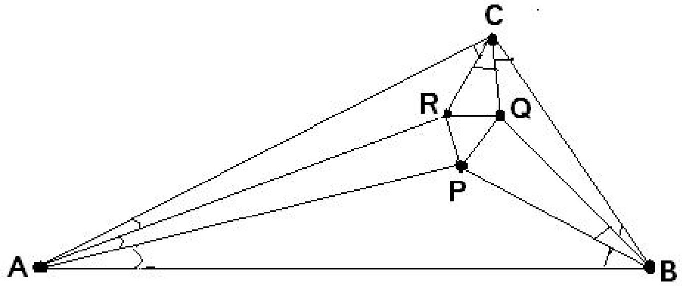
فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۱ (پاییز ۱۳۸۷) صص. ۴۳ تا ۵۲

# اثبات جدیدی از قضیه مورلی

محمدرضا درفشه

## قضیهٔ مورلی

نقاط برخورد خطوط مجاور اضلاع تثلیث کنندهٔ سه زاویهٔ داخلی هر مثلث تشکیل یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌دهد.




(شکل ۱)

مسألهٔ بالا در ۱۸۹۹ توسط فرانک مورلی که در آن موقع استاد ریاضی یکی از دانشگاه‌های آمریکا بود مطرح گردید. در مقاله ۱۹۲۹ [7] مورلی برای اولین بار از این قضیه نام می‌برد و می‌نویسد که در مورد ویژگی‌های کاردیوئیدها تحقیق می‌کرده است که به این مسأله برخورد می‌نماید.*

این مسأله در بخش مسائل ریاضی و حل آنها در [5] در ۱۹۰۹ مطرح شد. یکی از روش‌ها که توسط شخصی به نام ام. ت. نارانین‌گار[1] ارسال شده بود، مورد توجه کاکستر و گرتیزر قرار گرفت [4].

---

*) خوانندهٔ علاقمند برای دیدن تعریف کاردیوئید می‌تواند به صفحهٔ ۲۳۱ جلد اول [۱] مراجعه نماید، بخصوص رابطهٔ موجود مثلث مورلی و کاردیوئیدها که در صفحهٔ ۲۷۶ همین مرجع آورده شده است.

1) M. T. Naraniengar

به این ترتیب این روش حل معروف شد. از آن سال به بعد این مسألهٔ جالب وارد فولکور ریاضی شد و طبق معمول علاقمندان به ریاضیات، به‌خصوص آن‌ها که دوست‌دار هندسه هستند، کوشش می‌کنند که بتوانند یک راه ساده و مقدماتی و قابل فهم برای کسانی که اطلاعاتی از هندسهٔ مسطحه و به‌خصوص ویژگی‌های مثلث‌ها دارند بیابند. بیشتر اثبات‌هائی که تا سال ۱۹۹۸ میلادی برای قضیهٔ مورلی ارائه گردید هندسی یا مثلثاتی بودند [4] و [1] و [8]. در [6] راه حلی ارائه شده که از نمایش اعداد مختلط در صفحه استفاده شده است. این مسأله در ۱۹۹۸ به الن. کُن، برندهٔ جایزهٔ فیلدز در ریاضیات در ۱۹۸۲ میلادی، معرفی گردید و وی توانست یک راه حل فوق‌العاده زیبا که دارای طبیعت هندسی ـ جبری است ارائه کند. راه حل کُن به‌صورت مقاله‌ای به مناسبت چهلمین سالگرد تأسیس مؤسسهٔ تحقیقاتی IHES در مجموعه مقالات چاپ گردید [2].

لازم به توضیح است که استفاده از اعداد مختلط در صفحه برای حل مسائل هندسهٔ مسطحه موضوع جدیدی نیست ولی استفادهٔ هوشمندانهٔ کُن از این روش در حل مسألهٔ مثلث مورلی نوآوری محسوب می‌شود. آلن کُن خود نیز مجدداً در ۲۰۰۴ مقاله‌ای تحت عنوان تقارن، در خبرنامهٔ انجمن ریاضی اروپا منتشر نمود و در پایان مقاله به خطوط کلی اثبات جدید خود از قضیهٔ مورلی پرداخت [3]. همین مقاله به بخش مسابقات کمیتهٔ عمومی‌سازی ریاضیات انجمن ریاضی اروپا تسلیم گردید و رتبهٔ دوم را کسب نمود.

