فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۰، شمارهٔ ۶۹ (پاییز و زمستان ۱۴۰۰) صص. ۸۷ تا ۱۱۱

آشنایی با چنبرهٔ ناجابه‌جایی

محمد شفیعی

چکیده

یکی از مهم‌ترین و ساده‌ترین مثال‌های فضاهای ناجابه‌جایی در هندسهٔ ناجابه‌جایی، چنبرهٔ ناجابه‌جایی دوبُعدی است که بسیار عمیق و در سطحی گسترده مطالعه شده است. قصد ما در این مقاله آشنا کردن خواننده با بعضی ویژگی‌های مقدماتی این فضا است.

۱. مقدمه

هندسهٔ ناجابه‌جایی هم در مکانیک کوانتومی ریشه دارد و هم در ریاضیات محض. وقتی در ریاضیات پیشرفته صحبت از هندسه می‌شود، بی‌درنگ نام خمینه به ذهن می‌آید. ریاضی‌دان‌ها خمینهٔ m–بعدی M را شیئی تصور می‌کنند که می‌توان آن‌را برحسب یک دستگاه مختصات موضعی مثل $x_۱$، …، x_m به‌گونه‌ای هموار توصیف کرد. کره و چنبره ساده‌ترین نمونه از خمینه‌ها هستند. مفاهیم گوناگونی بر خمینه یا وابسته‌های آن تعریف می‌شود که ابتدایی‌ترین آن‌ها تابع هموار[۱] است. مجموعهٔ همهٔ توابع هموار بر خمینهٔ M را با $C^\infty(M)$ نمایش می‌دهند. این مجموعه با جمع و ضرب معمول توابع، یک جبر جابه‌جایی است. برای برخی از خمینه‌ها می‌توان $C^\infty(M)$ را به یک کروشهٔ لی، $\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$، موسوم به کروشه پواسون، مجهز کرد؛ این‌گونه خمینه‌ها را خمینه پواسون می‌نامند.

عبارات و کلمات کلیدی. چنبرهٔ ناجابه‌جایی، التصاق لِوی–چِیویتا، قضیهٔ گاوس–بونه، هندسهٔ ناجابه‌جایی.

[۱] smooth

در مکانیک کلاسیک، از خمینه‌های پواسون برای توصیف فضای فاز یک سامانه دینامیکی استفاده می‌کنند. با کمک این کروشه می‌توان معادله‌های دینامیکی مشخص‌کنندهٔ تحول زمانی سامانه را به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}, \qquad f \in C^{\infty}(M).$$

در اینجا $H \in C^{\infty}(M)$ همیلتونی سامانه است. مثلاً برای یک ذرهٔ فیزیکی که در فضای سه‌بعدی اقلیدسی حرکت می‌کند، M فضای کتانژانت[۱] $T^{\star}\mathbb{R}^{۳}$ است و اگر $q^{۱}$، $q^{۲}$، و $q^{۳}$ مختصات در $\mathbb{R}^{۳}$ و $p_{۱}$، $p_{۲}$، و $p_{۳}$ مختصات تار کلافِ کتانژانت[۲] را نشان دهند، کروشه پواسون به‌صورت زیر است

$$\{f, g\} = \sum_{i=۱}^{۳} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}.$$

اما در مکانیک کوانتومی، مجموعهٔ همه شعاع‌های فضای هیلبرت مختلطی مثل $\mathcal{H}$ جایگزین M و همچنین جبر عملگرهای (نه لزوماً کراندار) $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ جایگزین $C^{\infty}(M)$ می‌شود. این جبر با عمل ترکیب، یک جبر ناجابه‌جایی است و آن‌را هم می‌توان به یک کروشه مجهز کرد:

$$[A, B] = AB - BA.$$

تحول زمانی عملگر A از رابطه $\frac{dA}{dt} = [H_{qu}, A]$ به‌دست می‌آید که در آن $H_{qu} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ همیلتونی کوانتومی است.

اکنون این پرسش مطرح می‌شود که چگونه می‌توان از توصیف کلاسیک یک سامانه به توصیف کوانتومی آن دست یافت. در حالت آرمانی، فیزیک‌دان‌ها تمایل دارند که یک تناظر Q وجود داشته باشد که به هر $f \in C^{\infty}(M)$ یک عملگر $Q(f) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ متناظر کند به‌گونه‌ای‌که

$$Q(\{f, g\}) = \frac{-۱}{i\hbar}[Q(f), Q(g)].$$

متأسفانه ثابت شده است حتّی برای ساده‌ترین حالت که یک ذره در امتداد خط حقیقی حرکت می‌کند، چنین تناظری وجود ندارد. در سال ۱۹۴۹ مویال[۳] پنداشت که علت بروز این مشکل در این است که یک تفاوت بنیادی بین دو جبر $C^{\infty}(M)$ و $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ وجود دارد: یکی جابه‌جایی است و دیگری ناجابه‌جایی. بنابراین، او سعی کرد که ضرب معمولی در $C^{\infty}(M)$ را با یک ضرب ناجابه‌جایی $\star_{\hbar}$

[۱] cotangent space [۲] the fiber of the cotangent bundle [۳] J. E. Moyal

جایگزین کند به‌گونه‌ای‌که وقتی $\hbar \longrightarrow \circ$، $\star_\hbar$ تبدیل به همان ضرب معمولی شود و افزون براین،

$$\lim_{\hbar\longrightarrow\circ}\frac{f\star_\hbar g - g\star_\hbar f}{\hbar} = \{f,g\}.$$

با اتخاذ این ضرب در $C^\infty(M)$، خود را در اقلیم هندسه ناجابه‌جایی می‌یابیم، چراکه یک فضای ناجابه‌جایی چیزی بیش‌از یک جبر ناجابه‌جایی با چند ساختار اضافی نیست! برای توضیح بیشتر این موضوع، به ابتدای این گفتار برمی‌گردیم، آنجا که اشاره شد مفاهیم گوناگونی را می‌توان روی خمینهٔ M یا وابسته‌های آن تعریف کرد که ابتدایی‌ترین آن‌ها تابع هموار است. مفهوم مهم دیگر، میدان برداری است. میدان برداری X بر M تابعی است که به هر نقطهٔ $p\in M$ یک بردار مماس در این نقطهٔ روی خمینه متناظر می‌کند. در یک دستگاه مختصاتی موضعی مانند $x^۱$، $x^۲$، $\ldots$، x^m میدان X نمایشی به‌صورت

$$X = X^۱\frac{\partial}{\partial x^۱} + X^۲\frac{\partial}{\partial x^۲} + \cdots + X^m\frac{\partial}{\partial x^m}$$

دارد. میدان X را می‌توان به‌عنوان عملگری بر $C^\infty(M)$ نیز درنظر گرفت که به‌شکل

$$X(f) = X^۱\frac{\partial f}{\partial x^۱} + X^۲\frac{\partial f}{\partial x^۲} + \cdots + X^m\frac{\partial f}{\partial x^m}$$

عمل می‌کند. این عملگر در اتحاد لایب‌نیتس صدق می‌کند

$$X(fg) = X(f)g + fX(g), \qquad f,g\in C^\infty(M).$$

یعنی X یک اشتقاق[۱] روی $C^\infty(M)$ است. بنابراین مفهوم میدان برداری را می‌توان به‌شکلی کاملاً جبری و به‌کمک $C^\infty(M)$ تعریف کرد. افزون‌براین، مفاهیم دیگری چون صورت‌های دیفرانسیل و میدان‌های تانسوری و ساختارهایی مانند متریک ریمانی، التصاق[۲]، تانسور خمیدگی، مشتق هموردا[۳]، و نظریهٔ یانگ–میلز که بر M افزوده می‌شوند، می‌توان همگی را به کمک توابع هموار و میدان‌های برداری، به‌شیوه‌ای کاملاً جبری و بدون اشاره به M و نقاط آن، تعریف نمود. حتّی مفهوم مهم کلاف برداری در هندسه نیز تعریفی کاملاً جبری دارد. قضیهٔ زیر اهمیت جبر $C^\infty(M)$ در شناخت M را بیشتر نشان می‌دهد.

قضیه ۱.۱. *دو خمینهٔ هموار و فشردهٔ M و N هموارریخت[۴] هستند اگر و تنها اگر دو جبر $C^\infty(M)$ و $C^\infty(N)$ یکریخت باشند.*

---
[۱] derivation [۲] connection [۳] covariant derivative [۴] diffeomorphic

بنابراین، $C^\infty(M)$ همهٔ ویژگی‌های دیفرانسیلی خمینهٔ M را در خود دارد. اکنون اگر $C^\infty(M)$ را به یک ضرب ناجابه‌جایی مجهز کنیم یا به‌طورکلی آن‌را با یک جبر ناجابه‌جایی $\mathcal{A}$، که بعضی ویژگی‌های مطلوب هم دارد، جایگزین کنیم، می‌توان مفاهیم اشاره‌شده در بالا را برای آن تعریف کرد. اما اگر M را یک خمینهٔ جابه‌جایی بنامیم، آیا اصطلاحاً یک خمینهٔ ناجابه‌جایی مانند $\mathcal{M}$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که جبر ناجابه‌جایی $\mathcal{A}$ از آن حاصل شده باشد؟ پاسخ منفی است. یعنی یک فضای ناجابه‌جایی چیزی جز یک جبر ناجابه‌جایی با چند ساختار اضافی نیست. به‌عبارت‌دیگر، خمینه ناجابه‌جایی شیئی است که جمعی به آن مشغول‌اند و آن خود غایب ز میانه!

امروزه هندسه ناجابه‌جایی باغی پهناور با میوه‌های گوناگون است و پژوهشگران زیادی هریک، از این با غ میوه‌ای درخور توانمندی‌های خود می‌چینند. نام بردن از پژوهش‌های گوناگونی که انجام شده است در این مقاله نمی‌گنجد، ازاین‌رو، خواننده را به مطالعهٔ [۲]، نوشتهٔ کُن، معمار اصلی هندسه ناجابه‌جایی، توصیه می‌کنیم که در آن مهم‌ترین پژوهش‌های انجام‌شده در بیست‌سال گذشته مرور شده است.

