

دایره یا مربع، کدام متقارن تر است؟

آرش رستگار

چکیده

برای پاسخ دادن به این سؤال که بین دایره و مربع کدام یک متقارن تر است، گروه تقارن‌های آن‌ها را بررسی می‌کنیم و فضایی را که گروه تقارن بزرگ‌تری داشته باشد متقارن‌تر محسوب می‌کنیم. در ادامه، گروه تقارن‌های مکعب و کره دویعدی را نیز مقایسه می‌کنیم. در پایان، سؤالی در مورد ساختار همسان‌ریختی‌های حافظ مساحت کره دویعدی خواهیم پرسید و سؤال‌های مشابهی را برای حالت سه بعدی بررسی خواهیم کرد.

۱. مقدمه

مفهوم زاویه و دوران از قدیمی‌ترین مفاهیم در هندسه اقلیدسی‌اند. البته مفهوم دوران به‌عنوان یک تبدیل را اولین بار لایبنیتس مطرح کرد و آن‌طور که مستند شده است لایبنیتس ایده تبدیل را از ابن‌هیثم اقتباس کرده است؛ او مطالعاتی درباره عدسی‌ها کرده است و تصویر یک شکل هندسی در عدسی را تبدیل یافته آن می‌دانست. این ایده که یک قضیه را با استفاده از یک تبدیل به یک حالت خاص تحویل و سپس آن را اثبات و دوباره آن را با استفاده از یک تبدیل به شکل اول برگردانیم، از آن ابن‌هیثم است. بسیار طول کشید تا این نوع اثبات اقلیدسی، که مشخصه آن ناوردایی تحت یک تبدیل است، رسمیت پیدا کند. در زمان لایبنیتس، به‌طور غیرمستقیم، مفهوم گروه تبدیلات مطرح شد؛ هرچند که در آن دوره هنوز مفهوم گروه رسمیت پیدا نکرده بود. مفهوم گروه توسط گالوا از اثبات حل‌ناپذیری معادلات درجه پنجم کلی، بیرون کشیده شد و در اولین کتاب جبر نوشته ژوردان در اواخر قرن نوزدهم منجر به ظهور بسیاری از گروه‌های کلاسیک شد.

عبارات و کلمات کلیدی. گروه تقارن‌های دایره و مربع، همسان‌ریختی تکه‌ای خطی، تبدیل حافظ اندازه، پیچش، دوران.

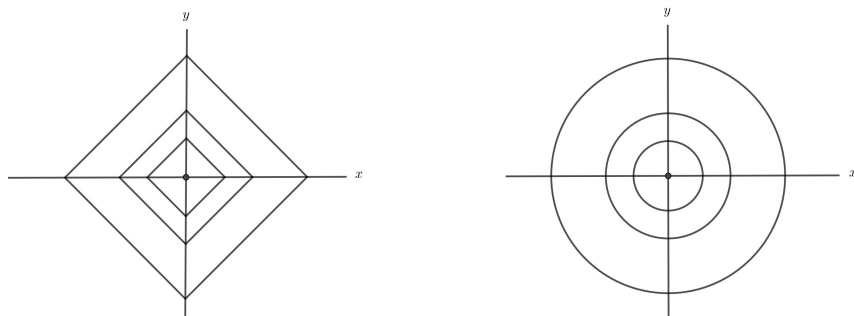
اما در بین تبدیلات هندسی، مفهوم دوران در مفهوم زاویه مستتر شده بود. تالس اولین کسی بود که ثابت کرد قطر، دایره را به دو نیمه مساوی تقسیم می‌کند، یا در یک مثلث متساوی‌الساقین زوایای روبه‌روی اضلاع برابر با هم مساوی‌اند. هیچ بعید نیست که مفهوم زاویه و این مطلب که مجموع زاویه‌های داخلی مثلث 180° است اولین بار توسط تالس مطرح شده باشد. البته منجمان باستان در تمدن مصر، بابل، و ایران باستان از مفهوم کاربردی زاویه استفاده می‌کردند؛ اما استفاده از مثلثات کروی، در نجوم بطلمیوس سابقه داشت که از لحاظ زمانی بسیار بعدتر از تالس بود. احتمالاً تالس در سفرهای خود به مصر، بابل، و ایران با مفهوم زاویه آشنا شده و مفهوم هندسی زاویه را تجرید کرده بود. نزد تالس، زاویه، درواقع، مساحتی از دایره واحد است که بین دو ضلع آن زاویه محصور شده است. این همان دیدگاهی است که به ما اجازه می‌دهد که مفهوم کنج در سه بعد را به عنوان تعمیمی از مفهوم زاویه در نظر بگیریم.