آنچه که مایهٔ کنجکاوی افرادی چون من قرار می‌گیرد این است که چگونه چنین مسأله‌ای مقدماتی توجه ریاضیدانی چون کن که در ریاضیات تحقیقات ارزنده و نیز پژوهش‌های عمیقی در هندسهٔ ناجابجائی دارد، به خود جلب می‌کند و آنچه بیشتر مایهٔ تعجب من می‌شود این است که چگونه است که قضیه‌ای که معروفیتش تقریباً به اندازهٔ قضیهٔ فیثاغورث است از چشم ریاضیدانی نظیر کن به دور مانده بخصوص ظاهراً در زمان نوجوانی وی هنوز شعار «مرگ بر هندسهٔ اقلیدسی» در فرانسه داده نشده بود و هندسهٔ اقلیدسی در برنامهٔ درسی مدارس فرانسه از جایگاه والایی برخوردار بوده است. نکتهٔ جالب‌تر این که این روش حل ناشی از طرز تفکر هندسی و جبری کن است که در واقع رشتهٔ تخصصی ایشان می‌باشد. پس از خواندن راه حل کن با خودم زمزمه کردم خوشا به حال اشخاصی که هم با ایده‌های بزرگ ریاضی و هم با مسائل کوچک ریاضی خستگی خود را در می‌کنند.

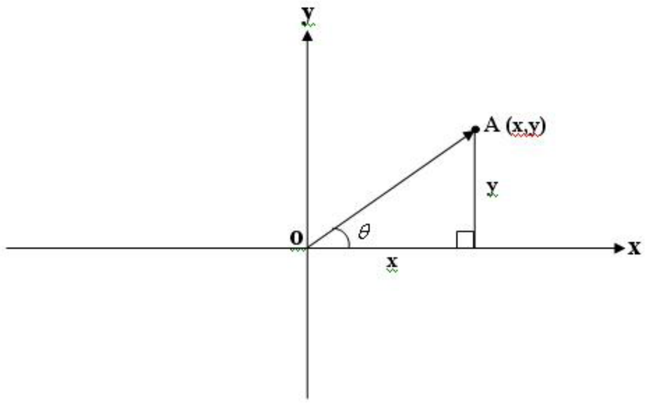
راه حل کن مبتنی بر نمایش اعداد مختلط در صفحه به عنوان نقاط و تبدیلات آفین صفحهٔ مختلط است. در این نوشته این روش حل را تا حدودی بسط داده‌ام به طوری که برای تعداد زیادتری از خوانندگان قابل فهم باشد، معهذا اطلاعاتی مقدماتی دربارهٔ گروه و میدان مورد نیاز هستند. اما قبل از پرداختن به مقدمات اثبات توضیح این مطلب ضروری است که قضیهٔ مورلی در مجلات ریاضی که به زبان فارسی منتشر می‌شوند نیز مورد توجه قرار گرفته است. شادروان استاد حسین غیور در مقالاتی که در مجلهٔ رشد ریاضی به چاپ رساند [9] و [10] به روش‌های اثبات قضیهٔ مورلی و تعمیم این قضیه پرداخت. بخصوص که وی اثباتی ارائه می‌دهد که مربوط به ایجاد

مثلث‌های مورلی حاصل از سه قسمت کردن زوایای خارجی مثلث دلخواه است. مقالهٔ [10] با حوصله و دقت فراوان نگاشته شده و خواندن آن به علاقمندان توصیه می‌گردد.