چنبرهٔ ناجابه‌جایی، به‌ویژه حالت دوبعدی آن، یکی از مهم‌ترین فضاهای ناجابه‌جایی است. در ادامه کوشش خواهیم کرد خواننده را با برخی از ویژگی‌های ابتدایی این فضا آشنا کنیم و سپس مفاهیم کلاف برداری، التصاق و خمیدگی یک التصاق، و قضیه‌های لِوی-چیویتا و گاوس-بونه را ارائه دهیم.

۲. قضیهٔ گلفاند-نائیمارک

قضیه گلفاند-نائیمارک[۱] را می‌توان نقطهٔ آغاز مطالعهٔ مفهوم مجرد $C^\star$جبرها برشمرد؛ خواهیم دید فضاهای ناجابه‌جایی گونه‌ای از این جبرها هستند. بنابراین، ابتدا این جبرها را معرفی می‌کنیم.

فرض کنید A یک فضای برداری مختلط و $\cdot : A\times A \longrightarrow A$ به‌صورت $(a,b)\longmapsto a\cdot b$ یک تابع دوخطی موسوم به ضرب باشد که نسبت به جمع بردارها توزیع‌پذیر است؛ جفت $(A,\cdot)$ یک جبر خوانده می‌شود. این جبر جابه‌جایی است هرگاه به‌ازای هر $a,b\in A$، $a\cdot b=b\cdot a$. یک جبر باناخ عبارت است از یک جفت $(A,\|\cdot\|)$ که در آن A یک جبر و $\|\cdot\|$ یک نرم روی A است با این خاصیت که هر دنبالهٔ کوشی نسبت به این نرم همگراست و افزون‌براین، به‌ازای هر $x,y\in A$، $\|x\cdot y\|\le\|x\|\,\|y\|$. تابع $\star : A\longrightarrow A$ به‌صورت $x\longmapsto x^\star$ بر جبر A را یک برگشت[۲] گویند هرگاه برای هر $x,y\in A$ و برای هر $\lambda\in\mathbb{C}$،

$$(x+y)^\star = x^\star + y^\star,\qquad (\lambda x)^\star=\bar{\lambda}x^\star,$$
$$(x.y)^\star = y^\star\cdot x^\star x^\star,\qquad x^{\star\star}=x.$$

[۱] Gelfand-Naimark [۲] involution

جبر A همراه با برگشت $\star$ را یک $\star$-جبر یا جبر برگشتی می‌گویند. سرانجام، یک $\star$-جبر باناخ $(A, \|\cdot\|)$ را یک $C^\star$-جبر می‌گویند هرگاه به‌ازای هر $a \in A$، $\|a^\star \cdot a\| = \|a\|^۲$. می‌توان نشان داد که عضو همانی ضربی در هر $C^\star$-جبر ،در صورت وجود، یکتا و دارای نرم یک است.

مثال ۱.۲. مجموعه همهٔ ماتریس‌های مربعی $n \times n$ مختلط، که آن‌را با $M_n(\mathbb{C})$ نمایش می‌دهند، با نرم عملگری و برگشت با تعریف $\star : T \longmapsto T^\star$ یک $C^\star$-جبر یکه‌دار با بُعد متناهی است ($T^\star$ الحاقی T است). چون جمع مستقیم $C^\star$-جبرها هم $C^\star$-جبر است، پس $M_{n_۱}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$ نیز یک $C^\star$-جبر با بعد متناهی است. هر $C^\star$-جبر متناهی‌بعد نیز به همین شکل است [۱۲].

مثال ۲.۲. فرض کنید H یک فضای هیلبرت تفکیک‌پذیر باشد. دراین‌صورت مجموعهٔ $\mathcal{B}(H)$ مرکب از همهٔ عملگرهای کراندار روی H با نرم عملگری و برگشت $\star : T \longmapsto T^\star$ یک $C^\star$-جبر یکه‌دار است ($T^\star$ الحاقی T است). همچنین هر زیرجبر از $\mathcal{B}(H)$ که نسبت به عمل الحاقی، بسته و به لحاظ توپولوژیکی نیز بسته باشد یک $C^\star$-جبر است. گلفاند و نائیمارک ثابت کرده‌اند که هر $C^\star$-جبر را می‌توان یک زیرجبر بسته از $\mathcal{B}(H)$ در نظر گرفت که در آن H یک فضای هیلبرت مناسب است.

هر دو مثال بالا $C^\star$-جبرهای ناجابه‌جایی هستند. یکی از مهم‌ترین $C^\star$-جبرهای جابه‌جایی در مثال زیر آمده است.

مثال ۳.۲. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک فشرده و هاسدورف باشد. مجموعهٔ همهٔ توابع پیوسته و مختلط‌مقدار روی X را با $C(X)$ نمایش می‌دهیم. با اعمال جمع و ضرب معمول توابع، $C(X)$ یک جبر است. چون X فشرده است، نرم سوپریمم، $\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$، روی $C(X)$ کامل است. افزون‌براین، $\star : C(X) \longrightarrow C(X)$ با تعریف $f \longmapsto \bar{f}$ یک برگشت است ($\bar{f}$ مزدوج مختلط f است). پس $C(X)$ یک $C^\star$-جبر یکه‌دار است. اگر X را یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده بگیریم $C_۰(X)$، مجموعهٔ همهٔ عضوهایی از $C(X)$ که در بی‌نهایت صفر می‌شوند، نیز یک $C^\star$-جبر است، اما یکه‌دار نیست.

تابعک خطی ناصفر $\chi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ را روی جبر A ضربی گویند اگر برای هر $a, b \in A$، $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$. برای مثال، اگر $A = C(X)$ و $x \in X$، تابع $\chi_x : f \longmapsto f(x)$ یک تابعک خطی ضربی روی $C(X)$ است. مجموعهٔ همهٔ تابعک‌های خطی ضربی روی A را با

$\Sigma(A)$ نمایش می‌دهیم و به آن طیف A می‌گوییم. فرض کنید A یک جبر باناخ جابه‌جایی باشد و برای $x \in A$ تابعک خطی $\hat{x} : \Sigma(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ را به‌صورت $\hat{x}(\chi) = \chi(x)$ تعریف کنیم. به کمک این تابعک‌های خطی می‌توان $\Sigma(A)$ را به یک توپولوژی مجهز کرد. درحقیقت، این توپولوژی ضعیف‌ترین توپولوژی‌ای است که همهٔ $\hat{x}$ها نسبت به آن پیوسته‌اند.

قضیه ۴.۲ ([۱۲]). *برای هر $C^\star$-جبر جابه‌جایی A، تبدیل گلفاند $\Gamma : A \longrightarrow C_\circ(\Sigma(A))$ با تعریف $\hat{x} \longmapsto x$ یک یکریختی بین دو $C^\star$-جبر است.*

قضیهٔ ۴.۲، موسوم به قضیهٔ گلفاند–نائیمارک، بیان می‌کند که رستهٔ فضاهای توپولوژیک هاسدورف و موضعاً فشرده با رسته $C^\star$-جبرهای جابه‌جایی هم‌ارز است. به کمک این هم‌ارزی می‌توان به برخی مفهوم‌های توپولوژیکی، مفهومی جبری نظیر کرد. مثلاً، فشردگی، مترپذیری، و همسان‌ریختی در توپولوژی، به‌ترتیب، با یکه‌دار بودن، تفکیک‌پذیر بودن، و خودریختی بودن در جبر متناظر می‌شود.

توجه کنید که اگر X خمینه باشد، $C(X)$ مشاهده‌پذیرهای سامانهٔ مکانیکی است که در آن X فضای فاز است. در مکانیک کوانتومی، جبر توابع پیوسته حقیقی‌مقدار بر X با جبر عملگرهای خودالحاقی روی یک فضای هیلبرت H جایگزین می‌شود و این جبر یک جبر ناجابه‌جایی است: برای آشنایی بیشتر [۱] را مطالعه کنید. با درنظر گرفتن این موضوع و دوگانگی گلفاند، می‌توان $C^\star$-جبرهای ناجابه‌جایی را دوگان رستهٔ فضاهای غریبی انگاشت که «فضاهای ناجابه‌جایی» نامیده می‌شوند. مثال‌های فراوانی از فضاهای ناجابه‌جایی را می‌توان در [۱۴] یافت. یکی از مهم‌ترین و ساده‌ترین مثال‌ها که به‌طور گسترده‌ای مطالعه شده است، چنبره ناجابه‌جایی دوبعدی است. در پایان این بخش، چنبرهٔ دوبعدی $T^۲$ را معرفی و $C^\star$-جبر جابه‌جایی وابسته به آن‌را به‌دست می‌آوریم.

برای‌این‌کار، نخست روی صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$ رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(x,y) \sim (x+۱, y) \sim (x, y+۱).$$

مجموعهٔ همهٔ رده‌های هم‌ارزی این رابطه را با $T^۲$ نمایش می‌دهیم و آن‌را به توپولوژی خارج‌قسمتی مجهز می‌کنیم. مجموعهٔ $T^۲$ با این توپولوژی، که فشرده و هاسدورف است، چنبرهٔ دوبعدی (جابه‌جایی) نامیده می‌شود. بنابه مثال ۳، $C(T^۲)$ یک $C^\star$-جبر جابه‌جایی یکه‌دار است. برای $f \in C(T^۲)$ سری فوریهٔ f به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n} e^{۲\pi i(mx+ny)}, \qquad a_{m,n} = \int_{T^۲} f(x,y) e^{-۲\pi i(mx+ny)} \tag{۱.۲}$$

که در آن (x, y) مختصات روی چنبره است و انتگرال نسبت به اندازهٔ لُبگ گرفته شده است. این سری را می‌توان به‌صورت

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n}U^m V^n(e^{2\pi nyi})(x) \tag{2.2}$$

بازنویسی کرد که در آن $U, V : L^2(S^1) \longrightarrow L^2(S^1)$ عملگرهای با شرط‌های زیرند

$$V = \mathrm{id}, \quad U(f)(x) = e^{2\pi ix}f(x), \quad f \in L^2(S^1).$$

به‌این‌ترتیب، برای $f \in C(T^2)$ نمایش

$$\sum a_{m,n}U^m V^n$$

حاصل می‌شود. به‌عبارتِ‌دیگر، $C(T^2)$ همان $C^\star$-زیرجبر یکه‌دار از $\mathcal{L}(L^2(S^1))$ است که توسط U و V تولید می‌شود.

