فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۰، شمارهٔ ۶۹ (پاییز و زمستان ۱۴۰۰) صص. ۱۶۳ تا ۱۸۱

قاعدهٔ انتگرال‌گیری به روش جزءبه‌جزء و جانشانی همراه با کاربردهایی در قضیهٔ گرین و یکتایی جواب معادله‌های دیفرانسیل*

خوسه آنخل سید و رودریگو لوپس پُسو

ترجمهٔ رسول کاظمی و مهدی دهقانی

چکیده

در این مقاله یک صورت نسبتاً ناشناخته از فرمول تعویض متغیر برای توابع غیرخودگردان ارائه می‌کنیم. نشان می‌دهیم که این فرمول، روی ناحیه‌هایی از صفحه که به نمودار دو تابع پیوسته‌مشتق‌پذیر محدود است، معادل با قضیهٔ گرین است. به‌علاوه، این فرمول کاربردهای جالبی در موضوع یکتایی جواب معادله‌های دیفرانسیل معمولی دارد.

۱. مقدمه

قاعدهٔ لایب‌نیتس دربارهٔ مشتق‌گیری از یک انتگرال، یعنی

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(t,r)dr\right) = f(t,x_2(t))x_2'(t) - f(t,x_1(t))x_1'(t) + \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t,r)dr, \tag{۱}$$

عبارات و کلمات کلیدی. انتگرال‌گیری با جانشانی، قضیهٔ گرین، یکتایی جواب معادلهٔ دیفرانسیل.

* نام و نشان مقالهٔ اصلی از این قرار است:

Cid, J. Á., López Pouso, R., Integration by parts and by substitution unified with applications to Green's theorem and uniqueness for ODEs, *Amer. Math. Monthly*, **123** (2016), no. 1, 40–52.

که می‌توان اثبات آن‌را مثلاً در مقالهٔ عالی [۹] دید، گوهری است که نه‌تنها قضیهٔ بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال،

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^t f(r)dr\right) = f(t),$$

و قاعدهٔ مشتق‌گیری معمولی از تابع زیرِ علامت انتگرال،

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^b f(t,r)dr\right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t,r)dr,$$

را در خود دارد، بلکه صورتِ جالبی از فرمول تعویض متغیر را نیز در بردارد:

قضیه ۱ (تعویض متغیرِ غیرخودگردان). *فرض کنیم* $f : [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ *تابعی پیوسته و مشتق جزئی آن نیز نسبت به متغیر اول پیوسته باشد. فرض کنیم* $x : [a,b] \to [c,d]$ *پیوسته‌مشتق‌پذیر باشد. دراین‌صورت*

$$\int_a^b f(t,x(t))x'(t)dt = \int_{x(a)}^{x(b)} f(b,r)dr - \int_a^b \left(\int_{x(a)}^{x(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t,r)dr\right) dt. \quad (۲)$$

اثبات. با جانشانی $x_۱(t) \equiv x(a)$ و $x_۲(t) = x(t)$ در (۱)، انتگرال‌گیری از a تا b، استفاده از قضیهٔ بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال، و تنظیم مجدد عبارت‌ها نتیجه حاصل می‌شود. □

ملاحظه ۱. اگر $x : [a,b] \to [c,d]$ روی $[a,b]$ پیوستهٔ لیپ‌شیتسی[۱] یا، به‌طور کلی‌تر، مطلقاً پیوسته باشد، رابطهٔ (۲) باز هم معتبر است. در [۳]، رابطهٔ (۲) تحت فرض‌های ضعیف‌تر ثابت شده است و از آن برای یافتن نتایج وجودی، برای رده‌ای از معادله‌های دیفرانسیل غیرخطی استفاده شده است.

شایان ذکر است که فرمول (۲) دوتا از مهم‌ترین فنون انتگرال‌گیری مقدماتی را به‌صورت یکپارچه درآورده است: فرمول معمول تعویض متغیر، یعنی

$$\int_a^b f(x(t))x'(t)dt = \int_{x(a)}^{x(b)} f(r)dr,$$

[۱] Lipschitz

در حالتی که بگیریم $f(t,x)\equiv f(x)$، و فرمول انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء، یعنی

$$\int_a^b f(t)x'(t)dt = f(b)x(b)-f(a)x(a)-\int_a^b f'(s)x(s)ds,$$

به‌شرطی که بگیریم $f(t,x)\equiv f(t)$. به‌علاوه، همان‌طورکه در بخش ۲ خواهیم دید، فرمول (۲) با صورتی از قضیهٔ گرین برای ناحیه‌های خاصی از صفحه، معادل است. درپایان، در بخش ۳ که شامل نتایج اصلی این مقاله است، نشان می‌دهیم رابطهٔ (۲) چگونه به یک محک یکتایی جواب برای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$x'(t)=f(t,x(t)), \qquad x(t_\circ)=x_\circ \tag{۳}$$

می‌انجامد. فعلاً به بیان نمونه‌ای خاص از نتایج‌مان دربارهٔ مسئلهٔ یکتایی بسنده می‌کنیم و نشان می‌دهیم که قرار دادن کرانی مناسب روی قسمت غیرخطی، برای به‌دست آوردن یکتایی جواب ثابت، کافی است.

قضیه ۲. *گیریم $f:U=[t_\circ-a,t_\circ+a]\times[x_\circ-b,x_\circ+b]\to\mathbb{R}$ روی U پیوسته باشد. اگر تابع پیوستهٔ $\psi:[\circ,+\infty)\to[\circ,+\infty)$ موجود باشد به‌طوری‌که $\int_{\circ^+}\frac{d\tau}{\psi(\tau)}=+\infty$ و برای هر $(t,x)\in U$ داشته باشیم $|f(t,x)|\le\psi(|x-x_\circ|)$، آنگاه (۳) برای هر $t\in[t_\circ-a,t_\circ+a]$ دارای جواب یکتای $x(t)=x_\circ$ است.*

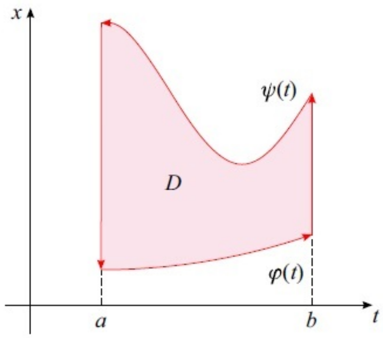
توجه کنید که قضیهٔ ۲ شرط کافی ذکرشده در قضیهٔ مشهور زیر را به معادله‌های غیرخودگردان تعمیم می‌دهد ([۲، ۱۵] را ببینید): اگر $f:[x_\circ-b,x_\circ+b]\to[\circ,+\infty)$ تابعی پیوسته باشد و $f(x_\circ)=\circ$، آنگاه مسئلهٔ

$$x'(t)=f(x(t)), \qquad t\ge t_\circ, \quad x(t_\circ)=x_\circ,$$

دارای جواب موضعی یکتا در سمت راست $t_\circ$ (یعنی، جواب ثابت $x_\circ$) است اگر و تنها اگر $\int_{x_\circ^+}\frac{ds}{f(s)}=+\infty$.

