

رتبه تانسور و مسئله بهترین تقریب رتبه پایین

زهرا اردولالو، عفت گلپر رابوکی، و نظام‌الدین مهدوی امیری

چکیده

رتبه یکی از مشخصه‌های مهم هر ماتریس است. رتبه ماتریس A عبارت است از کوچک‌ترین عدد صحیح r به طوری که A را بتوان با استفاده از مجموع r ماتریس رتبه یک نوشت. رتبه ماتریس را می‌توان با استفاده از روش حذف گاوسی یا تجزیه پلکانی به دست آورد. رتبه تانسور A عبارت است از کوچک‌ترین عدد صحیح r به طوری که A به وسیله مجموع r تانسور رتبه یک ایجاد شود. برخلاف رتبه ماتریس، رتبه تانسور به راحتی قابل محاسبه نیست، چنان‌که به جز در مواردی خاص، مسئله‌ای NP-سخت است. تاکنون مطالعات گسترده‌ای در زمینه محاسبه رتبه تانسورهای $2 \times 2 \times 2$ انجام گرفته است و چندین روش شامل محاسبه ابردترمینان، بررسی ساختار درونی تانسور و نیز طبقه‌بندی تانسور به صورت‌های کانونی ارائه شده‌اند. یک مسئله اساسی در کار با ماتریس‌ها و تانسورها، محاسبه بهترین تقریب رتبه پایین است. طبق قضیه اِکارت-یانگ، بهترین تقریب رتبه k در ماتریس‌ها با مجموع k جمله اول از تجزیه مقدار تکین قابل محاسبه است. به علاوه، برای یک ماتریس، محاسبه بهترین تقریب رتبه $k+1$ با استفاده از بهترین تقریب رتبه k ، امکان‌پذیر است. اما برخلاف ماتریس‌ها، ممکن است بسیاری از تانسورها تقریب رتبه پایین مشخص شده‌ای نداشته باشند. این مسئله‌ای تبهگن است و این تانسورها را می‌توان با دنباله‌ای از تانسورهای رتبه پایین، به قدر کافی نزدیک، تقریب زد.

۱. مقدمه

در بسیاری از مسائل داده‌کاوی در علوم و مهندسی، داده‌هایی عددی مطرح هستند که معمولاً با ماتریس‌ها و تانسورها نمایش داده می‌شوند [۸]. تانسورها آرایه‌هایی چندبعدی هستند و با تعمیم بردارها

عبارات و کلمات کلیدی. جبر چندخطی عددی، تانسور، رتبه تانسور، تقریب رتبه پایین، تجزیه تانسور.

و ماتریس‌ها به ابعاد بالاتر تعریف می‌شوند. تانسورها را اولین بار تولیو لوی^۱ و جرجیو ریتچی^۲ مطرح کردند. مفهوم رتبه تانسور و تجزیه‌های تانسوری را هیچکاک^۳ در سال ۱۹۲۷ مطرح کرد [۳]. تجزیه‌های ماتریسی و تانسوری مهم‌ترین عملیاتی هستند که به محاسبه رتبه می‌انجامد. تجزیه CP^۴، یک تانسور را به صورت مجموع تانسورهای رتبه یک بیان می‌کند و عملکردی شبیه به تجزیه مقدار تکین (SVD) دارد. البته، محاسبه تجزیه CP مستلزم روش‌های تکراری است که در نتیجه آن، تقریبی از رتبه تانسور به دست می‌آید. با توجه به پیچیدگی مسئله محاسبه رتبه تانسور، دسته‌های خاصی از آن‌ها، به ویژه، تانسورهای $2 \times 2 \times 2$ ، بررسی شده‌اند. چند روش برای محاسبه رتبه تانسورهای $2 \times 2 \times 2$ ارائه شده است. یک روش به بررسی ابردترمینان می‌پردازد که یک چندجمله‌ای مبتنی بر درایه‌های تانسور است. روش دیگر یک دسته‌بندی ارائه می‌کند به طوری که هر تانسور، با استفاده از تبدیل‌های ناتکین در یکی از این دسته‌ها قرار می‌گیرد. یک مسئله اساسی در کار با ماتریس و تانسور، محاسبه بهترین تقریب رتبه پایین است. برخلاف ماتریس، یک تانسور ممکن است تقریب رتبه پایین با رتبه مشخص شده‌ای نداشته باشد. حتی الگوریتمی که بهترین تقریب رتبه پایین را، در صورت وجود، برای تانسورها محاسبه کند، در دسترس نیست. از این رو، عموماً یک تقریب رتبه پایین با دقت مناسب محاسبه می‌شود. روش‌های تکراری مانند تجزیه CP برای محاسبه یک تقریب رتبه پایین با دقتی مناسب به کار می‌روند. در این مقاله، پس از بررسی رتبه در تانسورها، نخست عدم وجود بهترین تقریب رتبه پایین را مطرح می‌کنیم و در ادامه راهکاری را برای محاسبه یک تقریب رتبه پایین مناسب مرور می‌کنیم.

۲. مفاهیم اولیه

فرض کنید V_1, \dots, V_n و U فضاهای برداری باشند. نگاشت φ از $V_1 \times \dots \times V_n$ به U یک نگاشت چندخطی (n -خطی) است اگر برای هر $v_i, v'_i \in V_i$ که در آن $i = 1, \dots, n$ و برای هر $a \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

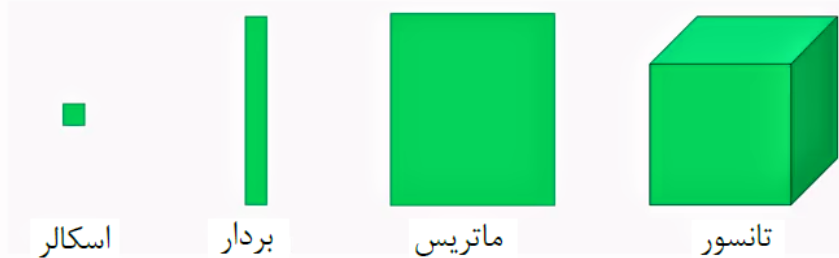
$$\varphi(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_n) = \varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \varphi(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n),$$

$$\varphi(v_1, \dots, av_i, \dots, v_n) = a\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n).$$

تعریف ۱.۲. فرض کنید V_1, \dots, V_n و U فضاهای برداری و $\varphi : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow U$ یک نگاشت چندخطی است. زوج (φ, U) را «حاصل ضرب تانسوری» V_1, \dots, V_n می‌نامیم. در این صورت، U با $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ و $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ با $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ نشان داده می‌شوند [۷].

^۱Tullio Levi ^۲Gergorio Ricci ^۳Hitchcock ^۴CANDECOMP/PARAFAC

عناصر $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ تانسور نامیده می‌شوند. در این مقاله، $V_i = \mathbb{R}^{d_i}$ و از این رو، تانسورهای حقیقی فضای $\mathbb{R}^{d_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^{d_n}$ بررسی می‌شوند. تانسور $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_n}$ از مرتبه n یک آرایه n گانه است. اسکالر، یک تانسور مرتبه صفر، بردار، یک تانسور مرتبه یک و ماتریس، یک تانسور مرتبه دو است [۱]. در شکل ۱، نمایشی از اسکالر، بردار، ماتریس، و یک تانسور مرتبه سه ارائه شده است.



