریهٔ ماتریس‌ها شکل گرفت. کیلی و ویلیام روان همیلتون[۱۰] بیان هندسی را وارد جبرخطی کردند (در آن زمان، هندسه‌دانان آن را «هندسهٔ تصویری»[۱۱] می‌نامیدند). روش‌های جبرخطی مابین سال‌های ۱۸۵۰ تا ۱۸۸۰ توسط کامی ژوردان[۱۲]، هرمان گراسمان[۱۳] [۳۶] و فردیناند گئورگ فروبنیوس[۱۴] ([۳۰]، جلد اول، صص. ۳۴۳–۴۰۵) توسعه یافت. فرم‌های نرمال ژوردان توسط وایرشتراس (روی میدان اعداد مختلط) و ژوردان (روی میدان‌های متناهی) کشف شد ([۴۶]، صص. ۱۱۴–۱۲۶).

---

[۱] Bernhard Riemann [۲] Karl Hermann Schwarz [۳] Carl Gottfried Neumann [۴] Jules Henri Poincaré
[۵] August Beer [۶] Karl Weierstrass [۷] Lord Kelvin [۸] James Joseph Sylvester [۹] Arthur Cayley
[۱۰] William Rowan Hamilton [۱۱] projective geometry [۱۲] Camille Jordan [۱۳] Hermann Grassmann
[۱۴] Ferdinand Georg Frobenius

مفهوم «دوگانی» در هندسهٔ تصویری شناخته‌شده بود ولی جبرخطی برای بررسی دوگانی در ابعاد نامتناهی آمادگی کافی نداشت. اولین مثال از دستگاه نامتناهی از معادلات خطی در کار فوریه روی نظریهٔ انتقال حرارت ظاهر شد (البته مسئلهٔ همگرایی در اینجا کاملاً نادیده گرفته شده بود). پوانکاره با دنبال کردن کار جورج ویلیام هیل[۱] در ماه‌شناسی [۴۵]، مسئلهٔ همگرایی را با استفاده از دترمینان‌های نامتناهی برای حل دستگاه نامتناهی $y_j = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}x_i$ مورد بررسی قرار داد ([۶۵]، جلد پنجم، صص. ۹۵–۱۰۷).

جدا از جبرخطی (نامتناهی‌بُعد)، جای توپولوژی نیز در پژوهش‌ها خالی می‌نمود. ریمان نخستین کسی بود که به رده‌ای از توابع یک ساختار هندسی (یک توپولوژی به‌معنای مدرن) نسبت داد. او در رسالهٔ دکتری خود در سال ۱۸۵۱ از مجموعهٔ توابعی که انتگرال دیریکله برای آنها قابل محاسبه باشد، با عنوان «یک دامنهٔ همبند و بسته در خود» یاد کرده است ([۶۹]، ص. ۳۰). تفاوت میان همگراییِ نقطه‌وار و همگراییِ یکنواخت در حدود سال‌های ۱۸۵۰ در مکتب ایتالیایی (اولیسه دینی[۲]، جولیو آسکولی[۳] و چزاره آرزلا[۴]) شناخته شده بود. آسکولی در سال ۱۸۸۳ مفهوم پیوستگیِ یکنواخت را به‌کار گرفت تا دنباله‌هایی از توابع پیوسته را بررسی کند که به‌صورت نقطه‌وار به یک تابع ناپیوسته همگرا می‌شوند [۲]. در سال ۱۹۰۰ هیلبرت با استفاده از حالت خاصی از قضیهٔ آرزلا–آسکولی (که مستقلاً به‌دست آورده بود) موفق شد درستیِ استفاده ریمان از اصل دیریکله را ثابت کند ([۴۳]، جلد سوم، صص. ۱۰–۱۴).

در سال ۱۸۸۳ یورگن پدرسن گرام[۵] و پوانکاره همگرایی در میانگین مرتبهٔ دوم را برای مطالعهٔ بسط‌های فوریه به‌کار گرفتند [۳۵، ۶۵]. در سال ۱۸۸۶ سالواتوره پینکرله[۶] یکی از اولین مثال‌ها از عملگرها بر روی فضاهای تابعی (یک عملگر انتگرالی با یک هسته روی فضای توابع برخه‌ریخت) را مطالعه کرد ([۶۴]، جلد اول، صص. ۹۲–۱۴۱). پینکرله اولین کسی است که تناظر بین اَبَرصفحه‌ها و هسته‌های فرم‌های خطی پیوسته را مطرح کرد ([۶۴]، جلد اول، ص. ۳۹۵). همچنین مفهوم عملگر الحاقی را که توسط لاگرانژ بیان شده بود، توسعه داد ([۶۴]، جلد دوم، صص. ۷۷–۸۴). در سال ۱۸۹۷ کارلو بورله[۷] تمامی عملگرهای خطی روی توابع برخه‌ریخت روی یک قرص (با توپولوژی همگرایی یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده) را به‌صورت عملگرهای انتگرالی پینکرله رده‌بندی کرد [۱۱]. ویتو ولترا[۸] در سال ۱۸۸۷ تابعک‌های خطی پیوسته روی فضای توابع مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته را (به‌عنوان مسئله‌ای از حساب تغییرات) مورد بررسی قرار داد ([۸۷]، جلد اول، صص. ۲۹۴–۳۱۴).