۲. یک گزارهٔ معادل: قضیهٔ گرین

از فرمول (۲) اثبات ساده‌ای برای صورتی از قضیهٔ گرین به‌دست می‌آید. این اثبات را به دانشجویان سال‌های پایین رشتهٔ ریاضی تدریس کرده‌ایم و به نظرمان این اثبات، به‌ویژه برای تدریس قضیهٔ گرین، در آن کلاس‌ها مناسب است.



شکل ۱

قضیه ۳. *گیریم* $a, b \in \mathbb{R}$، $a < b$ *، و* $\varphi, \psi \in C^{۱}([a, b])$ *چنان باشند که برای هر* $t \in [a, b]$، $\varphi(t) \leq \psi(t)$*. ناحیهٔ* $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{۲} : t \in [a, b], \varphi(t) \leq x \leq \psi(t)\}$ *را درنظر بگیرید (شکل ۱ را ببینید) و فرض کنید* Γ *نشان‌دهندهٔ مرز آن با جهت مثبت باشد. گیریم* $D \subset [a, b] \times [c, d]$ *و* $f_{۱}, f_{۲} : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ *چنان باشند که* $\frac{\partial f_{۱}}{\partial x}$ *و* $\frac{\partial f_{۲}}{\partial t}$ *موجود و روی* $[a, b] \times [c, d]$ *پیوسته‌اند. دراین‌صورت برای* $F = (f_{۱}, f_{۲})$*، اتحاد زیر برقرار است*

$$\int_{\Gamma} F = \int_{D} \left(\frac{\partial f_{۲}}{\partial t} - \frac{\partial f_{۱}}{\partial x} \right) dt dx. \qquad (۴)$$

اثبات. بنابه تعریف داریم

$$\int_{\Gamma} F = \int_{\alpha}^{\beta} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt,$$

که در آن $\gamma(\cdot)$ یک پارامتری‌سازی در جهت مثبت برای Γ و $\langle \cdot, \cdot \rangle$ نشان‌دهندهٔ حاصل‌ضرب اسکالر است. پس، کافی است چهار عبارت زیر را که هرکدام متناظر با مرزی از Γ هستند، محاسبه و جمع کنیم.

$$\int_{a}^{b} f_{۱}(t, \varphi(t)) dt + \int_{a}^{b} f_{۲}(t, \varphi(t)) \varphi'(t) dt, \qquad (۵)$$

$$\int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} f_{۲}(b, x) dx, \qquad (۶)$$

$$-\int_a^b f_۱(t,\psi(t))dt-\int_a^b f_۲(t,\psi(t))\psi'(t)dt, \qquad (۷)$$

$$-\int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} f_۲(a,x)dx. \qquad (۸)$$

باتوجه به (۲) از (۵) و (۷) نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F=&\int_a^b f_۱(t,\varphi(t))dt+\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f_۲(b,x)dx\\ &-\int_a^b\left(\int_{\varphi(a)}^{\varphi(t)}\frac{\partial f_۲}{\partial t}(t,x)dx\right)dt+\int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} f_۲(b,x)dx\\ &-\int_a^b f_۱(t,\psi(t))dt-\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f_۲(b,x)dx\\ &+\int_a^b\left(\int_{\psi(a)}^{\psi(t)}\frac{\partial f_۲}{\partial t}(t,x)dx\right)dt-\int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} f_۲(a,x)dx.\end{aligned}$$

توجه کنید که با استفاده از قضیهٔ بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال، از جملات اول و پنجم در این مجموع نتیجه می‌شود که

$$\int_a^b f_۱(t,\varphi(t))dt-\int_a^b f_۱(t,\psi(t))dt=-\int_a^b\left(\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)}\frac{\partial f_۱}{\partial x}(t,x)dx\right)dt.$$

با جمع‌زدن جملات دوم، چهارم، ششم، و هشتم داریم

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f_۲(b,x)+\int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} f_۲(b,x)dx-\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f_۲(b,x)dx-\int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} f_۲(a,x)dx\\ =\int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} f_۲(b,x)dx-\int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} f_۲(a,x)dx\\ =\int_{\varphi(a)}^{\psi(a)}[f_۲(b,x)-f_۲(a,x)]dx.\end{aligned}$$

ازسوی‌دیگر، با جمع جملات سوم و هفتم داریم

$$\begin{aligned}
&-\int_a^b \left(\int_{\varphi(a)}^{\varphi(t)} \frac{\partial f_۲}{\partial t}(t,x)dx\right)dt + \int_a^b \left(\int_{\psi(a)}^{\psi(t)} \frac{\partial f_۲}{\partial t}(t,x)dx\right)dt \\
&= \int_a^b \left(\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f_۲}{\partial t}(t,x)dx - \int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} \frac{\partial f_۲}{\partial t}(t,x)dx\right)dt \\
&= \int_a^b \left(\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f_۲}{\partial t}(t,x)dx\right)dt - \int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} \int_a^b \frac{\partial f_۲}{\partial t}(t,x)dtdx \\
&= \int_a^b \left(\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f_۲}{\partial t}(t,x)dx\right)dt - \int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} [f_۲(b,x) - f_۲(a,x)]dx.
\end{aligned}$$

بالاخره، با جمع زدن همهٔ جملات، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma F &= \int_a^b \left(\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f_۲}{\partial t}(t,x)dx\right)dt - \int_a^b \left(\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f_۱}{\partial x}(t,x)dx\right)dt \\
&= \int_D \left(\frac{\partial f_۲}{\partial t} - \frac{\partial f_۱}{\partial x}\right)dtdx.
\end{aligned}$$

□

دراصل، قضیهٔ ۱ هم از قضیهٔ ۳ نتیجه می‌شود، پس با هم معادل‌اند. برای اثبات، توابع $f(t,x)$ و $x(t)$ را با شرایط قضیهٔ ۱ درنظر بگیرید و تعریف کنید

$$\varphi(t) \equiv \min_{t\in[a,b]} x(t)\text{، }\psi(t) = x(t)\text{، }f_۱ = ۰\text{، و } f_۲ = f$$