۳. چنبرهٔ ناجابه‌جایی دوبعدی

در بخش پیشین دیدیم که عملگرهای U و V یک $C^\star$-جبر تولید می‌کنند که همان $C(T^2)$ است. اکنون، $\theta \in \mathbb{R}$ را به‌دلخواه انتخاب و دو عملگر $U, V : L^2(S^1) \longrightarrow L^2(S^1)$ را با کمی تغییر نسبت به بخش قبل، به‌صورت

$$U(f)(x) = e^{2\pi ix}f(x), \quad V(f)(x) = f(x + \theta)$$

تعریف می‌کنیم. روشن است که $U^\star = U^{-1}$ و $V^\star = V^{-1}$. بنابراین مجموعهٔ همهٔ

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n}U^m V^n, \qquad a_{m,n} \in \mathbb{C}$$

که در آن فقط تعداد متناهی از $a_{m,n}$ها ناصفر است، نسبت به عمل الحاقیْ بسته است و بنابراین، بستار آن در $\mathcal{L}(L^2(S^1))$ یک $C^\star$-جبر با نماد A_θ تولید می‌کند. چون $VU = e^{2\pi i\theta}UV$، طبیعی است که A_θ «چنبرهٔ ناجابه‌جایی دوبعدی» نام‌گذاری شود. ساختار A_θ بستگی زیادی به θ دارد. روشن است که A_θ و $A_{\theta+n}$، برای هر عدد صحیح n، یکریخت‌اند. همچنین، نگاشتی که U را به V و V را به U بنگارد یک یکریختی بین A_θ و $A_{1-\theta}$ القاء می‌کند. بنابراین می‌توان دامنهٔ θ را به بازهٔ $[0, \frac{1}{2}]$ محدود کرد. ثابت شده است که برای θهای متمایز در این بازه، A_θهای نایکریخت حاصل می‌شود. افزون‌براین، ثابت شده است که برای $\theta = p/q$، که در آن p و $q > 0$ نسبت به

هم اول‌اند، یک کلاف برداری از رتبهٔ q روی $T^۲$ وجود دارد که A_θ با جبر مقطع‌های پیوستهٔ این کلاف یکریخت است [۱۴]. به‌عبارتِ‌دیگر، در این حالت A_θ یک نمایش از بعد متناهی دارد. پس جذاب‌ترین حالت زمانی است که θ گنگ باشد.

فرض کنید $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^۲)$ مجموعهٔ همه دنباله‌های شوارتس باشد، یعنی مجموعهٔ دنباله‌های $(a_{m,n})_{m,n}$ که برای هر $k \in \mathbb{N}$،

$$\sup\{(۱+m^۲+n^۲)^k|a_{m,n}| : m,n \in \mathbb{Z}\} < \infty.$$

اکنون $\mathcal{A}_\theta^\infty$ را مجموعهٔ همهٔ اعضای a در A_θ می‌گیریم که نمایشی به‌صورت

$$a = \sum a_{m,n} U^m V^n, \qquad \{a_{m,n}\} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^۲)$$

دارند. $\mathcal{A}_\theta^\infty$ یک $\star$-جبر چگال در A_θ است. ثابت می‌شود که $\mathcal{A}_\circ^\infty$ با $C^\infty(T^۲)$ یکریخت است. ازاین‌رو، $\mathcal{A}_\theta^\infty$ را مجموعهٔ توابع هموار روی چنبرهٔ ناجابه‌جایی دوبعدی می‌نامند. با الهام از حالت دوبعدی، اکنون می‌توان چنبرهٔ ناجابه‌جایی از بعد دلخواه n را تعریف کرد.

تعریف ۱.۳. فرض کنید $\Theta = (\Theta_{ij})$ ماتریس $n \times n$ پادمتقارن با درایه‌های حقیقی دلخواهی باشد. چنبرهٔ ناجابه‌جایی n-بعدی با پارامتر ناجابه‌جایی Θ عبارت است از $C^\star$-جبر عام A_Θ که توسط مولدهای $U_۱$، ...، U_n و رابطه‌های $U_jU_k = e^{۲\pi i\Theta_{jk}}U_kU_j$ تولید می‌شود. مجموعهٔ همهٔ عضوهایی از A_Θ به‌صورت

$$\sum a_{i_۱,\dots,i_n} U_۱^{i_۱}\cdots U_n^{i_n}, \qquad \{a_{i_۱,\dots,i_n}\} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$$

را با $\mathcal{A}_\Theta^\infty$ نمایش می‌دهیم و هریک از آن‌ها را تابعی هموار روی A_Θ می‌نامیم.

۱.۳. تعریف اثر بر A_θ.
تابعک خطی τ بر $C^\star$-جبر A را اثر[۱] می‌گوییم هرگاه برای هر $a,b \in A$، $\tau(ab) = \tau(ba)$ و برای $a \neq ۰$، $\tau(a^\star a) > ۰$.

مثال ۲.۳. فرض کنید M خمینه‌ای هموار، فشرده، و جهت‌دار با صورت حجم Ω باشد. انتگرال

$$\int : C(M) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f \longmapsto \int_M f\Omega$$

یک اثر بر $C(M)$ است.

[۱] trace

نگاشت $\tau : \mathcal{A}_\theta^\infty \longrightarrow \mathbb{C}$ را به‌صورت

$$a = \sum a_{m,n} U^m V^n \longmapsto a_{۰,۰}$$

تعریف می‌کنیم. روشن است که $\tau(b) = \tau(a)\tau(b)$ و

$$\tau(a^\star a) = \sum |a_{m,n}|^۲ \geq ۰.$$

همچنین ثابت می‌شود τ پیوسته است و چون $\mathcal{A}_\theta^\infty$ در A_θ چگال است، می‌توان آن‌را بر A_θ گسترش داد. بنابراین τ یک اثر است. اگر τ' اثر دیگری بر A_θ باشد، چون $VU = e^{۲\pi i\theta} UV$ و $\tau'(ab) = \tau'(ba)$، پس $\tau'(UV) = ۰$. همچنین

$$\tau'(U) = \tau'(V^{-۱}VU) = \tau'(VUV^{-۱}) = e^{۲\pi i\theta}\tau'(U),$$

پس $\tau'(U) = ۰$. به‌طور مشابه، $\tau'(V) = ۰$. از این روابط می‌توان نتیجه گرفت که τ' مضرب ثابتی از τ است. به‌عبارت‌دیگر، τ در حد یک ضریب ثابت یکتاست. وجود این اثر از آن جهت مهم است که بنابه مثال ۲.۳ می‌توان آن‌را به‌گونه‌ای یک انتگرال ناجابه‌جایی بر A_θ انگاشت. همچنین به کمک آن می‌توان یک حاصل‌ضرب اسکالر بر A_θ تعریف کرد:

$$\langle a, b\rangle = \tau(b^\star a), \qquad a, b \in A_\theta.$$

به کمک این ضرب می‌توان برای هر $a \in A_\theta$، که لزوماً در $\mathcal{A}_\theta^\infty$ نیست، ضرایب فوریهٔ

$$a_{m,n} = \langle a, U^m V^n\rangle$$

را تعریف کرد. بنابراین، به هر $a \in A_\theta$ می‌توان یک سریهٔ فوریه $\sum a_{m,n} U^m V^n$ نسبت داد که البته ممکن است در A_θ به a همگرا نباشد.

۴. عملگرهای دیفرانسیل و شبه‌دیفرانسیل

مطالعهٔ عملگرهای دیفرانسیل هم از نظر ماهیت فیزیکی و هم از نظر ماهیت ریاضی آن ارزشمند است. ازجملهٔ عملگرهای دیفرانسیل مهم در ریاضی و فیزیک عملگرهای دیراک و لاپلاس‌اند. در این قسمت، همتای ناجابه‌جایی این دو را بر A_θ معرفی می‌کنیم.

۱.۴. اشتقاق‌های پایه. یک تبدیل خطی d بر جبر A را یک اشتقاق گویند هرگاه

$$d(ab) = d(a)b + ad(b), \qquad a, b \in A.$$

اشتقاق‌های پایهٔ δ_1 و δ_2 بر $\mathcal{A}_\theta^\infty$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\delta_1(\sum a_{m,n}U^mV^n) = 2\pi i \sum m a_{m,n}U^mV^n,$$
$$\delta_2(\sum a_{m,n}U^mV^n) = 2\pi i \sum n a_{m,n}U^mV^n.$$

برای حالتی که $\theta = 0$، اگر $f(x,y) = \sum a_{m,n}e^{2\pi i(mx+ny)}$ عضوی از $\mathcal{A}_0^\infty = C^\infty(T^2)$ باشد، بنابه (۱.۲) و (۲.۲) داریم

$$\delta_1(f) = \delta_1(\sum a_{m,n}U^mV^n) = 2\pi i \sum m a_{m,n}U^mV^n$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\sum a_{m,n}U^mV^n = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

به‌طور مشابه $\delta_2(f) = \frac{\partial f}{\partial y}$.

چند ویژگی مهم از اشتقاق‌های پایه در گزارهٔ زیر آمده است.

گزاره ۱.۴. *فرض‌کنید A یک جبر و δ_1 و δ_2 استقاق پایه باشند. دراین‌صورت*

(الف) برای هر $a \in A$ و $i = 1, 2$، $\delta_i(a^\star) = \delta_i(a)^\star$.

(ب) $[\delta_1, \delta_2] = 0$.

(پ) برای هر $a \in A$ و $i = 1, 2$، $\tau(\delta_i(a)) = 0$.

