فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۰، شمارهٔ ۶۹ (پاییز و زمستان ۱۴۰۰) صص .۱۱۳ تا ۱۴۰

«بازپخت» چند اثبات کلاسیک*

یان استیوارت
ترجمهٔ لیلا گرامی معظّم

مارتین گاردنر[۱] در فصل هفدهم از کتاب *جشنوارهٔ ریاضیات* [۳] می‌گوید: «وقتی ایراد بزرگی در یک معمای ریاضی پیدا بشود –مثلاً وقتی جواب اشتباه باشد یا جوابی وجود نداشته باشد و یا برخلاف ادعایی که شده است بیش از یک جواب یا حتی جواب بهتری پیدا شود– می‌گویند معما ''خدشه‌پذیر (ناپخته)'' است.» گاردنر مثال‌هایی می‌زند که یکی از ساده‌ترین آن‌ها، معمایی بود که خودش در کتابی برای بچه‌ها آورده بود: جدولی از اعداد به‌صورتِ زیر داریم

۹	۹	۹
۵	۵	۵
۳	۳	۳
۱	۱	۱

دور شش تا از آن‌ها خط بکشید که مجموع آن‌ها ۲۱ بشود. این کار، بنا به زوجیت اعداد به کار رفته، محال است. راه‌حل گاردنر که عملاً بازپخت معمای خودش است، این است که جدول را سروته می‌کند و بعد دور سه‌تا ۶ و سه‌تا ۱ی که ظاهر می‌شوند خط می‌کشد. این ارقام پس از چرخاندن جدول ظاهر می‌شوند. اما، یکی از خوانندگان گاردنر، به اسم هاوئرد ویلکرسن[۲]، برای حل این مسئله راه دیگری می‌رود: دور سه‌تا ۳ و یکی از ۱ها خط می‌کشد و بعد دور دوتا ۱ باقی‌مانده هم یک خط بزرگ دیگر می‌کشد (که می‌شود ۱۱). این راه‌حل مناسب‌تراست، چون در راه‌حل اولی، با وارونه کردن جدول اصلی، ۳ها و ۵ها شبیه عدد نمی‌شوند.

عبارات و کلمات کلیدی. اعداد صحیح، اعداد اول، فرمول اویلر، چندجمله‌ای، تثلیث، اهرم، قطار کورانت–رابینز.

*نام و نشان مقالهٔ اصلی از این قرار است:
Stewart, Ian, Cooking the classics, *Math. Intelligencer*, **33** (2011), no. 1, 61–71.

[۱]Martin Gardner [۲]Howard Wilkerson

گاردنر این نوع طرح یا پختن معما را «پخت سهل‌انگارانه» می‌نامد. یعنی بهره‌برداری از تعریف مبهم و غیردقیقِ سؤال، برای به دست آوردن راه‌حلی غیرمنتظره. این روزها، در ریاضیات، آخرین تعریف‌های دقیق را هم خیلی خوب داریم. بااین‌همه، آنچه ما از ریاضیات به دانشجویانمان تدریس می‌کنیم، یا عملاً به همدیگر یاد می‌دهیم، در معرض پخت‌وپز قرار دارد؛ خصوصاً، بعضی از قضیه‌های کلاسیک که گاهی هم پیش‌پاافتاده و تکراری شده‌اند. در طی سال‌ها، مواردی از این دست را، که البته جای چون‌وچرا دارند و سلیقه‌ای هستند، در ذهن خودم جمع کردم. حالا هم کاری پرخطر کرده‌ام و آن‌ها را به دست چاپ سپرده‌ام. دست‌کم، می‌شود آن‌ها را به‌عنوان تمرین یا برای بحث در کلاس به دانشجویان داد به این منظور که نشان دهیم، الزاماً، اثبات‌های کلاسیک وحی مُنزل نیستند. در بیشتر آنها، حتی وقتی که موضوع نظریهٔ اعداد است، حال‌وهوای سیستم‌های دینامیکی احساس می‌شود؛ البته تعدادی هم این طور نیستند.

برای دست‌گرمی، با دو مثال که برای اکثر افراد آشنا هستند، کار را آغاز می‌کنیم.

ریشهٔ ۲ گنگ است

اثبات قدیمیِ گنگ بودن $\sqrt{۲}$ با برهان خلف است: بدین‌ترتیب‌که فرض می‌گیریم $\sqrt{۲} = p/q$ که در آن p/q به ساده‌ترین صورت درآمده است. نتیجه خواهیم گرفت که p و q باید زوج باشند. استدلالش چیزی شبیه به این است: چون $p^۲ = ۲q^۲$ پس pباید زوج باشد، مثلاً $p = ۲k$. اما $۴k^۲ = ۲q^۲$ و این یعنی q باید زوج باشد، و این تناقض است.

مشکل این اثبات این است که $\frac{p}{q}$ باید به ساده‌ترین صورت باشد و این از وجود و یکتایی تجزیهٔ اعداد به عامل‌های اول استفاده می‌کند. این مشکل را با گرفتن «ساده‌ترین صورت کسر» به معنای «کمترین مقدار q» رفع می‌کنیم.

اگر حاضرید قضیهٔ تجزیهٔ اعداد به عامل‌های اول و یکتایی آن‌را بپذیرید، اثبات آموزنده‌تر این است که توجه کنیم در در سمت چپِ تساوی $p^۲ = ۲q^۲$ توان زوجی از ۲ وجود دارد درحالی‌که در سمت راست، توان فردی از ۲. و حتی قضیهٔ بهتری می‌توان ثابت کرد:

قضیه ۱. *عددگویای a مربع کامل است اگر و فقط اگر در تجزیهٔ a به عامل‌های اول، هر عامل اول توانی زوج داشته باشد.*

اثبات این قضیه نیاز دارد که تجزیه به عامل‌های اول را، با مجاز دانستن توان‌های منفی، به اعداد گویا تعمیم دهیم، که البته کاری ساده و اثبات آن روشن است. به نظرم این قضیه موضوع را در چارچوب مناسب قرار می‌دهد و اصل مطلب را خیلی واضح‌تر نسبت به آن استدلال تصنعی که صرفاً برای $\sqrt{۲}$ طراحی شده، بیان می‌کند. گاهی احکام کلی بهتر از مثال‌ها هستند.

اما، اگر این مسیر را دوست ندارید بروید، می‌توانید از اثبات اصلی یونانیان استفاده کنید و قضیهٔ تجزیه به عامل‌های اول را کلاً کنار بگذارید؛ یعنی «دست‌پخت خود را به حالت کلاسیک آن درآوریم»:
فرض کنید $\sqrt{۲} = p/q$، که در آن q کمترین مقدار ممکن خود را دارد. پس $p > q$. بنابه تساوی

$$\frac{۲ - \sqrt{۲}}{\sqrt{۲} - ۱} = \sqrt{۲}$$

خواهیم داشت

$$\sqrt{۲} = \frac{۲ - p/q}{p/q - ۱} = \frac{۲q - p}{p - q}.$$

از طرفی $p - q < q$، پس تناقض به دست می‌آید.

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک، GCD، یک ترکیب خطی با ضرایبی از اعداد صحیح است

یکی از ویژگی‌های اساسی اعداد صحیح قضیهٔ زیر است.

قضیه ۲. *اگر $g = \gcd(a, b)$، آنگاه اعداد صحیح p و q موجودند به‌طوری‌که* $g = pa + qb$.

یک راه مطلوب برای رسیدن به این نتیجه، به کار بردن الگوریتم تقسیم و الگوریتم اقلیدس و استدلال استقرایی است که کاری نسبتاً پیچیده می‌شود.

پیشنهاد دیگر، استفاده از نظریهٔ حلقه‌ها است: به‌این‌ترتیب که مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ یک دامنهٔ ایده‌آل اصلی است و در آن ایده‌آل تولیدشده توسط $\{a, b\}$ را در نظر بگیریم. البته اینها مقداری جزئیات دارند.

بااین‌حال، اثبات بی‌پیرایهٔ مبتنی‌بر PID[1] سریع و ساده است و کاری به دو الگوریتم گفته‌شده هم ندارد. فرض کنید k کوچک‌ترین عدد مثبت به‌صورتِ $pa + qb$ باشد. به‌وضوح، g عدد k را عاد می‌کند. ادعا می‌کنیم $k \mid a$. برای اثبات آن، بزرگ‌ترین عدد m را طوری در نظر می‌گیریم که $mk < a$ (اگر این را نمی‌پسندید، کوچک‌ترین عدد m را طوری در نظر بگیرید که $(m + ۱)k > a$) اگر $mk \neq a$ آنگاه

[1] principal ideal domain

$0 < s = a - mk < k$ (یا می‌توان m را با $m + 1$ عوض کرد). حالا داریم

$$\begin{aligned} k - s &= pa + qb - s \\ &= pa + qb + km - a \\ &= pa + qb - a + (pa + qb)m \\ &= (p + pm - 1)a + (q - qm)b \\ &= p'a + q'b \end{aligned}$$

با $p', q' \in \mathbb{Z}$ مناسب، و این تناقض دارد با تعریف k. بنابراین ثابت می‌شود که k عاد می‌کند a را و به‌همین‌ترتیب k عاد می‌کند b را.

درواقع، می‌توان GCD را از این طریق تعریف کرد و همزمان وجود و خاصیت خطی‌بودنش را نیز ثابت کرد.

GCD به‌منزلهٔ یک سیستم دینامیکی

حالا کمی بلندپروازانه فکر کنیم. همیشه احساس می‌کردم که الگوریتم اقلیدس کمی پیچیده است، نه فهم و اجرای آن، بلکه بحث نظری آن. بیان GCD به‌صورت ترکیب خطی با ضرایبی از اعداد صحیح، مستلزم استقرایی پیچیده است که باید در آن الگوریتم را وارونه کنیم و به‌نوعی اصلِ مطلب هم از دستمان در می‌رود.

اکنون می‌رسیم به جایی که در ریاضیات، ارزش فرایندهای بازگشتی معلوم می‌شود، یعنی سیستم‌های دینامیکی. با کمی سهل‌گیری در انجام عملیات، به‌آسانی می‌توان الگوریتم اقلیدس را به یک سیستم دینامیکی تبدیل کرد؛ پاداش این کار هم معاف شدن از انجام الگوریتم تقسیم است.

نگاشت $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ را به‌صورتِ

$$\phi(x, y) = (\max(x, y) - \min(x, y), \min(x, y))$$

تعریف کنید. ثابت می‌کنیم که اگر $(a, b) \neq (0, 0)$، پس از تعداد متناهی مرحله، تکرارهای (a, b) به نقطهٔ ثابت $(d, 0)$ می‌رسد که در آن d بزرگ‌ترین مقسوم علیهٔ مشترک a و b است.

ابتدا، چند مطلب ساده را اثبات می‌کنیم:

۱) $\phi(x, y) = (0, 0)$ اگر و فقط اگر $(x, y) = (0, 0)$.

۲) تعریف کنید $\|(x, y)\| = x + y$. دراین‌صورت $\|\phi(x, y)\| \leq \|(x, y)\|$. تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $x = 0$ یا $y = 0$.

۳) نقاط ثابت ϕ، دقیقاً به‌صورت $(z,0)$ هستند.