بنویسید

$$c = \min_{t\in[a,b]} x(t),$$

داریم

$$\int_\Gamma F = \int_c^{x(b)} f(b,r)dr - \int_a^b f(t,x(t))x'(t)dt - \int_c^{x(a)} f(a,r)dr \qquad (۹)$$

و

$$\begin{aligned}\int_D\left(\frac{\partial f_۲}{\partial t}-\frac{\partial f_۱}{\partial x}\right)dtdx =&\int_a^b\int_c^{x(t)}\frac{\partial f}{\partial t}(t,r)drdt\\ =&\int_a^b\int_c^{x(a)}\frac{\partial f}{\partial t}(t,r)drdt+\int_a^b\int_{x(a)}^{x(t)}\frac{\partial f}{\partial t}(t,r)drdt\\ =&\int_c^{x(a)}\int_a^b\frac{\partial f}{\partial t}(t,r)dtdr+\int_a^b\int_{x(a)}^{x(t)}\frac{\partial f}{\partial t}(t,r)drdt\\ =&\int_c^{x(a)}[f(b,r)-f(a,r)]dr+\int_a^b\int_{x(a)}^{x(t)}\frac{\partial f}{\partial t}(t,r)drdt.\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

با توجه به قضیهٔ ۳، روابط (۹) و (۱۰) با هم معادل‌اند، پس

$$\int_a^b f(t,x(t))x'(t)dt=\int_{x(a)}^{x(b)}f(b,r)dr-\int_a^b\int_{x(a)}^{x(t)}\frac{\partial f}{\partial t}(t,r)drdt,$$

که همان فرمول مطلوبِ (۲) است.

۳. محکی برای یکتایی جوابِ معادله‌های دیفرانسیل معمولی

مسئلهٔ یکتایی جواب معادله‌های دیفرانسیل موضوعی قدیمی است، که هنوز هم به سرانجام نرسیده است ([۱، ۱۱] و مراجع آن‌ها را ببینید)، و هنوز هم توجه ریاضی‌دانان را برمی‌انگیزد [۴، ۶، ۷، ۸، ۱۲]. در این بخش نشان می‌دهیم که می‌توان با استفاده از صورت تعمیم‌یافتهٔ فرمول تعویض متغیر، شرایط کارآمد جدیدی برای یکتایی جواب معادله‌های دیفرانسیل فراهم کرد.

روش ما برای این کار، که براساس تعریف زیر بنا شده است، احیای ایده‌های اولیهٔ پِرون[۱] و کامکِ[۲] است. ازاین‌پس a و b اعداد حقیقی مثبت‌اند.

تعریف ۱. تابع $g:(۰,a]\times[۰,b]\to[۰,+\infty)$ را کرانی برای یکتایی می‌نامیم هرگاه برای هر $\tilde a\in(۰,a]$ تنها تابع پیوستهٔ لیپ‌شیتسی $\varphi:[۰,\tilde a]\to[۰,+\infty)$ که تقریباً برای هر $t\in(۰,\tilde a]$،

$$\varphi(۰)=\varphi'(۰)=۰ \quad \text{و} \quad \varphi'(t)\le g(t,\varphi(t)) \qquad (۱۱)$$

تابع $\varphi(t)=۰$، برای هر $t\in[۰,\tilde a]$، باشد.

[۱] Perron [۲] Kamke

به‌وضوح، $g(t,x) \equiv 0$، برای هر (t,x)، یک کران یکتایی است، و با استفاده از صورت تعمیم‌یافتهٔ فرمول تعویض متغیر، کران‌های نابدیهی بیشتری خواهیم یافت. توجه کنید که لازم نیست کران‌های یکتایی، تابع پیوسته باشند.

کاربرد کران‌های یکتایی. همان‌طورکه در گزارهٔ بعد نشان می‌دهیم، کران‌های یکتایی می‌توانند برای اثبات یکتایی جواب‌های معادله‌های دیفرانسیل معمولی و همچنین دستگاه‌های معادله‌های دیفرانسیل معمولی به کار روند. خاطرنشان می‌کنیم که اثبات این حکم برای معادله‌های دیفرانسیل معمولی ساده‌تر است. و حتی می‌توان تعریف ساده‌تری را که در آن به جای توابع پیوستهٔ لیپ‌شیتسی از توابع پیوسته‌مشتق‌پذیر و به جای (۱۱) از

$$\varphi'(t) \le g(t, \varphi(t)), \qquad \forall t \in (0, \tilde{a}), \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0 \tag{۱۲}$$

استفاده شده است، به کار برد. چگونگی ساده کردن اثبات‌ها برای معادله‌های مربوط را در جای مناسب بیان خواهیم کرد.

در ادامه فرض می‌کنیم $t_0 \in \mathbb{R}$ و $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) \in \mathbb{R}^n$ که در آن $n \in \mathbb{N}$، همچنین $\|\cdot\|$ نشان‌دهندهٔ نرمی روی $\mathbb{R}^n$ باشد (کدام نرم، مهم نیست). هدف ما بررسی یکتایی جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیر است

$$x' = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{۱۳}$$

گوی بسته به مرکز x_0 و شعاع $r > 0$ نسبت به نرم موردبحث را با علامت $\overline{B(x_0, r)}$ نشان می‌دهیم.

قسمت دوم گزارهٔ زیر، روایت دیگری از قضیهٔ یکتایی کامکِ است که برای منظور ما کفایت می‌کند. به کمک کران‌های یکتایی، می‌توانیم از به کار بردن نابرابری‌های دیفرانسیلی در اثبات این گزاره اجتناب کنیم. به این طریق، اثبات سرراست و فوق‌العاده ساده‌تری نسبت به اثبات‌های موجود (قضیهٔ ۳.۲ از [۵] یا قضیهٔ ۶.۱ از [۱۱]) به‌دست می‌آید.

گزاره ۱. *فرض کنیم* $g : (0,a] \times [0,b] \to [0,+\infty)$ *یک کران یکتایی باشد. دراین‌صورت احکام زیر برقرارند.*

۱) *اگر* $f : V = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B(x_0, b)} \to \mathbb{R}^n$ *پیوسته باشد و برای هر* $(t,x) \in V$ *با شرط* $t \ne t_0$ *داشته باشیم*

$$\|f(t,x)\| \le g(|t - t_0|, \|x - x_0\|), \tag{۱۴}$$

و برای هر $t \in [t_\circ - a, t_\circ + a]$، $f(t, x_\circ) = (\circ, \circ, \dots, \circ)$، آنگاه مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۳) روی هر زیر بازهٔ $I \subset [t_\circ - a, t_\circ + a]$ تنها دارای جواب ثابت $x \equiv x_\circ$ است.