شکل ۱. تانسورهایی از مرتبه صفر تا سه

تانسورها از بردارها و ماتریس‌ها تشکیل می‌شوند. یک تار^۱ را می‌توان یک بردار یا قطعه‌ای تک‌بعدی از تانسور در نظر گرفت که با ثابت نگه‌داشتن همه ابعاد به‌جز یکی از آن‌ها شکل می‌گیرد، در حالی که برش^۲، یک ماتریس یا یک قطعه دو بعدی از تانسور است که با ثابت نگه‌داشتن همه ابعاد به‌جز دو تار آن‌ها به‌دست می‌آید. شکل ۲ تارها و برش‌های مختلف یک تانسور مرتبه سه را نشان می‌دهد. برای کار با تانسورها معمولاً تانسور را به یک صورت ماتریسی تبدیل می‌کنند.

تعریف ۲.۲ (صورت ماتریسی یک تانسور). صورت ماتریسی تانسور $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times \dots \times d_n}$ نسبت به وجه i ام که با $A_{(i)}$ نشان داده می‌شود، ماتریسی با اندازه $(d_1 \dots d_{i-1} d_{i+1} \dots d_n) \times d_i$ است که از چینش مجدد تارهای یک تانسور ساخته می‌شود [۱].

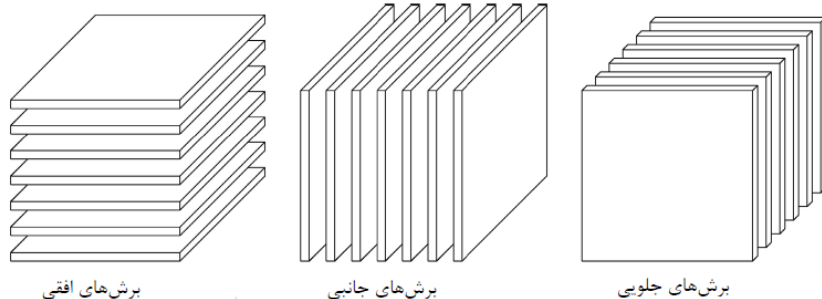
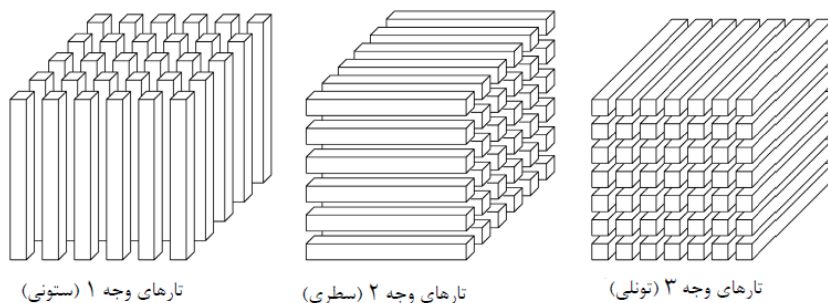
در شکل ۳ صورت ماتریسی یک تانسور $3 \times 4 \times 2$ نسبت به هر سه وجه آن نشان داده شده است.

۳. مفهوم رتبه

مفهوم رتبه در تانسورها را نخستین بار هیچکاک^۴ در سال ۱۹۲۷ مطرح کرد [۳]. پنجاه سال بعد، کراسکل^۵ تعریف دیگری از تانسور را مستقلاً ارائه کرد [۵].

تعریف رتبه تانسور شبیه به تعریف رتبه ماتریس است، اما ویژگی‌های متفاوتی دارد. ابتدا به بیان مفهوم رتبه تانسور می‌پردازیم و سپس برخی از این تفاوت‌ها را بیان می‌کنیم.

^۱fiber ^۲slice ^۳Hitchcock ^۴Kruskal



شکل ۲. ردیف بالا: سه نوع تار از تانسور A ، ردیف پایین: سه نوع برش از تانسور A [۴]

۱.۳. رتبه ماتریس. رتبه ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ عبارت است از تعداد سطرها یا ستون‌های مستقل خطی آن. یک تعریف دیگر برای رتبه ماتریس به این صورت است: رتبه ماتریس عبارت است از کمترین تعداد ماتریس‌های رتبه یک که مجموع آن‌ها ماتریس A را تولید کند، یعنی

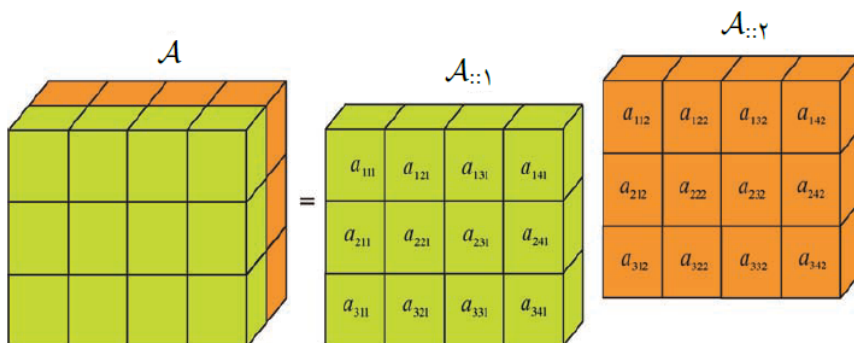
$$\text{rank}(A) = \min\{r : A = \sum_{i=1}^r a_i \otimes b_i, b_i \text{ و } a_i \text{ بردارهای } \}$$

که در آن \otimes نماد حاصل ضرب خارجی است.

۲.۳. رتبه تانسور. در این بخش رتبه تانسورها و رتبه چندخطی^۱ را تعریف می‌کنیم [۹].