صفحهٔ مختلط همان $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^۲$ است، که هر عضو $(x, y)$ آن را می‌توان به عنوان نقطهٔ $A$ با مختصات $(x, y)$ در صفحه نمایش داد. اگر $(۰ \text{ و } ۱) = ۱$ نقطه‌ای روی محور $x$ها و $i = (۰, ۱)$ نقطه‌ای روی محور $y$ها فرض شود، آنگاه می‌توان نوشت

$$(x, y) = (x, ۰) + (y, ۰) = x(۱, ۰) + y(۰, ۱) = x + iy$$

در این‌صورت می‌نویسیم $Z_A = x + iy$. واضح است که $A \to Z_A$ یک تناظر یک به یک بین نقاط صفحه و اعداد مختلط است. از این رو، هر دو مفهوم را یکی می‌گیریم. اگر $Z_A = x + iy$ فرض شود آنگاه بردار $\overrightarrow{OA}$ را به عنوان برداری به مبداء $O$ (مبداء مختصات) و انتهای $A$ مطابق شکل ۲ در نظر می‌گیریم:




(شکل ۲)

طول بردار $\overrightarrow{OA}$ برابراست با $\rho = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ ، $\sin\theta = \dfrac{y}{\rho}$ ، $\cos\theta = \dfrac{x}{\rho}$ و $\theta$ زاویه‌ایست که $\overrightarrow{OA}$ با جهت مثبت محور $x$ها می‌سازد. در نتیجه می‌توان نوشت

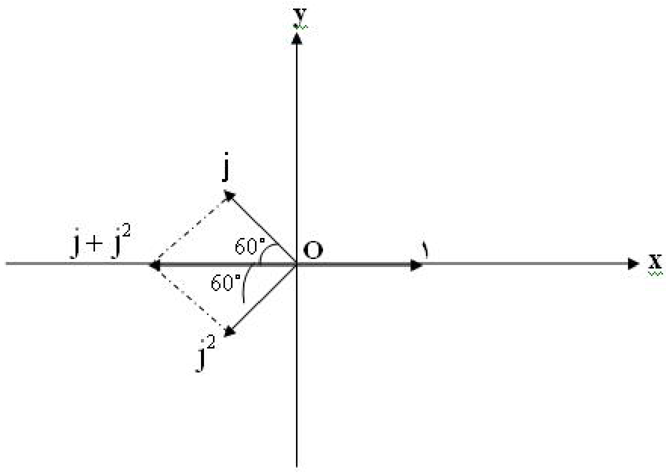
$$Z_A = x + iy = \rho(\frac{x}{\rho} + i\frac{y}{\rho}) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$$

$Z_A = \rho e^{i\theta}$ که صورت قطبی نقطهٔ $A$ نامیده می‌شود و به طور منحصر به فردی توسط $\rho = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و $\tan\theta = \frac{y}{x}$ به دست می آید.

جمع و تفریق بردارها مطابق معمول انجام می‌گیرد. یعنی اگر $Z_A = x_۱ + iy_۱$ و $Z_B = x_۲ + iy_۲$ مختصات بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ باشند آنگاه $Z_A + Z_B = x_۱ + x_۲ + i(y_۱ + y_۲)$ و $Z_A - Z_B = x_۱ - x_۲ + i(y_۱ - y_۲)$ و از لحاظ هندسی $Z_A + Z_B$ متناظر است با برداری که قطر متوازی‌الاضلاع با ضلع‌های $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ است و $Z_A - Z_B$ متناظر است با بردار $\overrightarrow{BA}$.این

مجموع و تفاضل را به ترتیب با $A+B$ و $A-B$ نمایش می‌دهیم. ضرب بردارها حالت ویژه‌ای دارد. اگر $Z_A = x_1 + iy_1$ و $Z_B = x_2 + iy_2$ آنگاه $Z_A Z_B = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2)$ و لذا مختصات بردار متناظر با $Z_A Z_B$ که با $AB$ نمایش می‌دهیم را می‌توان محاسبه نمود. اگر $Z_A = \rho_1 e^{i\theta_1}$ و $Z_B = \rho_2 e^{i\theta_2}$ مختص‌های قطبی $A$ و $B$ باشند آنگاه $Z_A Z_B = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ یعنی $Z_A Z_B$ متناظر است با برداری چون $\overrightarrow{OC}$ که طول آن $\rho_1\rho_2$ و زاویه‌اش با جهت مثبت محور $\overrightarrow{OX}$، $\theta_1 + \theta_2$ است.

