

آشنایی با سازوکارهای جورسازی

محسن پوریونه و رسول رمضانیان

چکیده

سازوکارهای جورسازی، در رفتار اقتصادی جامعهٔ انسانی کاربردی اساسی دارند. مفهوم جورسازی را می‌توان در ازدواج و زوج‌یابی، پیوند کلیه، تخصیص نیروی کار به بخش‌های مختلف کار، و غیره مشاهده کرد. موضوع اصلی مسئلهٔ جورسازی، طراحی سازوکاری است که دو طرف هم‌جورسازی را به هم برساند درحالی‌که بیشترین مطلوبیت رخ دهد و دو طرف در آشکار کردن ترجیحات خود دلیلی برای خلاف‌گویی نداشته باشند. هدف از این مقاله، آشنا کردن خواننده با مبحث طراحی سازوکارها و، به‌طور خاص، سازوکارهای هم‌جورسازی است.

۱. مقدمه

بازار، زیرساخت اصلی اقتصاد و برقرارکنندهٔ ارتباط بین طرف عرضه و تقاضا برای انجام دادوستد است. بازار امکانی را فراهم می‌سازد که عرضه‌کننده و متقاضی به هم مرتبط شوند، مثلاً در بازار مصرف، یک بنگاه، کالا و خدمات عرضه می‌کند و خانوار، متقاضی و خریدار آن است. در بازار کار، خانوار نیروی کار عرضه می‌کند و بنگاه خریدار و متقاضی آن است. در بازار سرمایه، خانوار سرمایه را عرضه می‌کند و بنگاه‌های تولیدی و خدماتی متقاضی آن هستند. در صورت نبود هر یک از سه بازار مصرف، کار، و سرمایه چرخهٔ اقتصاد دچار نابسامانی می‌شود و این اهمیت «نظریهٔ طراحی

عبارات و کلمات کلیدی. طراحی سازوکار، جورسازی، ازدواج پایدار، الگوریتم پذیرش با تعویق، الگوریتم چرخهٔ معاملاتی برتر.

سازوکارهای بازار» را نشان می‌دهد. سازوکارهای بازار یک فرایند به‌هم‌رسانی است که با هدفی مشخص، طرفین بازار را به یکدیگر نظیر می‌کند.

طراحی سازوکار یکی از زیرشاخه‌های نظریه بازی‌ها است. هدف اصلی این شاخه یافتن سازوکاری است که افراد با عقلانیتی که دارند انگیزه‌ای برای تخطی از قوانین آن سازوکار نداشته باشند و حتی قوانین آن سازوکار همسو با انگیزه و افزایش مطلوبیت افراد باشد تا خود بازیکنان، آن سازوکار را به پیش برانند.

یکی از مسائلی که در طراحی سازوکارها اهمیت ویژه‌ای دارد مسئله جورسازی (یا تطبیق)^۱ است. به‌طورکلی، سؤال اصلی در علوم اقتصادی چگونگی تخصیص منابع کمیاب است. مثلاً، در یک بازار کار، کدام کارمند باید در کدام شرکت کار کند؟ یا زن‌ها و مردها با توجه ترجیحاتشان چگونه باید با یکدیگر ازدواج نمایند؟ همچنین در کشورهایی که امکان خرید و فروش اعضای بدن، مانند کلیه، وجود ندارد تخصیص اعضا باید بر چه اساسی و یا در چه زمانی رخ دهد؟ پذیرش دانشجویان توسط دانشگاه‌ها نمونه‌ای دیگر از مسئله جورسازی است. در این مسئله هریک از دانشجویان یک ترجیح‌بندی^۲ درباره دانشگاه‌ها دارند و هریک از دانشگاه‌ها با توجه به شرایط، برخی از دانشجویان را به دیگر دانشجویان ترجیح می‌دهند. در اینجا مسئله جورسازی این است که کدام دانشجو با کدام دانشگاه جور شود؟

مسئله جورسازی را نخستین بار دیوید گیل^۳ و لوید شپلی^۴ در مقاله‌ای با عنوان «پذیرش دانشگاه و ازدواج پایدار» در سال ۱۹۶۲ مطرح کردند [۴]؛ آن‌ها نشان دادند که همواره الگوریتمی برای یافتن یک ازدواج پایدار وجود دارد.

در سال ۱۹۸۴ آلوین روت^۵ [۸] مسئله جورسازی را از دیدگاه عملی بررسی نمود. وی در آن مقاله چگونگی استخدام پزشکان در بیمارستان‌های آمریکا را مطالعه کرد. در سال ۲۰۱۲ جایزه نوبل علوم اقتصادی به آلوین روت و لوید شپلی، برای مشارکت آن‌ها در زمینه طراحی بازار و فعالیت در مسائل جورسازی، اهدا شد.