تعریف ۱.۳. تانسور $A \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times \dots \times d_n}$ تانسوری رتبه یک نامیده می‌شود اگر بتوان آن را به صورت حاصل ضرب خارجی n بردار نوشت، یعنی $A = x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n$ که در آن $x_i \in \mathbb{R}^{d_i}$. تانسور A دارای رتبه r است اگر بتوان آن را به صورت مجموع r تانسور رتبه یک نوشت و A را نتوان با کمتر از

^۱multilinear rank



$$\mathbf{A}_{(1)} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{111} & a_{121} & a_{131} & a_{141} & a_{112} & a_{122} & a_{132} & a_{142} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} & a_{241} & a_{212} & a_{222} & a_{232} & a_{242} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} & a_{341} & a_{312} & a_{322} & a_{332} & a_{342} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{A}_{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{111} & a_{211} & a_{311} & a_{112} & a_{212} & a_{312} \\ a_{121} & a_{221} & a_{321} & a_{122} & a_{222} & a_{322} \\ a_{131} & a_{231} & a_{331} & a_{132} & a_{232} & a_{332} \\ a_{141} & a_{241} & a_{341} & a_{142} & a_{242} & a_{342} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{A}_{(3)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} a_{111} & a_{211} & a_{311} & a_{121} & a_{221} & a_{321} & a_{131} & a_{231} & a_{331} & a_{141} & a_{241} & a_{341} \\ a_{112} & a_{212} & a_{312} & a_{122} & a_{222} & a_{322} & a_{132} & a_{232} & a_{332} & a_{142} & a_{242} & a_{342} \end{array} \right]$$

شکل ۳. صورت‌های ماتریسی یک تانسور [۱]

r تانسور رتبه یک تولید کرد. به بیان دیگر،

$$\text{rank}(\mathcal{A}) = \min \left\{ r : \mathcal{A} = \sum_{i=1}^r x_1^{(i)} \otimes \dots \otimes x_n^{(i)} \right\}.$$

تعریف ۲.۳. رتبه چندخطی تانسور $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_n}$ که با $\text{mrank}(\mathcal{A})$ یا $\text{rank}_{\boxplus}(\mathcal{A})$ نشان داده می‌شود، یک n تایی شامل رتبه صورت ماتریسی تانسور نسبت به هر وجه آن است و به صورت $\text{rank}_{\boxplus}(\mathcal{A}) = (r_1(\mathcal{A}), \dots, r_n(\mathcal{A}))$ نمایش داده می‌شود، که در آن $r_i(\mathcal{A})$ رتبه $A_{(i)}$ است.

مثال ۳.۳. فرض کنید $\mathcal{A}_{::1}$ و $\mathcal{A}_{::2}$ به صورت زیر برش‌های جلویی تانسور \mathcal{A} باشند

$$\mathcal{A}_{::1} = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_{::2} = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$$

در این صورت

$$\text{rank}(\mathcal{A}) = 2, \quad \text{rank}_{\boxplus}(\mathcal{A}) = (1, 2, 2).$$

قضیه ۴.۳ ([۹]). فرض کنید $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_n}$ ، در این صورت

$$r_i(\mathcal{A}) \leq \min\{\text{rank}(\mathcal{A}), d_i\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

تانسور $\mathcal{A} = (a_{i_1 \dots i_n}) \in \mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_n}$ و ماتریس‌های $L_k = (\ell_{ij}^{(k)}) \in \mathbb{R}^{c_i \times d_i}$ را در نظر می‌گیریم. حاصل ضرب چندخطی \mathcal{A} در L_1, \dots, L_n که به صورت $(L_1, \dots, L_n) \cdot \mathcal{A}$ نشان داده می‌شود، تانسوری مانند $\mathcal{A}' = (a'_{i_1 \dots i_n}) \in \mathbb{R}^{c_1 \times \dots \times c_n}$ است که درایه‌های آن به صورت

$$a'_{i_1 \dots i_n} = \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^{d_1, \dots, d_n} \ell_{i_1 j_1}^{(1)} \cdots \ell_{i_n j_n}^{(n)} a_{j_1 \dots j_n}$$

تعریف می‌شوند. نتایج زیر در مورد رتبه تانسور و رتبه چندخطی اهمیت بالایی دارند [۹].

قضیه ۵.۳. فرض کنید $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_n}$ و $L_k \in \mathbb{R}^{c_i \times d_i}$. در این صورت

$$\text{rank}((L_1, \dots, L_n) \cdot \mathcal{A}) \leq \text{rank}(\mathcal{A}),$$

$$\text{rank}_{\boxplus}((L_1, \dots, L_n) \cdot \mathcal{A}) \leq \text{rank}_{\boxplus}(\mathcal{A}).$$

و اگر L_i ها ماتریس‌هایی ناتکین باشند، آنگاه

$$\text{rank}((L_1, \dots, L_n) \cdot \mathcal{A}) = \text{rank}(\mathcal{A}),$$

$$\text{rank}_{\boxplus}((L_1, \dots, L_n) \cdot \mathcal{A}) = \text{rank}_{\boxplus}(\mathcal{A}).$$

با داشتن بردارهای مستقل خطی می‌توان تانسورهایی با رتبه بالا به صورت زیر تعریف کرد.

لم ۶.۳. فرض کنید برای $1 \leq i \leq n$ بردارهای $x_1^{(i)}, \dots, x_r^{(i)} \in \mathbb{R}^{d_i}$ مستقل خطی باشند. در این صورت، رتبه تانسور $\mathcal{A} = \sum_{j=1}^r x_j^{(1)} \otimes \dots \otimes x_j^{(n)}$ برابر با r است.

رتبه یک ماتریس و رتبه یک تانسور ویژگی‌های متفاوتی دارند که به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

- رتبه یک تانسور با مقادیر حقیقی ممکن است روی میدان اعداد حقیقی و مختلط متفاوت باشد، درحالی‌که رتبه ماتریس‌ها روی این میدان‌ها یکسان است. برای مثال، فرض کنید $x_1, y_1 \in \mathbb{R}^l$ ، $x_2, y_2 \in \mathbb{R}^m$ و $x_3, y_3 \in \mathbb{R}^p$ دوه‌دو مستقل خطی باشند [۷]. برای $k = 1, 2, 3$ قرار دهید $z_k = x_k + iy_k$ و تانسور \mathcal{A} را به صورت زیر تعریف کنید

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4}((\bar{z}_1 \otimes z_2 \otimes \bar{z}_3) + (\bar{z}_1 \otimes \bar{z}_2 \otimes z_3))$$

در این صورت، داریم

$$\text{rank}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}) = 2 < 3 = \text{rank}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}).$$

- الگوریتم مشخصی برای تعیین رتبه تانسور وجود ندارد. درحقیقت، تعیین رتبه تانسور مسئله‌ای NP-سخت است، درحالی‌که، رتبه ماتریس با روش‌های گوناگون مانند حذف گاوسی و تجزیه مقدار تکین در زمانی چندجمله‌ای نسبت به اندازه ماتریس به دست می‌آید.
- ویژگی متفاوت دیگر تانسورها مربوط به ماکسیمم رتبه است. ماکسیمم رتبه، بزرگ‌ترین رتبه‌ای است که برای مجموعه‌ای از تانسورها در فضای $\mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_n}$ در دست است. برای ماتریس $A \in \mathbb{R}^{I \times J}$ ، این رتبه برابر است با $\min\{J, I\}$ ، درحالی‌که برای تانسور $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_n}$ ، ماکسیمم رتبه ممکن است بزرگ‌تر از $\min\{d_1, \dots, d_n\}$ باشد.
- رتبه قابل تعریف دیگری برای تانسورها رتبه نوعی^۱ است. رتبه نوعی هر رتبه‌ای است که احتمال وقوع آن روی یک مجموعه با اندازه مثبت، بزرگ‌تر از صفر باشد [۴]. برای مجموعه‌ای از ماتریس‌های $I \times J$ رتبه نوعی و ماکسیمم رتبه برابر است با $\min(I, J)$ ، درحالی‌که در تانسورها معمولاً رتبه نوعی و ماکسیمم رتبه با هم تفاوت دارند [۴].