۵. اوایل قرن بیستم (۱۹۰۰–۱۹۱۰)

نتایج اریک فردهلم در فاصلهٔ سال‌های ۱۹۰۰ تا ۱۹۰۳ اولین مثال‌ها از یک معادلهٔ انتگرالی عمومی هستند. در چارچوب این نظریه، او دترمینان‌ها و جایگزین‌های فردهلم را معرفی کرد [۲۸، ۲۹]. هیلبرت

[۱] George William Hill [۲] Ulisse Dini [۳] Giulio Ascoli [۴] Cesare Arzelà [۵] Jørgen Pedersen Gram
[۶] Salvatore Pincherle [۷] Carlo Bourlet [۸] Vito Volterra

بین سال‌های ۱۹۰۴ تا ۱۹۰۶ نتایج مطالعاتش را دربارهٔ معادلات انتگرالی منتشر کرد که در آنها بسط توابع نسبت به توابع متعامد مشخصی را به‌کار گرفته بود. این مقاله‌ها بعدها در یک کتاب مستقل منتشر شد [۴۴]. شاگرد هیلبرت، ارهارد اشمیت[۱]، در رسالهٔ دکتری خود (۱۹۰۵) ثابت کرد که این بسط در میانگین مرتبهٔ دوم برای هر تابع (پیوسته‌ای) معتبر است [۷۲]. در سال ۱۹۰۶ هیلبرت مفاهیم همگرایی قوی و ضعیف را در فضاهای (دنباله‌ای) هیلبرت به‌کار گرفت و اشاره‌ای ضمنی به فشردگی ضعیف گوی یکه داشت که خود، آن را قاعدهٔ انتخاب[۲] می‌نامید ([۴۴]، صص. ۱۰۹–۱۷۳).

تا اینجا همهٔ ملاحظات توپولوژیک در مورد برخی مجموعه‌های شناخته‌شده (مانند توابع، خم‌ها و ...) بودند. اولین مثال از توپولوژی روی مجموعه‌های دلخواه، در کار فرشه در سال‌های ۱۹۰۴ تا ۱۹۰۶ ظاهر شدند و او مفهوم فضای متری را تعریف کرد [۲۴]. فرشه خود را به استخراج قضیه‌های کلی در چارچوب مجرد محدود نکرد، بلکه بیش از نیمی از رسالهٔ دکتری او دربارهٔ «فضاهای متری خاص» است که در ارتباط نزدیک با آنالیز بودند. او فشردگی، کامل‌بودن و جدایی‌پذیریِ این فضاها را بررسی کرد [۲۵].

فضای هیلبرت توابع مربع–انتگرال‌پذیر در سال‌های ۱۹۰۶ و ۱۹۰۷ به‌طور مستقل توسط ارنست زیگیزمونت فیشر[۳] و فریدیِش ریس مطالعه شد ([۲۱، ۲۲] و [۷۱]، جلد اول، صص. ۳۷۸–۳۹۵). برخلاف فردهلم و اشمیت که مأیوسانه سعی در استفاده از انتگرال ریمان داشتند [۲۸، ۷۲]، ریس و فیشر مفهوم تازه ابداع‌شدهٔ انتگرال لبگ را به‌کار گرفتند. در سال ۱۹۱۰ ریس فضاهای L^p و دوگان آنها را (بدون استفاده از عبارت‌های جدید) معرفی کرد ([۷۱]، جلد اول، صص. ۴۹۷–۴۴۱). فضاهای دنباله‌ای ℓ^p در کتاب او در سال ۱۹۱۳ معرفی شدند [۷۰]. البته ریس این فضاها را برای $p > ۱$ در نظر گرفت. بررسی حالت $p = ۱$ توسط هوگو اشتاین‌هاوس[۴] در سال ۱۹۱۹ انجام شد [۷۷]. کتاب ریس قضیهٔ مشهور نمایش ریس برای فرم‌های دوخطی و علاوه بر آن، مفاهیم مهمی نظیر توپولوژی عملگری قوی و حساب تابعی (پیوسته و برخه‌ریخت) را دربرداشت [۷۰]. ریس در دو مقاله که ابتدا به زبان مجاری در سال ۱۹۱۶ و سپس به آلمانی در ۱۹۱۸ منتشر شدند، ایدهٔ هیلبرت را در مورد فرم‌های دوخطی، تکامل بخشید تا عملگرهای کاملاً پیوسته را تعریف کند. ریس به این ترتیب، مفهوم جایگزین فردهلم را به نظریه‌ای کامل تبدیل کرد که اکنون نظریهٔ ریس–فردهلم برای عملگرهای فشرده نام دارد ([۷۱]، جلد دوم، صص. ۱۰۱۷–۱۰۵۲ و ۱۰۵۳–۱۰۸۰).