اکنون اگر نقطهٔ $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ در $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ را در نظر بگیریم آنگاه داریم $j^2 + j + 1 = 0$ که ۱ همان نقطهٔ $(1, 0)$ است. از لحاظ هندسی $j$ برداری است واحد که با جهت مثبت محور $\overrightarrow{OX}$ زاویه $\frac{2\pi}{3}$ می‌سازد و $j^2$ برداری واحد است که با $\overrightarrow{OX}$ زاویه $\frac{4\pi}{3}$ می‌سازد.



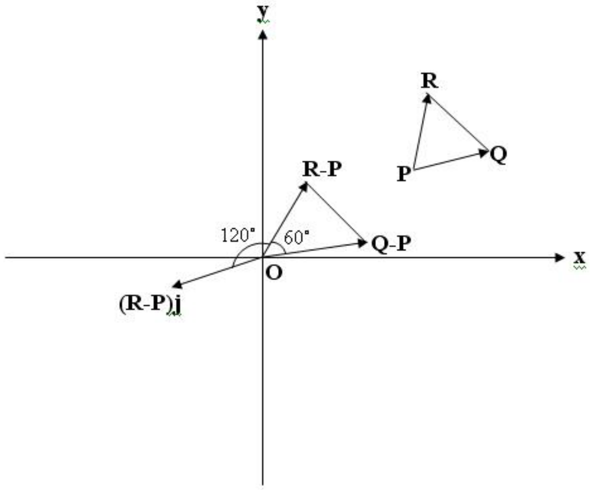

(شکل ۳)

چون $j$ و $j^2$ با جهت منفی محور $x$ها زاویه $\frac{\pi}{3}$ می‌سازند و طول مساوی دارند پس قطر متوازی‌الاضلاع با اضلاع $j$ و $j^2$ روی محور $x$ها واقع و قرینهٔ بردار ۱ با طول ۱ است، بنابراین $j^2 + j + 1 = 0$.

اکنون به اثبات یک سرشت‌نمایی کلاسیک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌پردازیم که در اینجا مورد استفاده واقع می‌گردد.

**لم ۱.** مثلث $PQR$ در صفحهٔ $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ متساوی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر $P + Qj + Rj^2 = 0$.

**برهان.** مطابق شکل ۴ فرض می‌کنیم مثلث $PQR$ متساوی‌الاضلاع است.




(شکل ۴)

$\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}$ متناظر است با بردار $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$ متناظر است با بردار $\overrightarrow{PQ}$. بنا به توضیحی که در ابتدا دادیم قرار می‌دهیم $\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=R-P$ و $\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=QP$. اکنون واضح است که مثلث $PQR$ متساوی الاضلاع است اگر و تنها اگر مثلث با رئوس $O$، $R-P$ و $Q-P$ متساوی‌الاضلاع باشد. بردار $(R-P)j$ را در نظر می‌گیریم. طول این بردار با طول بردار $\overrightarrow{O(R-P)}$ مساوی است و زاویه‌ای که با $\overrightarrow{O(R-P)}$ می‌سازد مساوی است با $۱۲۰^\circ$ . در نتیجه $\overrightarrow{O(R-P)j}$ و $\overrightarrow{O(Q-P)}$ مساوی‌اند. بنابراین

$$(R-P)j+Q-P=\circ.$$

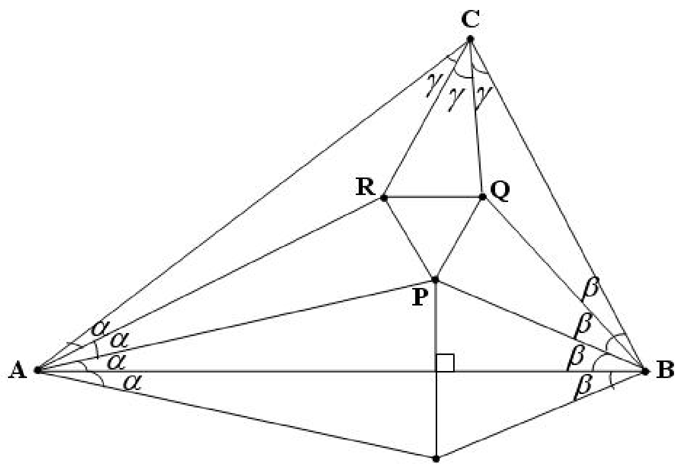
در نتیجه $Rj+Q-P(j+۱)=\circ$ چون $j^{۲}+j+۱=\circ$، حاصل می‌گردد