در این مقاله به معرفی مفهومی مشابه زاویه و کنج خواهیم پرداخت با این فرق که در آن گروه همسان‌ریختی‌های تکه‌ای خطی^۱ و حافظ مساحت و حافظ یک نقطه که خطوط گذرنده از آن نقطه را حفظ می‌کند، نقش دوران‌ها را ایفا می‌کند. این مفهوم تکه‌ای خطی^۲ و دوران در دو بعد و سه بعد شباهت‌های عمیقی با مفهوم دوران در صفحه و فضا خواهد داشت و این فرصت را به ما خواهد داد تا با نگاهی جدید، تقارن‌های مربع را مطالعه و آن را با گروه دوران‌های دایره مقایسه کنیم. خواهیم دید که گروه تقارن‌های تکه‌ای خطی حافظ مساحت سطح مکعب از گروه دوران‌های کره دوبعدی بسیار بزرگ‌تر است.

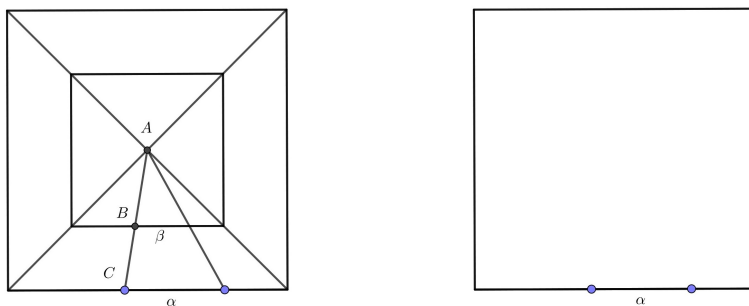
۲. دوران‌های تکه‌ای خطی مربع

دایره به شعاع یک، تحت دوران‌ها با مرکز دایره ناورداست. درواقع می‌توان دایره را با دایره‌هایی به شعاع‌های $0 \leq r < 1$ پوشاند به گونه‌ای که همه این دایره‌ها تحت دوران به مرکز مشترکشان ناوردا باقی بمانند. هدف ما این است که در تصویری مشابه، داخل مربع $|x| + |y| = 1$ را با مربع‌های $|x| + |y| = r$ برای $0 \leq r < 1$ ببوشانیم و نگاشت‌های حافظ اندازه (لُبگ) حول مرکز مربع را تعریف کنیم که روی هر مربع کوچک حافظ طول باشند، همان‌طوری که دوران‌های دایره واحد در بالا (شکل ۱) روی هر دایره کوچک حافظ طول‌اند. پس ما با تبدیلاتی سروکار خواهیم داشت که مجموعه نقاطی از مربع که مرزگویی به شعاع ثابت‌اند تحت آن‌ها ناورداست و هر نقطه را به اندازه ثابت، مثلاً α ، در جهت عقربه‌های ساعت انتقال می‌دهند. اگر نقاط موجود روی هر مربع در افراز بالا (شکل ۲) را به تناسب حرکت دهیم، می‌توان دید که بنابر قضیه تالس $\frac{AB}{AC} = \frac{\beta}{\alpha}$ و بنابراین هر خط گذرنده از مبدأ به یک خط گذرنده از مبدأ منتقل می‌شود. همچنین مساحت محصورشده بین دو خط گذرنده از مبدأ پس از دوران ثابت باقی می‌ماند. این مساحت را می‌توان زاویه بین دو خط نامید.

^۱ یعنی تابعی چندضابطه‌ای متشکل از تابع‌هایی با نمودار خط.