۴) اگر $(x,y) \neq (0,0)$ آنگاه ϕ حافظ GCD است. به این معنی که $\gcd(\phi(x,y)) = \gcd(x,y)$.

اثبات موارد فوق واضح است. چهارمی را، به‌عنوان نمونه، ثابت می‌کنیم.

حکم می‌کنیم که z، x و y را عاد می‌کند اگر و فقط اگر z هر دو مؤلفهٔ $\phi(x,y)$ را عاد کند. اگر $z \mid x$ و $z \mid y$ آنگاه $z \mid \max(x,y)$ و $z \mid \min(x,y)$. بنابراین $z \mid \max(x,y) - \min(x,y)$ و این یعنی، z هر دو مؤلفهٔ ϕ را عاد می‌کند. حالا، اگر $z \mid \min(x,y)$ و $z \mid \max(x,y) - \min(x,y)$، پس

$$z \mid (\max(x,y) - \min(x,y) + \min(x,y)) = \max(x,y),$$

یعنی z هم x را عاد می‌کند و هم y را.

قضیه ۳. *فرض کنید $(a,b) \neq (0,0)$. دراین‌صورت عدد $t \geq 1$ وجود دارد که $\phi^t(a,b) = (d,0)$ و داریم $d = \gcd(a,b)$.*

اثبات. نرم $\|(x,y)\|$ یک تابع لیاپانوف برای ϕ است، یعنی وقتی ϕ روی (x,y) اعمال شود، نرم مذکور، کاهش می‌یابد؛ دقیق بخواهیم بگوییم، به‌جز وقتی که $x = 0$ یا $y = 0$. چون $x,y \in \mathbb{N}$، بنابراین tای وجود دارد که $\|\phi^{t+1}(a,b)\| = \|\phi^t(a,b)\|$. پس عددی مانند d وجود دارد که $\phi^t(a,b)$ برابر $(0,d)$ یا $(d,0)$. چون $\phi(0,d) = (d,0)$، در مجموع داریم $\phi^{t+1}(a,b) = (d,0)$. از آنجا که GCD کمیتی پایسته در این سیستم دینامیکی است، پس $\gcd(a,b) = \gcd(d,0) = d$. □

قضیه ۴. *اگر $d = \gcd(a,b)$، آنگاه اعداد صحیح p و q وجود دارند به‌طوری‌که $d = pa + qb$.*

اثبات. فرض کنید $\chi \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ مجموعه‌ای شامل تمام جفت مرتب‌هایی به‌صورت $(p_1 a + q_1 b, p_2 a + q_2 b)$ باشد با شرط $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$. به‌راحتی ثابت می‌شود که χ تحت ϕ پایدار است، یعنی، $\phi(\chi) \subseteq \chi$.

از آنجایی که $(a,b) \in \chi$، به‌وضوح $\phi^t(a,b) \in \chi$ برای هر $t \geq 0$. بنابراین $(d,0) \in \chi$ و درنتیجه اعداد q و p موجود است به‌طوری‌که $d = pa + qb$. □

این اثبات خیلی قشنگ است و قشنگ‌تر هم می‌شود. نگاشت ϕ یک خاصیت مقیاس‌بندی هم دارد:

$$\phi(ka, kb) = k\phi(a,b) \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

بنابراین، χ برابر اجتماعی مجزا از χ_kها است که در آن

$$\chi_0 = \{(0,0)\}\,, \qquad \chi_k = \{(a,b)|\ \gcd(a,b)=k\} \quad (k>0).$$

به‌علاوه، هر χ_k، ϕ-پایدار است و (به‌جز $k=0$) با توجه به نگاشت $(a,b)\to(ka,kb)$، دینامیک ϕ روی χ_k مزدوج دینامیک ϕ روی χ_1 است. بنابراین، می‌توانیم دینامیک ϕ را با محدود کردن خود به χ_1 بفهمیم؛ χ_1 همان مجموعهٔ همهٔ جفت مرتب اعداد طبیعی است که نسبت به هم اول‌اند.

برای هر جفت از اعداد طبیعی که نسبت به هم اول باشند، یک ارتفاع یکتا در نظر گرفته می‌شود که همان کوچک‌ترین tای است با خاصیت $\phi^t(a,b)=(1,0)$. با به کارگیری لم زیر می‌توان جفت‌ها را براساس افزایش ارتفاع طبقه‌بندی کرد.

لم ۵. *$\phi(a,b)=(c,d)$ اگر و فقط اگر $(a,b)=(c+d,d)$ یا $(a,b)=(d,c+d)$*، پس $\phi^{-1}(c,d)=\{(c+d,d),(d,c+d)\}$.

بنابراین داریم :

ارتفاع ۰: $(1,0)$

ارتفاع ۱: $(0,1)$

ارتفاع ۲: $(1,1)$

ارتفاع ۳: $(2,1),(1,2)$

ارتفاع ۴: $(3,1),(1,3),(3,2),(2,3)$

ارتفاع ۵: $(4,1),(1,4),(4,3),(3,4),(5,2),(2,5),(3,5),(5,3)$

پس 2^{n-2} زوج با ارتفاع n داریم وقتی $n\geq 2$.

ماتریس ارتفاع‌ها خارق‌العاده و شگفت‌انگیز است.

$$\begin{matrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\
2 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 5 & 0 & 6\\
3 & 3 & 0 & 4 & 4 & 0 & 5 & 5 & 6\\
4 & 0 & 4 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 6\\
5 & 4 & 4 & 5 & 0 & 6 & 5 & 5 & 6\\
6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 7 & 0 & 0\\
7 & 5 & 5 & 5 & 5 & 7 & 0 & 8 & 6\\
8 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 8 & 0 & 9\\
9 & 6 & 0 & 6 & 6 & 0 & 6 & 9 & 0
\end{matrix}$$

در این ماتریس، درایهٔ سطر a و ستون b همان ارتفاع جفت (a,b) است و وقتی a و b نسبت به هم اول نباشند، علامت «۰» را در آن درایه نوشته‌ایم.

دلیل این «۰»ها این است که کل این ماتریس بی‌نهایت بُعدی دارای ساختار بازگشتی است: قسمت‌هایی که علامت «۰» دارند تکرار یک درایه هستند، فقط جای سطر و ستون آن‌ها مقیاس‌بندی مجدد می‌شود. (این همان تجزیه به χ_kها است که قبلاً ذکر شد.)

شکل این ماتریس هنوز روشن نیست و یافتن الگوی آن تحقیق باارزشی خواهد شد.

نگاشت ϕ صورت رسمیِ نوعی فرایند است که یونانیان باستان تحت نام «کاهش متناوب»[1] با آن آشنایی داشتند [۲]. در آن فرایند، از یک مستطیل آن‌قدر مربع می‌بریدند تا قسمت باقی‌مانده خیلی کوچک شود، و بعد، در این نقطه، مربع‌های کوچک‌تری از مستطیل می‌بریدند، و این کار را ادامه می‌دادند. می‌دانیم که این فرایند با الگوریتم اقلیدس معادل است، که آن‌هم با بسط کسرهای مسلسل معادل است. اثبات یونانیان برای گنگ بودن $\sqrt{2}$ نیز در همین زمینه‌ها جا می‌گیرد.

نگاشت ϕ را هم می‌توان روی $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ تعریف کرد که به کسرهای مسلسل x/y یا y/x نیز ارتباط پیدا می‌کند. نرم تعریف‌شده بازهم تابع لیاپانوف است و، درنتیجه، هیچ نقطهٔ تناوبی نخواهیم داشت. اما، وقتی (x,y) را در ضریبی ضرب کنیم، نقاط تناوبی پیدا خواهیم کرد، و این وقتی رخ می‌دهد که x/y توان دوم یک عدد گنگ باشد.

فرمول اویلر

فرمول معروف $e^{i\pi} = -1$، اغلب، رازآمیز جلوه می‌کند. همهٔ ما می‌دانیم چگونه درستی آن‌را نشان دهیم، اما روش‌های معمول، هیچ خبر از اصل آن نمی‌دهند و گو اینکه صرفاً نتیجهٔ یک اتفاق است. دستِ‌کم یک راه برای اینکه نشان دهیم این رابطه طبیعی است و اتفاقی نیست وجود دارد و آن استفاده از معادلات دیفرانسیل است. کمی مقدمات برای این کار لازم است، که البته در جای خود مطالب مفیدی هستند.

معادلهٔ دیفرانسیل عادی زیر را در صفحهٔ اعداد مختلط و با شرط آغازی $z(0) = 1$ در نظر بگیرید:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = iz.$$

جواب معادله، $z(t) = e^{it}$ است. (تابع توان را می‌توان از این طریق هم تعریف کرد.)

حالا تعبیر هندسی این معادله را در نظر بگیرید. چون iz بر z عمود است، بردار مماس به یک جواب معادله، در نقطهٔ $z(t)$، با بردار شعاعی از ۰ تا $z(t)$، زاویهٔ قائمه می‌سازد. نتیجه این امر (که با یک تبدیل ساده به مختصات قطبی قابل بررسی است) به شرح ذیل است:

[1] anthyphaeresis

- دایرۀ یکه به مرکز ۰ و گذرنده از $z(t)$ تحت جریان، پایا است ($\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = ۰$)،
- در مختصات قطبی داریم $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = ۱$.

بنابراین دایرۀ یکه، وقتی $z(۰) = ۱$، مسیر جواب است، و t طول قوس برحسب رادیان می‌شود و بنابراین نقطۀ $z(t)$ روی این دایره با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند.

تعریف یونانی عدد π به ما می‌گوید که محیط این دایره برابر۲π است، پس نصف محیط زمانی طی شده است که $t = \pi$. اما نیمۀ راه روی دایره، نقطۀ $z = -۱$ است، پس $e^{i\pi} = -۱$.

نامتناهی بودن اعداد اول

اثبات اقلیدس، مبنی‌بر اینکه تعداد اول از هر کران متناهی بیشتر است، فوق‌العاده زیرکانه است. اما، من همیشه احساس می‌کردم که انتخاب $p_۱ \cdots p_k + ۱$، چیزی شبیه به چشم‌بندی است. آنچه در ادامه می‌آوریم، راز این چشم‌بندی را آشکار می‌کند.

برای دست‌گرمی، تصور کنید که اعداد اول فقط ۲ و ۳ و ۵ بودند. اگر به‌صورتِ روشمندی همۀ حاصل‌ضرب‌های توان‌های این اعداد را در نظر بگیریم، تمام اعداد ممکن به دست می‌آید. چیزی شبیه به

$$۱, ۲, ۳, ۵, ۲ \times ۲, ۲ \times ۳, ۲ \times ۵, ۳ \times ۳, ۳ \times ۵, \ldots,$$

بدون در نظر گرفتن ترتیب عددی، به‌راحتی ایجاد می‌شود.

ثابت می‌کنیم در این‌فهرست، برخی از اعداد نیستند. یک راه مناسب برای این منظور، شمردن تعداد اعدادی است که، تا مقدار مشخص N، به این طریق به دست می‌آید.