هم جورسازی در دنیای واقعی و بازار کار با محدودیت‌هایی مواجه است، که از میان آن‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

- عمق بازار^۶: عمق بازار به معنای داشتن تعداد کافی عرضه‌کننده و تولیدکننده در یک بازار کار است.

^۱matching ^۲preference ordering ^۳David Gale ^۴Lloyd Shapley ^۵Alvin Roth ^۶thickness

- ازدحام^۱: هنگامی که تعداد عرضه‌کننده و تولیدکننده در بازار کار خیلی زیاد باشد، افراد بسیاری تمایل به خرید و فروش خواهند داشت و به این ترتیب تنوع ترجیحات بالا می‌رود. بنابراین جورسازی در این‌گونه بازارها زمان‌بر خواهد بود.
- طلب امنیت^۲: این موضوع نیز یکی دیگر از مشکلات جورسازی در دنیای واقعی است. امنیت در بازار موجب می‌شود که افراد نتوانند به یکدیگر اعتماد کنند و از افشای اطلاعات خود از بازار بپرهیزند.

البته معمولاً در مدل‌سازی ریاضیاتی و بررسی نظری جورسازی، پیچیدگی‌هایی نظیر موارد بالا در نظر گرفته نمی‌شود.

مسائل جورسازی انواع گوناگونی دارد که در ادامه به معرفی برخی از جنبه‌های مختلف آن‌ها خواهیم پرداخت.

- (۱) جورسازی یک‌به‌یک^۳: در این‌گونه مسائل هریک از افراد شرکت‌کننده در بازار حداکثر می‌توانند با یک نفر جور^۴ شوند. نمونه‌هایی از این دسته مسائل، مسئله ازدواج پایدار^۵ جورسازی هم‌تاقی^۶ [۵] و مسئله تبادل کلیه^۷ [۹] است.
- (۲) جورسازی چندبه‌یک^۸: در این‌گونه مسائل هریک از افراد شرکت‌کننده در بازار می‌توانند با بیش از یک نفر جور شوند. برای مثال می‌توان به مسئله استخدام پزشکان در یک بیمارستان، پذیرش دانشجویان توسط دانشگاه‌ها [۴] و یا استخدام کارمندان توسط یک شرکت اشاره کرد.
- (۳) جورسازی یک‌طرفه^۹: در مسائل جورسازی یک‌طرفه، فقط افراد یک طرف بازار دارای ترجیحات هستند. مثلاً فرض کنید بخواهیم تعدادی خانه را بین افراد توزیع کنیم. در این مورد فقط افراد هستند که نسبت به خانه‌ها ترجیحاتی دارند. مسئله تبادل کلیه نیز یکی از مسائل این دسته است.
- (۴) جورسازی دوطرفه^{۱۰}: در این‌گونه مسائل، افراد هر دو طرف بازار دارای ترجیحاتی نسبت به طرف مقابل هستند. مثلاً در مسئله ازدواج پایدار، هر مردی دارای یک ترجیح‌بندی نسبت به زنان موجود در شبکه است و برعکس.
- (۵) جورسازی پویا^{۱۱}: در مسائل جورسازی پویا، پارامتر زمان به بازار اضافه می‌شود، یعنی اینکه در هر لحظه از زمان عوامل بازار تغییر می‌کنند. مثلاً افراد جدیدی برای اهدا یا دریافت کلیه وارد بازار می‌شوند. نمونه‌هایی از این مسائل در [۲، ۳] آمده است.

^۱congestion ^۲safety ^۳one to one matching ^۴match ^۵stable marriage ^۶roommate matching

^۷kidney exchange ^۸many to one matching ^۹one sided matching ^{۱۰}two sided matching

^{۱۱}dynamic matching

(۶) جورسازی با اطلاعات ناقص^۱: در این مسائل فرض می‌شود بین عامل‌های بازار آگاهی مشترک^۲ از اطلاعات بازار وجود ندارد. برای مثال هر فرد، تنها از ترجیحات خود اطلاع دارد و از ترجیحات سایر افراد بی‌اطلاع است. دراصل، هر عامل شرکت‌کننده در بازار از وضعیت خود به‌طور کامل آگاه است و نسبت به وضعیت دیگران دارای یک باور^۳ (صحیح یا غلط) است. نمونه‌هایی از تحقیقات انجام‌شده در این زمینه در [۶، ۷] آمده است.