۴. تعیین رتبه در تانسورهای $2 \times 2 \times 2$

هرچند برای محاسبه دقیق رتبه تانسورها روش خاصی وجود ندارد، نتایجی برای محاسبه رتبه دسته‌های مشخصی از تانسورها مانند تانسورهای $2 \times 2 \times 2$ ارائه شده است. فرض کنید برش‌های جلویی تانسور \mathcal{T} به صورت زیر در دست باشند

$$\mathcal{T}_{::1} = \begin{bmatrix} t_{111} & t_{121} \\ t_{211} & t_{221} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}_{::2} = \begin{bmatrix} t_{112} & t_{122} \\ t_{212} & t_{222} \end{bmatrix}$$

برای تانسور \mathcal{T} ابردترمینان^۲ $\Delta(\mathcal{T})$ را که یک چندجمله‌ای به صورت زیر است، تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{T}) &= (t_{111}^2 t_{222}^2 + t_{112}^2 t_{221}^2 + t_{121}^2 t_{212}^2 + t_{122}^2 t_{211}^2) - 2(t_{111} t_{112} t_{221} t_{222} \\ &+ t_{111} t_{121} t_{212} t_{222} + t_{111} t_{122} t_{211} t_{222} + t_{112} t_{121} t_{212} t_{221} + t_{112} t_{122} t_{211} t_{221} \\ &+ t_{121} t_{122} t_{212} t_{211}) + 4(t_{111} t_{122} t_{212} t_{221} + t_{112} t_{121} t_{211} t_{222}). \end{aligned}$$

کراسکل با بررسی این چندجمله‌ای نشان داد که رتبه یک تانسور $2 \times 2 \times 2$ حداکثر ۳ است، و دسته‌بندی زیر را ارائه کرد [۸، ۹، ۱۰].

^۱typical rank ^۲hyperdeterminant

قضیه ۱.۴. فرض کنید $\Delta(T)$ ابردترمینان تانسور T از بعد $2 \times 2 \times 2$ باشد. دراین صورت

(۱) اگر $\Delta(T) > 0$ ، آنگاه $\text{rank}(T) = 2$.

(۲) اگر $\Delta(T) < 0$ ، آنگاه $\text{rank}(T) = 3$.

(۳) اگر $\Delta(T) = 0$ ، آنگاه $0 \leq \text{rank}(T) \leq 3$.

چون حالت خاص $\Delta(T) = 0$ رتبه تانسور را به صورت دقیق مشخص نمی‌کند، تن برگ^۱ با بررسی برش‌های مختلف یک تانسور دسته‌بندی جدیدی برای تانسورهای $2 \times 2 \times 2$ به دست آورد. این دسته‌بندی در قضیه زیر آمده است [۱۰].

قضیه ۲.۴. فرض کنید T تانسوری $2 \times 2 \times 2$ باشد. دراین صورت

(۱) تانسور T رتبه صفر دارد اگر و تنها اگر T تانسور صفر باشد.

(۲) تانسور T رتبه یک دارد اگر و تنها اگر همه ۶ برش ممکن T تکین باشند.

(۳) تانسور T رتبه ۲ یا بیشتر دارد اگر و تنها اگر T دست‌کم یک برش ناتکین داشته باشد.

در حالت سوم که تانسور T دست‌کم یک برش ناتکین دارد، بررسی ویژه‌مقدارهای یک ماتریس خاص نتیجه‌بخش است [۱۰].

قضیه ۳.۴. فرض کنید T تانسوری $2 \times 2 \times 2$ و T_1 و T_2 برش‌های جلویی آن باشند به طوری که T_1 ناتکین است. دراین صورت

(۱) اگر $T_2 T_1^{-1}$ دو ویژه‌مقدار حقیقی و متمایز داشته (و در نتیجه قطری‌شدنی) باشد، آنگاه رتبه T برابر با ۲ است.

(۲) اگر $T_2 T_1^{-1}$ دست‌کم دو ویژه‌مقدار مختلط داشته باشد، آنگاه رتبه T برابر با ۳ است.

(۳) اگر $T_2 T_1^{-1}$ دو ویژه‌مقدار حقیقی داشته (اما قطری‌ناشدنی) باشد، آنگاه رتبه T برابر با ۳ است.

۵. تعیین رتبه برای تانسورهای $L \times M \times N$

برای تعیین رتبه تانسورهای $2 \times p \times p$ روش تن برگ، در قضیه زیر، بسیار سودمند است [۱۰].

قضیه ۱.۵. فرض کنید $T \in \mathbb{R}^{p \times p \times 2}$ و T_1 و T_2 برش‌های جلویی از آن باشند به طوری که T_1 ناتکین است. دراین صورت

^۱Ten Berge

(۱) اگر ماتریس $T_1 T_1^{-1}$ دارای p ویژه مقدار حقیقی و متمایز (و در نتیجه قطری شدنی) باشد، آنگاه $\text{rank}(T) = p$.

(۲) اگر $T_1 T_1^{-1}$ دست کم دو ویژه مقدار مختلط داشته باشد، آنگاه $\text{rank}(T) \geq p + 1$.

(۳) اگر $T_1 T_1^{-1}$ دارای p ویژه مقدار حقیقی (ولی قطری ناشدنی) باشد، آنگاه $\text{rank}(T) \geq p + 1$.

(۴) اگر $T_1 T_1^{-1}$ دارای k جفت مزدوج ویژه مقدار مختلط باشد، آنگاه $\text{rank}(T) \leq p + k$.

کراسکل نشان داد که برای تانسورهای $2 \times p \times p$ ، ماکسیمم رتبه ممکن برای p زوج برابر با $3p/2$ ، و برای p فرد برابر با $(3p - 1)/2$ است [۵].

ملاحظه ۲.۵. رتبه تانسور $2 \times p \times p$ با دست کم یک برش $p \times p$ ناتکین برابر p است. اگر همه برش های ممکن T تکین باشند، آنگاه رتبه T برابر با ۱ است.

محاسبه رتبه تانسورهای $L \times M \times N$ ، با شرط $N \neq 2$ ، و نیز تانسورهای از مرتبه بالاتر به سادگی امکان پذیر نیست و تاکنون راه حل مناسبی برای آن ارائه نشده است. اگرچه هیچ الگوریتم ویژه ای برای محاسبه رتبه این نوع تانسورها وجود ندارد، می توان تقریبی از رتبه را با استفاده از روش تکراری تجزیه CP محاسبه کرد. تجزیه CP اغلب با استفاده از الگوریتم کمترین مربعات متناوب^۱ محاسبه می شود که ماتریس های عامل را در هر مرحله محاسبه و بهنگام می کند. یک تجزیه CP با m مولفه از تانسور $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}$ ، با حل مسئله مینم سازی $\min_{\mathcal{G}} \|\mathcal{T} - \mathcal{G}\|$ که در آن

$$\mathcal{G} = \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k \otimes b_k \otimes c_k$$

هم ارز است [۴].

