فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۱، شمارهٔ ۷۰ (بهار و تابستان ۱۴۰۱) صص. ۱۳۱ تا ۱۴۶

ریاضیات خوب چیست؟*

تِرِنس تائو

ترجمهٔ طیبه طباطبایی‌فر، بهزاد نجفی

چکیده. برخی نظرات و تأملات شخصی دربارهٔ اینکه «ریاضیات با کیفیت» چیست و آیا تعریف دقیق این اصطلاح لازم است. داستان قضیهٔ سِمِرِدی هم به‌عنوان مطالعهٔ موردی ذکر شده است.

۱ جنبه‌های متعدّد کیفیتِ ریاضی

همگی بر سر اینکه ریاضی‌دان‌ها باید تلاش کنند تا ریاضیات خوب تولید کنند توافق نظر داریم. اما چگونه «ریاضیات خوب» را تعریف کنیم و آیا اصلاً لازم است به خود دردسر این کار را بدهیم؟ بگذارید ابتدا سؤال اول را بررسی کنیم. بی‌درنگ درمی‌یابیم که انواع مختلفی از ریاضیات وجود دارد که ممکن است صفت «خوب» را به آن‌ها نسبت دهیم. مثلاً، «ریاضیات خوب» ممکن است اشاره به موارد زیر داشته باشد (ترتیب خاصی مد نظر نیست):

۱. حل مسئلهٔ خوب ریاضی (مثلاً، دستیابی به موفقیتی بزرگ در یک مسئلهٔ مهم ریاضی)؛

۲. روش خوب ریاضی (مثلاً، استفادهٔ ماهرانه از روش‌های موجود یا ابداع ابزارهای جدید)؛

۳. نظریهٔ خوب ریاضی (مثلاً، یک چارچوب مفهومی یا انتخاب نمادی که به‌طور نظام‌مند بخش عمده‌ای از نتایج موجود را یکپارچه‌کرده و تعمیم دهد)؛

۴. بینش خوب ریاضی (مثلاً، ساده‌سازی عمدهٔ یک مفهوم یا پی‌بردن به یک اصل، نکتهٔ راه‌گشا، شباهت، یا نکته‌ای که به یکپارچگی بینجامد)؛

عبارات و کلمات کلیدی: ریاضیات خوب، ریاضیات باکیفیت، قضیهٔ سِمِرِدی
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۱/۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۳/۱۲

*Tao, T., What is good mathematics? *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (2007), 623–634.

doi: 10.30504/mct.2022.1121.1783

۵. کشف خوب ریاضی (مثلاً، کشف غیرمنتظره و کنجکاوی‌برانگیز یک پدیدهٔ ریاضی، ارتباطی، یا مثال نقضی جدید)؛
۶. کاربرد خوب ریاضی (مثلاً، در مسائل مهم فیزیک، مهندسی، علوم رایانه، آمار، و غیره، یا از یک مبحث به مبحث دیگری در ریاضی)؛
۷. نوشتار توصیفی-توضیحی خوب ریاضی (مثلاً، تألیف مبسوط و آگاهی‌بخش دربارهٔ یک مبحث ریاضی در موقع مناسب آن یا شرح روشن و گویا از اثباتی)؛
۸. شیوهٔ تعلیم و تربیت خوب ریاضی (مثلاً، سخنرانی یا سبک نگارشی که یادگیری و ریاضی‌ورزی مؤثرتر دیگران را میسر کند، یا هر کاری در زمینهٔ آموزش ریاضی)؛
۹. چشم‌انداز خوب ریاضی (مثلاً، برنامه‌ای درازمدت و پربار با دسته‌ای از حدس‌ها)؛
۱۰. ریاضی حاکی از ذوق و سلیقهٔ خوب (مثلاً، هدفی پژوهشی که فی‌نفسه جالب باشد و بر موضوعات مهم، زمینه‌ها، یا سؤالات تأثیرگذار باشد)؛
۱۱. ترویج خوب ریاضی (مثلاً، عرضهٔ مؤثر دستاوردی ریاضی به افراد غیرریاضی‌دان یا از یک مبحث ریاضی به مبحث دیگر آن)؛
۱۲. فراریاضیات[1] خوب (مثلاً، پیشرفت‌هایی در مبانی، فلسفه، تاریخ، دانش‌پژوهی، یا حرفهٔ ریاضی)؛
۱۳. ریاضیات دقیق (ذکر همهٔ جزئیات به‌طور صحیح و دقیق)؛
۱۴. ریاضیات زیبا (مثلاً، اتحادهای شگفت‌انگیز رامانوجان[2]، نتایجی که به‌آسانی (و زیبایی) بیان می‌شوند اما به‌سادگی اثبات نمی‌شوند)؛
۱۵. ریاضیات باظرافت (مثلاً، منظور پال اردوش[3] از «لوحهٔ اثبات‌ها»، دستیابی به نتیجه‌ای دشوار با صرف کمترین تلاش)؛
۱۶. ریاضیات خلّاق (مثلاً، روش، دیدگاه، یا گونه‌هایی از نتایجِ کاملاً ابتکاری و نو)؛
۱۷. ریاضیات مفید (مثلاً، لم یا روشی که در آینده در موضوعی بارها استفاده شود)؛
۱۸. ریاضیات قوی (مثلاً، نتیجه‌ای دقیق که با مثال‌های نقضِ موجود مطابقت دارد یا قضیه‌ای که از یک فرضیهٔ به‌ظاهر ضعیف نتیجه‌ای غیرمنتظره و جان‌دار استنباط کند)؛
۱۹. ریاضیات عمیق (مثلاً، نتیجه‌ای که کاملاً غیربدیهی است، مانند به دام انداختن پدیده‌ای نامحسوس که خارج از دسترس ابزارهای مقدماتی‌تر است)؛