۲. ازدواج پایدار

در مسئله ازدواج پایدار، بازار ازدواج به دو بخش تقسیم می‌شود: یک بخش متشکل از زن‌ها و بخش دیگر متشکل از مردها است. بازیکنان هر بخش دارای یک ترجیح‌بندی نسبت به بازیکنان طرف دیگر هستند؛ بر این مبنا که اولویت آن‌ها برای ازدواج یکی از افراد طرف مقابل است. در اینجا یکی از هدف‌های طراحی سازوکار یافتن یک جورسازی پایدار است. پایداری به این معناست که پس از آنکه افراد مطابق آن سازوکار با یکدیگر ازدواج کردند، هیچ مرد و زنی وجود نداشته باشد که به‌طور هم‌زمان تمایل به طلاق و ازدواج با یکدیگر داشته باشند. در سال ۱۹۸۲ شِپلی و گیل [۴] نشان دادند که مسئله ازدواج پایدار همواره دارای جواب است. آن‌ها برای نشان دادن این موضوع، الگوریتمی با نام پذیرش معوق^۴ ارائه کردند که در ادامه به بررسی آن خواهیم پرداخت.

تعریف ۱.۲ (ازدواج پایدار). یک مسئله ازدواج، یک سه‌تایی به صورت $\langle M, W, \succeq \rangle$ است که در آن M یک مجموعه متناهی از مردها، W یک مجموعه متناهی از زن‌ها و $\succeq = (\succeq_i)_{i \in M \cup W}$ یک لیست از ترجیح‌بندی عامل‌های مجموعه $(M \cup W)$ است. در اینجا \succeq_m به معنای ترجیح‌بندی مرد m درباره مجموعه $W \cup \{m\}$ و \succeq_w به معنای ترجیح‌بندی زن w درباره مجموعه $M \cup \{w\}$ است. از روی ترجیح‌بندی \succeq می‌توان یک ترجیح‌بندی اکید تعریف نمود. یک ترجیح‌بندی برای عامل i اکید است هرگاه در آن ترجیح‌بندی هیچ دونفری برای عامل i از اولویت یکسانی برخوردار نباشند. فهرست ترجیح‌بندی‌های اکید افراد را با \succ نشان می‌دهیم.

برای مرد m با ترجیح‌بندی اکید \succ_m داریم:

- $w \succ_m w'$: به این معناست که مرد m زن w را به زن w' ترجیح می‌دهد،
- $w \succ_m m$: به این معناست که مرد m زن w را به مجرد بودن ترجیح می‌دهد،
- $m \succ_m w$: به این معناست که مرد m مجرد بودن را به زن w ترجیح می‌دهد.

^۱incomplete information matching ^۲common knowledge ^۳belief ^۴deferred acceptance

برآمد^۱ یک مسئله ازدواج یک جورسازی است. به بیان دیگر، برای مسئله داده شده (M, W, \succeq) تابع $\mu : M \cup W \rightarrow M \cup W$ یک جورسازی است هرگاه

(۱) برای هر $m \in M$ ، اگر $\mu(m) \notin W$ آنگاه $\mu(m) = m$ ،

(۲) برای هر $w \in W$ ، اگر $\mu(w) \notin M$ آنگاه $\mu(w) = w$ ،

(۳) برای هر $m \in M$ و هر $w \in W$ ، اگر $\mu(m) = w$ و تنها اگر $\mu(w) = m$.

در اینجا $j = \mu(i)$ بدین معناست که در جورسازی μ عامل i با عامل j ازدواج کرده است.

ملاحظه ۲.۲. معمولاً فرض می‌کنند که عامل‌ها تحت تأثیر اثر جانبی^۲ نیستند؛ یعنی اینکه عامل i جورسازی μ را به جورسازی μ' ترجیح می‌دهد اگر و تنها اگر $\mu(i)$ را به $\mu'(i)$ ترجیح دهد.

تعریف ۳.۲. جورسازی μ کارایی پارتو^۳ دارد هرگاه جورسازی دیگری مانند μ' وجود نداشته باشد به طوری که برای هر عامل $i \in M \cup W$ داشته باشیم $\mu(i) \succeq_i \mu'(i)$ و برای حداقل یک عامل مانند $i \in M \cup W$ داشته باشیم $\mu(i) \succ_i \mu'(i)$.

به بیان دیگر، یک جورسازی کارایی پارتو دارد هرگاه جورسازی دیگری وجود نداشته باشد به طوری که برای همه بازیکنان حداقل به اندازه جورسازی اولیه مطلوب باشد و برای حداقل یک بازیکن به طور اکید مطلوب باشد.

تعریف ۴.۲. (الف) جورسازی μ انسداد فردی^۴ دارد هرگاه عاملی مانند $i \in M \cup W$ وجود داشته باشد به طوری که $\mu(i) \succ_i i$.