۱.۵. محاسبه رتبه در متلب. در نرم افزار متلب، الگوریتم کمترین مربعات متناوب با استفاده از جعبه ابزار تانسور^۲ و با دستور `[P]=cp_als(T,n)` اجرا می شود. این دستور، تانسور T را به حاصل ضرب یک تانسور هسته و ماتریس های عامل تجزیه می کند و در سلول P قرار می دهد. دستور `full(P)` عوامل تجزیه را در هم ضرب می کند و تقریبی از تانسور T را بر اساس تجزیه CP محاسبه می کند. برای سنجش نزدیکی تجزیه و تانسور T معیار زیر را به کار می گیرند

$$\text{Final - fit} = 1 - \frac{\|\mathcal{T} - \text{full}(P)\|_F}{\|\mathcal{T}\|_F}.$$

^۱alternating least squares (ALS) ^۲<http://www.sandia.gov/~tgkolda/TensorToolbox/index-2.5.html>

هرقدر Final-fit به ۱ نزدیکتر باشد، تقریب بهتری در دست است. با اجرای الگوریتم برای n های مختلف و با ملاحظه Final-fit می توان تقریبی از رتبه تانسور را به دست آورد. هرگاه به ازای n ای مقدار Final-fit کاملاً به ۱ نزدیک باشد، مقدار آن n تقریباً برابر با رتبه تانسور است [۸].

۶. مسئله بهترین تقریب رتبه پایین

در مسئله بهترین تقریب رتبه پایین برای $A \in \mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_n}$ ، هدف محاسبه یک تانسور رتبه k با شرط $k < \text{rank}(A)$ است که از میان همه تانسورها با رتبه نایبتر از k کمترین فاصله را از A داشته باشد. به عبارت دیگر، هدف پیدا کردن تانسوری مانند B با رتبه نایبتر از k است به گونه ای که جواب مسئله مینیم سازی زیر باشد

$$\min_{\text{rank}(B) \leq k} \|A - B\|.$$

مهم ترین نتایج موجود در این زمینه که در [۹] آمده اند عبارت است از

- (۱) مسئله بهترین تقریب رتبه k برای بسیاری از k ها بد حالت^۱ است؛
 - (۲) مسئله بهترین تقریب رتبه k برای بسیاری از تانسورها بد حالت است؛
 - (۳) جوابهای ضعیف^۲ راهکاری برای مقابله با بدحالی مسئله بهترین تقریب رتبه k است.
- در ادامه، به بررسی این نتایج می پردازیم.

۱.۶. تقریب رتبه پایین و فشرده سازی ماتریس. در برخی از کاربردهای عملی، اغلب با ماتریسی بسیار بزرگ سروکار داریم و می خواهیم آن را با یک ماتریس از رتبه پایین تر، که فاصله کمی با آن دارد، تقریب بزنیم. برای این کار می توان تجزیه مقدار تکین را به کار برد [۲].

قضیه ۱.۶ (تجزیه مقدار تکین). هر ماتریس A از مرتبه $m \times n$ با شرط $m \geq n$ را می توان به صورت

$$A = U \begin{pmatrix} \Sigma \\ \circ \end{pmatrix} V^T$$

تجزیه کرد که در آن $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ و $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس هایی متعامد و $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ قطری است:

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0.$$

بنابر تجزیه مقدار تکین، ماتریس A را می توان به صورت مجموع حداکثر n ماتریس رتبه یک نوشت

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \dots + \sigma_n u_n v_n^T \quad (۱.۶)$$

که در آن u_i ها و v_i ها به ترتیب ستون‌های U و V هستند. تجزیه مقدار تکین، بهترین تقریب رتبه k را برای ماتریس A به دست می‌دهد [۲].

قضیه ۲.۶ (اکارت-یانگ). گیریم A یک ماتریس $m \times n$ باشد و $k < \text{rank}(A)$. در این صورت

$$\min_{\text{rank}(B)=k} \|A - B\|_2 = \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$$

که در آن A_k مجموع k جمله اول در (۱.۶) است.

۲.۶. تقریب رتبه پایین برای تانسور. همان‌گونه که بیان شد، برای ماتریسی با رتبه r ، بهترین تقریب رتبه k با در نظر گرفتن k جمله اول از مجموع (۱.۶) به دست می‌آید. به علاوه، بهترین تقریب رتبه $k+1$ را می‌توان با استفاده از بهترین تقریب رتبه k محاسبه کرد. تعمیم این مطلب به تانسورها به سادگی امکان‌پذیر نیست و در بسیاری از موارد تانسور مورد نظر بهترین تقریب رتبه پایین با رتبه مشخص شده ندارد و در صورت وجود چنین تقریبی، تقریب‌های رتبه بالاتر را نمی‌توان با استفاده از تقریب‌های رتبه پایین‌تر بهنگام کرد. نتیجه زیر این مطلب را بیان می‌کند [۹].

قضیه ۳.۶. فرض کنید $n \geq 3$ و به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$ ، $d_i \geq 2$. در این صورت برای هر r که $2 \leq r \leq \min\{d_1, \dots, d_n\}$ ، تانسور $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_n}$ با رتبه r و ثابت $s < r$ وجود دارند به طوری که \mathcal{A} بهترین تقریب رتبه s ندارد.

برای بررسی بیشتر این موضوع روی فضای $\mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_n}$ ، زیر فضای توپولوژیکی \mathcal{S}_r به صورت

$$\mathcal{S}_r(d_1, \dots, d_n) = \{\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_n} : \text{rank}(\mathcal{A}) \leq r\}$$

و بستار آن با نماد $\overline{\mathcal{S}}_r(d_1, \dots, d_n)$ را در نظر بگیرید. این زیرفضا برای $n = 2$ بسته است، یعنی $\mathcal{S}_r = \overline{\mathcal{S}}_r$. اما برای $n \geq 3$ زیرفضای \mathcal{S}_r لزوماً (یا حتی معمولاً) بسته نیست. علی‌رغم این، برای ماتریس‌ها، مجموعه $\{A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \text{rank}(A) \leq r\}$ بسته است. به بیان دیگر، اگر $\{A_i\}$ دنباله‌ای از ماتریس‌های $m \times n$ باشد که $\text{rank}(A_i) \leq r$ و $A_i \rightarrow A$ ، آنگاه لزوماً $\text{rank}(A) \leq r$. به این ترتیب، دنباله‌ای از ماتریس‌های رتبه بالا به ماتریسی از همان رتبه یا رتبه‌ای پایین‌تر همگرا می‌شود. این گزاره برای تانسورها برقرار نیست و یک دنباله از تانسورها با رتبه نایبشتر از r وجود دارد که می‌تواند به تانسوری با رتبه بزرگ‌تر از r همگرا شود. مثال زیر را ببینید.