عدد ۱ یک‌بار ظاهر می‌شود.
مضارب ۲، $\lfloor \frac{N}{۲} \rfloor$ بار ظاهر می‌شوند.
مضارب ۳، $\lfloor \frac{N}{۳} \rfloor$ بار ظاهر می‌شوند.
مضارب ۵، $\lfloor \frac{N}{۵} \rfloor$ بار ظاهر می‌شوند.

با شمارش فوق، برخی اعداد اضافه شمرده می‌شوند، مثلاً، مضارب ۶، مضارب ۲ و ۳ هم هستند، بنابراین باید مضارب ۳×۲ را که $\lfloor \frac{N}{۲\times۳} \rfloor$ بار ظاهر می‌شوند کسر کنیم. اما بعد؟ الان می‌بینید چه اتفاقی می‌افتد. بنابه اصل شمول ل تعداد اعداد از ۱ تا N (که البته Nتا است) دقیقاً باید برابر

$$۱ + \lfloor \frac{N}{۲} \rfloor + \lfloor \frac{N}{۳} \rfloor \lfloor \frac{N}{۵} \rfloor - \lfloor \frac{N}{۲ \times ۳} \rfloor - \lfloor \frac{N}{۲ \times ۵} \rfloor - \lfloor \frac{N}{۳ \times ۵} \rfloor + \lfloor \frac{N}{۲ \times ۳ \times ۵} \rfloor$$

باشد.

آه! ولی کار کردن با توابع جزء صحیح دردسر است. پس Nای را در نظر بگیریم که بر تمام این مخرج‌ها بخش‌پذیر باشد، یعنی مضربی از ۵ × ۳ × ۲ باشد. چرا اصلاً خود $N = ۳۰ = ۲ \times ۳ \times ۵$ نباشد؟ پس عبارت بالا می‌شود

$$۱ + ۱۵ + ۱۰ + ۶ - ۵ - ۳ - ۲ + ۱ = ۲۳,$$

که ۳۰ نشد.

حالا راه تعمیم مسئله واضح است. فرض کنید $p_۱, p_۲, \ldots, p_k$ فهرست (متناهی) همهٔ اعداد اول باشد. در نظر بگیرید $N = p_۱ \cdots p_k$. با کار بردن استدلال مشابهی براساس اصل شمول نتیجه می‌گیریم که تعداد اعداد بین ۱ تا N، یعنی همان N، برابر است با

$$N = ۱ + \sum_i \frac{N}{p_i} - \sum_{i,j} \frac{N}{p_i p_j} + \sum_{i,j,k} \frac{N}{p_i p_j p_k} + \ldots$$

که در آن زیرنویس‌ها در همهٔ مجموع‌ها متمایز در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین

$$\begin{aligned}
۱ &= N \left(۱ - \sum_i \frac{۱}{p_i} + \sum_{i,j} \frac{۱}{p_i p_j} - \sum_{i,j,k} \frac{۱}{p_i p_j p_k} + \ldots \right) \\
&= N \left(۱ - \frac{۱}{p_۱} \right) \left(۱ - \frac{۱}{p_۲} \right) \left(۱ - \frac{۱}{p_۳} \right) \cdots \left(۱ - \frac{۱}{p_k} \right) \\
&= p_۱ \left(۱ - \frac{۱}{p_۱} \right) p_۲ \left(۱ - \frac{۱}{p_۲} \right) p_۳ \left(۱ - \frac{۱}{p_۳} \right) \cdots p_k \left(۱ - \frac{۱}{p_k} \right) \\
&= (p_۱ - ۱) \cdots (p_k - ۱)
\end{aligned}$$

که فقط برای $k = ۱$ و $p_۱ = ۲$ برقرار است؛ پس، مثلاً ۳ در فهرست اعداد اول نیست.

پس پی بردیم که بعضی از اعداد در فهرست نیستند و از جملهٔ آن‌ها، که سریعاً متوجه نبود آن می‌شویم، عدد $N - ۱ = p_۱ p_۲ \cdots p_k - ۱$ است. با این نکته و ترجیح کارکردن با باقی‌ماندهٔ ۱ بر باقی‌ماندهٔ ۱− به اثبات اقلیدس می‌رسیم.

البته روش‌های بی‌شماری برای اثبات نامتناهی بودن اعداد اول وجود دارد. یکی از ساده‌ترین آن‌ها، که به محاسبات فوق هم ارتباط پیدا می‌کند، محاسبهٔ تابع ϕی اویلر برای $N = p_۱ \cdots p_k$ است. فرض کنید همهٔ اعداد بین ۲ و $N - ۱$ مضربی از p_iهایی باشند، به‌وضوح $\phi(N) = \phi(p_۱ \cdots p_k) = ۱$. از طرفی،

$$\phi(N) = \phi(p_۱) \cdots \phi(p_k) = (p_۱ - ۱) \cdots (p_k - ۱)$$

پس، مثل قبل، داریم $p_i = 2$ برای هر i و $k = 1$.

حل چندجمله‌ای‌ها به‌وسیلهٔ رادیکال‌ها

شاید بعید به نظر بیاید که در موضوعی پرسابقه، مثل حل معادله‌های درجهٔ دوم، سوم، و چهارم، بشود چیز تازه‌ای پیدا کرد. اما، بعضی از مطالب قدیمی را می‌توان قدری تغییر داد.

درجهٔ دوم‌ها. برای دست‌گرمی، معادلهٔ درجهٔ دوم کلی

$$x^2 + px + q = 0 \tag{1}$$

را با روشی غیرمعمول حل می‌کنم. ایدهٔ کار این است که وقتی موقع تجزیه برسد، تنها درجه دومی که می‌توانیم تجزیه کنیم $x^2 - k^2$ است. بنابراین، دنبال a و bهایی هستیم که

$$x^2 + px + q = (x+a)^2 - b^2$$

با متحد قرار دادن، می‌رسیم به

$$2a = p \qquad q = a^2 - b^2$$

بنابراین $a = p/2$ و $b^2 = p^2/4 - q$ و بنابراین $b = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$ پس معادلهٔ (۱.۰) به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$0 = (x+a)^2 - b^2 = (x+a+b)(x+a-b)$$

و بنابراین $x = -a \pm b$. یعنی،

$$x = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}$$

که همان فرمول قدیمی است. (چه چیز دیگری می‌خواهید؟)

درجهٔ چهارم‌ها. اگرحقه‌ای کارگر افتاد، دوباره آن‌را به کار ببند. با این گفته، تشویق شدم که معادلهٔ درجهٔ چهارم

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0 \tag{2}$$

را با همان روش قبلی حل کنم. پس، a و b و c و d را به‌گونه‌ای می‌یابیم که

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = (x^2 + ax + b)^2 - (cx+d)^2$$

که می‌رسیم به

$$۲a = p, \quad a^۲ + ۲b - c^۲ = q, \quad ۲ab - ۲cd = r, \quad b^۲ - d^۲ = s.$$

واضح است که باید بگیریم $a = p/۲$ و برای حل دومین معادله برای b برحسب c در نظر می‌گیریم $b = \left(q + c^۲ - p^۲/۴\right)/۲$، و برای حل سومین معادله برای d برحسب c می‌نویسیم

$$d = \frac{-r + ۲ab}{۲c} = \frac{-r + p\left(q + c^۲ - p^۲/۴\right)/۲}{۲c} = \frac{-۲r + p\left(q + c^۲ - p^۲/۴\right)}{۴c}.$$

و نهایتاً، با جانشانی همهٔ اینها در چهارمین معادله:

$$\left(\frac{\left(q + c^۲ - p^۲/۴\right)}{۲}\right)^۲ - \left(\frac{-۲r + p\left(q + c^۲ - p^۲/۴\right)}{۴c}\right)^۲ - s = ۰$$

و (پس از بازنگری و مرتب کردن معادله) برای از بین بردن مخرج‌ها، طرفین را در $c^۲$ ضرب می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} ۰ =& \frac{۱}{۶}c^۶ + \left(\frac{q}{۲} - \frac{۳p^۲}{۱۶}\right)c^۴ + \left(\frac{۳p^۴}{۶۴} - \frac{p^۲}{۴q} + \frac{q^۲}{۴} + \frac{pr}{۴} - s\right)c^۲ \\ &+ \left(\frac{-p^۶}{۲۵۶} + \frac{p^۴q}{۳۲} - \frac{p^۲}{۱۶q^۲} - \frac{p^۳r}{۱۶} + \frac{pqr}{۴} - \frac{r^۲}{۴}\right) \end{aligned}$$

که، در کمال تعجب، یک معادلهٔ درجهٔ سوم برحسب $c^۲$ است. (البته این روش، گونه‌ای از حلال درجهٔ سوم فراری [۱] است).

بنابراین، به شرط اینکه بتوانیم معادلات چندجمله‌ای درجهٔ سوم را حل کنیم، می‌توان معادلات درجهٔ چهارم را نیز حل کرد.

درجهٔ سوم‌ها. ظاهراً، ترفند قبلی در این مورد، کارساز نیست، یک دلیلش فرد بودن ۳ است. گزینهٔ دیگر در تبدیل درجهٔ سوم به ... تبدیل به همان درجهٔ ۳ است. ترفند قدیمی، استفاده از یک انتقال در x و تعویض متغیر هوشمندانه و تبدیل معادلهٔ درجهٔ سوم $x^۳ + mx + n = ۰$ است. به خاطر یک تغییر ساده، زیاد زحمت نکشید: معادلهٔ $x^۳ + px^۲ + qx + r = ۰$ را در نظر بگیرید و تعویض متغیر زیر را انجام دهید

$$x = az + b + cz^{-۱}.$$

(تعویض متغیر قدیمی $x = t + ۱/t$ در چندجمله‌ای‌های متقارن را به خاطر بیاورید.) بنابراین

$$x^۳ + px^۲ + qx + r = Az^۳ + Bz^۲ + cz + D + Ez^{-۱} + Fz^{-۲} + Gz^{-۳}$$

[۱] Ferrari

که در آن

$$A = a^{۳},\ B = a^{۲}(۳b+p),\ C = a(۳b^{۲}+۳ac+۲bp+q),$$
$$D = b^{۳}+۶abc+b^{۲}p+۲acp+bq+r,\ E = c(۳b^{۲}+۳ac+۲bp+q),$$
$$F = c^{۲}(۳b+p),\ G = c^{۳}.$$

در تساوی‌های بالا، یک چیزِ اتفاقی، یکدفعه به چشم ما می‌خورد. اگر دو عبارت $۳b+p$ و $۳b^{۲}+۳ac+۲bp+q$ را صفر کنیم، *چهار* ضریب $z^{۲}$، z، $z^{-۱}$، و $z^{-۲}$ صفر می‌شوند. وای چه خوش‌شانس‌ای! برای این کار هم باید $b=-p/۳$ و $a=p^{۲}-۳q/۹c$ و c پارامتری آزاد باشد. (چیزی که ما لازم داریم $۹ac=p^{۲}-۳q$ است.) اکنون، معادلهٔ درجهٔ سوم ما به‌صورت Y زیر در می‌آید

$$Az^{۳}+D+Gz^{-۳}=۰$$

و یا $Az^{۶}+Dz^{۳}+G=۰$ که یک معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب $z^{۳}$ بوده و با رادیکال‌ها قابل حل است. پس از حل آن، با جانشانی، x به دست خواهد آمد.