به نظر می‌رسد که ریس ایده‌هایی در مورد مفهوم مجرد فضای نُرمدار داشت ([۷۱]، جلد اول، ص. ۴۵۲) امّا این مفهوم، نخست در سال ۱۹۲۲ در کار ادوارد هلی[۵] پدیدار شد [۴۲]. البته نرم برای فضاهایی مانند ℓ^p، L^p و فضای توابع پیوسته $C[a,b]$ تعریف شده بود، ولی به نظر می‌رسد که هلی اولین کسی بود که به ارتباط بین نُرم و تحدّب که قبلاً در سال ۱۸۹۶ توسط هرمان مینکوفسکی[۶] [۵۷] معرفی شده بود،

[۱] Erhard Schmidt [۲] principle of choice [۳] Ernst Sigismund Fischer [۴] Hugo Steinhaus [۵] Eduard Helly [۶] Hermann Minkowski

توجه کرد. با پیروی از ریس و هلی، فضاهای نرمدار کامل توسط هانس هان [۳۹] (۱۹۲۲) و استفان باناخ (۱۹۲۳) [۴] مورد مطالعه قرار گرفتند. قضیهٔ هان–باناخ پاسخی به مسئلهٔ توسیع هلی [۴۱] بود که توسط هان (۱۹۲۷) [۴۰] و باناخ [۵] (۱۹۲۹) تکمیل شد. باناخ و اشتاین‌هاوس در سال ۱۹۲۷ اصل کرانداری یکنواخت را با استفاده از قضیهٔ رسته ویلیام فوگ آزگود[۱] (۱۸۹۷) [۶۰] و رنه بئر[۲] (۱۸۹۹) [۳] ثابت کردند [۷]. در سال ۱۹۳۲ باناخ در کتاب مشهورش نسخه‌ای قوی‌تر از اصل کرانداری یکنواخت را ثابت کرد و از آن، قضیهٔ نمودار بسته را نتیجه گرفت [۶].

هیلبرت در سال ۱۹۰۶ بر پایهٔ مقاله‌های توماس استیلت‌یس[۳] (۱۸۹۴) دربارهٔ کسرهای مسلسل [۷۸] و ویلهم ویرتینگر[۴] در سال ۱۸۹۷ در مورد معادلهٔ هیل [۹۲]، مفهوم طیف (نقطه‌ای و پیوسته) را تعریف کرد ([۴۴]، صص. ۱۰۹–۱۷۳). هیلبرت شاگردش هرمان وایل[۵] را تشویق کرد تا با مطالعهٔ معادلات انتگرالی تکین، ویژگی‌هایی برای هستهٔ عملگر انتگرالی بیابد که عملگر کراندار مناسب برای نظریهٔ طیفی‌اش به‌دست دهد. پژوهش‌های وایل در رسالهٔ دکترایش در سال ۱۹۰۸ و پس از آن، روی مسئلهٔ تکین استورم–لیوویل، اولین مثال‌ها از یک عملگر خودالحاقی بی‌کران و عملگر نرمال غیرخودالحاقی را به‌دست داد ([۹۱]، جلد اول، صص. ۲–۸۶ و ۱۰۲–۱۵۳).