$$Rj+Q+Pj^{۲}=\circ$$

اگر دو طرف تساوی اخیر را از سمت راست در $j$ ضرب کنیم و از تساوی $j^{۳}=۱$ استفاده نمائیم، حاصل می گردد $P+Qj+Rj^{۲}=\circ$. بعکس فرض کنید $P$، $Q$ و $R$ رئوس یک مثلث در صفحه‌اند به طوری که $P+Qj+Rj^{۲}=\circ$. با استفاده از رابطهٔ $۱+j+j^{۲}=\circ$ حاصل می‌شود $R-P=(Q-R)j$، چون طول $j$ ۱ است نتیجه می‌شود که طول‌های $R-P=\overrightarrow{PR}$ و $Q-R=\overrightarrow{RQ}$ مساوی‌اند. همچنین با استفاده از $P+Qj+Rj^{۲}=\circ$ و $j=-۱-j^{۲}$ حاصل می‌شود $P-Q=(Q-R)j^{۲}$، چون طول $j^{۲}$ نیز یک است نتیجه می‌شود که طول‌های $P-Q=\overrightarrow{QP}$ و $Q-R=\overrightarrow{RQ}$ مساوی‌اند. بنابراین طول‌های $\overrightarrow{PR}$، $\overrightarrow{RQ}$ و $\overrightarrow{QP}$ مساوی‌اند و مثلث

$PQR$ متساوی‌الاضلاع و به این ترتیب لم ثابت می‌شود.■

اما اثباتِ کن از قضیهٔ مورلی با این مشاهده آغاز می‌شود که نقاط $P$، $Q$ و $R$ در شکل ۱ نقاط ثابت حاصلضرب‌های دو به دوی دوران‌های $g_1$، $g_2$ و $g_3$ حول رئوس مثلث‌اند که زاویهٔ دوران در هر مورد مساوی $\frac{2}{3}$ زاویهٔ مثلث می‌باشند. به طور دقیق‌تر اگر $g_1$، $g_2$ و $g_3$ به ترتیب دوران حول رئوس $A$، $B$ و $C$ با زاویه‌های $\frac{2}{3}A$، $\frac{2}{3}B$ و $\frac{2}{3}C$ باشند آنگاه مثلاً $g_1g_2$ دورانی است که $P$ را ثابت نگاه می‌دارد. (توجه کنید که ترکیب دوران‌ها نیز مانند ترکیب توابع از سمت چپ به راست نوشته می‌شود یعنی ابتدا $g_2$ عمل می کند و سپس $g_1$)



(شکل ۵)

زیرا مطابق شکل ۵ ابتدا $g_2$ نقطهٔ $P$ را به $P'$ تبدیل می‌کند که چون به اندازهٔ $2\beta$ دوران یافته زاویه‌اش با $AB$ باید $\beta$ باشد و لذا مثلث $PBP'$ و در نتیجه $PAP'$ باید متساوی‌الساقین باشند. بنابراین وقتی $g_1$ عمل می‌کند $P'$ را به $P$ تبدیل می‌کند در نتیجه $P$ تحت $g_1g_2$ پایاست. به همین روش ثابت می‌شود $Q$ تحت $g_2g_3$ و $R$ تحت $g_3g_1$ پایاست.

برای فرمولبندی مشاهدهٔ کن ناچاریم تبدیلات آفینِ خط حقیقی را تعریف کنیم. از آنجایی که میدان حقیقی $\mathbb{R}$ نقشی در تعریف تبدیل آفین ندارد، لذا آنرا در حالت کلی تعریف می‌کنیم. تبدیلات آفین به طور کلی برای فضای $n$ بعدی قابل تعریف‌اند و آنچه در زیر تعریف می‌شود تبدیل آفین فضای یک بعدی است که به طور خلاصه تبدیل آفین نامیده می‌شود.