درجهٔ پنجم‌ها. به یُمن تحقیقات آبل[۱]، گالوا[۲]، و پیشینیان آن‌ها، می‌دانیم که فرمولی برای درجهٔ پنجم‌ها وجود ندارد. برای این مطلب، اثباتی شسته‌رُفته سرهم کرده‌ام که مقدمات فنی کمی دارد، ولی حدوداً ۱۰ صفحه است. آن‌طور دست‌پختی نیست، بلکه سعی کرده‌ام مطالبی را که جبردان‌ها از لژاندر[۳] تا کرونکر[۴] می‌دانستند مهندسی معکوس کنم و چیزهای لازم دیگر را هم بیاورم. در آنجا ثابت می‌کنم که $x^{۵}-۸۰x+۳۰=۰$ را نمی‌توان با رادیکال‌ها حل کرد. وقتی آماده شد شاید جایی آن‌را منتشر کنم.

تثلیث زوایه

اثبات رایج برای محال بودن تثلیث زوایه (برای مثال به [۶] رجوع شود) مبتنی‌بر یک معادلهٔ درجهٔ سوم برای $\cos(۲\pi/۹)$ و ضربی بودن درجهٔ توسیع میدان‌ها است. در اینجا، راه دیگری با مقدمات کمتر و چارچوبی طبیعی‌تر می‌آوریم.

صفحهٔ اقلیدسی را با صفحهٔ اعداد مختلط $\mathbb{C}$ یکی می‌گیریم. عدد $z\in\mathbb{C}$ را ساخت‌پذیر[۵] گوییم اگر به‌وسیلهٔ خط‌کش و پرگار در $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ قابل ترسیم باشد. (توجه داشته باشید که قسمت حقیقی و مختلط را جدا در نظر نمی‌گیریم.)

با محاسبات معمولی روی مختصات ثابت می‌شود که:

[۱] Abel [۲] Galois [۳] Legendre [۴] Kronecker [۵] constructible

لم ۶. عدد z *ساخت‌پذیر است اگر و فقط اگر دنباله‌ای متناهی از اعداد مختلط مانند* α_1، α_2، ...، α_k *موجود باشد به‌طوری‌که* $\alpha_1^2 \in \mathbb{Q}$ *و* $\alpha_j^2 \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1})$ *برای* $j = 2, \ldots, k$ *و* $z \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

طبق معمول، $\mathbb{Q}(\ldots)$ زیرمیدانی از $\mathbb{C}$ را نشان می‌دهد که توسط اعضای داخل پرانتز تولید می‌شود. توجه داشته باشید که اگر K زیرمیدانی از $\mathbb{C}$ باشد و $\alpha^2 \in K$، آنگاه

$$K(\alpha) = \{x + \alpha y | \; x, y \in K\}.$$

اکنون قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنم:

قضیه ۷. *نهمین ریشهٔ اولیهٔ یک،* $\xi = e^{2\pi i/9}$*، ساخت‌پذیر نیست.*

از آنجایی که ξ تثلیث $\omega = e^{2\pi i/3}$ است، نتیجه می‌شود که نمی‌توان زاویهٔ $2\pi/3$ را با کمک خط‌کش و پرگار تثلیث کرد.

حالا باید قضیه را بدون استفاده از خاصیت ضربی‌بودن درجهٔ توسیع میدان‌ها اثبات کنیم.

اثبات. بنابه برهان خلف، فرض کنید ξ ساخت‌پذیر باشد. برجی از زیرمیدان‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset \mathbb{Q}(\omega) = K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_s$$

به‌طوری‌که $\xi \in K_s$ و $K_j = K_{j-1}(\alpha_j)$ که در آن $\alpha_j^2 \in K_{j-1}$ برای $j = 2, \ldots, s$. توجه داشته باشید که برای $j = 1$ چون $\omega = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)/2$ بنابراین $\mathbb{Q}(\omega) = \mathbb{Q}\left(i\sqrt{3}\right)$. چنین برجی موجود است اگر و تنها اگر ξ ساخت‌پذیر باشد. از این میان، برجی را انتخاب می‌کنیم که در آن s کمترین مقدار باشد. پس $\xi = a + b\sqrt{\beta}$ که در آن $a, b, \beta \in K_{s-1}$. انتخاب s ایجاب می‌کند که $b \neq 0$ و درنتیجه $a \neq 0$؛ اما $\omega = \xi^3$، پس

$$\omega = \left(a + b\sqrt{\beta}\right)^3 = (a^3 + 3ab^2\beta) + (3a^2b + b^3\beta)\sqrt{\beta}.$$

حال اگر $3a^2b + b^3\beta \neq 0$،

$$\sqrt{\beta} = \frac{\omega - a^3 - 3ab^2\beta}{3a^2b + b^3\beta}$$

که در K_{s-1} قرار دارد و با کمینه بودن s در تناقض است. بنابراین $3a^2b + b^3\beta = 0$، و درنتیجه $\omega = a^3 + 3ab^2\beta$. ازطرفی

$$\left(a - b\sqrt{\beta}\right)^3 = (a^3 + 3ab^2\beta) - (3a^2b + b^3\beta)\sqrt{\beta} = (a^3 + 3ab^2\beta) = \omega.$$

اما ریشه‌های سوم ω عبارت‌اند از ξ و $\omega\xi$ و $\xi\omega^2$. بنابراین

$$a - b\sqrt{\beta} = \omega^c \xi$$

که در آن $c = 1$ یا $c = 2$. (c نمی‌تواند صفر باشد چون $b \neq 0$.) اما در بالا دیدیم که $\xi = a + b\sqrt{\beta}$، با جمع کردن دو تساوی اخیر خواهیم داشت $\xi = b(1 + \omega^c)/2a$ که در K_{s-1} قرار دارد و بازهم با فرض ما دربارهٔ s در تناقض است. □

قضیهٔ مجموع دو مربع

قضیهٔ دو مربعِ فرما، که اویلر آن‌را ثابت کرد، حاکی از این است که هر عدد اول به شکل $4k + 1$ مجموع مربع‌های دو عدد است. این قضیه قسمت‌های دیگری هم دارد، اما این مورد، سخت‌ترین قسمت آن است. راه‌حل‌های قدیمی، یا از مانده‌های درجهٔ دوم استفاده می‌کنند یا ثابت می‌کنند که مضاربی از آن عدد اول مجموع مربع‌های دو عدد صحیح است و بعد روش نزول نامتناهی را به کار می‌برند.

اثباتی که در ادامه آمده، احتمالاً برای اهل فن آشنا است، اما من آن‌را در هیچ کتابی ندیده‌ام. این اثبات، کوتاه، مفهومی، و آسان است.

یادآوری می‌کنم که «اعداد صحیح گاوسی» $\mathbb{Z}[i]$ مرکب از همهٔ اعداد مختلط به‌صورتِ $a + bi$ است که در آن $a, b \in \mathbb{Z}$. در این مجموعه، «نرمی» با تعریف $N(a + bi) = a^2 + b^2$ وجود دارد که ضربی است، یعنی

$$N(xy) = N(x)\, N(y).$$

اعداد صحیح گاوسی، تشکیل یک حوزهٔ تجزیهٔ یکتا می‌دهد. در واقع، با روش‌های مقدماتی، می‌توان ثابت کرد که نرم مذکور، یک الگوریتم اقلیدسی به دست می‌دهد.

فرض کنید $p \in \mathbb{Z}$ عددی اول (به همان مفهوم معمول) باشد. ادعا می‌کنیم که اگر $p \equiv 1$ (به‌پیمانهٔ ۴) آنگاه p در $\mathbb{Z}[i]$ اول نیست. با برهان خلف، فرض کنید $p = 4k + 1$ یک عدد اول گاوسی باشد. دراین‌صورت $\mathbb{Z}[i]/p$ میدان است و زیرمیدان $\mathbb{Z}/p$ را در بر دارد که شامل i نیست؛ چون اگر i در $\mathbb{Z}/p$ باشد، i باید حقیقی، و درواقع، صحیح باشد. گروه ضربی این زیرمیدان، دوری و از مرتبهٔ $4k$ است، بنابراین عضوی مانند α از مرتبهٔ ۴ دارد. اکنون چندجمله‌ای درجهٔ چهارم؛ $t^4 - 1$، حداقل ۵ ریشهٔ مجزا دارد: ۱، α، α^2، α^3، و i؛ که این تناقض است.

چون‌که $N(p) = p^2$، از ضربی بودن نرم مذکور داریم $p = q_1 q_2$ که در آن q_1 و q_2 در $\mathbb{Z}[i]$ اول‌اند. چون p حقیقی است، خواهیم داشت $q_2 = \overline{q_1}$. فرض کنید $q = a + bi$. پس

$$p = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

اگر بخواهیم دقیق بگوییم، رابطهٔ بالا با تقریب یکه‌ای برقرار است، ولی یکه‌ها $\pm ۱, \pm i$اند. چون p و $a^۲ + b^۲$ هر دو حقیقی و مثبت‌اند، نتیجه به دست می‌آید.

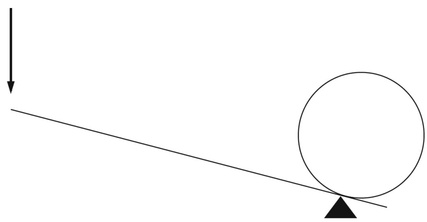
در میانهٔ راه می‌توانستیم از این نکته هم استفاده کنیم که $\mathbb{Z}[i]/p$ برابر است با $\mathbb{Z}/p[t]/\langle t^۲ + ۱\rangle$، و $t^۲ + ۱$ تحویل‌پذیر است (α ریشهٔ آن است) پس این خارج‌قسمت نمی‌تواند میدان باشد. این استدلال یک ذره قشنگ‌تر ولی کمی غیرمستقیم است.

استدلال قشنگی، مشابه با همین اثبات، برای $\mathbb{Z}[\omega]$ داریم که در آن ω ریشهٔ سوم یک است و از آن نتیجه می‌شود که اعداد اول به‌صورتِ $۶k + ۱$ هم به‌صورتِ $a^۲ + b^۲ - ab$، و یا $a^۲ + ۳b^۲$، هستند.

تکیه‌گاهی به من بده، تا زمین را جابه‌جا کنم

این گفتهٔ معروف ارشمیدس است. البته ادعای من این است که او از قبل تکیه‌گاهی داشته است. تصور می‌کنم طرح این ادعا از طرف ارشمیدس با سهل‌انگاری همراه بوده است. ارشمیدس در اینجا «خطایی» نکرده است؛ فقط هدف او قابل حصول نبوده است.