۶. قرن بیستم (۱۹۱۰–۱۹۴۵)

در سال ۱۹۲۶ جان فون‌نویمان[۶] وارد گوتینگن شد تا دستیار هیلبرت شود. در سه مقالهٔ اساسی بین سال‌های ۱۹۲۹ و ۱۹۳۲، فون‌نویمان فضای هیلبرت مجرد را تعریف کرد و نظریهٔ طیفی عملگرهای نرمال و ارمیتی (که بر زیرمجموعه‌ای چگال تعریف شده باشند) را تکمیل کرد ([۸۹]، جلد دوم، صص. ۱–۸۵، ۸۶–۱۴۳ و ۲۴۲–۲۵۸). مارشال هاروی استون[۷] مستقلاً این نتایج را با در نظر گرفتن عملگرهای خودالحاقی (بی‌کران) به‌دست آورد و در مجموعه مقالاتی آنها را منتشر کرد (۱۹۲۹–۱۹۳۰) [۷۹، ۸۰، ۸۱]. استون سپس در کتابش شرحی از نظریهٔ فضاهای هیلبرت منتشر کرد که سال‌ها مهم‌ترین مرجع در این زمینه محسوب می‌شد [۸۲].

فون‌نویمان مفهوم اندازه‌های طیفی را معرفی کرد و مفهوم طیف را به ردهٔ بزرگتری از عملگرها (احتمالاً بی‌کران) که عملگرهای نرمال خوانده می‌شوند، توسعه داد. در سال ۱۹۳۰ او با پیروی از ریس ([۷۱]، جلد دوم، صص. ۹۵۶–۹۸۹) جبر عملگرهای کراندار $\mathcal{B}(H)$ روی فضای هیلبرت جدایی‌پذیر H را مورد توجه قرار داد. امتیاز رهیافت فون‌نویمان این بود که برخلاف ریس در سال ۱۹۱۳ که این جبر را همراه با نرم و توپولوژی عملگری قوی در نظر گرفته بود، او مفهوم توپولوژی عملگری ضعیف را تعریف و این جبر را با این توپولوژی جدید مطالعه کرد ([۸۹]، جلد دوم، صص. ۸۶–۱۴۳). با این رهیافت جدید، امکان

[۱] William Fogg Osgood [۲] René Louis Baire [۳] Thomas Stieltjes [۴] Wilhelm Wirtinger [۵] Hermann Weyl [۶] John von Neumann [۷] Marshall Harvey Stone

تعبیرهای طیفی از عملگرهای ظاهر شده در آثار وایل در سال‌های ۱۹۰۹–۱۹۱۰ ([۹۱]، جلد اول، صص. ۲۲۲–۲۴۷) و تورستن کارلمان[۱] در دهه ۱۹۲۰ ([۱۲] و [۱۳]، صص. ۳۱۳–۳۴۲) فراهم شد [۸۸]. در همان مقاله، او همچنین با الهام از کار ایسای شور[۲] روی نمایش‌های خطی گروه‌ها، مفهوم جابه‌جاگر را برای یک زیرمجموعه از عملگرها روی یک فضای هیلبرت تعریف کرد. فون‌نویمان اولین کسی بود که یک حساب تابعیِ اندازه‌پذیر را به‌کار گرفت. او به‌طور طبیعی توجه خود را به جابه‌جاگر دوم معطوف کرد ([۸۹]، جلد دوم، صص. ۱۷۷–۲۱۲). یک جبر فون‌نویمان، زیرجبری از $\mathcal{B}(H)$ است که نسبت به توپولوژی عملگری ضعیف، بسته و با جابه‌جاگر دوم خود برابر باشد.

فون‌نویمان تحت تأثیر پیشرفت‌های سال‌های ۱۹۳۲–۱۹۳۶ مانند اعداد اَبَرمختلط[۳] تئودور مولین[۴]، الی کارتان[۵] و جوزف وِدِربِرن[۶]، نظریهٔ حلقه‌ها با شرایط زنجیری امی نوتر[۷] و امیل آرتین[۸] و به‌کارگیری آنها در نمایش‌های خطی گروه‌ها و نظریهٔ اعداد توسط ریشارد براوئر[۹]، هلموت هاسه[۱۰] و آدریان آلبرت[۱۱] قرار گرفت. او می‌خواست نظریه‌ای مشابه برای جبر عملگرها همراه با رده‌بندی معقول بسازد ([۸۹]، جلد دوم، ص. ۸۹). طی نگارش سلسله‌ای از مقالات که از سال ۱۹۳۵ آغاز شد، با همکاری یک پژوهشگر پسادکتری به‌نام فرانسیس جوزف مورای[۱۲]، توانست بخش بزرگی از رده‌بندی جبرهای فون‌نویمان را به پایان برساند ([۸۹]، جلد سوم).