۲) *اگر $f : W = [t_\circ - a, t_\circ + a] \times \overline{B(x_\circ, b/۲)} \to \mathbb{R}^n$ پیوسته باشد و برای هر $(t, x), (t, y) \in W$ که $t \neq t_\circ$، داشته باشیم*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \le g(|t - t_\circ|, \|x - y\|), \tag{۱۵}$$

آنگاه مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۳) روی هر زیر بازهٔ $I \subset [t_\circ - a, t_\circ + a]$ حداکثر یک جواب دارد.

اثبات. هر دو ادعا را با هم اثبات می‌کنیم. به برهان خلف، فرض کنیم می‌توان دو جواب متفاوت با (۱۳)، مثلاً $x, y : I \subset [t_\circ - a, t_\circ + a] \to \mathbb{R}^n$ یافت (بدون کاستن از کلیت، در حالت اول فرض می‌کنیم برای هر $t \in I$، $y(t) = x_\circ$). دراین‌صورت دو عدد $t_۱, t_۲ \in (-a, a)$ یافت می‌شوند به‌طوری‌که $x(t_\circ + t_۱) = y(t_\circ + t_۱)$ و یکی از حالت‌های زیر برقرار است

(الف) $\circ \le t_۱ < t_۲$ و برای هر $t \in (t_۱, t_۲]$، $x(t + t_\circ) \neq y(t + t_\circ)$، یا

(ب) $t_۲ < t_۱ \le \circ$ و برای هر $t \in [t_۲, t_۱)$، $x(t + t_\circ) \neq y(t + t_\circ)$.

نشان می‌دهیم که (الف) به تناقض می‌انجامد. تابع حقیقی زیر را تعریف می‌کنیم

$$\varphi(t) = \begin{cases} \circ & t \in [\circ, t_۱] \\ \|x(t + t_\circ) - y(t + t_\circ)\| & t \in [t_۱, t_۲]. \end{cases}$$

نشان می‌دهیم که g یک کران یکتایی است.[۱] توجه کنید برای هر $s, t \in [t_۱, t_۲]$ با شرط $s < t$، داریم

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi(s)| &= |\, \|x(t + t_\circ) - y(t + t_\circ)\| - \|x(s + t_\circ) - y(s + t_\circ)\| \,| \\ &\le \|x(t + t_\circ) - x(s + t_\circ) + y(s + t_\circ) - y(t + t_\circ)\| \\ &= \left\| \int_{s+t_\circ}^{t_+t_\circ} [x'(r) - y'(r)] dr \right\| \\ &= \left\| \int_{s+t_\circ}^{t+t_\circ} [f(r, x(r)) - f(r, y(r))] dr \right\| \\ &\le (t - s) \max_{s+t_\circ \le r \le t+t_\circ} \|f(r, x(r)) - f(r, y(r))\|, \end{aligned} \tag{۱۶}$$

[۱] در بعد $n = ۱$، می‌توان ثابت کرد که $\varphi \in C^۱([\circ, t_۲])$ و روی $(\circ, \tilde{a}] = (\circ, t_۲]$ در (۱۲) صدق می‌کند.

که نتیجه می‌دهد φ روی $[t_1, t_2]$ پیوستهٔ لیپ‌شیتسی با ثابت لیپ‌شیتس

$$L = \max_{t_1+t_0 \leq r \leq t_2+t_0} \|f(r, x(r)) - f(r, y(r))\|,$$

است. به‌علاوه، φ روی تمام بازهٔ $[0, t_2]$ پیوستهٔ لیپ‌شیتسی است زیرا روی $[0, t_1]$ ثابت و در t_1 پیوسته است. به‌ویژه، تقریباً برای هر $s \in [0, t_2]$، $\varphi'(s)$ موجود است و برای هر $s \in [t_1, t_2]$، از (۱۶) و شرط (۱۴) یا (۱۵)، بسته به حالت مورد بررسی (به یاد آورید که در حالت اول $y(t) \equiv x_0$)، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \varphi'(s) \leq |\varphi'(s)| &= \lim_{t \to s^+} \left| \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \right| \\ &\leq \|f(s + t_0, x(s + t_0)) - f(s + t_0, y(s + t_0))\| \leq g(s, \varphi(s)). \end{aligned}$$

بنابراین، تقریباً برای هر $s \in [0, t_2]$، $\varphi'(s) \leq g(s, \varphi(s))$.

سرانجام، اگر $t_1 > 0$ آنگاه $\varphi(0) = 0$، و اگر $t_1 = 0$، با به‌کارگیری (۱۶) و فرض $s = 0$ همان نتیجه را می‌گیریم. درواقع، برای هر $t > 0$ داریم

$$\frac{|\varphi(t)|}{t} \leq \max_{t_0 \leq r \leq t+t_0} \|f(r, x(r)) - f(r, y(r))\|,$$

و فرض‌های قضیه تضمین می‌کنند که

$$\lim_{t \to 0^+} \max_{t_0 \leq r \leq t+t_0} \|f(r, x(r)) - f(r, y(r))\| = \|f(t_0, x(t_0)) - f(t_0, y(t_0))\| = 0.$$

پس، $\varphi(0) = 0 = \varphi'(0)$ و φ در (۱۱) صدق می‌کند. از اینجا نتیجه می‌شود که روی $[0, t_2]$، $\varphi \equiv 0$ زیرا g یک کران یکتایی است، و این با (الف) در تناقض است.

اگر فرض کنیم (ب) درست باشد و تعریف کنیم

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, -t_1] \\ \|x(t_0 - t) - y(t_0 - t)\| & t \in [-t_1, -t_2], \end{cases}$$

تناقضی مشابه حاصل می‌شود. □

حالت‌هایی که $g(t,x)$ کران یکتایی است. اینک نتیجهٔ اصلی این بخش را اثبات می‌کنیم. در اینجا نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان فرمول کلی تعویض متغیر را برای بررسی اینکه تابع مفروض $g(t,x)$ کران یکتایی است به کار گرفت.