در اینجا ارشمیدس قانون اهرم‌ها را بزرگ جلوه می‌دهد، و چیزی که در ذهن داشت اساساً شکل ۱ است. فکر می‌کنم برای او مکان زمین در فضا مهم نبود، بلکه دنبال این بود که نقطهٔ اتکاء ثابت باشد و به منظور به کار بردن قانون اهرم‌ها، برخلاف واقعیت‌های نجومی، نیاز به یکنواخت‌بودن جاذبه داشت. او، همچنین، نیاز به یک اهرم کاملاً سخت با جرم صفر داشت. مهم نیست. نمی‌خواهم وارد بحث دربارهٔ لختی



شکل ۱. اهرم ارشمیدس

و مناقشه‌های دیگر شوم. اجازه دهید هر چیزی را که ارشمیدس فرض‌کرده بپذیریم. سؤال من این است: اگر زمین بلند شود، «چقدر» جابه‌جا می‌شود؟

فرض کنیم ارشمیدس نیروی کافی برای بلند کردن خودش، به وزن مثلاً ۱۰۰ کیلوگرم، اعمال کند. جرم زمین حدوداً ۶×۱۰^{۲۴} کیلوگرم است. اگر نقطهٔ اتکاء یک متر از زمین فاصله داشته باشد، بنابه قانون اهرم‌ها، فاصلهٔ ارشمیدس تا نقطهٔ اتکاء برابر ۶×۱۰^{۲۲} است، و بنابراین اهرم باید طولش $۶ \times ۱۰^{۲۲} + ۱$

باشد. اگر ارشمیدس طرف خودش را یک متر حرکت دهد، از تشابه مثلث‌ها می‌بینیم که زمین به اندازهٔ $۱٫۶ \times ۱۰^{-۲۳}$ متر حرکت خواهد کرد. قطر پروتون $۱۰^{-۱۵}$ متر است ....

باشه! بالاخره «جابه‌جا» می‌شود.

درست است. اما تصور کنید که به جای استفاده از این ابزار غیرمحتمل و غول‌پیکر، اگر ارشمیدس روی سطح زمین می‌ایستاد و «بالا و پایین می‌پرید»، به‌ازای هر متر پریدن او، زمین به اندازهٔ $۱٫۶ \times ۱۰^{-۲۳}$ متر در خلاف جهت حرکت می‌کرد (عمل و عکس‌العمل). اساساً، این عمل همان اثر را دارد که یک اهرم به طول $۱ + ۶ \times ۱۰^{۲۲}$ دارد؛ این طول در حدود ۱٫۶ میلیون سال نوری، یا حدود ۲/۳ فاصله تا کهکشان امرأةالمُسَلسَله است.

مجموعهٔ اعداد حقیقی ناشمارا است

اثباتِ «قطری» این حکم را دوست *دارم*، اما این روش به ترفندی ظریف روی اعشارهای نامتناهی نیاز دارد.

فرض کنید $\mathbb{R}$ شمارا باشد و $\mathbb{R} = \{a_j \ : \ j = ۱, ۲, \ldots\}$. تابع‌های f و g را از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x) = ۱ \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$g(x) = \begin{cases} ۱ & |x - a_j| \leq ۲^{-j} \text{ اگر } j \text{ ای وجود داشته باشد که} \\ ۰ & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

به‌وضوح برای همهٔ مقادیر $x \in \mathbb{R}$ داریم $f(x) = g(x)$. اما

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \infty \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{\infty} g \leq \sum_{j=۱}^{\infty} ۲^{-j} = ۱ .$$

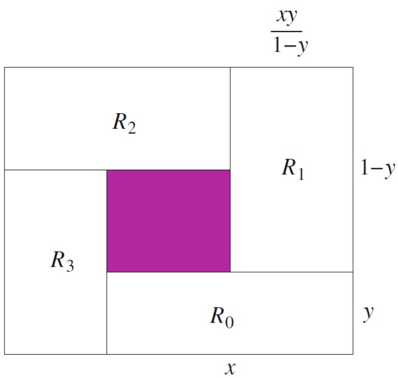
البته برای انجام این کار، نیاز به انتگرال لبگ و برای انتگرال لبگ، احتیاج به اندازهٔ لبگ روی $\mathbb{R}$ داریم. اکنون دست‌پخت ما آماده است. چون‌که تنها کاری که باید انجام دهیم اثبات این است که اندازهٔ هر زیرمجموعهٔ شمارا از $\mathbb{R}$ برابر صفر است.

خوب، حالا یک اثبات توپولوژیکی، که مقدمات کمتری لازم دارد، می‌آوریم. با مفروضات قبل، دنباله‌ای از بازه‌های بستهٔ ناتهی، مانند $A_j \subseteq [۰, ۱]$، انتخاب کنید به‌طوری‌که $a_j \notin A_j$ و $A_{j+۱} \subseteq A_j$ (یافتن چنین دنباله‌ای آسان است). پس $A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots$ ناتهی است (به‌دلیل فشردگی $[۰, ۱]$) اما هیچ‌یک از a_jها را ندارد.

مربع‌ها و مستطیل‌ها

دست‌پخت بعدی مسئله‌ای است که ترنس تائو[۱] در کتاب خود دربارهٔ روش مسئله حل کردن [۷] مطرح کرده است. اگرچه روش حل من برای خوانندگان کتاب او مناسب نیست، بااین‌حال، دست به کار می‌شویم.

مسئله دربارهٔ چهار مستطیل با مساحت‌های یکسان است که در کنار هم به‌گونه‌ای قرار گرفته‌اند که حین تشکیل یک مستطیل بزرگ‌تر مثل شکل ۲، یک سوراخ مستطیلی (قسمت هاشورخورده) ایجاد می‌شود. مسئله این است که ثابت کنیم اگر مستطیل بیرونی واقعاً مربع باشد، سوراخ هاشورخورده هم مربع است. تائو با فرض اینکه طول مربع خارجی برابر ۱ است، با توجه به این نکتهٔ کلیدی که جمع طول و عرض، x و y، مستطیل‌های کوچک‌تر، باید ۱ باشد بر آن می‌شود که راز قضیه را کشف کند. اما چگونه این را ثابت می‌کند! او تأثیر شرط تساوی مساحت‌ها و انتقال اطلاعات از یک مستطیل به مستطیل دیگر را بررسی می‌کند و در آخر اشاره می‌کند که دانسته‌های ما از مستطیل‌ها بعد از چهار مرحله باید به مستطیل اصلی برسد. کمی محاسبات انجام می‌دهد و یکدفعه $x + y = ۱$ درمی‌آید. اما تخصص من سیستم‌های



شکل ۲. وضعیت چهار مربع

دینامیکی است و بازهم این مسئله به طرز عجیبی به نظرم یک مسئلهٔ سیستم‌های دینامیکی است. در اینجا، تابعی که هر مستطیل را به مستطیل کناری می‌نگارد یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ ۴ دارد و ما باید ثابت کنیم که این نقطه، نقطهٔ ثابت تابع مذکور است. (اگر قرار باشد که با کنار هم چیدن این مستطیل‌ها، یک مربع تشکیل شود، باید همهٔ این چهار مستطیل هم‌نهشت باشند؛ این نکته صریحاً از روش تائو معلوم نمی‌شود. شرط $x + y = ۱$ نیز بی‌ربط از کار در می‌آید هرچند درست است.) به هرحال، وقتی از این روش رفتم به یک کسر مسلسل و چندتایی سیستم دینامیکی ساده، به‌صورت زیر، رسیدم:

---
[۱] Terence Tao

فرض کنید طول ضلع مربع بیرونی ۱ باشد و اندازهٔ اضلاع مستطیل اول را $x_۰$ و $y_۰$ در نظر بگیرید، که، برای پرهیز از حالت بدیهی، در نقطهٔ $(۱, ۰)$ قرار گرفته است. فرض کنید مساحت هر یک از آن چهار مستطیل A باشد. پس $۴A < ۱$، البته با پذیرفتن شکل ترسیم‌شده در شکل ۲؛ درغیراین‌صورت، یا مستطیل‌های اطراف روی هم قرار می‌گیرند یا مساحت ناحیهٔ هاشورخورده صفر خواهد بود. بنابراین $A < \frac{۱}{۴}$.

مثل تائو، مشاهده می‌کنیم که

$$(x_۱, y_۱) = \left(۱ - y_۰, \frac{A}{۱ - y_۰}\right)$$

که در آن $A = x_۰ y_۰$، و در حالت کلی، برای هر $i = ۰, ۱, ۲, ۳$،

$$(x_{i+۱}, y_{i+۱}) = \left(۱ - y_i, \frac{A}{۱ - y_i}\right),$$

چون‌که مساحت تحت نگاشت مذکور پایدار است. تا اینجا ما یک سیستم دینامیکی گسسته روی $\mathbb{R}^۲$ می‌بینیم. به‌علاوه، $(x_۰, y_۰)$ یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ ۴ است، زیرا درغیراین‌صورت، مستطیل‌ها به‌خوبی کنار هم قرار نمی‌گیرند.

اگرچه این یک سیستم دینامیکی دوبعدی است، می‌توان آن‌را به یک‌بعدی فروکاهید، چون‌که $A = x_i y_i$ و درنتیجه $y_i = A/x_i$ و مهم‌تر از اینها تابع ϕ با تعریف $\phi(x) = ۱ - \frac{A}{x}$ است که مسیر مختص x را تعین می‌کند.

اینکه $x_۰$ تناوبی از مرتبهٔ ۴ است به ما می‌گوید که $\phi^۴(x_۰) = x_۰$. پس طبیعی است که ببینیم $\phi^۴(x)$ چه می‌شود. از آنجایی که تنبل هستم و مستعد اشتباه، محاسبات را با نرم‌افزار «متمتیکا» انجام دادم و جواب‌ها مثل همیشه است که از متمتیکا استفاده می‌کنم:

$$\phi(x) = ۱ - \frac{A}{x}$$
$$\phi^۲(x) = ۱ - \frac{A}{۱ - \frac{A}{x}}$$
$$\phi^۳(x) = ۱ - \frac{A}{۱ - \frac{A}{۱ - \frac{A}{x}}}$$
$$\phi^۴(x) = ۱\frac{A}{۱ - \frac{A}{۱ - \frac{A}{۱ - \frac{A}{x}}}}$$

همیشه فراموش می‌کنم که برای متمتیکا مشخص کنم که عبارت‌ها را مثل ما ساده و باز کند. در این مورد، متمتیکا، بدون هیچ تغییری، فقط جانشانی کرده و عبارت‌ها را بی‌جهت پیچیده کرده است. قصدم این بود که معادلهٔ $x = \phi^{4}(x)$ را حل کنم و درعین‌حال، مراحل وچگونگی انجام کار را ببینم. به‌همین‌منظور، ساده‌کردن عبارت مذکور را به برنامهٔ متمتیکا سپردم؛ که آن هم هر وقت به‌نوعی خلاف انتظار من کار کرده است. درهرحال، نتیجهٔ کار اطلاعات مفیدی به من نداده است.

بعداً فهمیدم که متمتیکا چیزی به من نشان داده است که اگر عبارت‌ها را حینِ کار، درست ساده می‌کرد من متوجه آن نمی‌شدم. هوش زیادی نمی‌خواهد تا بفهمیم که داریم به کسر مسلسلی می‌رسیم که دورهٔ آن یک است، نه ۴. معلوم است که بارست‌های ϕ چگونه‌اند. به‌علاوه، اگر حد این کسر مسلسل z باشد، به‌وضوح خواهیم داشت $z = 1 - A/z$، پس z یک نقطهٔ ثابت ϕ است. با جزئیات بیشتر، مطالب فوق را در لم زیر بیان می‌کنیم.

