فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۱ (پاییز ۱۳۸۷) صص. ۳۹ تا ۴۲

دربارهٔ زیرگروه‌هایی با شاخص اول

تی. وای. لَم*

ترجمهٔ حمیدرضا وهابی

یک بخش ثابت در هر درس مقدماتی جبر مجرد یا نظریهٔ گروه‌ها این حقیقت است که هر گاه G یک گروه باشد، هر زیرگروه H با شاخص ۲ در G نرمال است. به عنوان تعمیمی از این مطلب (و نشان دادن این که واقعاً عدد اول ۲ در این جا عدد اول ویژه‌ای نیست)، برخی از مدرسین قضیهٔ جالب زیر را بیان می‌کنند.

قضیهٔ ۱. اگر H یک زیرگروه از گروه متناهی G باشد به طوری که شاخص $[G:H]$ کوچکترین عدد اوّلی باشد که $|G|$ را عاد می‌کند، آن‌گاه H در G نرمال است.

برهان این قضیه معمولاً بر این حقیقت استوار است که عمل ضرب متعدی G روی فضای همدسته‌های چپ H، هسته‌ای مانند K دارد که بزرگترین زیرگروه نرمال G مشمول در H است. این مطلب نشان می‌دهد که $[G:H]!$ بر $[G:K]=[G:H][H:K]$ بخش پذیر است. سپس فرض روی $[G:H]$ نتیجه می‌دهد که $[H:K]=۱$، و از این رو $H=K$ در G نرمال است. (برای مثال نگاه کنید به [۱، ص ۱۲۳]، [۲، ص ۴۴].) این برهان هرچند کوتاه، اما برای دانشجویان مبتدی مناسب نیست زیرا برنامه‌های درسی آنها شامل نظریهٔ عمل گروه‌ها نیست. هنگام تدریس یک درس جبر مجرد مقدماتی، برهانی برای قضیهٔ ۱ یافتم که هم سریع است و هم درک آن برای دانشجویانی که چنین درسی را می‌گذرانند آسان. به علاوه، ایدهٔ این برهان باعث شد که محک‌هایی برای نرمال بودن زیرگروه‌هایی با شاخص اوّلِ گروه دلخواه G پیدا کنم. فکر نمی‌کنم که چنین محک‌هایی در متون استاندارد یا حتی کتاب‌های عمومی نظریهٔ گروه‌ها یافت شود، از این رو آنها را در این جا آورده‌ام.استدلالی را که می‌آورم به نوعی مشابه برهان معمولی

1) T. Y. Lam

این مطلب است که زیرگروهِ یک گروه دوری، دوری است؛ و به طور قطع دانشجویان چنین برهانی را در برنامه‌های درسی خود دیده‌اند.

قضیهٔ ۲. هر گاه G یک گروه و H یک زیرگروه G با شاخص اول p باشد، آن‌گاه گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱− H در G نرمال است،

۲− برای هر $a \in G - H$، $a^p \in H$،

۳− برای هر $a \in G - H$، $a^n \in H$ به ازای عدد صحیح مثبتی مانند $n = n(a)$ که هیچ عامل اولی کوچکتر از p ندارد.

۴− برای هر $a \in G - H$، $a^{۲}, \ldots, a^{p-۱} \notin H$.

اگر G و H در فرض قضیهٔ ۱ صدق کنند، آن‌گاه با توجه به قضیهٔ لاگرانژ، شرط (۳) از قضیهٔ ۲ با انتخاب $n(a) = |G|$ برای هر a در $G - H$ برقرار می‌شود. به هر حال، در قضیهٔ ۲، در حالتی که $|G|$ متناهی است لزومی ندارد که p کوچک‌ترین عامل اول $|G|$ باشد. در واقع p می‌تواند هر عدد اولی باشد که شاخص زیرگروهی مانند H از گروه G است. برای مثال، اگر G گروه متناوب $A_۴$ و H زیرگروه $\{e, (۱۲)(۳۴), (۱۳)(۲۴), (۱۴)(۲۳)\}$ با شاخص $p = ۳$ باشد، در این صورت شرط (۳) از قضیهٔ ۲ با انتخاب $n(a) = ۳$ برای هر a در $G - H$ برقرار می‌شود (زیرا هر یک از این a ها دوری به طول ۳ هستند). از این رو می‌توانیم نرمال بودن H را از قضیهٔ ۲ نتیجه بگیریم. از طرف دیگر، اگر G گروه متقارن $S_۴$ و H نسخه‌ای از گروه دو وجهی هشت عضوی (گروه تقارن‌های مربع به عنوان زیرگروهی از $S_۴$) با $p = [G : H] = ۳$ باشد، به وضوح شرایط (۲) و (۴) از قضیهٔ ۲ برقرار نیستند (با در نظر گرفتن یک ترانهش a در $G - H$)، پس نتیجه می‌گیریم که H در G نرمال نیست.