اشتقاقی را که در شرط (الف) صدق کند یک $\star$-اشتقاق می‌گوییم. قسمت (پ) نشان می‌دهد که اثر τ تحت عمل چنبرهٔ T^2 بر $\mathcal{A}_\theta^\infty$ ناوردا است. این عمل، که آن‌را با α نمایش می‌دهیم، به‌صورت

$$(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}).\sum a_{m,n}U^mV^n = \sum a_{m,n}e^{2\pi i(mx+ny)}U^mV^n$$

تعریف می‌شود و داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{(1,1)}(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}).\sum a_{m,n}U^mV^n &= 2\pi i\sum m a_{m,n}U^mV^n = \delta_1(\sum a_{m,n}U^mV^n),\\ \frac{\partial}{\partial y}\Big|_{(1,1)}(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}).\sum a_{m,n}U^mV^n &= 2\pi i\sum n a_{m,n}U^mV^n = \delta_2(\sum a_{m,n}U^mV^n).\end{aligned} \tag{۱.۴}$$

بنابراین می‌توان گفت اشتقاق‌های پایه همان مولدهای بی‌نهایت کوچک عمل $T^{۲}$ بر $\mathcal{A}_\theta^\infty$اند. پس می‌توان عمل T^n بر $\mathcal{A}_\Theta^\infty$ را نیز به‌طور مشابه تعریف کرد و n اشتقاق پایهٔ $\delta_۱$، . . .، δ_n متناظر با مولدهای بی‌نهایت کوچک این عمل را برای چنبرهٔ ناجابه‌جایی n-بُعدی به‌دست آورد.

۲.۴. عملگرهای شبه‌دیفرانسیل. برای عدد صحیح و نامنفی چون n، عملگر به‌صورت

$$\sum_{j_۱+j_۲\leq n} a_{j_۱,j_۲}\delta_۱^{j_۱}\delta_۲^{j_۲}$$

را یک عملگر دیفرانسیل از مرتبهٔ n بر $\mathcal{A}_\theta^\infty$ می‌گوییم؛ این مفهوم را می‌توان به عملگر شبه‌دیفرانسیل[۱] تعمیم داد. در ادامه، برای سادگی کار، از $\partial_۱$ و $\partial_۲$ به‌ترتیب به جای $\frac{\partial}{\partial\xi_۱}$ و $\frac{\partial}{\partial\xi_۲}$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۲.۴. برای عدد صحیح n، تابع $\rho : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathcal{A}_\theta^\infty$ را یک نماد[۲] از مرتبهٔ n گویند هرگاه

(الف) عدد ثابت c وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\|\delta_۱^{i_۱}\delta_۲^{i_۲}\partial_۱^{j_۱}\partial_۲^{j_۲}\rho(\xi)\| \leq c(۱+|\xi|)^{n-j_۱-j_۲}, \qquad i_۱, i_۲, j_۱, j_۲;$$

(ب) تابع هموار $k : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathcal{A}_\theta^\infty$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\lim_{\lambda\longrightarrow\infty} \lambda^{-n}\rho(\lambda\xi_۱, \lambda\xi_۲) = k(\xi_۱, \xi_۲).$$

دو نماد ρ و ν را هم‌ارز گویند هرگاه $\rho-\nu$ نمادی از مرتبهٔ دلخواه n باشد. به کمک نماد ρ می‌توان یک عملگر P_ρ بر $\mathcal{A}_\theta^\infty$ به‌صورت زیر تعریف کرد

$$P_\rho = (۲\pi)^{-۲}\int\int e^{-s.\xi}\rho(\xi)\alpha(s,a)dsd\xi.$$

عملگر P_ρ را عملگر شبه‌دیفرانسیل از مرتبهٔ n با نماد ρ می‌گویند. دو عملگر شبه‌دیفرانسیل P و Q را هم‌ارز گویند و می‌نویسند $P\sim Q$ هرگاه نمادهای آن‌ها هم‌ارز باشد.

عملگر کوشی-ریمان. می‌دانیم عملگر کوشی-ریمان به‌صورت $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$ بر توابع $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{C}$ تعریف می‌شود. به کمک اشتقاق‌های پایه، عملگر کوشی-ریمانِ ناجابه‌جایی به‌صورت $\partial^\star = \delta_۱ + i\delta_۲$ بر $\mathcal{A}_\theta^\infty$ تعریف می‌شود. به‌طورکلی، برای هر ω در $\mathbb{C}$ با قسمت موهومی مثبت، دو عملگر $\partial_\omega = \delta_۱ + \bar{\omega}\delta_۲$ و $\partial_\omega^\star = \delta_۱ + \omega\delta_۲$ یک اشتقاق بر $\mathcal{A}_\theta^\infty$ است.

گزاره ۳.۴. *(الف) هستهٔ $\partial^\star$ برابر $\mathbb{C}۱$ بوده و تحدید آن به هسته τ دوسویی است.*

---
[۱] pseudo-differential [۲] symbol

(ب) اعداد مختلط به‌صورت $2\pi(im-n)$، $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$، ویژه‌مقدارهای $\partial^\star$ و تابع‌ها به‌صورت U^mV^n ویژه‌تابع‌های متناظر با آن‌ها هستند.

عملگر لاپلاس. عملگر لاپلاس نیز به کمک اشتقاق‌های پایه، به‌صورت $\Delta=\delta_1^2+\delta_2^2$ بر $\mathcal{A}_\theta^\infty$ تعریف می‌شود.

در گزارهٔ زیر ویژگی‌هایی از آن‌را می‌آوریم.

گزاره ۴.۴. *(الف) اعداد حقیقی به‌صورت $-4\pi^2(m^2+n^2)$، $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$، ویژه‌مقدارهای عملگر لاپلاس و U^mV^m ویژه‌تابع‌های متناظر با آن‌ها هستند.*

(ب) برای هر $\lambda\neq -4\pi^2 n$، که در آن $n\in\mathbb{Z}$، عملگر $-\Delta+\lambda$ دوسویی است.

(پ) با فرض $\partial=\delta_1-i\delta_2$، $\Delta=\partial^\star\partial$.

با الهام از بند (پ) گزارهٔ بالا می‌توان به هر عدد مختلط ω با قسمت موهومی مثبت، عملگر لاپلاس $\Delta_\omega=\partial_\omega^\star\partial_\omega$ وابسته به ωرا تعریف کرد. از این عملگر در بخش‌های پیش‌رِو استفاده خواهیم کرد.

عملگر دیراک. برای تعریف عملگر دیراک بر یک خمینه، در حالت جابه‌جایی، ضروری است که از جبرهای کلیفورد[1] و اسپینورها[2] استفاده شود. اما در حالت ناجابه‌جایی، از مفهومی به نام سه‌تایی طیفی استفاده می‌شود که اولین‌بار آن‌را کُن در [۳] به‌کار برده است.

تعریف ۵.۴. یک سه‌تایی طیفی یکه‌دار $(\mathbb{A},\mathbb{H},\mathcal{D})$ عبارت است از یک $\star$–جبر $\mathbb{A}$، یک فضای هیلبرت $\mathbb{H}$، یک عملگر خودالحاقی $\mathcal{D}:\mathrm{Dom}(\mathcal{D})\subset\mathbb{H}\longrightarrow\mathbb{H}$، موسوم به عملگر دیراک، و یک نمایش صادق[3] $\pi:\mathbb{A}\longrightarrow\mathcal{B}(\mathbb{H})$ به‌طوری‌که

(۱) دامنهٔ عملگر دیراک در $\mathbb{H}$ چگال است و برای هر $a\in\mathbb{A}$، $\pi(a)(\mathrm{Dom}(\mathcal{D}))$ زیرفضایی از $\mathrm{Dom}(\mathcal{D})$ است. افزون‌براین، برای هر $\lambda\in\mathbb{C}$ که در طیف $\mathcal{D}$ قرار ندارد، عملگر $(\mathcal{D}-\lambda)^{-1}$ فشرده است؛

(۲) عملگر $[\mathcal{D},\pi(a)]=\mathcal{D}\circ\pi(a)-\pi(a)\circ\mathcal{D}$ را می‌توان به عملگری کراندار بر تمام $\mathbb{H}$ گسترش داد.

[1] Clifford algebra [2] spinors [3] faithful representation

یکی از مهم‌ترین مثال‌های سه‌تایی طیفی به‌صورت $(C^\infty(M), L^2(M,S), \mathcal{D})$ است که در آن (M,g) یک خمینهٔ ریمانی فشرده و بدون لبهٔ اسپین، S کلاف اسپین[1] بر M، و $\mathcal{D}$ عملگر دیراک بر مقطع‌های S است.

اکنون برای تعریف عملگر دیراک $\mathcal{D}$ در حالت ناجابّجایی باید یک سه‌تایی طیفی معرفی کنیم. طبیعی است که برای این کار $\mathbb{A}$ را همان $\mathcal{A}_\theta^\infty$ انتخاب کنیم. به کمک اثر τ، نرم $|a| = \tau(a^\star a)^{\frac{1}{2}}$ را بر $\mathcal{A}_\theta^\infty$ تعریف می‌کنیم و $\mathbb{H}_\circ$ را فضای کامل‌شدهٔ $\mathcal{A}_\theta^\infty$ با این نرم در نظر می‌گیریم. فرض کنید $\mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{H}_\circ$، $a \mapsto \hat{a}$ نگاشت شمول باشد. برای $a \in \mathcal{A}_\theta^\infty$ عملگر $\pi_\circ(a) \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_\circ)$ را به‌گونه‌ای تعریف می‌کنیم که برای هر $b \in \mathcal{A}_\theta^\infty$،

$$\pi_\circ(a)(\hat{b}) = \widehat{ab};$$

نگاشت $\pi_\circ : \mathcal{A}_\theta^\infty \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{H}_\circ)$ با تعریف $a \longmapsto \pi_\circ(a)$ یک نمایش صادق از $\mathcal{A}_\theta^\infty$ است. می‌نویسیم $\mathbb{H} = \mathbb{H}_\circ \bigoplus \mathbb{H}_\circ$. نمایش

$$\pi : \mathcal{A}_\theta^\infty \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{H}), \quad a \longmapsto \pi_\circ(a) \oplus \pi_\circ(a),$$

یک نمایش صادق از $\mathcal{A}_\theta^\infty$ است. اکنون عملگر $\mathcal{D}$ با ضابطهٔ $\mathcal{D} = -i(\sigma_1\delta_1 + \sigma_2\delta_2)$ تعریف می‌شود که در آن δ_1 و δ_2 اشتقاق‌های پایه و

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

ماتریس‌های پائولی[2] هستند؛ پس

$$\mathcal{D} = -i \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial^\star & 0 \end{pmatrix}.$$

توجه کنید که این عملگر با الهام از عملگر دیراک بر چنبرهٔ جابه‌جایی T^2 و با ضابطهٔ $D = -i(\sigma_1\partial_x + \sigma_2\partial_y)$ تعریف شده است. همچنین توجه کنید که شبیه به عملگر لاپلاس، می‌توان برای هر ω یک عملگر دیراک وابسته به آن‌را تعریف و بنابراین می‌توان سه‌تایی طیفی وابسته به ω را هم تعریف کرد.