(ب) جورسازی μ انسداد زوجی^۵ دارد هرگاه زوجی مانند $(m, w) \in M \times W$ وجود داشته

باشد به طوری که $w \succ_m \mu(m)$ و $w \succ_w \mu(w)$.

(پ) جورسازی μ پایدار است هرگاه دارای انسداد فردی یا انسداد زوجی نباشد.

با توجه به تعریف‌های گفته شده، واضح است که پایداری یک جورسازی باعث ایجاد جورسازی پارتو خواهد شد.

۱.۲. الگوریتم پذیرش با تعویق. الگوریتم پذیرش با تعویق، سازوکاری برای حل مسئله ازدواج پایدار است. دو صورت از این الگوریتم وجود دارد. در یکی از آن‌ها مردها به زن‌ها پیشنهاد می‌دهند و زن‌ها پیشنهاد آن‌ها را قبول و یا رد می‌کنند. در صورت دیگر این الگوریتم زن‌ها به

^۱outcome ^۲externalities ^۳Pareto efficiency ^۴individually blocked ^۵pairwise blocked

مردان پیشنهاد می‌دهند و مردها پیشنهاد آن‌ها را قبول یا رد می‌کنند. در اینجا به بیان صورت اول می‌پردازیم.

الگوریتم ۱ - پذیرش با تعویق (صورت مرد-پیشنهادگر)

گام ۱: هر مردی به زنی که بالاترین اولویت را برای او دارد پیشنهاد می‌دهد.
 گام ۲: هر زنی که حداقل یک پیشنهاد دارد، مردی را که در اولویت‌بندی‌اش در رده بالاتری قرار دارد به‌طور موقت نگه می‌دارد و بقیه را رد می‌کند.
 گام ۳: هر مردی که در مرحله قبلی رد شده است، به زنی که برایش اولویت بالاتری دارد و در مراحل قبلی او را رد نکرده است پیشنهاد می‌دهد.
 گام ۴: هر زنی که حداقل دو پیشنهاد داشته باشد (این پیشنهاد ممکن است یکی از پیشنهادها در مرحله قبلی نیز باشد)، مردی را که برایش اولویت بالاتری دارد نگه می‌دارد و بقیه را رد می‌کند.
 گام ۵: روند گام‌های ۳ و ۴ تکرار می‌شوند و الگوریتم زمانی به پایان می‌رسد که هر زن دقیقاً یک پیشنهاد داشته باشد.

پیش از بررسی ویژگی‌های سازوکار پذیرش با تعویق، دو مفهوم زیر را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵.۲. (الف) یک سازوکار انگیزه‌سازگار^۱ است، هرگاه تمامی عامل‌های شرکت‌کننده در آن سازوکار تمایل به راست‌گویی داشته باشند.

(ب) یک سازوکار انگیزه‌سازگار استراتژی‌غالب^۲ است، هرگاه راست‌گویی بهترین استراتژی یک عامل در برابر هر استراتژی عامل‌های دیگر باشد.

درحقیقت، مفهوم انگیزه‌سازگار استراتژی‌غالب به این موضوع اشاره دارد که همواره راست‌گویی برای یک عامل، مستقل از اینکه سایر عامل‌ها چه عملی را انجام می‌دهند، سود بیشتری دارد.

با توجه به تعریف‌های بالا، می‌توان خواص زیر را برای الگوریتم پذیرش با تعویق برشمرد:

- چون در هر مرحله از اجرای الگوریتم، هر مرد حداکثر به یک زن پیشنهاد می‌دهد، هیچ مردی به بیش از یک زن نسبت داده نمی‌شود.
- با توجه به اینکه هر زن در هر مرحله تنها یک پیشنهاد را می‌تواند به‌طور موقت قبول کند، هیچ زنی به بیش از یک مرد نسبت داده نمی‌شود.

^۱incentive-compatible ^۲dominant-strategy incentive-compatible

- با فرض اینکه تعداد مردها و زن‌ها برابر است، خروجی الگوریتم یک جورسازی بین مجموعه زن‌ها و مردها خواهد بود.
 - با توجه به اینکه تعداد زن‌ها و مردها ثابت است و در هر مرحله حداقل یکی از مردها توسط زنی پذیرفته می‌شود، الگوریتم متناهی خواهد بود.
 - هر صورتی از الگوریتم منجر به یک تخصیص پایدار یکتا می‌شود.
 - صورت مرد-پیشنهادگر (زن-پیشنهادگر) یک تخصیص کارآمد برای مردان (زنان) است.
 - صورت مرد-پیشنهادگر (زن-پیشنهادگر) برای مردان (زنان) یک سازوکار انگیزه‌سازگار استراتژی غالب است، اما برای زنان (مردان) انگیزه‌سازگار نیست.
- در بخش بعد، مثالی از الگوریتم ۱ ارائه می‌شود که برگرفته از [۴] است.