مثال ۴.۶. تانسور \mathcal{A}_ε را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \circ & \begin{matrix} | & | \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{matrix} & \begin{matrix} | \\ \hline \frac{1}{\varepsilon} \\ \hline \end{matrix} \\ \begin{matrix} | \\ \hline \frac{1}{\varepsilon} \\ \hline \end{matrix} & \begin{matrix} | & | \\ \hline \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} \\ \hline \end{matrix} & \begin{matrix} | \\ \hline \frac{1}{\varepsilon} \\ \hline \end{matrix} \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ \hline \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \hline \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \hline \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ \hline \circ \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \hline \circ \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \hline \circ \end{pmatrix}.$$

به سادگی می توان نشان داد که $\text{rank}(A_\varepsilon) = 2$ ، در حالی که، دنباله تانسورهای $\{A_\varepsilon\}$ به تانسور زیر با رتبه ۳ همگراست

$$A = \begin{pmatrix} \circ & 1 & 1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ 1 & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}.$$

برای تانسورها، وجود بهترین تقریب رتبه پایین با رتبه مشخص شده، تنها برای تانسورهای رتبه یک تضمین شده است و دنباله تانسورهای رتبه یک تنها به تانسوری با رتبه یک یا صفر همگرا می شود. به طور خلاصه، هر ماتریس بهترین تقریب رتبه k دارد، و هر تانسور با رتبه دلخواه بهترین تقریب رتبه یک دارد. برای تانسورهای با رتبه بزرگتر از یک، گزاره زیر را داریم [۹].

گزاره ۵.۶. فرض کنید $r \geq 2$ و $n \geq 3$. با توپولوژی نرمی مفروض روی $\mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_n}$ ، گزاره های زیر هم/رزند

(الف) مجموعه $\mathcal{S}_r(d_1, \dots, d_n)$ بسته نیست.

(ب) دنباله $\{A_i\}$ از تانسورهای $A_i \in \mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_n}$ با شرط $\text{rank}(A_i) \leq r$ وجود دارد که به تانسور $B \in \mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_n}$ با شرط $\text{rank}(B) > r$ همگراست.

لم ۶.۶. فرض کنید به ازای $i = 1, 2, 3$ ، $x_i, y_i \in \mathbb{R}^{d_i}$ و تانسور A به صورت زیر تعریف شود

$$A = x_1 \otimes x_2 \otimes y_3 + x_1 \otimes y_2 \otimes x_3 + y_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times d_3}.$$

در این صورت $\text{rank}(A) = 3$ اگر و تنها اگر به ازای $i = 1, 2, 3$ مجموعه $\{x_i, y_i\}$ مستقل خطی باشد.

در ادامه، رده ای از تانسورهای رتبه ۳ را معرفی می کنیم که بهترین تقریب رتبه ۲ ندارند [۹].

قضیه ۷.۶. فرض کنید به ازای $i = 1, 2, 3$ بردارهای $x_i, y_i \in \mathbb{R}^{d_i}$ مستقل خطی باشند. در این صورت تانسور

$$A = x_1 \otimes x_2 \otimes y_3 + x_1 \otimes y_2 \otimes x_3 + y_1 \otimes x_2 \otimes x_3$$

رتبه ۳ دارد و آنرا می توان به طور دلخواه با تانسورهای رتبه ۲ تقریب زد. بنابراین، A بهترین تقریب رتبه ۲ ندارد.

اثبات. طبق لم ۶.۶، تانسور A رتبه ۳ دارد. برای $n \in \mathbb{N}$ ، دنباله A_n را به صورت

$$A_n = n(x_1 + \frac{1}{n}y_1) \otimes (x_2 + \frac{1}{n}y_2) \otimes (x_3 + \frac{1}{n}y_3) - nx_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \quad (2.6)$$

تعریف کنید. روشن است که $\text{rank}(A_n) \leq 2$. ازسوی دیگر،

$$A_n - A = \frac{1}{n}(y_1 \otimes y_2 \otimes x_3 + y_1 \otimes x_2 \otimes y_3 + x_1 \otimes y_2 \otimes y_3) + \frac{1}{n}(y_1 \otimes y_2 \otimes y_3)$$

بنابراین، وقتی $n \rightarrow \infty$ داریم $\|A_n - A\|_F \rightarrow 0$. ازاین رو، $\{A_n\}$ به A همگراست و می توان A را به طور دلخواه نزدیک با A_n ها تقریب زد. درنتیجه، A بهترین تقریب رتبه ۲ ندارد. \square

در قضیه ۷.۶ دیدیم که یک دنباله از تانسورهای رتبه ۲ می تواند به تانسوری از رتبه ۳ همگرا شود. این مفهوم، پرش رتبه نام دارد و آن را می توان به تانسورهای با مرتبه های بالاتر تعمیم داد [۹].

قضیه ۸.۶. فرض کنید $n \geq 3$ و به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$ ، $d_i \geq 2$. مسئله یافتن یک بهترین تقریب رتبه k که $k = 2, \dots, \min\{d_1, \dots, d_n\}$ برای تانسوری در فضای $\mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_n}$ عموماً جواب ندارد. همچنین، تانسور $A \in \mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_n}$ با $\text{rank}(A) = k + 1$ وجود دارد به طوری که بهترین تقریب رتبه k ندارد. این نتیجه به انتخاب نرم بستگی ندارد.

۳.۶. واگرایی ضرایب. سوال مهمی که اینجا مطرح می شود این است که دلیل عدم موفقیت در رسیدن به یک تقریب رتبه پایین مناسب چیست؟ یک پاسخ این است که هم زمان نمی توان همه ضرایب یک دنباله از تانسورها را کراندار نگه داشت. برای روشن شدن این موضوع، به مثال زیر توجه می کنیم.

مثال ۹.۶. فرض کنید A_n به صورت (۲.۶) باشد. همان طور که می بینیم، وقتی $n \rightarrow \infty$ جمله های برداری همگرا هستند، ولی ضرایب واگراست. در حقیقت، پرش رتبه زمانی رخ می دهد که برخی از ضرایب دنباله واگرا باشند.

نکته قابل توجه این است که برای تانسور A که بهترین تقریب رتبه k ندارد، مینیم سازی عبارت

$$\left\| A - \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i \otimes v_i \otimes w_i \right\|$$

به واگرا شدن برخی از ضرایب می انجامد.

۷. جواب های ضعیف

اگر یک تانسور رتبه r حد دنباله ای از تانسورهای رتبه پایین تر باشد، بهترین تقریب رتبه پایین برای این تانسور وجود ندارد. همان گونه که بررسی کردیم، دلیل اصلی بسته نبودن زیر فضای $\mathcal{S}_r(d_1, \dots, d_n)$ است. برای محاسبه یک جواب تقریبی می توان از عناصر زیر فضای $\overline{\mathcal{S}}_r$ به جای \mathcal{S}_r استفاده کرد. در واقع،

در پی راه‌حلی جایگزین برای محاسبه بهترین تقریب رتبه پایین هستیم. برای تانسورهایی که بهترین تقریب رتبه پایین ندارند، از یک جواب ضعیف استفاده می‌شود. بدین منظور، ابتدا مفهوم رتبه مرزی^۱ را تعریف می‌کنیم [۶].