**تعریف ۱.** فرض کنید $F$ یک میدان است. یک تبدیل آفین $F$ عبارتست از نگاشت $f_{a,b}$ ($a, b \in F$)،

$a \neq ۰$) با ضابطهٔ زیر

$$f_{a,b} : F \longrightarrow F$$

$$f_{a,b}(x) = ax + b \quad (x \in F).$$

اگر $f_{a,b}$ و $f_{c,d}$ تبدیلات آفین فرض شوند آنگاه به راحتی می‌توان ثابت کرد که $f_{a,b}f_{c,d} = f_{ac,ad+b}$. بنابراین دیده می‌شود که ترکیب دو تبدیل آفین تبدیلی آفین است و هر تبدیل آفین نیز وارونپذیر می‌باشد. این نشان می‌دهد که مجموعهٔ تمام تبدیلات آفین $F$ یک گروه است که آن را با $Af(F)$ نشان می‌دهیم. عضو خنثای این گروه عبارت است از $f_{۱,۰}$ که با $I$ نمایش می‌دهیم. $c \in F$ را یک نقطهٔ ثابتِ $f_{a,b}$ می‌نامیم هر گاه داشته باشیم $f_{a,b}(c) = c$. در این‌حالت داریم $ac + b = c$ و در نتیجه $c(a - ۱) = -b$. بنابراین اگر $a \neq ۱$ آنگاه $f_{a,b}$ دارای نقطهٔ ثابت منحصر بفرد $c = \frac{b}{۱-a}$ است که آن‌را در حالت کلی با $Fix(f_{a,b})$ نمایش می‌دهیم.

نگاشت $d : Af(F) \longrightarrow F^*$ با ضابطه $d(f_{a,b}) = a$ را در نظر می‌گیریم در اینجا $F^*$ گروه ضربی میدان $F$ است. به سادگی می‌توان ثابت کرد که $d$ یک همریختی گروه‌های ضربی است و هستهٔ $d$ عبارتست از $K = \{f_{۱,b} | b \in F\}$ که با گروه جمعی $F$ یکریخت است. هر عضو $f_{۱,b}$ از $K$ دارای ضابطهٔ $f_{۱,b}(x) = x + b$ است که آنرا یک انتقال می‌نامیم و به وضوح دارای نقطهٔ ثابت نمی‌باشد. با استفاده از قضیهٔ اساسی همریختی گروه‌ها داریم

$$Af(F) \diagup_K \cong F^*$$

قضیهٔ زیر در اثبات کن از قضیهٔ مورلی نقش اساسی دارد. نمادگذاری‌های فوق را بدون تکرار در قضیهٔ زیر و اثبات آن به کار می‌بریم.

**قضیهٔ ۱.** فرض کنید $g_۱, g_۲, g_۳ \in Af(F)$ و $g_۱g_۲$، $g_۲g_۳$، $g_۳g_۱$ و $g_۱g_۲g_۳$ هیچکدام در $K$ نیستند. قرار می‌دهیم $j = d(g_۱g_۲g_۳)$.

در اینصورت شرایط زیر هم ارزند:

**(الف)** $g_۱{}^۳ g_۲{}^۳ g_۳{}^۳ = I$

**(ب)** $j^۳ = ۱$، $j \neq ۱$، و $P + Qj + Rj^۲ = ۰$، که در آن $P = Fix(g_۱g_۲)$، $Q = Fix(g_۲g_۳)$ و $R = Fix(g_۳g_۱)$.

**برهان.** فرض کنید $g_i = f_{a_i,b_i}$، $۱ \leq i \leq ۳$. می‌دانیم که $a_i, b_i \in F$ و $a_i \neq ۰$. با استفاده از قاعدهٔ ترکیب عناصر $Af(F)$ داریم:

$$g_۱g_۲ = f_{a_۱,b_۱}\ f_{a_۲,b_۲} = f_{a_۱a_۲,a_۱b_۲+b_۱}$$

$$g_۲g_۳ = f_{a_۲,b_۲}\ f_{a_۳,b_۳} = f_{a_۲a_۳,a_۲b_۳+b_۲}$$

$$g_۳g_۱ = f_{a_۳,b_۳}\ f_{a_۱,b_۱} = f_{a_۳a_۱,a_۳b_۱+b_۳}$$

با استفاده از فرمولی که برای نقطهٔ ثابت هر تبدیل آفین یافتیم داریم:

$$P = Fix(g_1g_2) = \frac{a_1a_2+b_1}{1-a_1a_2}$$
$$Q = Fix(g_2g_3) = \frac{a_2b_3+b_2}{1-a_2a_3}$$
$$R = Fix(g_3g_1) = \frac{a_3b_1+b_3}{1-a_3a_1}$$