۲.۲. مثالی از ازدواج پایدار. شبکه‌ای شامل چهار مرد با ترجیحات

$$m_1 : w_1 \succ w_2 \succ w_3 \succ w_4, \quad m_2 : w_1 \succ w_3 \succ w_2 \succ w_4$$

$$m_3 : w_1 \succ w_2 \succ w_4 \succ w_3, \quad m_4 : w_3 \succ w_4 \succ w_2 \succ w_1$$

و چهار زن با ترجیحات زیر در نظر بگیرید:

$$w_1 : m_4 \succ m_3 \succ m_2 \succ m_1, \quad w_2 : m_4 \succ m_1 \succ m_3 \succ m_2$$

$$w_3 : m_1 \succ m_2 \succ m_4 \succ m_3, \quad w_4 : m_2 \succ m_1 \succ m_4 \succ m_3$$

در مرحله نخست، هر مرد به اولویت اول خودش پیشنهاد می‌دهد. بنابراین مردان m_1, m_2, m_3 به زن w_1 و مرد m_4 به زن w_3 پیشنهاد می‌دهند. زن w_1 با توجه به اینکه سه پیشنهاد دارد به طور موقت، مردی را انتخاب می‌کند که برای او از اولویت بالاتری برخوردار است. در این مثال مرد m_3 توسط زن w_1 به طور موقت پذیرفته می‌شود و مردان m_1 و m_2 توسط زن w_1 رد می‌شوند. زن w_3 تنها یک پیشنهاد از مرد m_4 دارد و لذا او را به طور موقت می‌پذیرد.

در مرحله دوم، با توجه به رد شدن مردان m_1 و m_2 آن‌ها به دومین اولویت خودشان، یعنی به ترتیب w_2 و w_3 پیشنهاد می‌دهند. در این شرایط زن w_3 دارای دو پیشنهاد (یکی از مرحله قبلی و یک پیشنهاد جدید) است. بنابراین با توجه به اینکه برای زن w_3 مرد m_2 از اولویت بیشتری نسبت به m_4 برخوردار است، او مرد m_2 را به طور موقت می‌پذیرد و پیشنهاد مرد m_4 را رد می‌کند. زن w_2 نیز مرد m_1 را به طور موقت می‌پذیرد.

در مرحله سوم، مرد m_4 به زن w_4 پیشنهاد می‌دهد. در این گام با توجه به اینکه هر زن یک پیشنهاد دارد الگوریتم خاتمه می‌یابد. در نتیجه، تخصیص نهایی به صورت زیر است:

$$\{(m_1, w_2), (m_2, w_3), (m_3, w_1), (m_4, w_4)\}$$

در صورتی که از صورت زن-پیشنهادگر الگوریتم استفاده نماییم، تخصیص نهایی به صورت زیر خواهد بود:

$$\{(m_1, w_3), (m_2, w_4), (m_3, w_1), (m_4, w_2)\} \quad (1.2)$$

برای نشان دادن این موضوع که صورت زن-پیشنهادگر الگوریتم پذیرش با تعویق برای مردان انگیزه‌سازگار استراتژی غالب نیست، فرض کنید مرد m_4 به جای ترجیح واقعی خود که در بالا آمد، ترجیح‌بندی زیر را اعلام کند:

$$m_4 : w_3 \succ w_4 \succ w_1 \succ w_2$$

در صورتی که صورت زن-پیشنهادگر الگوریتم را اجرا نماییم، تخصیص نهایی به صورت زیر است:

$$\{(m_1, w_2), (m_2, w_3), (m_3, w_1), (m_4, w_4)\}$$

در حالی که، با ترجیح‌بندی واقعی اش تخصیص نهایی به صورت (۱.۲) بود. در واقع، مرد m_4 با اعلام یک ترجیح‌بندی غیرواقعی می‌تواند با زن w_4 ازدواج کند و در صورتی که راست‌گو باشد در نهایت با زن w_2 ازدواج خواهد کرد. اما او زن w_4 را به زن w_2 ترجیح می‌دهد و لذا مرد m_4 تمایل به مخفی کردن ترجیح‌بندی واقعی خود دارد. بنابراین، صورت زن-پیشنهادگر الگوریتم پذیرش با تعویق برای مردان انگیزه‌سازگار نیست.