---
[1] spin bundle [2] Wolfgang Pauli

۵. کلاف‌های برداری ناجابه‌جایی و مدول‌های تصویری متناهیاً تولیدشده

بنابه قضیهٔ اسوان کلاف‌های برداری بر فضای فشرده و هاسدورف X را می‌توان با $C(X)$-مدول‌های راستِ تصویری متناهیاً تولیدشده در تناظر قرار داد [۱۶]. ازاین‌رو، اگر A یک جبر ناجابه‌جایی باشد، A-مدول‌های تصویری متناهیاً تولیدشده (یا از نوع متناهی) همان کلاف‌های برداری ناجابه‌جایی بر A انگاشته می‌شوند. در این بخش یک رده از مدول‌های تصویری متناهیاً تولیدشده بر A_θ را معرفی می‌کنیم.

یادآوری می‌کنیم که A-مدول راست P را تصویری گویند هرگاه A-مدول راست Q وجود داشته باشد به‌طوری‌که $P \bigoplus Q \simeq A^I$ یک A-مدول آزاد باشد. همچنین، اگر عدد طبیعی n وجود داشته باشد که $P \bigoplus Q \simeq A^n$، P را یک A-مدول راست تصویری متناهیاً تولیدشده (از نوع متناهی) می‌نامند. در [۱۴] نشان داده شده است که برای هر A-مدول تصویری متناهیاً تولیدشدهٔ P یک عضو خودتوان چون e در $M_n(A) = \mathrm{End}_A(A^n)$ وجود دارد به‌طوری‌که $P = eA^n$.

کُن و ریفل نشان داده‌اند که هرگاه θ عددی گنگ باشد، هر $\mathcal{A}_\theta^\infty$-مدول تصویری متناهیاً تولیدشده که آزاد نباشد، با یک مدول هایزنبرگ یکریخت است [۶]. این‌گونه مدول‌ها، که با $\mathcal{E}_{p,q}$ نمایش داده می‌شوند، با دو عدد p و $q > ۰$ مشخص می‌گردند. می‌نویسیم $\mathcal{E}_{p,q} = (\mathcal{A}_\theta^\infty)^{|p|}$ وقتی که $q = ۰$؛ یا $q \neq ۰$ و p و q نسبت به‌هم اول‌اند؛ یا $p = ۰$ و $q = ۱$. داریم

$$\mathcal{E}_{p,q} \simeq \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_q) \simeq \mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^q,$$

که در آن تساوی بین فضاهای برداری است و $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_q)$ فضای همهٔ توابع شوارتس با یک متغیر پیوسته در $\mathbb{R}$ و یک متغیر گسسته در $\mathbb{Z}_q$ است. همچنین $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ مجموعهٔ همهٔ توابع شوارتس بر $\mathbb{R}$ است، یعنی همهٔ توابع هموار چون $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ که برای هر عدد صحیح نامنفی n و برای هر عدد صحیح مثبت k، ثابتی مثل c وجود دارد به‌طوری‌که

$$|f^{(n)}(x)|(۱ + x^۲)^k < c, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

فرمول‌های

$$fU(x,k) = f(x + \theta - \frac{p}{q}, k - p), \qquad fV(x,k) = e^{۲\pi i(x - \frac{k}{q})} f(x,k),$$

که در آن $f \in \mathcal{E}_{p,q}$، یک ساختار $\mathcal{A}_\theta^\infty$-مدولی بر $\mathcal{E}_{p,q}$ تعریف می‌کند. در [۴] نشان داده شده است که با این ساختار $\mathcal{E}_{p,q}$ تصویری و از نوع متناهی است.

تعریف ۱.۵ ([۴]). فرض کنید A یک $\star$-جبر و P یک A-مدول (راست) تصویری باشد. یک ساختار ارمیتی بر P عبارت است از یک نگاشت $\langle \cdot , \cdot \rangle : P \times P \longrightarrow A$ به‌گونه‌ای‌که

(الف) برای هر $\xi, \xi_۱, \xi_۲, \eta, \eta_۱, \eta_۲ \in P$،

$$\langle \xi_۱ + \xi_۲, \eta \rangle = \langle \xi_۱, \eta \rangle + \langle \xi_۲, \eta \rangle, \quad \langle \xi, \eta_۱ + \eta_۲ \rangle = \langle \xi, \eta_۱ \rangle + \langle \xi, \eta_۲ \rangle;$$

(ب) برای هر $x, y \in A$ و $\xi, \eta \in P$،

$$\langle \xi.x, \eta.y \rangle = y^\star \langle \xi, \eta \rangle x;$$

(پ) نگاشت $\langle \cdot , \cdot \rangle$ مثبت باشد، یعنی اینکه برای هر $۰ \neq \xi \in P$، $\langle \xi, \xi \rangle$ عضوی مثبت از A باشد ($a \in A$ مثبت خوانده می‌شود هرگاه $a = a^\star$ و طیف a مشمول در اعداد حقیقی نامنفی باشد).

هر A-مدول تصویری یک ساختار ارمیتی دارد. درحقیقت، اگر P یک A-مدول تصویری از نوع متناهی باشد، عدد طبیعی n و عضو خودتوانی مانند $e \in M_n(A)$ وجود دارد به‌طوری‌که P با $e(A^n)$ یکریخت است. فرض کنید $F : e(A^n) \longrightarrow P$ یکریختی مورد نظر باشد. فرمول

$$\langle \xi, \eta \rangle = F^{-۱}(\eta)^\star \cdot F^{-۱}(\xi), \qquad \xi, \eta \in P$$

یک ساختار ارمیتی بر P تعریف می‌کند. در مثال موردِ بحث ما، یعنی $\mathcal{E}_{p,q}$، فرمول

$$\langle f, g \rangle = \sum_{m,n} \Big(\sum_{k=۰}^{q-۱} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x - \frac{mp}{q}, k - mp)} g(x, k) e^{-۲\pi i n (x - \frac{k}{q})} dx \Big) U^m V^n$$

برای هر $f, g \in \mathcal{E}_{p,q}$ یک ساختار ارمیتی بر $\mathcal{E}_{p,q}$ تعریف می‌کند [۴].

۶. التصاق بر مدول‌های تصویری از نوع متناهی

فرض کنید A یک $C^\star$-جبر یکه‌دار، G یک گروه لی، و $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(A)$ به‌صورت $g \longmapsto \alpha_g$ یک همسانی بین دو گروه باشد. سه‌تایی (A, G, α) را یک $C^\star$-سامانهٔ مکانیکی می‌گویند. در این سامانه، $x \in A$ را از ردهٔ هموار می‌نامند هرگاه نگاشت $g \longmapsto \alpha_g$ از G به A هموار باشد. مجموعهٔ همهٔ عضوهایی از A را که از ردهٔ هموارند با A^∞ نمایش می‌دهند که زیرجبری چگال از A است.

فرض کنیم $\mathfrak{g}$ جبر لی G، $X \in \mathfrak{g}$، G و $g : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow G$ با ضابطهٔ $t \longmapsto g_t$ خم مشتق‌پذیری با شرط $g_\circ = e$ (e عضو همانی G است)، و $g'_\circ = X$. نگاشت $\delta_X : A^\infty \longrightarrow A^\infty$ را به‌صورت

$$\delta_X(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=\circ} g_t(x)$$

تعریف می‌کنیم. به‌سادگی می‌توان دید که δ_X اشتقاق است.

تعریف ۱.۶ ([۴]). فرض کنید $\mathbf{E}^\infty$ یک A^∞-مدول تصویری از نوع متناهی باشد. یک التصاق بر $\mathbf{E}^\infty$ عبارت است از نگاشتی مانند $\nabla : \mathfrak{g} \times \mathbf{E}^\infty \longrightarrow \mathbf{E}^\infty$ با تعریف $(X, \xi) \longmapsto \nabla_X \xi$ به‌گونه‌ای‌که برای هر $c_۱, c_۲ \in \mathbb{R}$، $x \in A$، $\xi, \eta \in \mathbf{E}^\infty$ و $X, Y \in \mathfrak{g}$،

$$\nabla_X(\xi.x) = (\nabla_X \xi).x + \xi.\delta_X(x),$$

$$\nabla_X(\xi + \eta) = \nabla_X \xi + \nabla_X \eta,$$

$$\nabla_{c_۱ X + c_۲ Y} \xi = c_۱ \nabla_X \xi + c_۲ \nabla_Y \xi.$$

اگر $\langle \cdot, \cdot \rangle$ یک ساختار ارمیتی بر $\mathbf{E}^\infty$ باشد، التصاق ∇ را با $\langle \cdot, \cdot \rangle$ سازگار گویند هرگاه

$$\langle \nabla_X \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla_X \eta \rangle = \delta_X(\langle \xi, \eta \rangle).$$

مثال ۲.۶. ([۴]) فرض کنید $e \in M_n(A^\infty)$ یک عضو خودتوان باشد و $\mathbf{E}^\infty = e((A^\infty)^n)$. دراین‌صورت فرمول

$$\nabla^\circ_X \xi = e(\delta_X(\xi)) = e(\begin{pmatrix} \delta_X(\xi_۱) \\ \vdots \\ \delta_X(\xi_n) \end{pmatrix}), \qquad \begin{pmatrix} \xi_۱ \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in e((A^\infty)^n)$$

یک التصاق بر $\mathbf{E}^\infty$ موسوم به «التصاق گراسمان» تعریف می‌کند. این التصاق با ساختار ارمیتی $\langle \xi, \eta \rangle = \eta^\star \xi$، برای $\xi, \eta \in e((A^\infty))$، سازگار است.