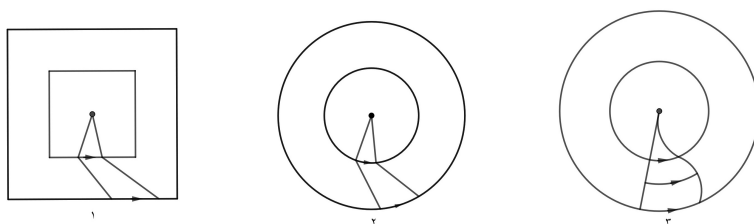
شکل ۱



شکل ۲

روشن است که تبدیلات بالا تکه‌ای خطی و حافظ مساحت‌اند و تحدید آن‌ها به هر مربع نیز حافظ طول است. پس گروه این تبدیلات دقیقاً با گروه دوران‌های دایره یکسان است. با این دیدگاه، مربع دقیقاً به اندازه دایره متقارن است. البته توجه کنید که اگر این فرض را که خطوط گذرنده از مرکز مربع به خطوط گذرنده از مرکز منتقل شوند، لحاظ نکنیم، نگاشت‌هایی تکه‌ای خطی حافظ مساحت خواهیم داشت که ما آن‌ها را پیچش می‌نامیم. منظور از پیچش، تابعی یک‌به‌یک است که مجموعه نقاط هم‌فاصله از یک نقطه معین را با حفظ فاصله به خودش می‌نگارد و بنابراین خود آن نقطه معین (موسوم به مرکز پیچش) یک نقطه ثابت پیچش است. البته روی دایره هم نگاشت‌های پیچشی تعریف می‌شوند. توجه کنید که همه پیچش‌های دایره به مرکز آن با این شرایط که حافظ مساحت باشند، دایره‌های هم‌مرکز را حفظ کنند، و تحدید آن‌ها به دایره‌ها اندازه‌پذیر باشند، لزوماً تکه‌ای خطی نیستند؛ شکل ۳ را ببینید.

لذا مجموعه پیچش‌های تکه‌ای خطی مربع، کوچک‌تر از گروه پیچش‌های هم‌مرکز برای دایره است. اگر همسان‌ریختی‌ها را در گروه پیچش‌های مربع در نظر بگیریم و خود را به همسان‌ریختی‌های تکه‌ای خطی

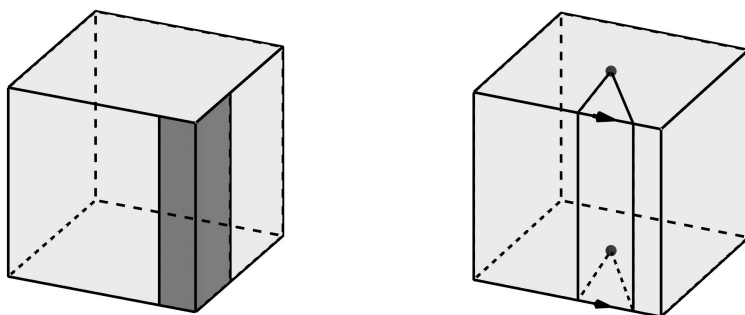


شکل ۳

محدود نکنیم، در این صورت همسان‌ریختی‌های پیچشی مربع نیز به بزرگی همسان‌ریختی‌های پیچشی دایره خواهد بود.

۳. دوران‌های تکه‌ای خطی سطح مکعب

دو وجه مقابل در یک مکعب را در نظر بگیرید و دوران‌ها به زاویه α در این دو وجه را با استفاده از یک انتقال به یک نگاشت تکه‌ای خطی حافظ مساحت سطح مکعب در چهار وجه دیگر (که اتصال‌دهنده این دو وجه‌اند) گسترش دهید. چنین دورانی، یک وجه جانبی مکعب را مانند شکل ۴ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت حول کمر مکعب می‌چرخاند و قسمتی از این وجه را به وجه دیگر منتقل می‌کند.

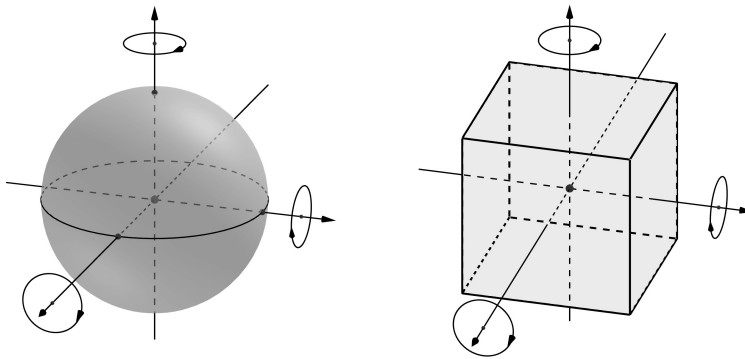


شکل ۴

با این اوصاف، می‌توان دوران‌ها حول آن محوره‌های تقارن مکعب را که از مرکز وجه‌های مقابل می‌گذرد تعریف کرد. بنابراین مفهومی از دوران مکعب به دست می‌آید که مشابه دوران کره حول قطر اصلی آن است.