عبارات فوق بدون ابهام تعریف می‌شوند زیرا فرض کرده‌ایم که هیچکدام از تبدیل‌های $g_1g_2$، $g_2g_3$ و $g_3g_1$ در $K$ نیستند و لذا $a_1a_2$، $a_2a_3$ و $a_3a_1$ همگی مخالف ۱ می‌باشند.
به‌طور مشابه ضابطه‌های $g_1{}^3$، $g_2{}^3$ و $g_3{}^3$ با استفاده از قانون ترکیب در $Af(F)$ محاسبه می‌گردند که عبارتند از:

$$g_1{}^3 = f_{a_1{}^3,(a_1{}^2+a_1+1)b_1},$$
$$g_2{}^3 = f_{a_2{}^3,(a_2{}^2+a_2+1)b_2},$$
$$g_3{}^3 = f_{a_3{}^3,(a_3{}^2+a_3+1)b_3}.$$

و اگر فرض کنیم $g_1{}^3g_2{}^3g_3{}^3 = f_{a,b}$ آنگاه خواهیم داشت:

$$a = a_1{}^3a_2{}^3a_3{}^3$$
$$b = a_1{}^3a_2{}^3b_3(a_3{}^2 + a_3 + 1) + a_1{}^3b_2(a_2{}^2 + a_2 + 1) + b_1(a_1{}^2 + a_1 + 1)$$

اکنون شرایط قضیه را در نظر می‌گیریم. شرط الف برقرار است اگر و تنها اگر $a = 1$ و $b = 0$، در نتیجه اگر قرار دهیم $j = a_1a_2a_3$ آنگاه $j^3 = 1$ و چون $g_1g_2g_3 \notin K$، $j \neq 1$. از طرف دیگر با استفاده از فرمول‌هائی که برای $P$، $Q$ و $R$ نوشتیم و با یک عملیات مستقیم می‌توان نشان داد که:

$$b = -ja_1{}^2a_2(a_1 - j)(a_2 - j)(a_3 - j)(P + Qj + Rj^2)$$

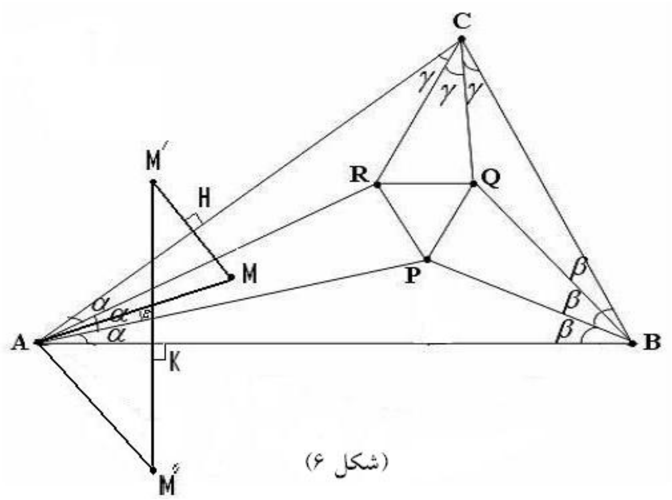
چون $a_i \neq j$ برای هر $i = 1, 2, 3$ برقراراست پس $b = 0$ اگر و تنها اگر $P + Qj + Rj^2 = 0$ و قضیه ثابت می‌شود.■

با استفاده از قضیه فوق قضیه مورلی ثابت می‌شود. در زیر فرض می‌کنیم $F = \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ میدان اعداد مختلط است.

**نتیجهٔ ۱.** (**قضیه مورلی**) نقاط برخورد خطوط مجاور اضلاع تثلیث کنندهٔ سه زاویهٔ داخلی هر مثلث رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند.