نظریهٔ جبرهای نرمدار، پنج سال بعد توسط گلفاند[۱۳] توسعه یافت [۳۲]. گلفاند علاقه‌مند بود که نظریهٔ طیفی را به اعضای جبرهای نرمدار کامل (بعدها جبرهای باناخ نامیده شدند) گسترش دهد. در همکاری با مارک آرونویچ نایمارک[۱۴]، گلفاند جبرهای باناخ و C^*–جبرها را مطالعه کرد [۳۳].

هرمان وایل با ترکیبی از ایده‌های ایسای شور ([۷۳]، جلد دوم، صص. ۴۴۰–۴۹۴) همراه با روش بی‌نهایت کوچک الی کارتان [۱۴]، در سلسله مقالاتی در سال ۱۹۲۵ تمام نمایش‌های خطیِ پیوسته و تحویل‌ناپذیرِ گروه‌های لیِ فشردهٔ نیم‌ساده را به‌دست آورد ([۹۱]، جلد دوم، ص. ۶۳۳). در سال ۱۹۲۷ وایل با همکاری دانشجویش فریتس پیتر[۱۵] اولین کاربرد نظریهٔ طیفی در آنالیز هارمونیک را به‌دست آوردند که با نام قضیهٔ پیتر–وایل شناخته می‌شود [۶۱].

آلفرد هار[۱۶] در سال ۱۹۳۳ وجود یک اندازه رادُن پایا تحت انتقال را برای هر گروه موضعاً فشرده و شمارای نوع دوم ثابت کرد (شرط شمارای نوع دوم توسط آندره وِی[۱۷] برداشته شد [۹۰]). لیو سمیونویچ پونتریاگین[۱۸] قضیهٔ پیتر–وایل را به‌کار گرفت تا یک مفهوم دوگانی برای گروه‌های آبلی مترپذیر فشرده بیابد [۶۷] (شرط‌های مترپذیری و فشردگی به‌صورت جزئی توسط پونتریاگین [۶۸] و در حالت کلی، توسط

[۱] Torsten Carleman [۲] Issai Schur [۳] hypercomplex numbers [۴] Theodor Molien [۵] Élie Cartan [۶] Joseph Wedderburn [۷] Emmy Noether [۸] Emil Artin [۹] Richard Brauer [۱۰] Helmut Hasse [۱۱] Adrian Albert [۱۲] Francis Joseph Murray [۱۳] Israel Moiseevich Gelfand [۱۴] Mark Aronovich Naimark [۱۵] Fritz Peter [۱۶] Alfréd Haar [۱۷] André Weil [۱۸] Lev Semyonovich Pontrjagin

اگبرت رودلف ون‌کامپن[1] برداشته شدند [۸۶]). آندره وی در سال ۱۹۴۰ نشان داد که اغلب نتایج در مورد سری و انتگرال فوریه را می‌توان به گروه‌های موضعاً فشرده آبلی گسترش داد [۹۰]. گلفاند در یک مقالهٔ مشترک با دیمیتری رایکوف[2] نشان داد که با استفاده از نتایج کلی به‌دست آمده در جبرهای باناخ می‌توان نظریه پونتریاگین–ون‌کامپن–وی را به روشی بسیار ساده‌تر استنتاج کرد [۳۴].

در سال ۱۹۲۶ فضاهای برداری با جمع و ضرب اسکالر پیوسته به‌طور صریح در کار فرشه مورد توجه قرار گرفتند [۲۶]. برخی از فضاهای برداری توپولوژیک در سال ۱۹۳۴ توسط گوتفرید کوته[3] و اتو توپلیتس[4] معرفی شدند [۴۸]. در سال ۱۹۳۵ اولین تعریف عمومی از فضاهای موضعاً محدب توسط فون‌نویمان در کارش بر روی توابع تقریباً متناوب انجام شد ([۸۹]، جلد دوم، صص. ۵۰۸–۵۲۲). در همان سال آندری کولموگوروف[5] اولین نتیجه در مورد نرم‌پذیری را به‌دست آورد [۴۷]. مارک گریگوروویچ کراین [6] و دیوید پینهوسویچ میلمن[7] مفهوم نقاط اکستریم را در سال ۱۹۴۰ معرفی کردند [۴۹].