۴. مقایسه دوران‌های تکه‌ای خطی سطح مکعب با تقارن‌های کره

حول سه محور تقارن دوه‌دو عمود برهم، می‌توان دوران‌هایی مشابه کره تعریف کرد. همین تقارن‌های تکه‌ای خطی حافظ سطح مکعب کفایت می‌کنند تا گروه تقارن‌های کره دوه‌دو را تولید کنیم. بنابر قضیهٔ اوایلر، اگر سه محور عمود برهم برای کره انتخاب کنیم، هر دورانی را می‌توان به صورت ترکیب سه دوران حول سه محور عمود برهم نوشت. پس گروه تقارن‌های تکه‌ای خطی حافظ مساحت سطح مکعب که شامل سه دوران دوه‌دو عمود برهم است از گروه دوران‌های کرهٔ دوه‌دو بزرگ‌تر است.

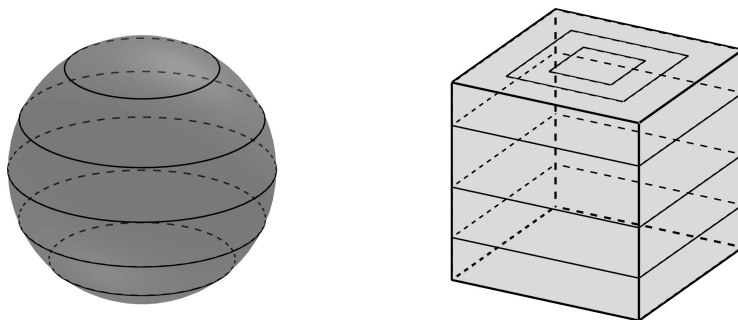


شکل ۵

تنها یک نکتهٔ کوچک را باید ثابت کرد و آن اینکه روابط بین دوران‌های محورهای موردنظر در مکعب همانند روابط بین دوران‌های کرهٔ دوه‌دو است که دوه‌دو برهم عمودند. این نکته با مقایسهٔ هندسهٔ مدارهای دورانی کره، حول سه محور دوه‌دو عمود برهم، با هندسهٔ مدارهای دورانی مکعب، حول سه محور دوه‌دو عمود برهم، آشکار می‌شود. چراکه هر سه مدار روی کره سه سرگنبندی دوه‌دو متقاطع را به دست می‌دهند که شبیه به همین مطلب روی سطح مکعب نیز برقرار است. با حرکت روی این شاره‌ها می‌توان از هر نقطه روی کره به نقطهٔ دیگری رفت و نظریهٔ کنترل شاره‌های متناظر روی مکعب مشابه شاره‌های روی کره است.

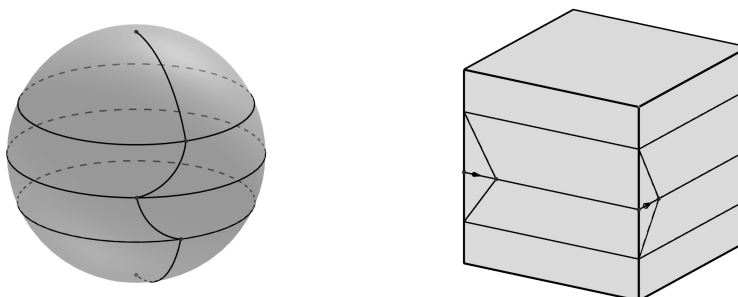
۵. پیچش‌های تکه‌ای خطی که مساحت جانبی مکعب را حفظ می‌کنند

می‌توان مانند شکل ۷ نگاشت‌هایی را تعریف کرد که به طور موضعی شبیه دوران‌های حول محور گذرنده از مراکز دو وجه عمود برهم در مکعب هستند. ما پیچش حول این محور^۱ دوران را مجاز می‌گیریم. با این فرض می‌توان هنوز فرض کرد که نگاشت‌ها تکه‌ای خطی و حافظ مساحت هستند. با این کار، ^۱ پیچش حول یک محور (یا مجموعه‌ای از نقاط) یعنی تابعی یک‌به‌یک که مجموعهٔ همهٔ نقاطی را که نسبت به حداقل یک نقطه از محور (یا آن مجموعهٔ مفروض) هم‌فاصله‌اند، با حفظ فاصله، به خودش می‌نگارد.



شکل ۶

نگاشت‌های پیچشی نظیر پیچش‌های حافظ مدارهای دوران حول یک محور در کره را تعریف می‌کنیم که بنابر قضیهٔ فوبینی همهٔ آن‌ها حافظ مساحت‌اند.