۳. مسئله جورسازی یک طرفه و الگوریتم چرخه معاملاتی برتر

فرض کنیم مجموعه $M = \{a_1, \dots, a_m\}$ مجموعه‌ای متناهی از اشیا (مانند خانه، شغل، پروژه‌های موجود، دانشجویان، داوطلبان، و غیره) و $N = \{1, \dots, n\}$ مجموعه‌ای از عامل‌ها باشد به طوری که $m = n$.

هر عامل دارای یک ترتیب خطی^۱ روی مجموعه اشیا است. ترتیب بندی هر عامل نشان دهنده ترجیحات^۲ یک عامل است و از اطلاعات خصوصی وی محسوب می شود. ترجیحات عامل i ام را با نماد \succ_i و نمایه ای از ترجیحات را با نماد $\succ \equiv (\succ_1, \dots, \succ_n)$ نشان می دهیم.

در یک جورسازی فقط یک تخصیص ممکن است، به این معنا که یک نگاشت یک به یک از مجموعه N به مجموعه M است. مجموعه تمام تخصیص ها را با A نشان می دهیم که مجموعه تمام نگاشت های یک به یک از مجموعه N به مجموعه M است. فرض کنیم $a \in A$ یک تخصیص باشد و $j \in M$. نماد $a(i) = j$ به این معناست که تحت تخصیص a شیء j به عامل i اختصاص یافته است. فرض کنید هر یک از افراد، مالک یکی از اشیا باشد (مثلاً صاحب خانه)، این مالکیت اولیه را با نماد a^* نشان می دهیم. الگوریتم چرخه معاملاتی برتر^۳ [۱] یک تخصیص پایدار و امکان پذیر را به خروجی می فرستد. ورودی الگوریتم چرخه معاملاتی برتر، مالکیت اولیه و نمایه ترجیحات افراد و خروجی آن یک تخصیص است. در ادامه با ارائه یک مثال به شرح الگوریتم چرخه معاملاتی برتر می پردازیم و پس از آن الگوریتم را در حالت کلی معرفی می کنیم.

مثال ۱.۳. فرض کنیم تعداد عامل ها و کالاها (مثلاً تعدادی خانه) با یکدیگر برابر و مالکیت اولیه خانه ها به صورت

$$a^*(1) = h_1, a^*(2) = h_3, a^*(3) = h_2, a^*(4) = h_4, a^*(5) = h_5, a^*(6) = h_6$$

و نیز ترجیحات عامل ها روی خانه ها به صورت جدول ۱ باشد. الگوریتم چرخه معاملاتی برتر از تعدادی

\succ_1	\succ_2	\succ_3	\succ_4	\succ_5	\succ_6
h_3	h_3	h_1	h_2	h_2	h_1
h_1	h_2	h_4	h_1	h_1	h_3
h_2	h_1	h_3	h_5	h_6	h_2
h_4	h_5	h_2	h_4	h_4	h_4
h_5	h_4	h_6	h_3	h_5	h_6
h_6	h_6	h_5	h_6	h_3	h_5

جدول ۱. ترجیحات عامل ها

^۱ منظور از یک ترتیب خطی یک رابطه کامل، تراییبی، و پادمتقارن دودویی است.

^۲preference ^۳top trading cycle

گام تشکیل شده است. در هر گام، یک مجموعه از خانه‌ها به مجموعه‌ای از عامل‌ها اختصاص داده می‌شود و این دسته از عامل‌ها و خانه‌ها از مجموعه کل عامل‌ها و خانه‌ها حذف می‌شوند. بنابراین، در هر مرحله از اجرای این الگوریتم تنها عامل‌ها و خانه‌هایی که هنوز اختصاص داده نشده‌اند را در نظر می‌گیریم.