قضیه ۴. *فرض کنیم تابع $p:(۰,a]\to(۰,\infty)$ روی بازهٔ $(۰,a]$ موضعاً انتگرال‌پذیر و تابع $\psi:(۰,a]\times[۰,۲b]\to[۰,\infty)$ پیوسته باشد. دراین‌صورت تابع $g:(۰,a]\times[۰,b]\to[۰,\infty)$ یک کران یکتایی است به‌شرط‌آنکه $g(t,x)\le p(t)\psi(t,x)$ و شرایط زیر برقرار باشند:*

(الف) برای هر $t\in(۰,a]$، $\psi(t,۰)=۰$ و برای هر $(t,x)\in(۰,a]\times(۰,b]$، $\psi(t,x)>۰$؛

(ب) تابع $\frac{۱}{\psi}$ روی $(۰,a)\times(۰,b)$ دارای مشتق جزئی پیوسته نسبت به t باشد؛

(ج) برای هر تابع پیوستهٔ لیپ‌شیتسی [۱] $u:(t_۱,t_۲]\subset(۰,a]\to(۰,b)$ با شرط

$$\lim_{t\to t_۱^+}\frac{u(t)}{t-t_۱}=۰, \tag{۱۷}$$

داشته باشیم:

$$\limsup_{t\to t_۱^+}\left(\int_{u(t)}^{u(t_۲)}\frac{dr}{\psi(t_۲,r)}-\int_t^{t_۲}p(s)ds-\int_t^{t_۲}\int_{u(t)}^{u(s)}\frac{\partial}{\partial s}\frac{۱}{\psi(s,r)}drds\right)>۰. \tag{۱۸}$$

همچنین اگر شرایط (الف) و (ب) را به‌ترتیب با

(ب)′ تابع ψ نسبت به متغیر اولش غیرنزولی باشد.

(ج)′ برای هر تابع پیوستهٔ لیپ‌شیتسی $u:(t_۱,t_۲]\subset(۰,a]\to(۰,b)$ که در شرط (۱۷) صدق کند، داشته باشیم

$$\limsup_{t\to t_۱^+}\left(\int_{u(t)}^{u(t_۲)}\frac{dr}{\psi(t_۲,r)}-\int_t^{t_۲}p(s)ds\right)>۰ \tag{۱۹}$$

عوض کنیم، باز هم حکم برقرار است.

اثبات. فرض بگیریم $\tilde a\in(۰,a]$ ثابت و $\varphi:[۰,\tilde a]\to[۰,\infty)$ یک تابع پیوستهٔ لیپ‌شیتسی باشد که در (۱۱) صدق کند. باید ثابت کنیم که روی $[۰,\tilde a]$، $\varphi\equiv۰$.

[۱] در بعد $n=۱$ می‌توان توجه خود را به توابع پیوسته‌مشتق‌پذیر $u:[t_۱,t_۲]\to[۰,b]$ که روی $(t_۱,t_۲]$ مثبت‌اند، معطوف کرد.

با برهان خلف، فرض کنیم بتوانیم $t_۱ \in [۰, \tilde{a})$ و $t_۲ \in (t_۱, \tilde{a}]$ را چنان بیابیم که برای هر $t \in (t_۱, t_۲]$، $\varphi(t) > ۰$ و $\varphi(t_۱) = ۰$. توجه کنید که φ در رابطهٔ (۱۷) صدق می‌کند. درواقع، اگر $t_۱ = ۰$، رابطهٔ (۱۷) از قسمت دوم (۱۱) نتیجه می‌شود. ازسوی‌دیگر، اگر $t_۱ > ۰$، آنگاه قضیهٔ اساسی حسابان برای انتگرال لُبِگ تضمین می‌کند که برای هر $t \in (t_۱, t_۲)$ داریم

$$
\begin{aligned}
۰ \leq \frac{\varphi(t)}{t - t_۱} &= \frac{۱}{t - t_۱} \int_{t_۱}^{t} \varphi'(s) ds \\
&\leq \frac{۱}{t - t_۱} \int_{t_۱}^{t} p(s)\psi(s, \varphi(s)) ds \\
&\leq \frac{\max_{t_۱ \leq s \leq t} \psi(s, \varphi(s))}{t - t_۱} \int_{t_۱}^{t_۲} p(s) ds.
\end{aligned}
$$

از اینکه p روی $[t_۱, t_۲]$ انتگرال‌پذیر، $\psi(s, \varphi(s))$ در $t = t_۱$ پیوسته است، و $\psi(t_۱, \varphi(t_۱)) = ۰$ نتیجه می‌گیریم که φ برای حالت $t_۱ > ۰$ نیز در (۱۷) صدق می‌کند.

تقریباً برای هر $t \in (t_۱, t_۲]$، داریم

$$
\varphi'(t) \leq g(t, \varphi(t)) \leq p(t)\psi(t, \varphi(t)), \tag{۲۰}
$$

پس از فرمول تعویض متغیر (۲) (تذکر ۱ را ببینید) نتیجه می‌شود که

$$
\begin{aligned}
\int_{t}^{t_۲} p(s) ds &\geq \int_{t}^{t_۲} \frac{\varphi'(t)}{\psi(s, \varphi(s))} ds \\
&= \int_{\varphi(t)}^{\varphi(t_۲)} \frac{dr}{\psi(t_۲, r)} - \int_{t}^{t_۲} \int_{\varphi(t)}^{\varphi(s)} \frac{\partial}{\partial s} \frac{۱}{\psi(s, r)} dr ds.
\end{aligned}
$$

از نابرابری اخیر برای وقتی که $t \to t_۱^+$ حد می‌گیریم و به تناقضی با رابطهٔ (۱۸) برای $u(t) = \varphi(t)$ می‌رسیم.

برای اثبات حکم برای وقتی که (ب) و (ج) را با (ب)′ و (ج)′ عوض می‌کنیم، به‌راحتی، می‌توان اثبات را تکرار کرد ضمن اینکه به این نکته توجه کنیم که از (۲۰) و (ب)′ می‌توان نتیجه گرفت که تقریباً برای هر $t \in (t_۱, t_۲)$، $\varphi'(t) \leq p(t)\psi(t_۲, \varphi(t))$. بنابراین برای هر مقدار ثابتی مانند $t \in (t_۱, t_۲)$ داریم

$$
\int_{t}^{t_۲} p(s) ds \geq \int_{t}^{t_۲} \frac{\varphi'(t)}{\psi(t_۲, \varphi(s))} ds = \int_{\varphi(t)}^{\varphi(t_۲)} \frac{dr}{\psi(t_۲, r)},
$$

که در آن از فرمول معمول تعویض متغیر استفاده کرده‌ایم. اکنون اثبات دقیقاً مانند حالت قبل نتیجه می‌شود. □

با استفاده از p و ψهای متفاوت در قسمت دوم گزارهٔ ۱ نتایج یکتایی مختلفی از قضیهٔ ۴ به‌دست می‌آید. به‌راحتی می‌توان مثال‌های زیر را نتیجه گرفت (شرایط $'$(ب) و $'$(ج) را برای آن‌ها بررسی کنید).

