فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۰، شمارهٔ ۶۹ (پاییز و زمستان ۱۴۰۰) صص. ۱۵۷ تا ۱۶۱

چه وقت همهٔ صفرهای یک چندجمله‌ای، حقیقی و متمایزند؟*

مارک شامبرلان

ترجمهٔ منصوره موسی‌پور و اسماعیل نیکوفر

چکیده

در این مقاله، شرایط لازم و کافی را برای اینکه صفرهای یک چندجمله‌ای تک‌متغیری با ضرایب حقیقی، متمایز و حقیقی باشند بیان می‌کنیم.

قضیه‌های بسیاری وجود دارند که اطلاعاتی درموردِ صفرهای یک چندجمله‌ای تک‌متغیری با ضرایب حقیقی به‌دست می‌دهند. قضیه‌های دکارت، فوریه–بودآن، و استورم –و قضیه‌های دیگر– را می‌توان در [۱] مشاهده کرد. همچنین، مطالعه‌ای دقیق از هندسهٔ صفرهای یک چندجمله‌ای را می‌توان در کتاب کلاسیک ماردن [۶] یافت. در این مقاله، نابرابری‌هایی برحسب چندجمله‌ها به دست می‌آوریم که شرط لازم و کافی برای حقیقی و متمایز بودن همهٔ صفرهای چندجمله‌ای هستند. اثبات این مطلب مقدماتی است و نابرابری‌های به دست آمده فقط به چندجمله‌ای و مشتق‌های آن بستگی دارند.

گیریم $P^{(j)}$ مشتق jام چندجمله‌ای P باشد. قضیهٔ اصلی به شرح زیر است.

قضیه ۱. *فرض کنید P یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n \geq ۱$ با ضرایب حقیقی باشد. در این صورت صفرهای P حقیقی و متمایزند اگر و تنها اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ و $j = ۱, ۲, \ldots, n - ۱$ داشته باشیم*

$$(P^{(j)}(x))^{۲} - P^{(j-۱)}(x)P^{(j+۱)}(x) > ۰. \qquad (۱)$$

دو طرف قضیه را جداگانه اثبات می‌کنیم. ابتدا ثابت می‌کنیم شرایط گفته‌شده لازم‌اند.

عبارات و کلمات کلیدی. چندجمله‌ای، صفر حقیقی، صفرهای متمایز.

*نام و نشان مقالهٔ اصلی از این قرار است:

Chamberland, M., When are all the zeros of a polynomial real and distinct?, *Amer. Math. Monthly*, **127** (2020), 449–451.

اثبات. (قضیهٔ ۱، $\Leftarrow$) چندجمله‌ای P را به‌صورتِ

$$P(x) = C(x-r_۱)(x-r_۲)\cdots(x-r_n)$$

می‌نویسیم که در آن $C \neq ۰$ عددی حقیقی است. با بسط عبارت $(P'/P)'$، برای هر x به‌استثنای صفرهای P داریم

$$(P'(x))^۲ - P(x)P''(x) = (P(x))^۲\left[\frac{۱}{(x-r_۱)^۲}+\frac{۱}{(x-r_۲)^۲}+\cdots+\frac{۱}{(x-r_n)^۲}\right].$$

چون همهٔ صفرهای P حقیقی هستند، به‌وضوح سمت راست برای هر x، به‌جز احتمالاً در صفرهای P مثبت است. از طرفی، چون صفرهای P متمایزند، برای $k = ۱, ۲, \ldots, n$ داریم

$$\lim_{x\to r_k}(P(x))^۲\left[\frac{۱}{(x-r_۱)^۲}+\frac{۱}{(x-r_۲)^۲}+\cdots+\frac{۱}{(x-r_n)^۲}\right] = C^۲\prod_{\substack{i=۱\\ i\neq k}}^{n}(r_k-r_i)^۲ > ۰.$$

و این برای هر $x \in \mathbb{R}$ ایجاب می‌کند که

$$(P'(x))^۲ - P(x)P''(x) > ۰.$$

به این ترتیب نابرابری (۱) برای حالت $j = ۱$ برقرار است. با استفاده از قضیهٔ رول، به‌صورتِ استقرایی، می‌بینیم که $P^{(j)}$ دارای $n-j$ صفرِ متمایز و حقیقی است. بنابراین، طبق بحث بالا، حکم برای $j = ۲, ۳, \ldots, n-۱$ اثبات می‌شود. □

این اثبات در اصل متعلق به لاگر است. لاگر از این نابرابری‌ها برای بررسی رده‌ای وسیع از توابع تام از گونای[۱] صفر و گونای یک استفاده کرد که امروز به ردهٔ *لاگر-پولیا*[۲] معروف‌اند [۸]. نابرابری‌های (۱) را معمولاً *نابرابری‌های لاگر* می‌نامند.