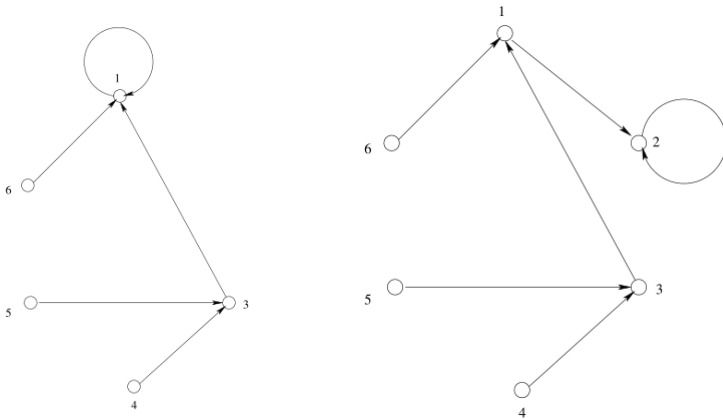
در هر مرحله از اجرای الگوریتم، یک گراف جهت‌دار ساخته می‌شود. مجموعه گره‌های این گراف جهت‌دار در هر مرحله از اجرای الگوریتم، مجموعه عامل‌های باقی‌مانده است. در ابتدا، مجموعه عامل‌های باقی‌مانده برابر N است. در این گراف یک یال جهت‌دار از عامل i به عامل j وجود دارد اگر و تنها اگر عامل j مالک خانه‌ای باشد که برای i بالاترین اولویت را در بین خانه‌های باقی‌مانده دارد. به بیان دیگر، اگر $H \subseteq M$ مجموعه خانه‌های باقی‌مانده در هر مرحله از الگوریتم باشد، آنگاه گراف جهت‌دار تولیدشده در این مرحله یک یال جهت‌دار از عامل i به عامل j^1 دارد اگر و تنها اگر $\alpha^*(j)$ اولین اولویت عامل i روی مجموعه H باشد. هر گره در این گراف دقیقاً یک یال خروجی و احتمالاً چندین یال ورودی دارد. واضح است که در این گراف همواره یک دور^۲ وجود دارد.

شکل ۱(آ) نشان‌دهنده گراف جهت‌دار ساخته‌شده در مرحله نخست اجرای الگوریتم با ترجیحات و مالکیت داده‌شده در این مثال است. در این گراف تنها دور موجود شامل عامل شماره ۲ است، بنابراین به عامل شماره ۲، خانه‌ای که خودش مالک آن بود، یعنی خانه h_3 ، تعلق می‌گیرد و عامل شماره ۲ و خانه h_3 به ترتیب از مجموعه عامل‌ها و مجموعه خانه‌ها حذف می‌شوند و هر دو مجموعه به‌روزرسانی می‌شوند.

در مرحله بعدی الگوریتم، گراف جدیدی بر اساس مجموعه‌های به‌روزرسانی شده و با توجه به ترجیحات عامل‌های باقی‌مانده روی این مجموعه‌ها ساخته می‌شود. این گراف در شکل ۱(ب) نشان داده شده است. در این گراف نیز تنها یک چرخه، که شامل عامل شماره ۱ است، وجود دارد. لذا عامل شماره ۱ و خانه h_1 را از مجموعه‌ها حذف می‌کنیم و دوباره الگوریتم را تکرار می‌کنیم. گراف مراحل بعدی در شکل‌های ۱(ج) و ۱(د) نشان داده شده است. در نهایت تخصیص خروجی الگوریتم به‌صورت زیر خواهد بود:

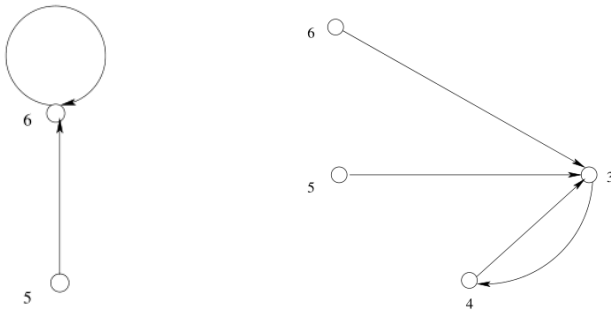
شبه‌کد مکانیسم چرخه معاملاتی برتر در حالت کلی در الگوریتم ۲ نشان داده شده است. برخی از ویژگی‌های الگوریتم چرخه معاملاتی برتر عبارت‌اند از

^۱ عامل i و j می‌تواند هر دو یک عامل نیز باشد.
^۲ در اینجا دور ممکن است طوقه نیز باشد.



(ب) مرحله دوم اجرای الگوریتم

(آ) مرحله اول اجرای الگوریتم



(د) مرحله چهارم اجرای الگوریتم

(ج) مرحله سوم اجرای الگوریتم

شکل ۱. مراحل انجام الگوریتم چرخه معاملاتی برتر

۱	۲	۳	۴	۵	۶
h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6

جدول ۲. تخصیص نهایی الگوریتم چرخه معاملاتی برتر

- خروجی الگوریتم چرخه معاملاتی برتر به گونه ای است که هیچ زیرمجموعه ای از عامل ها نمی توانند با عوض کردن خانه های تخصیص داده شده، وضعیتشان را بهبود دهند. به عبارت دیگر، برای هر زیرمجموعه از عامل ها حداقل یک عامل وجود دارد که با عوض کردن شیء اختصاص داده شده توسط الگوریتم، متضرر خواهد شد.