۱) (قضیهٔ لیپ‌شیتس) $p = ۱$ و $\psi(t, x) = cx$، که در آن $c > ۰$ ثابت است.

۲) (قضیهٔ آزگود[1]) $p = ۱$ و $\psi(t, x) = \psi(x)$، که در آن برای هر $x > ۰$، $\psi(x) > ۰$ و $\int_{۰^+} \frac{ds}{\psi(s)} = +\infty$.

۳) (قضیهٔ مونتل–تونِلّی[2]) $\int_{۰^+} p(s)ds < \infty$ و $\psi(t, x) = \psi(x)$ مانند قضیهٔ آزگود باشد.

۴) (قضیهٔ ناگومو[3]) $p(t) = ۱/t$ و $\psi(t, x) = x$.

۵) (قضیهٔ وان کامپن[4] [۱۴]) $p(t) = (۱ + q(t))/t$ که در آن برای هر $t > ۰$، $q(t) \geq ۰$ و $\int_{۰}^{a} \frac{q(s)}{s} ds < \infty$ و $\psi(t, x) = x$.

توجه کنید که این احکام یکتایی را می‌توان با استفاده از کران‌های یکتایی تفکیک‌پذیر مناسبی، یعنی به‌شکل $g(t, x) = p(t)\psi(x)$، اثبات کرد؛ این مطلب را لاسَل کشف کرده است [۱، ۱۳]. درواقع، مطابق آنچه در [۱، نتیجهٔ ۶.۱۵.۱] آمده است، قسمت دوم گزارهٔ ۱ برای $g(t, x) = p(t)\psi(x)$ برقرار است به شرط آنکه برای هر $t > ۰$ تابع $p(t)$ پیوسته و نامنفی باشد، برای هر $x \geq ۰$ تابع $\psi(x)$ پیوسته باشد و $\psi(۰) = ۰$، برای هر $x > ۰$ داشته باشیم $\psi(x) > ۰$، و یکی از شرایط

$$\limsup_{t \to ۰^+} \int_t \left(\frac{۱}{\psi(s)} - p(s)\right)ds = \infty \tag{۲۱}$$

یا

$$\limsup_{t \to ۰^+} \int_t \left(\frac{۱}{\psi(s)} - p(s)\right)ds > -\infty, \quad \psi(x) \leq x \tag{۲۲}$$

برقرار باشد.

به‌سادگی می‌توان بررسی کرد و دید که هریک از شرط‌های لاسَل، (۲۱) یا (۲۲)، شرط $'$(ج) از قضیهٔ ۴ را نتیجه می‌دهد. ازسوی‌دیگر، توابع $p(t) = \frac{۱}{t}$ و $\psi(x) = e^x - ۱$ در هیچ‌یک از

[1] Osgood [2] Montel-Tonelli [3] Nagumo [4] Van Kampen

شرط‌های (۲۱) و (۲۲) صدق نمی‌کنند، اما می‌توانند با توابعی که در شرط (۱۸) صدق می‌کنند از بالا کران‌دار شوند. این مطلب را با استفاده از نتیجهٔ زیر، که مبتنی‌بر حالت کلی فرمول (۲) است، اثبات خواهیم کرد.

نتیجه ۱. *تابع* $g : (\circ, a] \times [\circ, b] \to [\circ, \infty)$ *یک کران یکتایی است به‌شرط آنکه برای* $p(t) = \frac{1+q_1(t)}{t}$ *و* $\psi(t,x) = (1 + q_2(t)x^\gamma)x$ *داشته باشیم* $g(t,x) \leq p(t)\psi(t,x)$*، که در آن* $q_1 : (\circ, a] \to [\circ, +\infty)$ *اندازه‌پذیر،* $\int_\circ^a \frac{q_1(s)}{s}ds < +\infty$*،* $q_2 : [\circ, a] \to [\circ, +\infty)$ *پیوسته،* q_2' *روی* $(\circ, a)$ *پیوسته و انتگرال‌پذیر است، و* $\gamma > \circ$.

اثبات. به‌وضوح شرایط (الف) و (ب) از قضیهٔ ۴ برقرارند. حال شرط (ج) را بررسی می‌کنیم. یک تابع پیوستهٔ لیپ‌شیتسی مانند $u : (t_1, t_2] \subset (\circ, a] \to (\circ, b)$ صادق در شرط (۱۷) را درنظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که در (۱۸) صدق می‌کند.
برای هر $t \in (t_1, t_2)$ داریم

$$\begin{aligned}&\int_{u(t)}^{u(t_2)} \frac{dr}{\psi(t_2, r)} - \int_t^{t_2} p(s)ds - \int_t^{t_2}\int_{u(t)}^{u(s)} \frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{\psi(s,r)}drds\\ &\quad = \int_{u(t)}^{u(t_2)} \frac{dr}{(1 + q_2(t_2)r^\gamma)r} - \ln\frac{t_2}{t} - \int_t^{t_2}\frac{q_1(s)}{s}ds + \int_t^{t_2}\int_{u(t)}^{u(s)}\frac{q_2'(s)r^{\gamma-1}}{(1+q_2(s)r^\gamma)^2}drds.\end{aligned}$$

فرض‌های موجود تضمین می‌کنند که جملات سوم و چهارم به‌عنوان توابعی از $t \in (t_1, t_2)$ کراندارند. برای دو جملهٔ باقیمانده داریم

$$\begin{aligned}&\int_{u(t)}^{u(t_2)} \frac{dr}{(1 + q_2(t_2)r^\gamma)r} - \ln\frac{t_2}{t}\\ &\quad = -\ln\left(\frac{t_2}{t}\frac{(1 + q_2(t_2)u^\gamma(t_2))^{1/\gamma}}{u(t_2)}\frac{u(t)}{(1 + q_2(t_2)u^\gamma(t))^{1/\gamma}}\right),\end{aligned}$$

و با توجه به (۱۷) می‌دانیم وقتی $t \to t_1^+$ تابع اخیر به $+\infty$ میل می‌کند. بنابراین در این حالت، مقدار حد در (۱۸) برابر $+\infty$ است و اثبات کامل می‌شود. □

با استفاده از نتیجهٔ ۱ می‌توان قضیهٔ ناگومو را با انتخاب کران یکتایی $g(t,x) = x/t$ بهبود بخشید. متذکر می‌شویم که $g(t,x) = cx/t$، وقتی $c > 1$، کران یکتایی نیست، زیرا در این حالت تابع $\varphi(t) = t^c$ یک جواب پیوستهٔ لیپ‌شیتسی ناصفر برای معادلهٔ $\varphi'(t) = g(t, \varphi(t))$ با شرط $t > \circ$ و $\varphi(\circ) = \varphi'(\circ) = \circ$ است. حتّی مثال‌هایی از عدم یکتایی جواب برای مسئلهٔ مقدار

اولیهٔ (۱۳) وجود دارد که $f(t,x)$ در نابرابری (۱۵) با فرض $g(t,x) = cx/t$ و $c > ۱$، صدق می‌کند. ([۱، مثال ۱.۶.۱] را ببینید.)