تعریف ۱.۷ (رتبه مرزی). تانسور $A \in \mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_n}$ دارای رتبه مرزی r است اگر

$$A \notin \bar{\mathcal{S}}_{r-1}(d_1, \dots, d_n) \quad \text{و} \quad A \in \bar{\mathcal{S}}_r(d_1, \dots, d_n)$$

رتبه مرزی تانسور A را با $\text{rank}(A)$ نشان می‌دهیم.

یک تعریف دیگر برای رتبه مرزی به صورت زیر است [۷].

$$\text{rank}(A) = \min \left\{ r : \inf_{\text{rank}(B) \leq r} \|A - B\| = 0 \right\}.$$

روشن است که برای ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ داریم $\text{rank}(A) = \text{rank}(A)$. باین حال، برای تانسور $A \in \mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_n}$ همواره $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A)$. چون $\mathcal{S}_\circ = \bar{\mathcal{S}}_\circ = \mathcal{S}_\circ$ ، بنابراین وقتی $\text{rank}(A) = \text{rank}(A)$ ، $\text{rank}(A) \leq 2$.

مثال ۲.۷ ([۷]). فرض کنید $e_1 = (1, 0)^T$ ، $e_2 = (0, 1)^T$ و

$$A = e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} \circ & 1 & 1 & \circ \\ 1 & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}.$$

در این صورت $\text{rank}(A) = 3$. اکنون دنباله تانسوری $\{A_\varepsilon\}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$A_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon} e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} \circ & 1 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

در این صورت $A_\varepsilon \rightarrow A$ ، $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon = A$ ، و چون $\text{rank}(A_\varepsilon) \leq 2$ ، بنابراین $\text{rank}(A) = 2$. به این ترتیب، دنباله‌ای از تانسورهای رتبه ۲، به یک تانسور رتبه ۳ همگرا شد و این نشان‌دهنده شکافی بین رتبه تانسور و رتبه مرزی آن است.

دلیل اصلی بدحالت بودن مسئله بهترین تقریب رتبه پایین، یکسان نبودن رتبه و رتبه مرزی یک تانسور است [۷، ۹].

قضیه ۳.۷. فرض کنید $\text{rank}(A) = r$ و $\text{rank}(A) = s$. اگر $s < r$ ، آنگاه تانسور A بهترین تقریب رتبه s ندارد.

^۱border rank

در روش جواب ضعیف برای محاسبه تقریب رتبه پایین از عناصر \bar{S}_r استفاده می‌شود. فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{d_1 \times \dots \times d_n}$ که در آن $d_i \geq 2$ و $n \geq 3$. در این صورت راهی برای تضمین اینکه مسئله یافتن بهترین تقریب رتبه k برای تانسور A همیشه جوابی سودمند دارد آن است که به جای حل مسئله تقریب رتبه k به صورت

$$\min_{\text{rank}(B) \leq k} \|A - B\|$$

مسئله تقریب رتبه مرزی k به صورت زیر را حل کرد

$$\min_{\text{rank}(B) \leq k} \|A - B\|. \quad (1.7)$$

چون $\bar{S}_2(d_1, d_2, d_3) \subseteq S_3(d_1, d_2, d_3)$ ، بنابراین تانسورهای با بعد ۳ و رتبه ۲ به تانسوری با رتبه حداکثر ۳ همگرا می‌شوند. هر تانسور در $\bar{S}_2(d_1, d_2, d_3)$ را می‌توان به یکی از دو صورت

$$y_1 \otimes x_2 \otimes x_3 + x_1 \otimes y_2 \otimes x_3 + x_1 \otimes x_2 \otimes y_3 \quad (2.7)$$

یا

$$x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 + y_1 \otimes y_2 \otimes y_3 \quad (3.7)$$

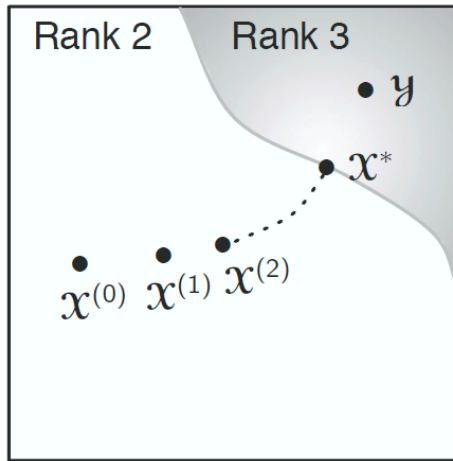
نوشت [۹].

فرض کنید $A \in R^{d_1 \times d_2 \times d_3}$ به طوری که $d_i \geq 2$ و $\text{rank}(A) = 3$. یک جواب ضعیف برای مسئله بهترین تقریب رتبه پایین از A را می‌توان با انتخاب B در مسئله (۱.۷) از عبارت (۲.۷) یا (۳.۷) به طوری که B کمترین فاصله را از A داشته باشد، به دست آورد. اگر B به صورت (۳.۷) انتخاب شود، یعنی $\text{rank}(B) = 2$ ، آنگاه A بهترین تقریب رتبه ۲ دارد. اگر B به صورت (۲.۷) انتخاب شود، آنگاه طبق قضیه ۷.۶، تانسور B حد دنباله‌ای از تانسورهای رتبه ۲ است و بنابراین A بهترین تقریب رتبه ۲ ندارد، درحالی‌که B بهترین تقریب رتبه مرزی ۲ برای A است.

تانسورهایی که رتبه مرزی آن‌ها کمتر از رتبه خود تانسور است تبهگن^۱ نامیده می‌شوند. تانسورهای تبهگن بهترین تقریب رتبه پایین ندارند [۸]. شکل ۴ تانسور \mathcal{A} را نشان می‌دهد که با دنباله‌ای از تانسورهای رتبه ۲ تقریب زده شده است. دنباله $\{\mathcal{X}^{(n)}\}$ به دلخواه به \mathcal{A} نزدیک است و بهترین تقریب روی مرز بین تانسورهای رتبه ۲ و رتبه ۳ قرار دارد. به هر حال، چون فضای تانسورهای رتبه ۲ بسته نیست، این دنباله ممکن است به تانسور \mathcal{X}^* با رتبه ۳ همگرا شود [۴]. بهترین تقریب الزاماً روی مرز فضای تانسورهای رتبه ۲ و رتبه ۳ قرار دارد.

مجموعه تانسورهایی که بهترین تقریب رتبه k ندارند (دست‌کم برای برخی از k ها) اندازه لیگ مثبت دارد [۹]. به علاوه، تانسورهای $2 \times p \times p$ با رتبه $p + 1$ بهترین تقریب رتبه p ندارند [۴].

^۱degenerate



شکل ۴. تصویر دنباله‌ای از تانسورها که به تانسوری با رتبه بالاتر همگرا می‌شود [۴].