الگوریتم ۲ - الگوریتم چرخه معاملاتی برتر

گام ۱: قرار دهید $M^1 = M$ و $N^1 = N$. گراف جهت‌دار G^1 را با گره‌های N^1 تشکیل دهید. یک یال جهت‌دار از گره $i \in N^1$ به گره j وجود دارد اگر و تنها اگر $a^*(j)$ اولین اولویت عامل i در مجموعه M^1 باشد.

گام ۲: در هر دور از گراف G^1 اشیا را به افراد تخصیص دهید (عامل‌هایی که در مرحله k ام در گراف G^k به آن‌ها اشیا تخصیص داده می‌شود را با نماد \hat{N}^k و اشیا تخصیص داده‌شده را با نماد \hat{M}^k نشان می‌دهیم).

گام ۳: قرار دهید $N^2 = N^1 \setminus \hat{N}^1$ و $M^2 = M^1 \setminus \hat{M}^1$.

گام k : گراف جهت‌دار G^k را با رأس‌های N^k تشکیل دهید. یک یال جهت‌دار از گره $i \in N^k$ به $j \in N^k$ وجود دارد اگر و تنها اگر $a^*(j)$ اولین اولویت عامل i در مجموعه M^k باشد. اشیا را در هر دور از گراف G^k تخصیص دهید.

قرار دهید $N^{k+1} = N^k \setminus \hat{N}^k$ و $M^{k+1} = M^k \setminus \hat{M}^k$.

اگر N^{k+1} تهی است، آنگاه

توقف کن

در غیراین صورت

گام k را تکرار کن.

- خروجی الگوریتم چرخه معاملاتی برتر برای هر نمایه‌ای از ترجیحات یکتاست.
- الگوریتم چرخه معاملاتی برتر یک سازوکار انگیزه‌سازگار استراتژی‌غالب است که کارایی پارتو دارد.
- هر عامل با شرکت در سازوکار چرخه معاملاتی برتر، خانه‌ای به‌دست خواهد آورد که حداقل به‌اندازه خانه‌ای که مالک آن است برای او ارزش دارد.

۴. سخن آخر

طراحی سازوکار، علم مهندسی بازار است. یکی از مسائل مهم طراحی سازوکارها، نظریه جورسازی در مسائل اجتماعی است. در این مقاله دو دسته مهم از جورسازی‌های موجود، یعنی جورسازی یک‌طرفه و جورسازی دوطرفه، را بررسی کردیم. به‌عنوان نمونه‌ای از جورسازی دوطرفه، مسئله ازدواج پایدار را مطرح و با ارائه مثالی الگوریتم پذیرش با تعویق را بررسی کردیم. همچنین،

مسئله جورسازی یک طرفه به همراه یک مثال و الگوریتم چرخه معاملاتی برتر را به عنوان سازوکاری برای حل آن مسئله ارائه کردیم.

مراجع

- [1] Abdulkadiroğlu, A., Sönmez, T., House allocation with existing tenants, *J. Econom. Theory*, **88** (1999), 233-260.
- [2] Akbarpour, M., Shengwu, L., Oveis Gharan, Sh., Dynamic matching market design (2014), available at <https://arxiv.org/abs/1402.3643>.
- [3] Babaiouff, M., Immorlica, N., Kempe, D., Kleinberg, R., Online auctions and generalized secretary problems, *ACM SIGecom Exchanges*, **7** (2008), 7.
- [4] Gale, D., Shapley, L. S., College admissions and the stability of marriage, *Amer. Math. Monthly*, **69** (1962), 9-15.
- [5] Irving, R. W., An efficient algorithm for the “stable roommates” problem, *Journal of Algorithms*, **6** (1985), 577-595.
- [6] Liu, Q., Mailath, G. J., Postlewaite, A., Samuelson, L., Stable matching with incomplete information, *Econometrica*, **82** (2014), 541-587.
- [7] Roth, A. E., Two-sided matching with incomplete information about others’ preferences, *Games Econom. Behav.*, **1** (1989), 191-209.
- [8] Roth, A. E., The evolution of the labor market for medical interns and residents: a case study in game theory, *Journal of Political Economy*, **92** (1984), 991-1016.
- [9] Roth, A. E., Sonmez, T., Utku Unver, M., Kidney exchange, National Bureau of Economic Research, 2003. doi: 10.3386/w10002

تاریخ ارسال: ۱۳۹۵/۱۰/۲۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۱۲/۵

محسن پوریونه، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی

رایانامه: m_pourpouneh@mehr.sharif.ir

رسول رمضانیان، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده علوم ریاضی

رایانامه: rrezamanian@um.ac.ir