یک شرط لازم شبیه به (۱) که به *نابرابری نیوتن* معروف است، هر سه ضریب متوالیِ چندجمله را به هم مربوط می‌کند [۴، ۹]. اگر بخواهیم این عبارت را برحسب مشتق چندجمله‌ای بیان کنیم، نابرابری‌های نیوتن را می‌توان برای هر $x \in \mathbb{R}$ و $j = ۱, ۲, \ldots, n-۱$ به‌صورتِ زیر نوشت

$$(P^{(j)}(x))^۲ - P^{(j-۱)}(x)P^{(j+۱)}(x)(۱+\frac{۱}{n-j}) > ۰.$$

توجه کنید که اگر تنها فرض ما این باشد که صفرها حقیقی هستند و متمایز بودن آن‌ها مدنظر نباشد، باید در (۱) علامت «$\geq$» را قرار دهیم. این نتیجه، تمرینی در [۲، ص. ۲۲] است و ویژگی‌ای از مشتق شوارتس[۳] است [۳، ص. ۷۰]. گرچه ساده کردن شرایط قضیهٔ ۱ وسوسه‌انگیز است، باید مراقب بود. برای

[۱] genus [۲] Laguerre–Pólya class [۳] Schwarzian derivative

مثال، چندجمله‌ای $p(x) = x^۴ - ۱$ دارای صفرهای $x = \pm ۱, \pm i$ است، اما برای هر $x \in \mathbb{R}$ و $j = ۱, ۲, ۳$ در شرط زیر صدق می‌کند

$$(p^{(j)}(x))^۲ - p^{(j-۱)}(x)p^{(j+۱)}(x) \geq ۰.$$

برای اثبات جهت دیگر قضیهٔ ۱ ابتدا لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۲. *فرض کنید Q یک چندجمله‌ای باشد که برای هر $x \in \mathbb{R}$ در شرط زیر صدق کند*

$$(Q'(x))^۲ - Q(x)Q''(x) > ۰. \tag{۲}$$

در این صورت Q دست‌کم یک صفر حقیقی دارد، همهٔ صفرهای حقیقی آن متمایزند، Q' یک صفر حقیقی کمتر از Q دارد، و بین هر دو صفر حقیقی Q' یک صفر حقیقی از Q قرار دارد.

اثبات. نابرابری (۲) ایجاب می‌کند که Q غیرثابت است و هر نقطهٔ بحرانی Q باید یک ماکسیمم موضعی مثبت و یا یک مینیمم موضعی منفی باشد. بنابراین Q باید صفری حقیقی داشته باشد. نابرابری (۲) همچنین ایجاب می‌کند که صفرهای حقیقی Q باید متمایز باشند، زیرا در غیر این صورت در هر صفر تکراری داریم $(Q')^۲ - QQ'' = ۰$. گیریم $a_۱ < a_۲ < \cdots < a_k$ صفرهای Q باشند. بنابه قضیهٔ رول، بین هر جفت از صفرهای مجاور، صفر حقیقی b برای Q' قرار دارد، و در مورد نقاط بحرانی ملاحظه کردیم که b یکتا است. علاوه‌برآن، صفر حقیقی b از Q' با شرط $b > a_k$ وجود ندارد، چون در این صورت Q باید یک مینیمم موضعی مثبت یا یک ماکسیمم موضعی منفی داشته باشد که بنابه آنچه گفته شد غیرممکن است، و یا اینکه Q یک مجانب افقی دارد که این هم برای یک چندجمله‌ای غیرثابت ناممکن است. استدلالی مشابه ایجاب می‌کند که Q' نمی‌تواند صفری حقیقی مانند b با شرط $b < a_۱$ داشته باشد. $\square$

اکنون نشان می‌دهیم که شرایط بیان‌شده در قضیهٔ ۱ کافی هستند.