پس با توجه به مثال بالا می‌توان گفت که هر A^∞-مدول تصویری از نوع متناهی یک التصاق دارد.

تعریف ۳.۶. ([۴]) اگر ∇ یک التصاق بر $\mathbf{E}^\infty$ باشد، خمیدگی Θی آن‌را برای هر $X, Y \in \mathfrak{g}$ و $\xi, \eta \in \mathbf{E}^\infty$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنند

$$\Theta(X, Y)\xi = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]} \xi.$$

در پایان این بخش، یک التصاق بر $\mathcal{E}_{p,q}$ تعریف می‌کنیم. نخست توجه کنید که اگر برای $g = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}) \in T^2$، $\alpha_g : \mathcal{A}_\theta^\infty \longrightarrow \mathcal{A}_\theta^\infty$ را به‌صورت

$$\alpha_g(\sum a_{m,n}U^mV^n) = \sum a_{m,n}e^{2\pi i(mx+ny)}U^mV^n$$

تعریف کنیم، آن‌وقت α_g یک تبدیل خطی پیوسته بر $\mathcal{A}_\theta^\infty$ است و چون $\mathcal{A}_\theta^\infty$ در A_θ چگال است، می‌توان آن‌را بر A_θ گسترش داد. بنابراین، عمل T^2 بر $\mathcal{A}_\theta^\infty$ را روی A_θ گسترش و آن‌را با همان علامت α نمایش می‌دهیم. پس (A_θ, T^2, α) یک سامانه مکانیکی است که در آن $A^\infty = \mathcal{A}_\theta^\infty$. بنابه (۱.۴) دو عضو $\partial_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$ و $\partial_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}$ در جبر لی وابسته به T^2 دو اشتقاق به‌دست می‌دهند که به‌ترتیب همان δ_1, δ_2اند. اکنون فرمول‌های

$$(\nabla_{\partial_1} f)(x,k) = \frac{2\pi iq}{p}xf(x,k), \qquad (\nabla_{\partial_2} f)(x,k) = \frac{df}{dx}(x,k),$$

که در آن $f \in \mathcal{E}_{p,q}$ ، یک التصاق بر $\mathcal{E}_{p,q}$ تعریف می‌کنند. این التصاق با ساختار ارمیتی (۴.۳) سازگار و خمیدگی آن مقدار ثابت

$$\Theta(X,Y)f = \frac{2\pi iq}{p}f$$

است [۴].

۷. التصاق لِوی-چیویتا

در هندسهٔ ریمانی می‌دانیم که وقتی یک متریک ریمانی بر خمینه‌ای درنظر گرفته می‌شود، می‌توان التصاقی یکتا موسوم به التصاق لِوی-چیویتا[۱] بر مقطع‌های کلاف مماس تعریف کرد که با آن متریک ریمانی سازگار و فاقد تاب است؛ به کمک این التصاق می‌توان خمیدگی را تعریف کرد. اما در هندسهٔ ناجابجایی شرایط کاملاً متفاوت و پیچیده است. در سال ۲۰۱۳، مسعود خلخالی در سلسله سخنرانی‌هایی در بنیاد فیلدز درکانادا با موضوع هندسهٔ ناجابه‌جایی ضمن توصیف خمیدگی اسکالر و چگونگی محاسبهٔ آن برای چنبرهٔ ناجابه‌جایی همراه با متریکی که از تغییرات همدیس متریک تخت حاصل شده است، اشاره می‌کند که نبود ابزار مشابهی در هندسهٔ ناجابه‌جایی موجب شده است که از ابزارهای نظریهٔ طیفی استفاده کنیم (بخش بعد را ببینید). این نقص، روزنبرگ را، که یکی از شنوندگان آن سخنرانی‌ها بود، بر آن داشت که برای یافتن التصاقی مشابه روی چنبرهٔ ناجابه‌جایی دست به کار شود [۱۵].

[۱] Levi-Civita

همان‌گونه که گفته شد، التصاق لِوی-چیویتا بر مقطع‌های کلاف مماس بر خمینه، که میدان برداری‌اند، تعریف می‌شود. بنابراین ابتدا باید مفهوم مناسبی نظیر میدان برداری بر چنبرهٔ ناجابه‌جایی تعریف شود. با توجه به اینکه چنبرهٔ $T^۲$ توازی‌پذیر است، اگر $\partial_۱$ و $\partial_۲$ را میدان‌های برداری مختصاتی بر $T^۲$ بگیریم، هر میدان برداری دیگری مانند X را می‌توان به‌صورت $X = f_۱\partial_۱ + f_۲\partial_۲$ نوشت که در آن $f_۱$ و $f_۲$ توابع هموار هستند که بر $T^۲$ تعریف شده‌اند. به‌عبارت‌دیگر، مجموعهٔ میدان‌های برداری مماس بر $T^۲$ یک $C^\infty(T^۲)$-مدول چپ است که با دو مولد تولید می‌شود. این موضوع روزنبرگ را بر آن داشت که میدان برداری بر چنبرهٔ A_θ را به‌صورت زیر تعریف کند.

تعریف ۱.۷. ([۱۵]) برای هر $a_۱, a_۲ \in \mathcal{A}_\theta^\infty$ ترکیب خطی $X = a_۱\delta_۱ + a_۲\delta_۲$ یک میدان برداری خوانده می‌شود و مجموعهٔ همهٔ میدان‌های برداری را با $\mathfrak{X}_\theta$ نمایش می‌دهیم. به‌عبارت‌دیگر، $\mathfrak{X}_\theta$ یک $\mathcal{A}_\theta^\infty$-مدول چپ است که با دو مولد $\delta_۱$ و $\delta_۲$ تولید می‌شود.

اگر $X = a_۱\delta_۱ + a_۲\delta_۲$ یک میدان برداری و $a \in \mathcal{A}_\theta^\infty$، تعریف می‌کنیم

$$X \cdot a = a_۱\delta_۱(a) + a_۲\delta_۲(a).$$

باید توجه کرد که در اینجا، برخلاف حالت جابه‌جایی، یک میدان برداری لزوماً یک اشتقاق نیست. همچنین کروشهٔ دو میدان برداری هم ممکن است میدان برداری نباشد.

روزنبرگ فضای خطی $\mathcal{D}_\theta$ را درنظر گرفت که شامل همهٔ اشتقاق‌های $\delta : \mathcal{A}_\theta^\infty \longrightarrow \mathcal{A}_\theta^\infty$ است و تجزیهٔ یکتایی به‌صورت

$$\delta = c_۱\delta_۱ + c_۲\delta_۲ + \delta_۰$$

دارند که در آن $c_۱, c_۲ \in \mathbb{C}$ و $\delta_۰$ یک اشتقاق درونی است (البته نابدیهی بودن این فضا به θ بستگی دارد). یادآوری می‌کنیم که هر $a \in \mathcal{A}_\theta^\infty$ یک اشتقاق ad_a به‌دست می‌دهد که به‌صورت $\mathrm{ad}_a(b) = [a, b] = ab - ba$ تعریف می‌شود. این‌گونه اشتقاق‌ها را اشتقاق درونی می‌گویند.

مفهوم ضروری دیگر، متریک ریمانی است که مانند ساختار ارمیتی تعریف می‌شود، با این تفاوت که متریک ریمانی به جای تعریف بر یک مدول راست بر $\mathfrak{X}_\theta$ $\mathcal{A}_\theta^\infty$-مدول چپ تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۷. ([۱۵]) یک متریک ریمانی $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ بر $\mathcal{A}_\theta^\infty$ عبارت است از یک نگاشت $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{X}_\theta \times \mathfrak{X}_\theta \longrightarrow \mathcal{A}_\theta^\infty$ به‌گونه‌ای که برای هر $X, Y, Z \in \mathfrak{X}_\theta$ و هر $a, b \in \mathcal{A}_\theta^\infty$ داشته باشیم

(الف) $\langle aX + bY, Z \rangle = a\langle X, Z \rangle + b\langle Y, Z \rangle$؛

(ب) $\langle X, Y \rangle^\star = \langle Y, X \rangle$، و بنابراین $\langle X, aY \rangle = \langle X, Y \rangle a^\star$؛

(پ) $\langle X, X\rangle$ عضو مثبتی باشد و $\langle X, X\rangle = 0$ اگر و تنها اگر $X = 0$؛
(ت) برای $i, j = 1, 2$، $\langle \delta_i, \delta_j\rangle$ خودالحاقی باشد و بنابراین $\langle \delta_1, \delta_2\rangle = \langle \delta_2, \delta_1\rangle$.

پس هر متریک ریمانی g نمایش ماتریسی یکتای به‌صورتِ $(g_{ij}) = (\langle \delta_i, \delta_j\rangle) \in M_2(\mathcal{A}_\theta^\infty)$ دارد.

مثال ۳.۷. اگر $h = h^*$ عضوی از $\mathcal{A}_\theta^\infty$ باشد، آن‌وقت $\langle \delta_i, \delta_j\rangle = e^h \delta_{ij}$ یک متریک ریمانی بر $\mathcal{A}_\theta^\infty$ تعریف می‌کند.

تعریف ۴.۷. ([۱۵]) یک التصاق بر $\mathcal{A}_\theta^\infty$ عبارت است از نگاشت $\nabla : \mathcal{D}_\theta \times \mathfrak{X}_\theta \longrightarrow \mathfrak{X}_\theta$ با تعریف $(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$ به‌گونه‌ای‌که در شرط‌های زیر صدق کند.