شکل ۷

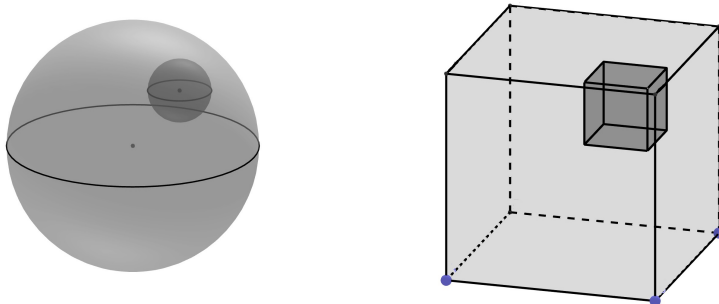
۶. ترکیب نگاشت‌های پیچشی روی سطح کره و مکعب

با ترکیب نگاشت‌های پیچشی روی سطح کره، می‌توان مجموعه‌ای بزرگ از نگاشت‌های اندازه‌پذیر حافظ مساحت کره به دست داد. سؤال این است که آیا ترکیب نگاشت‌های پیچشی، در مجموعهٔ همهٔ نگاشت‌های همسان‌ریختی حافظ مساحت کره چگال است؟ اگر به ترکیب نگاشت‌های پیچشی حول سه محور بسنده کنیم، آیا همین نتیجه برقرار است؟ برای نگاشت‌های پیچشی مکعب، حول سه محور دوه‌دو عمود برهم چطور؟ آیا ترکیب این نگاشت‌های پیچشی روی سطح مکعب در مجموعهٔ همهٔ همسان‌ریختی‌های حافظ مساحت و تکه‌ای خطی مکعب چگال است؟ توجه کنید که مشابه این حکم برای نگاشت‌های پیچشی سه‌بعدی حافظ حجم و تکه‌ای خطی مکعب و نگاشت‌های پیچشی سه‌بعدی حافظ حجم و همسان‌ریختی

داخل کره دوبعدی (که شکلی سه بعدی است) برقرار نیست؛ چون همه این نگاشت‌ها، مرکز مکعب (کره) را پایدار نگه می‌دارند که برای نگاشت‌های حافظ حجم دلخواه چنین نیست.

۷. چگالی نگاشت‌های پیچشی (حالت سه بعدی)

می‌توان داخل کره، که حجمی سه بعدی است، کره‌ای دلخواه و کوچک‌تر در نظر گرفت و نگاشت‌های پیچشی کره داخلی را که روی سطح نگاشت همانی هستند، در نظر گرفت. به نظر می‌رسد ترکیب این نگاشت‌ها نیز در همسان‌ریختی‌های حافظ اندازه داخل کره دوبعدی (که حجمی سه بعدی است) چگال باشد. به همین ترتیب، می‌توان داخل مکعب، مکعبی کوچک‌تر با سطوح و یال‌های موازی با مکعب مرجع در نظر گرفت. اگر نگاشت‌های پیچشی مکعب داخلی را که روی سطح آن مکعب نگاشت همانی



شکل ۸

هستند ترکیب کنیم، به نظر می‌رسد ترکیب این نگاشت‌ها نیز در همسان‌ریختی‌های تکه‌ای خطی حافظ مساحت داخل مکعب چگال باشند. اگر پاسخ این سؤال مثبت باشد می‌توان احکامی درباره نگاشت‌های حافظ اندازه و تکه‌ای خطی مکعب و نگاشت‌های حافظ اندازه کره ثابت کرد که از هندسه پیچش‌ها کمک می‌گیرد. برای مثال می‌پرسیم آیا هر همسان‌ریختی جهت‌نگهدار و حافظ اندازه کره دوبعدی ایزوتوپ با نگاشت همانی است؟ آیا هر همسان‌ریختی جهت‌نگهدار حافظ اندازه داخل کره دوبعدی چنین است؟ درباره همسان‌ریختی‌های تکه‌ای خطی حافظ اندازه مکعب دوبعدی چطور؟ می‌توان مشابه همین سؤالات را برای داخل مکعب دوبعدی (که شیئی سه بعدی است) نیز پرسید.

Circle or Square, Which One Is More Symmetrical?

A. Rastegar

Department of Mathematical Sciences, Sharif University of Technology, Iran

Abstract. To answer the question that between a circle and a square, which one is more symmetrical, we will examine their group of “symmetries” and the space that has a larger group of symmetries would be more symmetrical. We will regard area-preserving piecewise-linear self-homeomorphisms as “symmetries”. We will also compare the group of “symmetries” of surface of a cube with two-dimensional sphere. In the end, we will ask a question about the structure of the area-preserving self maps of two dimensional sphere and we will examine similar questions in the three dimensional case.

Keywords: symmetry groups of circle and square, piecewise-linear self-homeomorphisms, rotations, measure-preserving transformations, twists

Article history: Recieved 15 June 2020; Accepted 17 July 2020

Article type: original

¹rastegar1352@gmail.com