لم ۸. *اگر دنبالهٔ همهٔ بارست‌های یک نقطهٔ تناوبی همگرا باشد، آنگاه آن نقطه باید نقطهٔ ثابت باشد.*

اثبات. فرض x_0 نقطهٔ تناوبی تابع ϕ از مرتبهٔ p باشد. می‌دانیم $\phi^{n}(x)$ همگراست، پس اگر $\lim_{n\to\infty} \phi^{n}(x_0) = \xi$، خواهیم داشت $\xi = \phi(\xi)$. اما زیردنبالهٔ $\phi^{np}(x_0)$، دنباله‌ای ثابت با اعضای x_0 است، پس $\xi = x_0$ و x_0 نقطهٔ ثابت ϕ است. □

بااین‌حساب، صرف‌نظر از بعضی محاسبات معمول، ما به جواب رسیده‌ایم. چون اگر x، نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ ۴ برای ϕ باشد، آنگاه $z = x$، و x نقطهٔ ثابت ϕ است. بنابراین هر چهار مستطیل هم‌نهشت‌اند و درنتیجه، کل شکل تقارن مرکزی با زاویهٔ $\pi/2$ دارد، و بنابراین قسمت هاشورخورده مربع است.

لازم است دربارهٔ همگرایی کمی دقیق‌تر باشیم. اگر به جای A در کسر مسلسل عدد ۱ بود، این کسر منظم نمی‌شد و ممکن بود همگرا نباشد. اما اکنون به همین صورت همگراست. این مطلب از ویژگی‌های سادهٔ سیستم دینامیکی ϕ، که در شکل ۳ نمایش داده شده است، به‌راحتی به دست می‌آید.

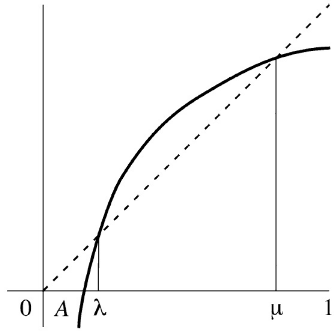
نقاط ثابت ϕ جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^{2} - x + A = 0$ هستند:

$$\lambda = \frac{1-\sqrt{1-4A}}{2}, \qquad \mu = \frac{1+\sqrt{1-4A}}{2}$$

به خاطر بیاورید که گفتیم $4A < 1$ یا $A < 1/4$، بنابراین جواب‌های فوق حقیقی‌اند. نامساوی‌های زیر، به‌راحتی، به دست می‌آیند:

$$0 < A < \lambda M < \sqrt{A} < \mu < 1.$$

نمودار ϕ روی $[0,1]$ شبیه شکل ۳ خواهد بود.



شکل ۳. نمایش نقاط ثابت نمودار ϕ

در این مسئله یک تقارن هندسی وجود دارد: اضلاع x_0 و y_0 مستطیلِ R_0 را می‌توان به جای هم به کار برد. این تقارن غیرخطی است، چون‌که با این کار x به A/x نگاشته می‌شود. اما ما از آن استفادهٔ خیلی معمولی می‌کنیم: بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض می‌کنیم $x_0 > \sqrt{A}$؛ یعنی، x_0 را ضلع بزرگ‌تر مستطیل می‌گیریم. نگاشت ϕ این خاصیت را پایدار نگه می‌دارد. به‌علاوه، اگر $\sqrt{A} < x < \mu$ آن‌گاه $x < \phi(x) < \mu$، و همچنین، اگر $\mu < x < ۱$ آنگاه $\mu < \phi(x) < x$. (این‌ها از روی شکل معلوم و با محاسباتی معمول قابل بررسی‌اند.) با توجه به یکنوایی دنباله، $\phi^n(x)$ به ازای هر $x \in (\sqrt{A}, ۱)$ همگراست. از آنجایی که حد دنباله، یک نقطهٔ ثابت ϕ است پس این مقدار باید μ باشد. حال، با لم ۸ کار به اتمام می‌رسد.

توجه کنید که در این روش رابطهٔ $x + y = ۱$ هیچ نقشی ندارد. با این روش اثبات، نکات دیگری هم به دست آورده‌ایم. فرض کنید با یکی از مستطیل‌ها به‌عنوان مستطیل آغازی شروع کنیم و شرط $x_0 > \sqrt{A}$ را در نظر بگیریم و بعد، با چرخش آن به دور مربعِ وسطی، مستطیل‌های جدیدی ایجاد کنیم. اگرچه این دنباله نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ ۴ ندارد، به یک مستطیلِ با تناوب از مرتبهٔ ۴، درواقع از مرتبهٔ ۱، *همگرا* می‌شود.

قطار کورانت–رابینز

این یکی فوقِ‌پخت‌وپز و حتی شاید فوقِ‌فوقِ‌پخت‌وپز باشد. موضوع بحث آن‌ها پیچیده است و آن جملهٔ ناپخته واضح نیست. می‌توان ناپختگی آن‌را مرتفع کرد، ولی این امر مبتنی‌بر یک قضاوت کلی نیست بلکه بیشتر شانسی است و چنین چیزی در مسائل خیلی مشابه هم اتفاق نمی‌افتد.

این مورد را به این دلیل ذکر می‌کنم که راه را برای یک موضوع کلی و مهم می‌گشاید. هر وقت سعی کردم توضیح بدهم اشتباه این مسئله کجاست، یک نفر پیدا می‌شود با گله‌گزاری برایم می‌نویسد که با یک

ذره بررسی بیشتر، حکم مسئله برقرار است. بله، درست است (و این‌را پاستن [۴] در سال ۱۹۷۶، ضمن اشاره به این اشکال، متذکر شده است)، اما نکتهٔ اصلی اینجاست که، برعکس چیزی که کورانت و رابینز می‌گویند، این مسئله به *کار بیشتری* نیاز دارد. اگر بخواهم مته‌به‌خشخاش بگذارم، باید بگویم که آن‌ها مفروضات دقیقی را که در استدلالشان نیاز دارند بیان نکرده‌اند و بنابراین، کلاً معلوم نیست چطور تصور می‌کردند که استدلالشان درست است.

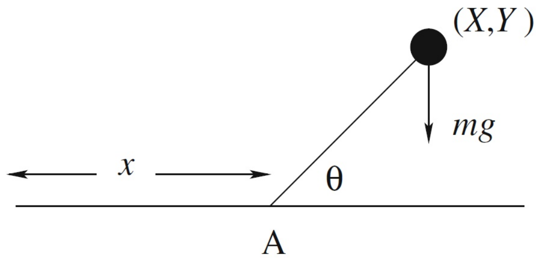
کورانت و رابینز [۱] مسئله را این‌گونه بیان می‌کنند:

> فرض کنید قطاری از ایستگاه A روی مسیر مستقیمی به طرف ایستگاه B می‌رود. در این حرکت لازم نیست سرعت یا شتاب یکنواخت باشد . . . ولی فرض بر این است که حرکت دقیق قطار از قبل معلوم است؛ روی کفِ . . . میله‌ای از یک انتها لولا شده است به گونه‌ای که می‌تواند بدون اصطکاک به جلو و عقب برود تا وقتی که با کف واگن تماس پیدا کند. اگر میله با کف تماس یابد، فرض می‌کنیم از آن پس روی کف می‌ماند؛ لازمهٔ این فرض این است که میله جهش نکند. آیا ممکن است میله را طوری قرار داد که اگر آن را در لحظهٔ شروع حرکت قطار رها کنیم و بگذاریم که فقط تحت تأثیر گرانش و حرکت قطار حرکت کند، در طی تمام مسیر A تا B روی کف نیفتد؟

جوابی که به ما می‌دهند، مثبت و دلیل آن هم پیوستگی حرکت است:

> به اطلاعات مبسوط دربارهٔ قانون‌های دینامیک نیازی نیست. فقط فرض سادهٔ زیر که ماهیت فیزیکی دارد باید مسلم گرفته شود: *حرکت میله به‌طور پیوسته به موقعیت اولیه‌اش بستگی دارد.*

شکل ۴ همان تصویری است که کورانت و رابینز آورده‌اند فقط متغیرها را اضافه و چرخ‌ها را حذف کرده‌ایم. در توضیح اثبات این مسئله باید بگوییم که اگر زاویهٔ اولیهٔ میله صفر (یا همین‌طور π) باشد میله همانجا می‌ماند. بنابراین بازهٔ $[0, \pi]$ به‌طور پیوسته به بازهٔ $[0, \pi]$ نگاشته می‌شود، پس تصویر، همهٔ زاویه‌های ممکن بین 0 تا π را شامل می‌شود. درواقع، درس مهمی که از این مثال می‌گیریم این است شرط‌های مرزی مسئله ممکن است خواص پیوستگی را، که «شهوداً» مفروض می‌گیریم، مخدوش کنند. همان‌طورکه معلوم است این امر برای ساده‌ترین مدل این مسئله اتفاق نمی‌افتد. اما در مدل‌های کمی پیچیده‌تر و واقعی‌تر، و مسئله‌های خیلی مشابه، اتفاق خواهد افتاد. اشارهٔ بی‌تکلّفِ «فرض ساده که ماهیت فیزیکی دارد» خیلی راحت خواننده را به این فکر سوق می‌دهد که فرض مذکور، بی‌ضرر است و می‌تواند آن‌را در هر مسئلهٔ مشابهی به کار ببرد؛ اما این‌گونه نیست.



شکل ۴. قطار کورانت–رابینز

بااین‌حساب، این فرض پیوستگی چقدر موجه است؟ منظورشان از اینکه می‌گویند «حرکت میله» تابعی پیوسته از موقعیت اولیه‌اش است، چیست؟ این گفته دست‌کم سه معنی دارد: تمام مسیر (پیوستگی در یک فضای تابعی)، موقعیتش بعد از گذشت مدت زمانی ثابت قبل از اعمال شرط‌های مرزی جذب، و موقعیتش بعد از گذشت مدت زمانی ثابت بعد از اعمال شرط‌های مرزی جذب. هریک از این‌ها، می‌توانند خاصیت‌های پیوستگی متفاوتی داشته باشند.

اگر میله بتواند آزادانه با هر زاویه‌ای در دایره بچرخد، مشکل بزرگی پیش نمی‌آید؛ خاصیت پیوستگی برای هر معادلهٔ دیفرانسیل عادی با جواب‌های خوش‌رفتار در کل فاصلهٔ زمانی، برقرار است. نقاط تکینگی، مسئله را بدوضع می‌کنند ولی در این حالت اتفاق نمی‌افتند. اما، همان‌طورکه پاستن [۴] اشاره کرده است، «شرط‌های مرزی جذب» در زاویه‌های ۰ و π مشکل‌سازترند. درواقع، همان‌طورکه بعداً می‌بینیم، در خیلی از معادله‌های دیفرانسیل معمولی، شرط‌های مرزی، فرض پیوستگی را مخدوش می‌کنند.