الی کارتان مفهوم مشتق‌پذیریِ بیرونی با ضرایب صرفاً پیوسته را در سال ۱۹۲۲ تعریف کرد [۱۵]. ژان لری[8] در سال ۱۹۳۴ فرآیند منظم‌سازی توابع انتگرال‌پذیر موضعی را معرفی کرد [۵۴]. گام سرنوشت‌ساز در سال ۱۹۳۶ توسط سرگئی لوو‌ویچ سوبولف[9] برداشته شد که یک فرم خطی مناسب روی فضای برداری توابع هموار با تکیه‌گاه فشرده تعریف کرد و توصیف کلی از این تابعک‌ها (که بعدها توسط لوران شوارتس توزیع نام گرفتند) ارائه کرد [۷۶]. مهم‌ترین نقشی که شوارتس در سال ۱۹۴۵ ایفا کرد، درک اهمیت این نکته بود که مفهوم توزیع که توسط سوبولف معرفی شده بود و او به‌طور مستقل آن را کشف کرد، می‌تواند تعمیم قابل قبولی از تبدیل فوریه به‌دست دهد [۷۴].

نقش شوارتس در نظریهٔ توزیع‌ها بسیار مشابه با نقش نیوتن و لایب‌نیتس در تاریخچهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال است: برخلاف اعتقاد عمومی، آنها این نظریه را ابداع نکردند، زیرا مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری وقتی نیوتن و لایب‌نیتس در سنین کودکی بودند توسط افرادی مانند بوناونتورا کاوالیری، پیر دو فرما و ژیل دو روبروال استفاده می‌شد. امّا آنها قادر بودند الگوریتم‌ها و نمادهای این حساب جدید را به نحوی مناسب اسلوب‌مند کنند که به ابزار قدرتمند و همه‌فن حریف امروزی تبدیل شود.

مراجع

[1] N. H. Abel, Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définis, [Norwegian], *Magazin for Naturvidenskaberne*, 1, **2**, (1823). French translation in *Oeuvres Complètes*, Vol 1, Nouvelle èd. L. Sylow et S. Lie, 1881, 11–27.

[2] G. Ascoli, Le curve limiti di una varietà data di curve, *Mem. Acc. dei Lincei*, **18** (1883), 521–586.

[1] Egbert Rudolf van Kampen [2] Dmitry Raikov [3] Gottfried Köthe [4] Otto Toeplitz [5] Andrey Kolmogorov [6] Mark Grigorievich Krein [7] David Pinhusovich Milman [8] Jean Leray [9] Sergei Lvovich Sobolev

[3] R. Baire, Sur les fonctions de variables rèelles, *Ann. di Mat.*, 3, **3** (1899), 1–123.

[4] S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, *Fund. Math.*, **3** (1923), 133–181.

[5] S. Banach, Sur les fonctionnelles linéaires, *Studia Math.*, **1** (1929), 211–216 et 223–229.

[6] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932.

[7] S. Banach and H. Steinhaus, Sur le principe de condensation des singularités, *Fund. Math.*, **9** (1927), 50–61.

[8] A. Beer, *Einleitung in die Mathematische Theorie der Elasticität und Capillarität*, Gissen Verlag, Leipzig, 1869.

[9] D. Bernoulli, Réflexions et éclairissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les Mémoires de l'Académie de 1747 et de 1748, *Hist. de lÁcad. de Berlin*, (1753), 147–172.

[10] G. Birkhoff (ed.), *A Source Book in Classical Analysis*, Cambridge, Mass., Harvard Univ. Press, 1973.

[11] C. Bourlet, Sur les operations en general, et les equations differentielles d'ordre infini, *Ann, Ec. Norm. Sup.*, (3) **14** (1897), 133–189.

[12] T. Carleman, *Sur les equations integrales singulieres a noyau reel et symetrique*, Uppsala, Univ. Arsskrift, 1923.

[13] T. Carleman, *Edition complète des articles, publiée par l'Institut Mittag-Leffler*, Malmö, Litos Reprotryck, 1960.

[14] E. Cartan, Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicite plané, *Bull. Soc. Math. France.*, **41** (1913), 53–96.

[15] E. Cartan, *Legons sur les Invariants Integraux*, Paris, Hermann, 1922.

[16] J. D' Alembert, Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration,*Histoire de l'Academie Royale, Berlin*, **3** 1747 (1749), 214–219, and 220–249.

[17] J. Dieudonné, *History of Functional Analysis*, Leopoldo Nachbin (ed.), North-Holland Mathematics Studies 49, Amsterdam, 1981.

[18] P. Dirichlet, Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, *J. de Crelle*, **4** (1829), 157–169.

[19] L. Euler, Remarqus sur les memoires précendes de M. Bernouli, *Hist. de lÁcad. de Berlin*, (1753), 196–222.

[20] L. Euler, *Opera Omnia*, 61 vol. parus (4 séries), Leipzig- Berlin-Zürich, Teubner et O. Füssli, 1911–1980.