**برهان.** مثلث $ABC$ و تثلیث کننده‌های سه زاویه داخلی مثلث و نقاط برخورد خطوطمجاور

اضلاع، یعنی $P$، $Q$ و $R$، را در شکل زیر در نظر می‌گیریم:




(شکل ۶)

قرار می‌دهیم $A = ۳\alpha$، $B = ۳\beta$ و $C = ۳\gamma$. فرض می‌کنیم $g_۱$ دوران به مرکز $A$ و زاویه $۲\alpha$، $g_۲$ دوران به مرکز $B$ و زاویه $۲\beta$ و $g_۳$ دوران به مرکز $C$ و زاویه $۲\gamma$ باشد. تقارن‌های محوری با محورهای $AB$، $BC$ و $CA$ را به ترتیب با $S(AB)$، $S(BC)$ و $S(CA)$ نمایش می‌دهیم که هر یک عضوی مرتبه ۲ از $Af(\mathbb{C})$ می‌باشند.

اگر $M$ نقطهٔ دلخواهی از صفحه باشد و قرینهٔ آن را نسبت به $AC$، $M'$ و قرینهٔ $M'$ نسبت به $AB$ را $M''$ بنامیم آنگاه زاویهٔ $\widehat{MAM''}$ چنین محاسبه می‌گردد:

$$\widehat{MAM''} = \epsilon + \alpha + \widehat{KAM''} = \epsilon + \alpha + ۳\alpha + \widehat{HAM'}$$

$$= \epsilon + ۴\alpha + ۲\alpha - \epsilon = ۶\alpha$$

که در آن $\epsilon = \widehat{MAP}$.

بنابراین دیده می‌شود که $M''$ حاصل دوران $M$ حول $A$ با زاویه $۶\alpha$ است و لذا $g_۱{}^۳ = S(AB)S(AC)$. به طور مشابه ثابت می‌شود $g_۲{}^۳ = S(AC)S(BC)$ و $g_۳{}^۳ = S(BC)S(AC)$.

اما چون هر تقارن محوری از مرتبهٔ ۲ است داریم

$$g_۱{}^۳ g_۲{}^۳ g_۳{}^۳ = S(AB)S(AC)S(AC)S(BC)S(BC)S(AC) = I$$

و لذا $g_۱{}^۳ g_۲{}^۳ g_۳{}^۳ = I$.

اما همانطور که توضیح دادیم و به راحتی هم دیده می‌شود $P$، $Q$ و $R$ به ترتیب نقاط ثابت تبدیلات

$g_1g_2$، $g_2g_3$ و $g_3g_1$ اند و در نتیجه طبق قضیه ۱ (ب) بالا حاصل می‌شود $P + Qj + Rj^2 = 0$.
اکنون با استفاده از لم ۱ نتیجه می‌شود که مثلثِ $PQR$ متساوی‌الاضلاع است و قضیه مورلی ثابت می‌گردد. ■

## مراجع


[1] M. Berger, Geometry I, II, Springer-Verlag, 1987.

[2] A. Connes, A new proof of Morley's theorem, Les relations entre les mathematiques et la physique theorique, Inst. Hautes Etudes Sci., Bures-sur-yvette (1998), 43-46.

[3] A Connes, Symmetries, Newsletter European Mathematical Society, No. 54, Dec. 2004,pp.11-18.

[4] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer, Geometry revisited, MAA, 1967.

[5] Educational times (New series) Vol.15 (1909), p.47

[6] C. Lubin, A proof of Morley's theorem, *Amer. Math. Monthly*, **62** (1955), 110-112.

[7] F. Morley, Extensions of Clifford's chain theorem, *Amer.J. Math.* vol.51,(1929), 465-472.

[8] D. O. Shklyarsky, N. N. Chenstov and Y. M. Yaglom, Selected problems and theorems of elementary mathematics, Vol. 2, Problem 97, Moscow, 1952.

[۹] حسین غیور، قضیهٔ مورلی، رشد آموزش ریاضی، سال اول، شماره ۲، تابستان ۱۳۶۳

[۱۰] حسین غیور، تعمیم قضیهٔ مورلی، رشد آموزش ریاضی، سال اول، شماره ۳، پاییز ۱۳۶۳



محمدرضا درفشه
دانشکده ریاضی، آمار و کامپیوتر، دانشگاه تهران
daraf@khayam.ut.ac.ir