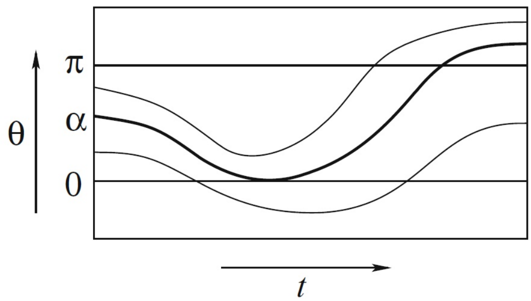
بنابراین مسئلهٔ قطار، «ناپخته» است؛ نه به این دلیل که کورانت و رابینز جواب اشتباه داده‌اند و یا حتی اینکه دلیل نادرست آورده‌اند. بلکه به این دلیل که هیچ تلاشی، با استناد به درک فیزیکی مسئله، در جهت بررسی دلیلی که می‌آورند نمی‌کنند. هرگز فراموش نکنید که معادله‌های دیفرانسیل عادی و همچنین با مشتق‌های جزئی *شرط‌های مرزی* دارند و ممکن است این شرط‌ها روی خواص پیوستگی جواب‌ها بسیار تأثیرگذار باشند.

فرض کنید که کورانت و رابینز، مسئله را، مثلاً، با فرض وزش بادی با سرعت از پیش تعیین‌شده که به‌طور پیوسته به زمان وابسته است، تغییر داده بودند. یا فرض می‌کردند که کف قطار صاف نباشد (ادامهٔ مطلب را ببینید)، که، اتفاقاً، این مورد را تصریح نکرده‌اند، هرچند از تصویر ترسیمی آن‌ها معلوم است. احتمالاً بیشتر خوانندگان همان «فرض با ماهیت فیزیکی» را اتخاذ می‌کردند، اما این‌بار این فرض کاملاً نادرست خواهد بود. پاستن اشاره می‌کند که تنها راهی که می‌تواند برای مصون‌ماندن استدلال کورانت–رابینز پیدا کند وارد کردن شرایط سفت‌وسخت‌تر به مسئله است، مثلاً، کاملاً مسطح‌بودن مسیر، حذف فنر

از چرخ‌های قطار، .... بااین‌حال، باید توضیح داد که *چرا* این شرط‌ها کارسازند. این کاری پیش‌پاافتاده نیست و نمی‌توان گفت که خاصیتی ساده مبتنی‌بر ملاحظات فیزیکی مسئله است.

این مسئله ارزش بررسی بیشتر را دارد. یک میدان برداری هموار، وابسته به زمان $t \in \mathbb{R}$، روی یک دایره را در نظر بگیرید. دراین‌صورت، جریان متناظر ψ یک هموارریختی[1] مانند ψ^t روی دایره برای تمام tها معین می‌کند. پس شار در زمان t، به ازای هر t، هموار است. زمان رفتن از ایستگاه A به طرف B، با تابع موقعیت $F(t)$ی قطار، معین می‌شود. بنابراین، برای میله در موقعیت θ، نگاشت مربوط از حالت آغازی تا حالت نهایی یک هموارریختی هموار است.

حالا فرض کنید جریان شبیه به شکل ۵ باشد، که برای یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی هموار، شکلی کاملاً طبیعی است. اگر شرط‌های مرزی جذب را اعمال کنیم، درمی‌یابیم که همهٔ شرط‌های آغازی، بعد از گذشت زمان محدودی، به دو حالت $\theta = \circ, \pi$ می‌رسند؛ یعنی، میله با کف قطار برخورد می‌کند. همان‌طورکه قبلاً هم اشاره کردم، من، بیشتر دنبال این هستم که با اطمینان بگویم در حالت کلی این امر



شکل ۵. چرا شرط‌های مرزی جذب، پیوستگی را مخدوش می‌کنند؟

در معادله‌های دیفرانسیل عادی رخ می‌دهد و نه اینکه شرط‌هایی وضع کنم که رخ ندادن آن‌را تضمین کند. خود همین موضوع باعث می‌شود که فرض پیوستگی، دیگر به هیچ‌وجه بدیهی نباشد. اجازه بدهید دلیل آن‌را بگویم تا همچنین شرایطی که تحت آن فرض پیوستگی کورانت–رابینز صحیح است روشن شود.

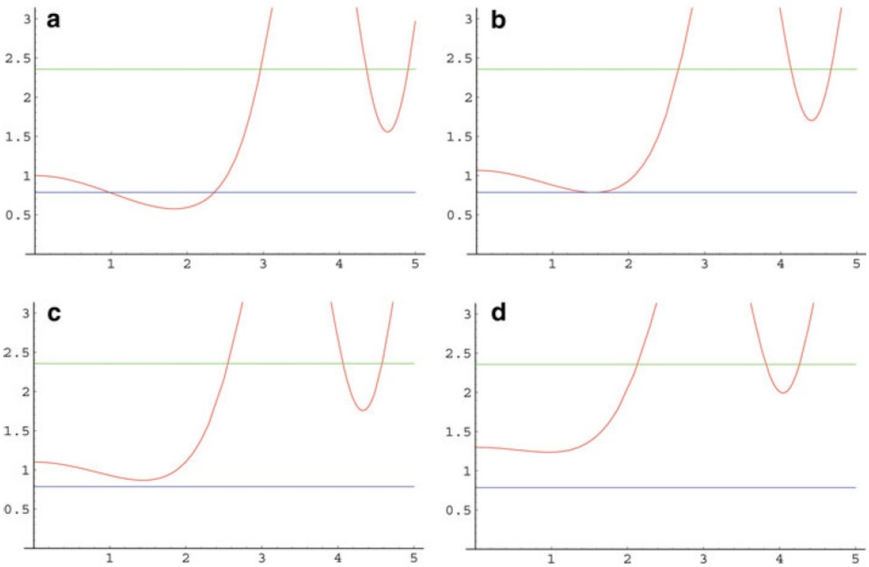
شکل ۴ ساده‌ترین مدل ممکن است که می‌توانم برای قطار مورد بحث ارائه کنم. خود قطار با نقطهٔ A نشان داده شده که روی خط افقی حرکت می‌کند و x موقعیت آن نسبت به مبدأ است. میله با زاویهٔ θ از زمین قرار گرفته و فرض می‌کنیم جرم آن m در انتهای میله متمرکز شده است. برای حذف ثابت‌های مختلف، واحدهای اندازه‌گیری را طوری انتخاب می‌کنیم که طول میله ۱، جرم آن $m = ۱$، و شتاب جاذبه نیز $g = ۱$ باشد.

[1] diffeomorphism

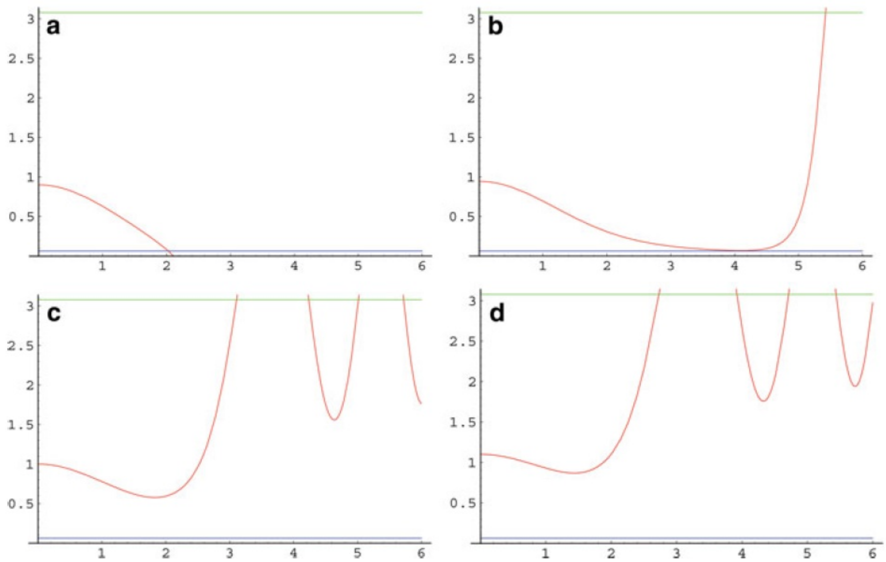
فرض کنید موقعیت قطار در زمان t تابع از پیشْ معلوم $F(t)$ باشد که برای پرهیز از مشکلات توابع غیرتحلیلی، آن‌را از ردهٔ $C^{۲}$ در نظر می‌گیریم. مختصات را نسبت به یک چارچوب مرجع متحرک و چسبیده به نقطهٔ A در نظر بگیرید. با این کار یک «نیروی فرضی» به نام $-\ddot{F}(t)$ وارد کار می‌شود، و، حالا، سوای آن با یک آونگ ساده روبه‌رو هستیم. موقعیت زاویه‌ای θ در معادلهٔ دیفرانسیل معمولیِ

$$\ddot{\theta} = \ddot{F}(t)\sin\theta - \cos\theta$$

با شرط‌های آغازی $\theta = \theta_{\circ}$ و $\dot{\theta} = \circ$ در زمان $t = \circ$ صدق می‌کند. (شرط $\dot{\theta} = \circ$ را به کار می‌بریم چون کورانت و رابینز می‌گویند میله را «رها کنیم»؛ شرط مهمی نیست.) شرط‌های مرزی جذب، فرض پیوستگی را مخدوش می‌کنند اگر زاویهٔ $\theta_{\circ}$ چنان موجود باشد که مسیر، مماس بر مرز $\theta = \circ$ باشد و درعین‌حال، روی مسیر، موضعاً، داشته باشیم $\theta \geq \circ$، مانند شکل ۶(b). حالا انتظار داریم بتوانیم ترتیبی بدهیم که $F(t)$ با نزدیک شدن به $\theta_{\circ}$ مرز را به‌طور اُریب قطع کند یا کلاً از آن دور شود، مانند شکل‌های ۶(a, c). مشکل مشابه در شرط مرزی دیگر، یعنی $\theta = \pi$، ایجاد می‌شود اگر موضعاً داشته باشیم $\theta \leq \pi$. مشکلات مشابهی در مرز دیگر، یعنی، $\theta = \pi$ وقتی موضعاً داشته باشیم $\theta \leq \pi$ پیش می‌آید.



شکل ۶. نمایش چهار مسیر. شرط‌های آغازی، به‌ترتیب، عبارت‌اند از $\theta(\circ) =$ ۱٫۳ ,۱٫۱ ,۱٫۰۶۶۴ ,۰٫۲



شکل ۷. نمایش چهار مسیر. شرط‌های آغازی، به‌ترتیب، عبارت‌اند از $\theta(۰) =$ ۰٫۹, ۰٫۹۴۳۹۷۴, ۱, ۱٫۱

از شرط مماس بودن در مرزِ صفر نتیجه می‌شود که $\theta = ۰$ و $\dot{\theta} = ۰$. اما وقتی که $\theta = ۰$، از معادلهٔ حرکت نتیجه می‌شود که $\ddot{\theta} = -۱$، و بنابراین موضعاً داریم $\theta \leq ۰$. به‌طورمشابه، در مرز π هم داریم $\ddot{\theta} = ۱$. پس نوع مشکل‌سازی از مسیر «خراشان» نمی‌تواند ایجاد شود.