تانسورهای $2 \times 2 \times 2$ با رتبه ۳ که ابردترمینان برابر با صفر دارند، در مرز بین مجموعه تانسورهای رتبه ۳ با $\Delta < 0$ و تانسورهای رتبه ۲ با $\Delta > 0$ قرار دارند. بنابراین، این تانسورها می‌توانند به دلخواه به تانسورهای رتبه ۲ نزدیک شوند و این بدین معنی است که تابع

$$f(A, B, C) = \left\| \mathcal{T} - \sum_{r=1}^2 \lambda_r a_r \otimes b_r \otimes c_r \right\| \quad (4.7)$$

مینیمم ندارد. برای یافتن یک تقریب رتبه ۲ در این تانسورها، تجزیه CP با استفاده از الگوریتم کمترین مربعات متناوب به شکست می‌انجامد.

۱.۷. دسته‌بندی تانسورهای $2 \times 2 \times 2$. در این بخش، هم‌ارزی تانسورها در $\mathbb{R}^{2 \times 2 \times 2}$ را تحت عمل ضرب چندخطی ماتریس‌ها بیان می‌کنیم و یک دسته‌بندی از تانسورهای $2 \times 2 \times 2$ ارائه می‌دهیم. این هم‌ارزی از طریق ضرب چندخطی ماتریس‌های ناتکین به دست می‌آید. چنین تانسورهایی را صورت‌های کانونی^۱ می‌نامند.

در این دسته‌بندی، رتبه مرزی، رتبه، رتبه چندخطی، و علامت ابردترمینان تانسورهای کانونی مشخص است. برای تانسورهای $2 \times 2 \times 2$ ، هشت صورت کانونی مجزا وجود دارد و بقیه تانسورهای متعلق به $\mathbb{R}^{2 \times 2 \times 2}$ با یکی از این صورت‌های کانونی هم‌ارزند و مشخصات یکسانی دارند. قضیه زیر به روشنی این مطلب را بیان می‌کند.

^۱canonical forms

جدول ۱. صورت‌های کانونی تانسورهای $2 \times 2 \times 2$

تانسور	علامت Δ	rank_{\boxplus}	rank	$\overline{\text{rank}}$
$D_0 = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$	\circ	(\circ, \circ, \circ)	\circ	\circ
$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$	\circ	$(1, 1, 1)$	۱	۱
$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ & \circ \end{pmatrix}$	\circ	$(1, 2, 2)$	۲	۲
$D'_2 = \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ & 1 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$	\circ	$(2, 1, 2)$	۲	۲
$D''_2 = \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 1 & \circ \end{pmatrix}$	\circ	$(2, 2, 1)$	۲	۲
$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 1 \end{pmatrix}$	+	$(2, 2, 2)$	۲	۲
$D_3 = \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ & 1 \\ \circ & \circ & 1 & \circ \end{pmatrix}$	\circ	$(2, 2, 2)$	۳	۲
$G_3 = \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ & -1 \\ \circ & 1 & \circ & \circ \end{pmatrix}$	-	$(2, 2, 2)$	۳	۳

قضیه ۴.۷ ([۹]). هر تانسور در $\mathbb{R}^{2 \times 2 \times 2}$ از طریق تبدیل‌های ناتکین دقیقاً با یک صورت کانونی در جدول ۱ هم‌ارز است.

۸. جمع‌بندی

روش‌های چندخطی در فیزیک، روانشناسی، بینایی ماشین، پردازش صدا و تصویر، و بسیاری از زمینه‌های دیگر کاربرد دارند. با توجه به رشد داده‌ها، تشخیص روابط پنهان بین داده‌های ذخیره شده در تانسور و صرفه‌جویی در زمان پردازش و حافظه موردنیاز از مهم‌ترین مسائل به‌شمار می‌روند. یکی از مهم‌ترین مشخصه‌های یک تانسور رتبه است که از آن در مسئله محاسبه بهترین تقریب رتبه پایین استفاده می‌شود. در این مقاله، ما به بررسی چگونگی محاسبه رتبه تانسورها پرداختیم. هرچند مسئله محاسبه رتبه تانسور مسئله‌ای NP-سخت است، روش‌های مناسبی برای محاسبه رتبه برخی از تانسورها وجود دارند. ارتباط بین درایه‌ها و تکین‌ها یا ناتکین‌ها هر یک از برش‌ها نقش‌هایی اساسی در تعیین رتبه یک تانسور دارند. محاسبه تقریب رتبه پایین برای ماتریس‌ها از جمله مسائل اساسی است که در بسیاری از زمینه‌ها از جمله

پردازش صدا و تصویر و سیستم‌های توصیه‌گر^۱ کاربرد دارد. مسئله تقریب رتبه پایین، به منظور صرفه‌جویی در زمان و حافظه مورد نیاز و بررسی روابط پنهان داده‌ها، تقریبی مناسب از داده‌های حجیم ارائه می‌کند که موضوعی مورد توجه و البته چالش برانگیز است.

مراجع

- [1] Cichocki, A., Zdunek, R. L., Phan, A. H., Amari, S., *Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations: Applications to Exploratory Multi-way Data Analysis and Blind Source Separation*, John Wiley and Sons, London, 2009.
- [2] Golub, G. H., Van Loan, C. F., *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2013.
- [3] Hitchcock, F. I., The expression of tensor or a polyadic as a sum of products, *J. Math. Phys.*, **6** (1927), 164-189.
- [4] Kolda, T. G., Bader, B. W., Tensor decompositions and applications, *SIAM Rev.*, **51** (2009), 455-500.
- [5] Kruskal, J. B., Rank, decomposition and uniqueness for 3-way and N -way arrays, in *Multiway Data Analysis*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989, 7-18.
- [6] Landsberg, J. M., The border rank of the multiplication of 2×2 matrices is seven, *J. Amer. Math. Soc.*, **19** (2006), 447-459.
- [7] Lim, L. H., Tensors and Hyprematrices, in *Handbook of Linear Algebra*, 2nd ed., L. Hogben, ed., CRC Press, Boca Raton, FL, 2013.
- [8] Rovi, A., Analysis of $2 \times 2 \times 2$ Tensors, Master's thesis, Linköping University, 2010.
- [9] Silva, V. D., Lim, L. H., Tensor rank and the ill-posedness of the best low-rank approximation problem, *SIAM J. Matrix Anal.*, **30** (2008), 1084-1127.
- [10] Ten Berge, J. M. F., Kruskal's polynomial for $2 \times 2 \times 2$ arrays and a generalization to $2 \times n \times n$ arrays, *Psychometrika*, **56** (1991), 631-636.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۶/۹/۲۸؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۲/۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۲/۲

زهرا اردولالو: دانشگاه قم، دانشکده علوم پایه

رایانامه: ordolalo@chmail.ir

عفت گلپرابوکی: دانشگاه قم، دانشکده علوم پایه

رایانامه: g.raboky@qom.ac.ir

نظام‌الدین مهدوی امیری: دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی

رایانامه: nezamm@sharif.edu