(الف) نسبت به هر دو مولفه $\mathbb{C}$-خطی باشد؛
(ب) برای هر $X \in \mathfrak{X}_\theta$، $Y \in \mathcal{D}_\theta$ و $a \in \mathcal{A}_\theta^\infty$، $\nabla_X(aY) = a\nabla_X Y + (X.a)Y$؛
(پ) برای هر $a \in \mathcal{A}_\theta^\infty$ با شرط $\tau(a) = 0$ داشته باشیم $\nabla_{ad_a} Y = aY$؛
(ت) برای هر $i, j, k = 1, 2$، $\langle \nabla_{\delta_i} \delta_j, \delta_k\rangle$ خودالحاقی باشد.

توجه کنید که این تعریف از التصاق با تعریف قبلی، تا اندازه‌ای متفاوت است. این تفاوت‌ها به این دلیل اعمال شده‌اند که بتوان قضیهٔ لِوی-چیویتا را اثبات کرد.

مشابه حالت جابه‌جایی، التصاق ∇ را فاقد تاب می‌گویند هرگاه $\nabla_{\delta_1}\delta_2 = \nabla_{\delta_2}\delta_1$. همچنین التصاق را با متریک ریمانی $g = \langle \cdot, \cdot\rangle$ سازگار گویند هرگاه

$$Z.\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle, \qquad X, Y \in \mathfrak{X}_\theta, Z \in \mathcal{D}_\theta.$$

اکنون می‌توان قضیه لِوی-چیویتا را ارائه کرد.

قضیه ۵.۷ ([۱۵]). *فرض کنید g یک متریک ریمانی بر $\mathcal{A}_\theta^\infty$ باشد. دراین‌صورت یک التصاق یکتای $\nabla : \mathcal{D}_\theta \times \mathfrak{X}_\theta \longrightarrow \mathfrak{X}_\theta$ وجود دارد که با متریک ریمانی g سازگار و فاقد تاب است. این التصاق، که التصاق لِوی-چیویتا نامیده می‌شود، با رابطهٔ زیر مشخص می‌گردد*

$$\langle \nabla_{\delta_i} \delta_j, \delta_k\rangle = \frac{1}{2}\big(\delta_i\langle \delta_j, \delta_k\rangle + \delta_j\langle \delta_i, \delta_k\rangle - \delta_k\langle \delta_i, \delta_j\rangle\big).$$

تعریف ۶.۷. ([۱۵]) فرض کنید $g = \langle \cdot, \cdot\rangle$ یک متریک ریمانی بر $\mathcal{A}_\theta^\infty$ و ∇التصاق لِوی-چیویتا وابسته به آن باشد. عملگر خمیدگی ریمان $R : \mathfrak{X}_\theta \longrightarrow \mathfrak{X}_\theta$ برای $X, Y \in \mathcal{D}_\theta$ به‌صورت

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X + \nabla_{[X,Y]}$$

و خمیدگی ریمان نیز به‌صورت $R_{i,j,k,l} = \langle R(\delta_i, \delta_j)\delta_k, \delta_l\rangle$ تعریف می‌شود.

اکنون خاصیتی از خمیدگی ریمان را بیان می‌کنیم.

گزاره ۷.۷. *خمیدگی ریمانی دارای ویژگی‌های زیر است*

$$R_{j,k,l,m} + R_{k,l,j,m} + R_{l,j,k,m} = 0, \qquad R_{j,k,l,m} = -R_{k,j,l,m}.$$

مثال ۸.۷. ([۱۵]) گیریم g متریک ریمانی در مثال ۳.۷ باشد. بنابه قضیهٔ لِوی-چیویتا داریم

$$\langle \nabla_{\delta_1}\delta_1, \delta_1\rangle = \frac{1}{2}\delta_1(e^h), \qquad \langle \nabla_{\delta_2}\delta_2, \delta_2\rangle = \frac{1}{2}\delta_2(e^h),$$
$$\langle \nabla_{\delta_1}\delta_1, \delta_2\rangle = -\frac{1}{2}\delta_2(e^h), \qquad \langle \nabla_{\delta_2}\delta_2, \delta_1\rangle = -\frac{1}{2}\delta_1(e^h).$$

بنابراین

$$\nabla_{\delta_1}\delta_1 = -\nabla_{\delta_2}\delta_2 = \frac{1}{2}(k_1\delta_1 - k_2\delta_2), \qquad \nabla_{\delta_2}\delta_1 = \nabla_{\delta_1}\delta_2 = \frac{1}{2}(k_2\delta_1 + k_1\delta_2),$$

که در آن $k_j = \delta_j(e^h)e^{-h}$. اکنون می‌توان خمیدگی را محاسبه کرد:

$$\begin{aligned}
R_{1,2,1,2} &= \langle R(\delta_1, \delta_2)\delta_1, \delta_2\rangle \\
&= \frac{1}{2}\big\langle \delta_2(k_2)\delta_1 + k_1\nabla_{\delta_2}\delta_1 - \delta_2(k_2)\delta_2 - k_2\nabla_{\delta_2}\delta_2 \\
&\qquad - \delta_1(k_2)\delta_1 - k_2\nabla_{\delta_1}\delta_1 - \delta_1(k_1)\delta_2 - k_1\nabla_{\delta_1}\delta_2, \delta_2\big\rangle \\
&= -\frac{1}{2}(\delta_2(k_2) + \delta_1(k_1)) \\
&= -\frac{1}{2}(\Delta(e^h) - \delta_1(e^h)e^{-h}\delta_1(e^h) - \delta_2(e^h)e^{-h}\delta_2(e^h)).
\end{aligned}$$

۸. قضیهٔ گاوس-بونه

قضیهٔ گاوس-بونه[1] قضیهٔ بسیار مهمی در هندسهٔ دیفرانسیل است؛ این قضیه ویژگی هندسی و توپولوژیک یک رویه را به هم پیوند می‌زند. بنابه این قضیه اگر Σ یک خمینهٔ دو بعدی بسته (فشرده و بدون لبه) و جهت‌دار با صورت سطح dA، g یک متریک ریمانی بر آن، R خمیدگی گاوسی، و $\chi(\Sigma)$ شاخص اویلر آن باشد آنگاه

$$\int_\Sigma R\,dA = 2\pi\chi(\Sigma).$$

[1] Gauss–Bonnet theorem

این قضیه را در نظریهٔ طیفی به‌شکل دیگری نیز بیان می‌کنند. اگر $\Delta_g = d^\star d$ لاپلاسی (Σ, g) باشد تابع زتای وابسته به Δ_g به‌صورت

$$\zeta(s) = \sum \lambda_j^{-s}, \qquad \Re(s) > 1$$

تعریف می‌شود که در آن مجموع روی ویژه‌مقدارهای ناصفر λ_j از Δ_g در نظر گرفته می‌شود. تابع زتا دارای گسترشی برخه‌ریخت[1] یکتا بر تمام صفحهٔ مختلط است و این گسترش فقط یک قطب ساده در $s = 1$ دارد. بنابراین، ζ در صفر تعریف می‌شود و

$$\zeta(0) + \mathrm{card}\{j : \lambda_j = 0\} = \frac{1}{12\pi} \int_\Sigma R dA = \frac{1}{6} \chi(\Sigma).$$

این همان همتای قضیهٔ گاوس–بونه در نظریهٔ طیفی است. بنابراین، $\zeta(0)$ یک ناوردای توپولوژیکی است و همچنین مستقل از تغییرات همدیس $g \longmapsto e^f g$ متریک است.

با الهام از فرمول اخیر، می‌توان قضیهٔ گاوس–بونه را برای چنبرهٔ ناجابه‌جایی نیز بیان کرد. در این بخش، به‌اختصار به این موضوع می‌پردازیم و خواننده را برای شرح کامل موضوع به مطالعهٔ [۷] و [۱۰] توصیه می‌کنیم.

گیریم $\mathcal{H}_0$ فضای هیلبرتی باشد که از کامل کردن A_θ تحت نرم $|a| = \tau(a^\star a)^{1/2}$ به‌دست می‌آید. عملگر ∂_ω یک عملگر بی‌کران بر $\mathcal{H}_0$ است و $\partial_\omega^\star$ الحاقی آن نسبت به حاصل‌ضرب داخلی

$$\langle a, b \rangle = \tau(b^\star a), \qquad a, b \in A\theta \tag{۱.۸}$$

است. فرض کنید $\mathcal{H}^{(1,0)}$ فضای هیلبرتی باشد که از کامل کردن فضای متشکل از همهٔ مجموع‌های متناهی $\sum a \partial_\omega b$، با شرط $a, b \in A_\theta^\infty$، نسبت به حاصل‌ضرب داخلی (۱.۸) به‌دست می‌آید. فرض کنیم عملگر ∂_ω از $\mathcal{H}_0$ به $\mathcal{H}^{(1,0)}$ بی‌کران باشد و لاپلاسی Δ_ω روی A_θ^∞ به‌صورت $\Delta_\omega = \partial_\omega^\star \partial_\omega$ تعریف شود. برای بیان قضیهٔ گاوس–بونه، علاوه‌بر عملگر لاپلاس، لازم است تغییرات همدیس نیز بر متریک اعمال شود. ازاین‌رو، $h = h^\star$ را یک عضو خودالحاقی از A_θ^∞ می‌گیریم و تابعک خطی ϕ را بر A_θ^∞ با ضابطهٔ

$$\phi(a) = \tau(a e^{-h})$$

تعریف می‌کنیم. اگرچه ϕ یک اثر نیست، تابعک خطی مثبت است و به‌کمک آن می‌توان حاصل‌ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi$ را تعریف کرد:

$$\langle a, b \rangle_\phi = \phi(b^\star a), \quad a, b \in A_\theta.$$

[1] meromorphic

فضای هیلبرت حاصل از کامل کردن A_θ با این حاصل‌ضرب داخلی را با $\mathcal{H}_\phi$ نمایش می‌دهیم و فرض کنیم ∂_ϕ همان عملگر ∂_ω باشد که از $\mathcal{H}_\phi$ به $\mathcal{H}^{(1,0)}$ بی‌کران بود. اکنون عملگر لاپلاس تغییریافتهٔ Δ'_ω با ضابطهٔ $\Delta'_\omega = \partial_\phi^\star \partial_\phi$ تعریف می‌شود. این عملگر یک عملگر مثبت و بی‌کران بر $\mathcal{H}_\phi$ است.