حتی با این وضع هم که شرط‌های مرزی جذب برقرارند، اثبات اینکه موقعیت نهایی تابعی پیوسته از موقعیت آغازی است تمرین پیش‌پاافتاده‌ای نیست. ممکن است منبع‌های دیگری هم برای ناپیوستگی وجود داشته باشد که هیچ خبر از آن‌ها نداریم. پس اصولاً کورانت و رابینز دقیقاً کار درستی کرده‌اند که فرض پیوستگی را تصریح کرده‌اند. اما اگر ما تغییرات به‌ظاهر بی‌ضرری در مسئله بدهیم، پیوستگی نقض می‌شود.

یکی از ساده‌ترینِ چنین تغییراتی این است که مرزها را در $\pi/۴$ و $۳\pi/۴$ قرار دهیم. اما بازهم اکثراً فرض پیوستگی را در نظر می‌گیرند. ولی، اگر تابع $F(t) = t^۴/۱۲$ را در نظر بگیریم، خواهیم داشت $\ddot{F}(t) = t^۲$، که البته آپولو هوا نکردیم، و از طریق محاسبات عددی مسیری خراشان با شرط‌های آغازی نزدیک به $\theta_۰ = ۱٫۰۶۶۴$ می‌توان پیدا کرد. بنابراین ممکن است فرض پیوستگی نقض شود. محاسبات بیشتر نشان می‌دهد که این‌گونه می‌شود. درنتیجه، هیچ موقعیت میانی که در آن میله در حالت ایستاده بماند وجود ندارد (شکل ۶).

در آزمایش بعدی، مرزها را در $\pi/۵۰$ و $۴۹\pi/۵۰$ قرار می‌دهیم. مجدداً شواهد عددی برای یک مسیر خراشان به دست می‌آوریم، و درنتیجه موقعیت میانی وجود ندارد که در آن به غیر از ۶ ثانیه میله در حالت ایستاده باقی بماند (شکل ۷).

البته این نتایج با شهود فیزیکی ما مطابقت دارد. در یک مسیر کاملاً مسطح و افقی، اگر میله در لحظهٔ شروع، خوابیده روی کف قطار با زاویهٔ ۰ یا π باشد هیچ شتابی نمی‌تواند آن‌را از زمین جدا کند. اما اگر میله کمی بالاتر از سطح افق باشد، یک شتاب مناسب می‌تواند آن‌را بلند کند. دقیقاً به همین علت است که تنها شرط‌های مرزی‌ای که می‌تواند فرض پیوستگی را داشته باشد، همان است که کورانت و رابینز در نظر گرفته‌اند. با چند محاسبهٔ ساده قضیهٔ زیر اثبات می‌شود.

قضیه ۹. *فرض کنید $\pi > \alpha > ۰$ و مرز در α و $\pi - \alpha$ باشند. همچنین فرض کنید $\ddot{F}(t) = t^۲$. دراین‌صورت میله پس از زمان متناهی $T(\alpha)$ به کف برخورد می‌کند.*

اثبات. فرض کنید $v(t) = \dot{\theta}(t)$ سرعت زاویه‌ای باشد. دراین‌صورت معادلهٔ دیفرانسیل معمولی گفته‌شده به دستگاه زیر تبدیل می‌شود

$$\dot{\theta}(t) = v(t), \qquad \dot{v}(t) = t^۲ \sin\theta(t) - \cos\theta(t).$$

اگر $t > ۲$، آنگاه

$$\dot{v}(t) \geq (۲^۲ - ۱)\sin\alpha = ۳\sin\alpha$$

بنابراین $v(۲ + t) \geq ۱$ به‌شرطی‌که

$$V + ۳t\sin\alpha \geq ۱$$

که در آن $V = \min\{v(۲) :\ \theta(۰) \in [\alpha, \pi - \alpha],\ v(۰) = ۰\}$. پس باید

$$t \geq \frac{۱ - V}{۳\sin\alpha}$$

را درنظر بگیریم. اکنون، اگر $\dot{\theta}(t) \geq ۱$ آنگاه $\theta(t - \pi - ۲\alpha) \geq \pi - \alpha$، پس میله به مقدار مرزی می‌رسد. بنابراین میله حداکثر پس از گذشت زمان

$$T(\alpha) = \pi - ۲\alpha + ۲ + \frac{۱ - V}{۳\sin\alpha}$$

به مقدار مرزی می‌رسد.

فقط باید ثابت کنیم V متناهی است. (چون ممکن است $-\infty$ شود.) اما $\dot{v}(t) \geq -\cos\alpha$ پس $v(t) \geq -t\cos\alpha$ و $v(2) \geq -2\cos\alpha$. بنابراین $V \geq -2\cos\alpha$. پس می‌توان نوشت

$$T(\alpha) = \pi - 2\alpha + 2 + \frac{1 + 2\cos\alpha}{3\sin\alpha}$$

از آنجایی که ما $F(t) = t^2/12$ را در نظر گرفتیم، می‌توان ایستگاه‌ها را در $A = 0$ و $B = T^4(\alpha)/12$ قرار داد. توجه داشته باشید که وقتی $\alpha \to 0$ داریم $T(\alpha) \to \infty$. □

پاستن [۴] می‌گوید: «با در نظر گرفتن قوانین معمول، تنها فرض فیزیکی که می‌توان برای تضمین نیفتادن میله در نظر گرفت این است که لولا نسبت به حرکت قطار بسیار دقیق واکنش نشان بدهد و کاملاً هم افقی باشد (یعنی، نه فقط مسیر مسطح باشد، بلکه قطار هم نباید جهش کند.)» او می‌افزاید: «کورانت و رابینز اشتباه ابلهانه‌ای نکرده‌اند، فقط نظریهٔ سیستم‌های دینامیکی، در این مدت، پیشرفت کرده است ... *امروز* اگر کسی این اشتباه را مرتکب شود ابلهانه *است*.»

آب ریختن با یک بطری چنبره‌شکل

از خودم می‌پرسم که آیا مطالبی شبیه به همین‌ها را می‌شود برای مقالهٔ تأمل‌برانگیز سارکاریا [۵] که در سال ۲۰۰۱ در مجلهٔ *اینتلیجنسر* چاپ شد گفت؟ در آن مقاله دربارهٔ فرض پیوستگی حرکت مواد، که به زمان آناکساگوراس[1] باز می‌گردد، بحث می‌کند و نتیجه می‌گیرد که نمی‌توان هم ماده و هم حرکت را پیوسته در نظر گرفت. مثالی که می‌آورد تخلیهٔ «یک لاستیک تویی تایر ماشین پر از آب است در یک سطل، طی زمان محدود». اثباتش به این صورت است که یک طوقهٔ هوموتوپیکی‌نابدیهی در تایر را برای ایجاد یک طوقهٔ هوموتوپیکی‌بدیهی در سطل به جریان می‌اندازد. درنتیجه، گروه بنیادی π_1 مانعی سر راه تخلیهٔ بطری است. سارکاریا اشاره می‌کند که اگر ذرات متمایز سیالی اجازه داشته باشند که محل یکسانی را اشغال کنند باز هم مشکل مشابهی ایجاد خواهد شد. فرض پذیرفته‌شده در مکانیک سیالات، که بیان می‌کند ذرات این رفتار را ندارند، ایجاب می‌کند که شارش هر تودهٔ سیال، نوع خود را از لحاظ توپولوژیکی حفظ کند.

می‌توان این مسئلهٔ زیبا، ولی ساختگی، را هم با استفاده از ناوردای توپولوژیک دیگری به اسم فضای مؤلفه‌های همبند، π_0، از نو پخت. دراین‌صورت یک وضعیت خیلی معمولی، ولی ناجور، پیش می‌آید: تأسی دوباره به فرض پیوستگی باعث می‌شود که نتوان بطری نوشابه با شکلی ساده را در دو یا تعداد بیشتری لیوان خالی کرد. در آغاز، نوشابه یک مولفهٔ همبندی تشکیل می‌دهد و هیچ نگاشت پیوسته‌ای نمی‌تواند تعداد مؤلفه‌ها را افزایش دهد.

بااین‌همه، یک بار دیگر باید پرسید: آیا فرض پیوستگیِ جریان، موجه است؟ جواب مسلماً به شرط‌های مرزی ربط دارد و نه فقط به خود معادله‌های دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی مربوط. تایرها

[1] Anaxagoras

و بطری‌ها مرزهایی دارند و شرط‌های مرزی‌ای که از لحاظ فیزیکی معقول باشند، می‌توانند، یا شاید هم باید، باعث «انفصال» سیال شوند مادامی که سطح سیال به طرز مناسبی، احتمالاً به‌طور مماس، با مرز تماس می‌یابد. بدون این شرط مرزی، شارش پیوسته می‌بود، اما با وجود این شرط، سیال می‌تواند به‌طور ناپیوسته منشعب شود.

سررشتهٔ کافی از معادلات ناویه–استوکس[۱] ندارم که به تحلیل و بررسی حالت‌های مختلف این مسئله، که به اهل فن مربوط می‌شود، بپردازم؛ اما تصور می‌کنم که جواب آن به مفروضات فیزیکی لحاظ‌شده در آن معادله و شرط‌های مرزی ربط دارد.

سخن پایانی

همان‌طورکه در ابتدا گفتم، این نوشته حالت گردآوری دارد و ادعای اصالت و یا پیشگامی در آن ندارم. در طی زمان، صورت‌های مختلفی از اثبات قضیه‌ها بارها کشف می‌شوند، و شک ندارم که با خواندن این مقاله، متخصصان تاریخ ریاضی به من خواهند گفت که این روش حل معادله‌های درجهٔ سوم را جبردان‌های پرتغالی در سال ۱۵۷۳ می‌دانستند، همین‌طور هم متخصصان نظریهٔ اعداد من را به کناری خواهند کشید تا گوشزد کنند که همهٔ نکته‌های این مقاله را سر[۲] در سال‌های دههٔ ۱۹۵۰ بلد بود. بااین‌حال، معتقدم پیدا کردن اثبات‌های دیگر برای قضیه‌های کلاسیک کاری سودمند است. بعضی از اثبات‌های کلاسیک تبدیل به کلیشه شده‌اند و بعضی دیگر هم چیزهای قلمبه‌سلمبه دارند که می‌توان آن‌ها را بسیار ساده‌تر و واضح‌تر بیان کرد. خیلی دوست دارم مثال‌های دیگری از پختِ اثبات‌های کلاسیک را ببینم. شاید ارزشش را داشته باشد که یک وبگاه برای پخت‌وپز ریاضی راه بیندازیم.

مراجع

[1] Courant, H., Robbins, H., *What is Mathematics?*, Oxford University Press, Oxford, 1941.

[2] Fowler, D. H., *the Mathematics of Plato's Academy*, Oxford University Press, Oxford, 1987.

[3] Gardner, M., *Mathematical Carnival*, New York, Knopf, 1975.

[4] Poston, T., Au Courant with differential equations, *Manifold*, 18 (1976) 6–9.

[5] Sarkaria, K. S., A topological paradox of motion, *Math. Intelligencer*, **23** (2001), 66–68.

[6] Stewart, I., *Galois Theory*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2004.

[7] Tao, T., *Solving Mathematical Problems -a Personal Perspective*, Oxford University Press, Oxford, 2006.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۷/۳/۲۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۵/۱۵

لیلا گرامی معظّم: دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران غرب، گروه ریاضی
رایانامه: geramimoazam.l@wtiau.ac.ir

[۱] Navier-Stokes [۲] Serre