نتیجه ۲. *تابع* $g : (\circ, a] \times [\circ, b] \to [\circ, \infty)$ *یک کران یکتایی است به‌شرط آنکه برای هر* $(t,x) \in (\circ, a] \times [\circ, b]$ *داشته باشیم* $g(t,x) \leq \varphi(t)/t$ *که در آن* $\varphi \in C^۱([\circ, b])$، $\varphi(\circ) = \circ$، $\varphi'(\circ) \leq ۱$، *برای هر* $x \in (\circ, b]$ *داریم* $\varphi(x) > \circ$، *و* φ'' *روی* $(\circ, b)$ *موجود و از بالاکراندار است.*

اثبات. با استفاده از قضیهٔ تیلر، برای هر مقدار ثابت $x \in (\circ, b]$، عدد $y \in (\circ, x)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\varphi(x) = \varphi'(\circ) + \frac{\varphi''(y)}{۲}x^۲.$$

بنابراین، از فرض‌های قضیه، وجود ثابتی مانند $c > \circ$ با این شرط که برای هر $x \in [\circ, b]$، $\varphi(x) \leq x + cx^۲$ تضمین می‌شود. پس برای $p(t) = ۱/t$ و $\psi(t,x) = (۱ + cx)x$، $g(t,x) \leq p(t)\psi(t,x)$ و حالا می‌توان نتیجهٔ ۱ را به‌کار برد. $\square$

مثال ۱. فرض کنیم $a, b \in (\circ, \infty)$ دو عدد ثابت باشند و تابع $f : U = [\circ, a] \times [-b, b] \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$f(t,x) = \begin{cases} t & |x| > \ln(۱ + t^۲) \\ \frac{e^{|x|} - ۱}{t} & |x| \leq \ln(۱ + t^۲),\ t > \circ \\ \circ & (t,x) = (\circ, \circ) \end{cases}$$

تعریف شده باشد.

به‌وضوح $x \equiv \circ$ جواب معادلهٔ

$$x' = f(t,x), \qquad t \in [\circ, a], \quad x(\circ) = \circ, \tag{۲۳}$$

است. یکتایی این جواب را بررسی می‌کنیم.

ابتدا توجه کنید که برای هر $(t,x) \in U$

$$\circ \leq f(t,x) \leq t, \tag{۲۴}$$

بنابراین f روی U پیوسته است. به‌علاوه، برای هر $(t,x) \in U$ با شرط $t > \circ$ داریم

$$|f(t,x)| = f(t,x) \leq \frac{\varphi(|x|)}{t} \tag{۲۵}$$

که در آن $\varphi(x) = e^x - ۱$ برای $x \in [۰, b]$، و شرایط نتیجهٔ ۲ را دارد. بنابراین مسئلهٔ (۲۳) فقط دارای جواب صفر است.

توجه کنید برای $x > ۰$، $\varphi(x) > ۰$ و بنابراین از رابطهٔ (۲۵) نمی‌توانستیم نتیجه بگیریم که شرط ناگامو برقرار است. به‌علاوه، لازم است در نظر داشته باشیم که f در هیچ‌گونه شرط لیپ‌شیتسی موضعی نسبت به t یا نسبت به x صدق نمی‌کند و بنابراین معادلهٔ (۲۳) در محدودهٔ کاربرد قضیه‌های یکتایی، مانند قضیه‌های مذکور در [۷، ۱۲]، قرار نمی‌گیرد.

نتایجی در مورد نابرابری‌های دیفرانسیلی. پیش‌ازاین اشاره کردیم که به کمک کران‌های یکتایی، بدون استفاده از نابرابری‌های دیفرانسیلی، می‌توان صورتی از قضیهٔ کامکِ را اثبات کرد. دراصل، کران‌های یکتایی ارتباطی عمیق با نابرابری‌های دیفرانسیلی دارند. برای نمونه، اثبات جدیدی برای یک نتیجهٔ خیلی مشهور موسوم به لم گرانوال[۱] ارائه می‌دهیم. برای روشن‌تر شدن مطلب، کار را با گزارهٔ مقدماتی زیر شروع می‌کنیم که توصیف دیگری است از کران‌های یکتایی.

گزاره ۲. *فرض بگیریم تابع $g : (۰, a] \times [۰, b] \to [۰, \infty)$ داده شده باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:*

۱) *تابع g یک کران یکتایی است.*

۲) *اگر $\varphi : [۰, \tilde{a}] \subset [۰, a] \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوستهٔ لیپ‌شیتسی باشد و تقریباً برای هر $t \in [۰, \tilde{a}]$،*

$$\varphi'(t) \leq g(t, |\varphi(t)|), \qquad \varphi(۰) \leq ۰, \quad \varphi'(۰) \leq ۰, \tag{۲۶}$$

آنگاه برای هر $t \in [۰, \tilde{a}]$، $\varphi(t) \leq ۰$.

اثبات. فقط باید ثابت کنیم که حکم (۱) حکم (۲) را نتیجه می‌دهد، زیرا عکس آن به‌وضوح برقرار است. فرض کنید که $g(t, x)$ یک کران یکتایی است و $\varphi : [۰, \tilde{a}] \subset [۰, a] \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوستهٔ لیپ‌شیتسی، صادق در رابطهٔ (۲۶)، باشد. باید ثابت کنیم که روی $[۰, \tilde{a}]$، $\varphi \leq ۰$. به برهان خلف فرض کنیم که می‌توان دو عدد $t_۱, t_۲ \in [۰, \tilde{a}]$ با شرط $t_۱ \leq t_۲$ را چنان یافت که

$$\varphi(t) > ۰ \quad \text{برای هر } t \in (t_۱, t_۲]، \tag{۲۷}$$

[۱] Gronwall

اکنون تابع $\phi : [\circ, t_{۲}] \to [\circ, +\infty)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\phi(t) = \begin{cases} \circ & t \in [\circ, t_{۱}] \\ \varphi(t) & t \in (t_{۱}, t_{۲}]. \end{cases}$$

به‌وضوح، ϕ پیوستهٔ لیپ‌شیتسی و نامنفی است، $\phi(\circ) = \circ$، و با توجه به (۲۶) تقریباً برای هر $t \in [\circ, t_{۲}]$ داریم $\phi'(t) \le g(t, \phi(t))$.