[21] E. Fischer, Sur la convergence en moyenne, *C. R. Acad. Sci.*, **144** (1907), 1022–1024;

[22] E. Fischer, Application d'un théorème sur la convergence en moyenne, *C. R. Acad. Sci.*, **144** (1907), 1148–1151.

[23] J. B. J. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*, Firmin Didot, 1822.

[24] M. Fréchet, Généralisation d'un théorème de Weierstrass, *C.R. Acad. Sci.*, **139** (1904), 848–850.

[25] M. Fréchet , Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **22** (1906), 1–74.

[26] M. Fréchet, Les espaces abstraits topologiquement affines, *Acta math.*, **47** (1926), 25–52.

[27] M. Fréchet, *Les Espaces Abstraits et leur Théorie Considérée comme Introduction à l'Analyse Générale*, Gauthier-Villars, 1928.

[28] I. Fredholm, *Oeuvres Complètes Publiées par l'Institut Mittag-Leffler*, Malmö, Litos Reprotryck, 1955.

[29] I. Fredholm, Sur une classe d'équations fonctionnelles, *Acta Math.*, **27** (1903), 365–390.

[30] G. Frobenius, *Gesammelte Abhandlungen*, 3 vol., Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1968.

[31] C. F. Gauss, *Werke*, 12 vol. Gttttingen, 1870–1927.

[32] I. Gelfand, Normierte Ringen,*Mat. Sborn., (N.S.)*, **9** (1941), 3–24.

[33] I. Gelfand and M. Naimark, On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space, *Mat. Sborn. (N.S.)*, **12** (1943), 197–213.

[34] I. Gelfand and D. Raikov, On the theory of characters of commutative topological groups, *Dokl. Akad. Nauk*, **28** (1940), 195–198.

[35] J. P. Gram, Über die Entwickelung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate, *J. de Crelle*, **94** (1883), 1–73.

[36] H. Grassmann, *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, Wigand, 1844.

[37] G. Green, *Mathematical Papers*, Paris, Hermann, 1903.

[38] A. Haar, Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, *Ann. of Math.*, **34** (1) (1933), 147–169.

[39] H. Hahn, Über Folgen linearer Operationen, *Monatsh. für Math. und Phys.*, **32** (1922), 1–88.

[40] H. Hahn, Über lineare Gleichungssysteme in linearen Rumen, *J. de Crelle*, **157** (1927), 21–229.

[41] E. Helly, Über lineare Funktionaloperationen, *Sitzungsber, der math, naturwiss. Klasse der Akad. der Wiss. (Wien)*, **121** (1912), 265–297.

[42] E. Helly, Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Monatsh. für Math. und Phys.* , **31** (1921), 60–91.

[43] D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, 3 vol., Berlin, Springer-Verlag, 1932–1935.

[44] D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen*, 2nd edn., Leipzig-Berlin, Teubner, 1924.

[45] G. W. Hill, *Collected mathematical works*, 4 vol., Carnegie Inst., Washington, 1905–1907.

[46] C. Jordan, *Traite des Substitutions et des Equations Algebriques*, 2nd edn., Paris, Gauthier-Villars et A. Blanchard, 1957.

[47] A. Kolmogorov, Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes, *Studia Math.*, **5** (1934), 29–33.

[48] G. Kothe and O. Toeplitz, Lineare Raume mit unendlich-vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen, *J. de Crelle*, **171** (1934), 193–226.

[49] M. Krein and D. Milman, On extreme points of regular convex sets, *Studia Math.*, **9** (1940), 133–138.

[50] J. L. Lagrange, *Oeuvres*, 14 vol., Paris, Gauthier-Villars, 1867–1892.

[51] P. S. Laplace, *Oeuvres*, 14 vol., Paris, Gauthier-Villars, 1878–1912.

[52] H. Lebesgue, *Intégrale, Longueur, Aire*, Bernandon de C. Rebeschini, 1902.

[53] H. Lebesgue, *Oeuvres Scientifiques*, 5 vol., Genève, L'enseignement math., 1972–1973.

[54] J. Leray, Sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace, *Acta math.*, **63** (1934), 193–248.

[55] P. Lévy, *Lecons d'Analyse fonctionnelle*, Paris, Gauthier-Villars, 1922.

[56] J. Liouville, Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant an paramètre arbitraire, *Journ. de Math.* , (1) **1** (1836) 253–265 and **2** (1837), 16–35 and 418–436.

[57] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, Leipzig, Teubner, I896.