لم ۱.۸. *اگر $k = e^{h/2}$ را عملگری فرض کنیم که از چپ بر $\mathcal{H}_0$ عمل می‌کند آنگاه عملگر $\Delta'_\omega : \mathcal{H}_\phi \longrightarrow \mathcal{H}_\phi$ با عملگر $k\Delta_\omega k : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_0$ هم‌ارز یادیکانی است.*

اکنون، تابع زتای لاپلاسی با ضابطهٔ

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \mathrm{Trace}^+(e^{-t\Delta'_\omega}) t^{s-1} dt, \qquad \Re(s) > 1$$

را می‌توان تعریف کرد که در آن

$$\mathrm{Trace}^+(e^{-\Delta'_\omega}) = \mathrm{Trace}(e^{-t\Delta'_\omega}) - \dim\ker(\Delta'_\omega).$$

این تابع یک گسترش برخه‌ریخت یکتا بر تمام صفحهٔ مختلط دارد با یک قطب ساده در $s = 1$.

قضیه ۲.۸ (قضیهٔ گاوس-بونه). *اگر $\omega = \omega_1 + \omega_2$ عددی مختلط در نیم‌صفحهٔ بالایی صفحهٔ مختلط، θ یک عدد گنگ، و k یک عضو مثبت وارون‌پذیر در $\mathcal{A}_\theta^\infty$ باشد، مقدار $\zeta(0)$ برای عملگر $\Delta' \sim k\Delta k$ مستقل از انتخاب k است. افزون‌براین*

$$\begin{aligned}\zeta(0) + 1 = {} & \frac{2\pi}{\omega_2}\phi(f(\Delta)(\delta_1(k))\delta_1(k)) + \frac{2\pi|\omega|^2}{\omega_2}\phi(f(\Delta)(\delta_2(k))\delta_2(k)) \\ & + \frac{2\pi\omega_1}{\omega_2}\phi(f(\Delta)(\delta_1(k))\delta_2(k)) + \frac{2\pi\omega_1}{\omega_2}\phi(f(\Delta)(\delta_2(k))\delta_1(k)).\end{aligned}$$

در اینجا ϕ با ضابطهٔ $\phi(x) = \tau(xk^{-2})$ و $\Delta(x) = k^{-1}xk$ مفروض‌اند و f نیز با ضابطهٔ

$$f(u) = \frac{1}{6}u^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} + \mathcal{L}_1(u) - 2(1 + u^{\frac{1}{2}})\mathcal{L}_2(u) + (1 + u^{\frac{1}{2}})^2\mathcal{L}_3(u)$$

تعریف می‌شود که در آن $\mathcal{L}_m$ لگاریتم تغییریافته با تعریف زیر است

$$\mathcal{L}_m(u) = (-1)^m(u-1)^{-(m+1)}(\log u - \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\frac{(u-1)^j}{j}).$$

این نتیجهٔ مهم، ابتدا، برای $\omega = i$ ثابت شد [۷] و سپس فتحی‌زاده و خلخالی آن‌را برای ωی دلخواه اثبات کردند [۱۰].

خمیدگی اسکالر را نیز می‌توان، مانند قضیهٔ گاوس–بونه، به کمک تابع زتای لاپلاسی بیان کرد. دراصل، خمیدگی اسکالر برای سه‌تایی طیفی وابسته به (A_θ, ω, k) برابر عضو یکتای $R \in \mathcal{A}_\theta^\infty$ تعریف می‌شود که برای هر $\mathcal{A}_\theta^\infty$،

$$\mathrm{Trace}(a\Delta_\omega^{-s})|_{s=0} + \mathrm{Trace}(aP) = \tau(aR).$$

در اینجا P تصویری بر هستهٔ Δ_ω است. همچنین جملهٔ اول در سمت چپِ این برابری، مقدار تابع ζ_a با تعریف $\zeta_a(s) = \mathrm{Trace}(a\Delta_\omega^{-s})$، $\Re(s) > 0$، را در مبدأ نشان می‌دهد. این تابع یک گسترش تحلیلی بر تمام صفحهٔ مختلط به‌جز ۱ دارد و بنابراین در صفر تعریف می‌شود. محاسبهٔ خمیدگی اسکالر پیچیده است و باید از ابزار و فنون نظریهٔ طیفی و و روش‌های محاسبات کامپیوتری استفاده شود. برای شرح بهتری از خمیدگی اسکالر و چگونگی محاسبهٔ آن، [۹]، [۸]، و [۱۳] را ببینید. خمیدگی ریچی[۱] هم در [۱۱] مورد مطالعه قرار گرفته است.

توجه کنید که قضیهٔ گاوس–بونه و خمیدگی در هندسهٔ ریمانی ناشی از وجود متریک ریمانی و، به دنبال آن، التصاق لِوی–چیویتا است. اما این مفاهیم در هندسهٔ ناجابه‌جایی هنوز برای همهٔ فضاهای ناجابه‌جایی، حتی برای همهٔ چنبره‌های ناجابه‌جایی، تعریف نشده است و همان‌گونه‌که دیدیم برای چنبرهٔ ناجابه‌جایی دوبعدی هم مستقل از مفهوم متریک ریمانی و التصاق تعریف شده است. البته در بخش قبل دیدیم که روزنبرگ التصاق لِوی–چیویتا و خمیدگی ریمانی را تعریف کرده است. اما در آنجا هم فقط برای ردهٔ خاصی از چنبره‌ها این کار انجام شده است. بنابراین می‌توان گفت، اگرچه کوشش‌های فراوانی در هندسهٔ ناجابه‌جایی برای یافتن مفاهیمی مانند متریک ریمانی، التصاق، خمیدگی‌ها، و غیره انجام شده است، هنوز راه درازی در پیش است تا این مفاهیم تثبیت شوند و به جایگاهی برسند که در هندسهٔ ریمانی دارند.

تشکر و قدردانی

برای یک دورهٔ فرصت مطالعاتی در سال تحصیلی ۲۰۱۷–۲۰۱۸ در دانشگاه وسترن انتاریوی کانادا بودم. در آنجا آشنایی با مسعود خلخالی، ریاضی‌دان برجستهٔ هم‌میهن‌مان، و اصغر قربانپور، شاگرد مهربان ایشان، برای این‌جانب موهبتی بود. معمولاً هر روز هنگام ناهار فرصتی بود که با این دو بزرگوار، ساعتی گفتگو کنم. گفتگو با مسعود برای من بسیار ارزشمند بود؛ او نه‌تنها در زمینهٔ

[۱] Ricci

کاری خود مسلط و پرتجربه بود بلکه در زمینهٔ تاریخ و به‌ویژه تاریخ ریاضیات هم اطلاعات گسترده‌ای داشت و آن‌ها را بسیار دلنشین بازگو می‌کرد. اصغر هم نه‌تنها در زمینه‌های علمی یک هم‌نشین و هم‌صحبت فرهیخته بود بلکه یک دادرس ارزنده در هنگامهٔ بروز مشکلات زندگی در دیار غربت نیز بود. سپاسگزار هر دو بزرگوار هستم و برایشان بهترین‌ها را آرزو می‌کنم.

مراجع

[۱] میثمی صدر، میثم، نظریهٔ ریاضی احتمال و مبانی فیزیک کوانتوم، *فرهنگ و اندیشه ریاضی*، شمارهٔ **۶۷** (۱۳۹۹)، ۱۸۱-۲۰۸.

[2] Connes, A., Noncommutative geometry, the spectral standpoint, 2019 (preprint), available at `https://arxiv.org/abs/1910.10407`.

[3] Connes, A., *Noncommutative Geometry*, Academic Press, New York, 1994.

[4] Connes, A., $C^\star$-algebres et geometrie differentielle, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **290** (1980), 599–604.

[5] Connes, A., Moscovici, H., Type III and spectral triples, 2019 (preprint), available at `https://arxiv.org/abs/math/0609703`.

[6] Connes, A., Rieffel, M. A., Yang-Mills for noncommutative two-tori, *Contemp. Math.*, **62** (1994), 266-237.

[7] Connes, A., Tretkoff, P., The Gauss-Bonnet theorem for the noncommutative two torus, 2009 (preprint), available at `https://arxiv.org/abs/0910.0188`.

[8] Fathizadeh, F., Khalkhali, M., Curvature in noncommutative geometry, 2020 (preprint), available at `https://arxiv.org/abs/1901.07438`.

[9] Fathizadeh, F., Khalkhali, M., Scalar curvature for the noncommutative two torus, *J. Noncommut. Geom.*, **7** (2013), 1145–1183.

[10] Fathizadeh, F., Khalkhali, M., The Gauss-Bonnet theorem for noncommutative two tori with a general conformal structure, *J. Noncommut. Geom.*, **6** (2012), 457–480.

[11] Floricel, R., Ghorbanpour, A., Khalkhali, M., Ricci curvature in noncommutative geometry, 2019 (preprint), available at `https://arxiv.org/abs/1612.06688`.

[12] Gelfand, I. M., Naimark, M. A., On the imbedding of normed rings into the ring of operators on a Hilbert space, *Mat. Sb.*, **12** (1943), 197–217.

[13] Ghorbanpour, A., Khalkhali, M., Spectral geometry of functional metrics on noncommutative tori, 2018 (preprint), available at `https://arxiv.org/abs/1811.04004`.

[14] Khalkhali, M., *Basic Noncommutative Geometry*, 2nd ed., EMS Series of Lectures in Mathematics, European Mathematical Society, Zorich, 2013.

[15] Rosenberg, J., Levi-Civita's theorem for noncommutative tori, *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, **9** (2013), Paper 071, 9 pp.; also available at `https://arxiv.org/abs/1307.3775`.

[16] Swan, R. G., Vector bundles and projective modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **105** (1962), 264–277.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۹/۳/۳؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۴/۳۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۴/۳۱

محمد شفیعی: دانشگاه ولی‌عصر (عج) رفسنجان، دانشکدهٔ علوم ریاضی

رایانامه: mshafiee@vru.ac.ir