اثبات. (قضیهٔ ۱، $\Leftarrow$) اثبات کافی بودن شرط را با استقرا روی درجهٔ n انجام می‌دهیم. پایهٔ استقرا، $n = ۱$، به‌وضوح برقرار است. فرض کنید حکم قضیه برای عدد طبیعی و معیّن n برقرار باشد. اگر P یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n + ۱$ باشد که برای $j = ۱, ۲, \ldots, n$ در (۱) صدق کند، آنگاه P' برای $j = ۱, ۲, \ldots, n - ۱$ در (۱) صدق می‌کند، پس بنابه فرض استقرا، P' دارای n صفر حقیقی و متمایز است. با به‌کارگیری لم ۲ برای تابع P، نتیجه می‌شود که P دارای $n+۱$ صفر حقیقی و متمایز است. $\square$

کفایت شرط (۱) را می‌توان به صورت زیر ساده‌تر کرد:

$$\text{اگر } P^{(j)}(\xi) = \circ \text{ آنگاه } P^{(j-1)}(\xi)P^{(j+1)}(\xi) < \circ \tag{۳}$$

برای هر $1 \leq j \leq n-1$ و $\xi \in \mathbb{R}$. با بررسی دقیقِ اثباتِ لم ۲ می‌بینیم که جایگزین کردن (۲) با (۳)، یعنی رابطهٔ (۳) برای Q و $j = 1$ به کار ببریم، برای اثبات لم ۲ به شرطی که فرض کنیم Q چندجمله‌ای غیرثابت است کافی است. اثبات کفایت شرط همانند قبل است و قضیهٔ حاصل با شرط کافیِ (۳) قضیهٔ جدیدی نیست و پولیا در [۷] به آن اشاره کرده است و آن‌را به ژان پُل دُگوآ دُمالوس[۱] به سال ۱۷۴۱ نسبت می‌دهد. البته، اینکه بخواهیم از شرط (۱) یا شرط (۳) استفاده کنیم وابسته به این است که بخواهیم از شرایط لازم استفاده کنیم یا شرایط کافی. شرط کافی دیگری مشابه با نابرابری نیوتن در [۵] ارائه شده است.

و در پایان اشاره کنیم که وقتی صفرهای یک چندجمله‌ای متمایز و حقیقی نباشند، مشخص نیست که کدام شرط‌ها در قضیهٔ ۱ برقرار نیست. چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + x$ یک صفر حقیقی و دو صفر مختلط دارد، درحالی‌که شرط (۱) برای $j = 1$ برقرار است و برای $j = 2$ نقض می‌شود. همچنین، چندجمله‌ای $p(x) = x^3 - x + 1$ یک صفر حقیقی و دو صفر مختلط دارد، درحالی‌که شرط (۱) برای $j = 2$ برقرار است اما برای $j = 1$ نقض می‌شود.

مراجع

[1] Barbeau, E., *Polynomials*, Springer, New York, 1989.

[2] Borwein, P., *Polynomials and Polynomial Inequalities*, Springer, New York, 1995.

[3] Elaydi, S., *Discrete Chaos*, 2nd ed., Chapman and Hall/CRC, New York, 2007.

[4] Hardy, G. H., Littlewood, L., Pólya, G., *Inequalities*, 2nd ed., Cambridge University Press, London, 1967.

[5] Kurtz, D. C. , A sufficient condition for all the roots of a polynomial to be real, *Amer. Math. Monthly*, **99** (1992), 259–263.

[6] Marden, M., *Geometry of Polynomials*, 2nd ed., American Mathematical Society, Providence, RI, 1966.

[7] Pólya, G., Some problems connected with Fourier’s work on transcendental equations, *Q. J. Math.*, **1** (1930), 21–34.

[8] Skovgaard, H., On inequalities of the Turan type, *Math. Scand.*, **2** (1954), 65–73.

[۱] Jean Paul de Gua de Malves

[9] Wagner, C. G., Newton's inequality and a test for imaginary roots, *Two-Year College Math. J.*, **8** (1977), 145–147.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۹/۵/۱۲؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۶/۲۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۷/۱۲

منصوره موسی‌پور: دانشگاه فرهنگیان تهران، گروه ریاضی

رایانامه: m.mosapour@cfu.ac.ir

اسماعیل نیکوفر: دانشگاه پیام نور تهران، گروه ریاضی

رایانامه: nikoufar@pnu.ac.ir