برهان قضیهٔ ۲. نشان می‌دهیم که $(۱) \Rightarrow (۴) \Rightarrow (۳) \Rightarrow (۲) \Rightarrow (۱)$.

$(۲) \Rightarrow (۱)$. بنابر فرض (۱)، گروه خارج قسمتی $\frac{G}{H}$ را می‌توان ساخت که در آن $|\frac{G}{H}| = p$، در نتیجه شرط (۲) به دست می‌آید (مثلاً با استفاده از قضیهٔ لاگرانژ).

$(۳) \Rightarrow (۲)$. این قسمت با انتخاب $n(a) = p$ برای هر a در $G - H$ واضح است (توجه کنید که p یک عدد اوّل است).

$(۴) \Rightarrow (۳)$. عضو دلخواه a را در $G - H$ در نظر بگیرید و فرض کنید $n = n(a)$ همان باشد که در شرط (۳) بیان شد. فرض کنید s کوچکترین عدد صحیحی باشد که $a^s \in H$. می‌توانیم بنویسیم $n = qs + r$ که در آن q و r اعداد صحیح‌اند و $۰ \leq r < s$. بنا به فرض، H شامل $a^n = (a^s)^q.a^r$ است، بنابراین $a^r \in H$. این نتیجه می‌دهد که $r = ۰$، پس $n = qs$. چون به وضوح $s > ۱$، فرض روی $n = n(a)$ در (۳) نتیجه می‌دهد $s \geq p$، که شرط (۴) را ثابت می‌کند.

(۱) $\Rightarrow$ (۴). فرض کنید شرط (۴) برقرار بوده ولی H در G نرمال نباشد. در این صورت $b \in G$ و $h \in H$ وجود دارند به طوری که $a := bhb^{-1} \notin H$. از آن جا که $xH = yH$ اگر و فقط اگر $x^{-1}y \in H$، (۴) نتیجه می‌دهد که

(*) $H, aH, \cdots, a^{p-1}H$، p همدستهٔ چپ مجزای H در G هستند.

از $bh = ab$، نتیجه می‌گیریم $bH = abH$. واضح است که $b \notin H$. پس بنابر (*)، $bH = a^iH$ به ازای iیی که $1 \le i \le p-1$. اما در این صورت $a^iH = bH = abH$، و حذف a نتیجه می‌دهد که $a^{i-1}H = bH = a^iH$، که با (*) در تناقض است.

تبصره‌ها.

الف. شایان توجه است که در برهان قضیهٔ ۲، از فرض اوّل بودن p فقط در استنتاج بدیهی (۳) $\Rightarrow$ (۲) استفاده شده است. بنابراین، برهان‌هایی که در سه استنتاج دیگر استفاده کردیم برای هر شاخص (متناهی) $p = [G : H]$ معتبر است. این بدان معناست که برای هر شاخص متناهی p، شرط (۲) هم‌چنان یک شرط لازم و هر کدام از شرایط (۳) و (۴) هم‌چنان یک شرط کافی برای نرمال بودن H در G است. ولی در حالتی که p اوّل نباشد نه (۳) و نه (۴) شرط لازم برای نرمال بودن H نیست. برای مشاهدهٔ این مطلب، G را یک گروه دوری از مرتبهٔ مربع یک عدد اول و H را $\{e\}$ بگیرید. به طور مشابه در حالتی که p اوّل نباشد، (۲) یک شرط کافی برای نرمال بودن H نخواهد بود. برای مشاهدهٔ این مطلب G را یکی از دو گروه غیر آبلی از مرتبهٔ l^3 (برای عدد اول فرد l) و H را زیرگروه تولیدشده به‌وسیلهٔ یک عضو غیرمرکزی از مرتبهٔ l بگیرید.

ب. در حالتی که شاخص یک عدد اوّل است، تام دورسی[1] به مؤلف متذکر شده است که شرایط (۲)، (۳) و (۴) در قضیهٔ ۲ همچنان معتبر خواهند بود اگر به جای واژه‌های «برای هر» در آنها واژه‌های «برای برخی» بنویسیم. برهان این نکتهٔ جالب را به عنوان تمرینی به عهدهٔ دانشجویان می‌گذاریم.

برای مشاهدهٔ امکان کاربرد قضیهٔ ۲ در مورد گروه‌های نامتناهی، نتیجهٔ مشهور زیر را ثابت می‌کنیم.

نتیجه. اگر p یک عدد اوّل و مرتبهٔ هر عضو گروه G توانی از p باشد، آن گاه هر زیرگروه H با شاخص p در G نرمال است.

برهان. برای هر a در $G - H$، می‌توانیم $n(a)$ را مرتبهٔ a بگیریم، پس شرط (۳) در قضیهٔ ۲ برقرار است.

1) Tom Dorsey

مراجع

[1] D. S. Dummit and R. M. Foote, *Abstract Algebra*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.

[2] I. M. Isaacs, Algebra, Brooks-Cole, Pacific Grove, CA, 1994.

مترجم: حمیدرضا وهابی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد اسلامشهر
hrvahabi@yahoo.com