[58] C. Neumann, *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential*, Leipzig, Teubner, 1877.

[59] I. Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, Jussu Societatis Regiæ ac Typis Joseph Streater, 1687.

[60] W. Osgood, Non uniform convergence and the integration of series term by term, *Amer. Journ. of Math.* , **19** (1897), 155–190.

[61] F. Peter and H. Weyl, Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, *Math. Ann.*, **97** (1927), 737–755.

[62] J. P. Pier, *Mathematical Analysis During the 20th Century*, Oxford University Press, Oxford, 2001.

[63] A. Pietsch, *History of Banach spaces and linear operators*, Birkhäuser, Boston, 2007.

[64] S. Pincherle, *Opere Scelte*, 2 vol., Roma, Cremonese, 1954.

[65] H. Poincare, *Oeuvres* , 11 vol., Paris, Gauthier-Villars, 1916–1956.

[66] D. Poisson, Remarques sur une équation qui se présente dans la théorie de l'attraction des sphéroïdes, *Bull. Soc. Philomath. Paris*, **3** (1813), 388–392.

[67] L. Pontrjagin, The theory of topological commutative groups, *Ann. of Math.*, **35** (1934), no. 2, 361–388.

[68] L. Pontrjagin, The theory of topological commutative groups, *Ann. of Math.*, **35** (1934), 361–388.

[69] B. Riemann, *Gesammelte Mathematische Werke*, 2 ed., Leipzig, Teubner, 1892; Nachträge, ibid., 1902.

[70] F. Riesz, *Les Systèmes d'Équations Linéaires à une Infinité d'Inconnues*, Paris, Gauthier-Villars, 1913.

[71] F. Riesz, *Oeuvres Completes*, 2 vol., Paris, Gauthier-Villars, 1960.

[72] E. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I. Teil: Entwickelung will-kurlicher Funktionen nach Systeme nachgeschriebener, *Math. Ann.*, **63** (1907), 433–476.

[73] I. Schur, *Gesammelte Abhandlungen*, 3 vol., Berlin-Heidelberg -New York, Springer-Verlag, 1973.

[74] L. Schwarz, *Theorie des Distributions* , Actual. Scient. Ind., Paris, Hermann, 1950-1951.

[75] H. A. Schwarz, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, 2 vol., Berlin, Springer-Verlag, 1890.

[76] S. Sobolev, Méthode nouvelie à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, *Mat. Sborn. (N.S.)* , **1** (1936), 39–72.

[77] H. Steinhaus, Additive und stetige funktionaloperationen, *Math. Zeitschr.*, **5** (1919), 186–221.

[78] T. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. de Toulouse*, **8** (1894), J1–J122,

[79] M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space: I, Geometrical aspects, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **15** (1929), 198–200.

[80] M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space: II, analytic aspects, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **15** (1929), 423–425.

[81] M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space: III, Operational methods and group theory, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **16** (1930), 172–175.

[82] M. H. Stone, *Linear Transformations in Hilbert space*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XV, 1932.

[83] D. J. Struik, *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Princeton University Press.

[84] C. Sturm, Sur les équations différentielles linéaires du second ordre, *Journ. de Math.*, **1** (1836), 106–186.

[85] B. Taylor, *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, London: William Innys, 1715.

[86] E. Van Kampen, Locally bicompact abelian groups and their character groups, *Ann. of Math.*, **36** (1935), 448–463.

[87] V. Volterra, *Opere matematiche*, 5 vol., Ace. dei Lincei, 1954–1962.

[88] J. Von Neumann, *Charakterisierung des Spektrums eines Integraloperators*, Actualités Sci. Indust., 229, Hermann, 1935.

[89] J. Von Neumann, *Collected Works*, 6 vol., Oxford-London- New York-Paris, Pergamon Press, 1961–1963.

[90] A. Weil, *L'intégration dans les Groupes Topologiques et ses Applications*, Actual. Scient. et Ind., no 869, Paris, Hermann, 1940.

[91] H. Weyl, *Gesammelte Abhandlungen*, 4 vol., Berlin- Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1968.

[92] W. Wirtinger, Beitrage zur Riemann's Integrationsmethode fur hyperbolische Differentialgleichungen, und deren Anwendungen auf Schwingungsprobleme, *Math. Ann.*, **48** (1897), 364–389.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۶/۱۱/۵؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۹/۲۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۰/۱

مسعود امینی: تهران، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکدهٔ علوم ریاضی

رایانامه: mamini@modares.ac.ir

حسن پورمحمد: دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی

رایانامه: pourmohammad@gmail.com