درپایان، می‌خواهیم ثابت کنیم که $\phi(\circ) = \circ$. درواقع، هرگاه $t_{۱} > \circ$ حکم واضح است و اگر $t_{۱} = \circ$، توجه می‌کنیم که $\phi'_{+}(\circ) = \varphi'(\circ) \le \circ$ و ازسوی‌دیگر، با توجه به رابطهٔ (۲۷) برای $t_{۱} = \circ$، $\phi'(\circ) = \circ$. ازآنجاکه g یک کران یکتایی است نتیجه می‌گیریم که روی $[\circ, \tilde{a}]$، $\phi \equiv \circ$، که با (۲۷) در تناقض است. □

لم گرانوال حالت خاصی از یک قضیهٔ کلی‌تر در مورد نابرابری‌های دیفرانسیلی است ([۱۰، قضیهٔ ۱.۶] را ببینید)، ولی به خودی‌خود هم جالب است. همان‌گونه‌که گفته شد، اثبات جدیدی برمبنای کران‌های یکتایی ارائه می‌دهیم.

قضیه ۵. *فرض‌کنیم $t_{\circ} \in \mathbb{R}$ و a عددی ثابت و مثبت باشد. می‌نویسیم $I = [t_{\circ}, t_{\circ} + a]$. اگر $\varphi \in \mathcal{C}^{۱}(I)$، $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(I)$، و*

$$\phi'(t) \le \alpha(t) + \beta(t)\varphi(t) \quad \text{برای هر } t \in (t_{\circ}, t_{\circ} + a]، \tag{۲۸}$$

آنگاه برای هر $t \in I$ داریم

$$\varphi(t) \le \varphi(t_{\circ}) \exp\left(\int_{t_{\circ}}^{t} \beta(r)dr\right) + \int_{t_{\circ}}^{t} \alpha(s) \exp\left(\int_{s}^{t} \beta(r)dr\right) ds. \tag{۲۹}$$

اثبات. طرف راست رابطهٔ (۲۹)، یعنی

$$x(t) = \varphi(t_{\circ}) \exp\left(\int_{t_{\circ}}^{t} \beta(r)dr\right) + \int_{t_{\circ}}^{t} \alpha(s) \exp\left(\int_{s}^{t} \beta(r)dr\right) ds, \quad t \in I$$

جواب معادلهٔ خطی

$$x' = \alpha(t) + \beta(t)x, \qquad t \in I, \quad x(t_{\circ}) = \varphi(t_{\circ}),$$

است.

باید نشان دهیم که تابع $\phi(t) = \varphi(t+t_0) - x(t+t_0)$ روی $J = [0, a]$ نامثبت است. بدین منظور، توجه کنید که ϕ روی $[0, a]$ پیوستهٔ لیپ‌شیتسی است، $\phi(0) = 0$، و

$$\phi'(0) = \varphi'(t_0) - x'(t_0) \leq \beta(t_0)(\varphi(t_0) - x(t_0)) = 0.$$

همچنین برای هر $t \in (0, a]$ داریم

$$\phi'(t) = \varphi'(t+t_0) - x'(t+t_0) \leq \beta(t+t_0)\phi(t) \leq (t, |\phi(t)|),$$

که در آن $g(t,x) = |\beta(t+t_0)|x$.

قضیهٔ ۴ تضمین می‌کند که g یک کران یکتایی است و از گزارهٔ ۲ نتیجه می‌شود که $\phi \leq 0$. اکنون اثبات به انجام می‌رسد. □

مراجع

[1] Agarwal, R. P., Lakshmikantham, V., *Uniqueness and Nonuniqueness Criteria for Ordinary Differential Equations*, Series in Real Analysis, vol. 6, World Scientific, Singapore, 1993.

[2] Binding, P., The differential equation $x' = f \circ x$, *J. Differential Equations*, **31** (1979), 183–199.

[3] Cabada, A., Cid, J. Á., López Pouso, R., Positive solutions for a class of singular differential equations arising in diffusion processes, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.*, **12** (2005), 329–342.

[4] Cid, J. Á., López Pouso, R., Does Lipschitz with respect to x imply uniqueness for the differential equation $y' = f(x,y)$?, *Amer. Math. Monthly*, **116** (2009), 61–66.

[5] Coddington, E. A., Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.

[6] Constantin, A., On Nagumós theorem, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **86** (2010), 41–44.

[7] Diblík, J., Nowak, C., Siegmund, S., A general Lipschitz uniqueness criterion for scalar ordinary differential equations, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, **34** (2014), 1–6.

[8] Ferreira, R. A. C., A Nagumo-type uniqueness result for an nth order differential equation, *Bull. London Math. Soc.*, **45** (2013), 930–934.

[9] Flanders, H., Differentiation under the integral sign, *Amer. Math. Monthly*, **80** (1973), 615–627.

[10] Hale, J. K., *Ordinary Differential Equations*, 2nd ed., Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, New York, 1980.

[11] Hartman, P., *Ordinary Differential Equations*; reprint of the second ed., Birkhäuser, Boston, 1982.

[12] Hoag, J. T., Existence and uniqueness of a local solution for $x' = f(t, x)$ using inverse functions, *Electron J. Differential Equations*, **124** (2013), 1–3.

[13] LaSalle, J., Uniqueness theorems and successive approximations, *Ann. of Math.*, **50** (1949), 722–730.

[14] Van Kampen, E. R., Notes on systems of ordinary differential equations, *Amer. J. Math.*, **63** (1941), 371–376.

[15] Wallach, S., The differential equation $y' = f(y)$, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 345–350.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۸/۱۲/۱۵؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۶/۲۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۶/۲۷

رسول کاظمی: دانشگاه کاشان، دانشکدهٔ علوم ریاضی، گروه ریاضی محض
تارنما: https://faculty.kashanu.ac.ir/rkazemi/fa
رایانامه: r.kazemi@kashanu.ac.ir
مهدی دهقانی: دانشگاه کاشان، دانشکدهٔ علوم ریاضی، گروه ریاضی محض
تارنما: https://faculty.kashanu.ac.ir/mdehghani/fa
رایانامه: m.dehghani@kashanu.ac.ir