[1] meta-mathematics [2] Ramanujan [3] Paul Erdös

۲۰. ریاضیات شهودی (مثلاً، استدلالی که طبیعی و به‌آسانی قابل تجسم است)؛
۲۱. ریاضیات فیصله‌بخش (مثلاً، رده‌بندی همهٔ اشیا از یک نوع خاص، حرف آخر در یک مبحث ریاضی)؛
۲۲. غیره و غیره.[۱]

همان‌طورکه این فهرست نشان می‌دهد، مفهوم کیفیت ریاضی مفهومی از ابعاد بالا است و فاقد یک ترتیب کلی متعارف است.[۲] معتقدم این امر به دلیل پیچیدگی و ابعاد گستردهٔ خود ریاضیات و تکامل آن به شیوه‌های غیرمنتظره و تطبیق‌پذیر آن است؛ هریک از صفات بالا بیانگر راهی متفاوت است که ما، اعضای جامعه، از طریق آن درک و کاربردمان از ریاضیات را افزایش می‌دهیم. به‌نظر نمی‌رسد که توافقی عمومی در مورد اهمیت نسبی یا وزن هریک از صفات بالا موجود باشد. این امر تا حدّی از روی مصلحت است: ممکن است برای مبحثی از ریاضیات که در مرحلهٔ تکامل است یک رویکرد خاص نسبت به رویکردهای دیگر مناسب‌تر باشد. همچنین بخشی به دلیل ملاحظات فرهنگی است: هر حوزه یا مکتب ریاضی تمایل به جذب ریاضی‌دان‌های همفکر دارد که یک رویکرد مشابه به یک موضوع را ترجیح می‌دهند.

همچنین این امر بازتاب تنوع توانایی در ریاضی است؛ ریاضی‌دانان مختلف در نوع‌های مختلفی از ریاضیات سرآمد می‌شوند و بنابراین هریک برای نوع خاصی از اشتغالات ریاضی مناسب‌اند. (برای بحث‌های مرتبط [۱۲] را ببینید.)

معتقدم این طبیعت متنوع و چندوجهی «ریاضیات خوب» برای کل ریاضیات مفید است؛ زیرا به ما اجازه می‌دهد تا با رویکردهای مختلف به موضوعات بپردازیم و استعدادهای ریاضی بسیار متفاوتی را برای هدف مشترکمان، که پیشرفت و درک بیشتر ریاضیات است، به کار ببریم. با اینکه هریک از خصیصه‌های بالا به‌طورکلی برای «ریاضیاتِ خوب» مطلوب تلقی می‌شوند، محدود کردن یک مبحث به فقط یک یا دو تا از آن‌ها می‌تواند به ضرر بقیه تمام شود. برای نمونه، وضعیّت فرضی (و تا حدودی اغراق‌آمیز) زیر را در نظر بگیرید:

- مبحثی که روزبه‌روز پُر زَرق‌وبرق و پُر نقش‌ونگارتر می‌شود و در آن نتایجِ مجزا صرفاً به خاطر خودشان تعمیم یافته و اصلاح می‌شوند، اما آن مبحث، در کل، بدون هدف و جهت

---

[۱] منظور از فهرست بالا تهیه فهرست کامل نبوده است. و اساساً متمرکز است بر نوعی از ریاضیات که در مقالات پژوهشی یافت می‌شود نه ریاضیات کلاس‌های درسی، کتاب‌های درسی، یا مقالات در رشته‌های نزدیک به ریاضیات مانند علوم طبیعی. [۲] به‌خصوص، باید گفت که هرچند دقت ریاضی بسیار مهم است، تنها جزئی از موضوع کیفیت ریاضی است.

مشخص یا معنایی از پیشرفت است؛

- مبحثی که پُر است از حدس‌های عجیب و باورنکردنی اما بدون هیچ امیدی به پیشرفت جدی در حل آن‌ها؛
- مبحثی که عمدتاً تشکیل شده است از کاربرد روش‌های آماده برای حل مجموعه‌ای از مسائل بدون موضوع واحد، ارتباط، یا هدفی مشترک.
- مبحثی که بیش از حد خشک و نظری شده باشد، و مدام در حال بازنویسی و متحد کردن شکل نتایج قبلی در یک چارچوب روزبه‌روز رسمی‌تر و تخصصی‌تر باشد بدون اینکه نتیجهٔ آن پیشرفت جدید و هیجان‌انگیزی باشد؛ یا
- مبحثی که نتایج جاافتاده و شناخته‌شده را تغییر دهد و مدام اثبات‌های کوتاه‌تر، ساده‌تر، و زیباتری از آن‌ها عرضه کند، اما نتایج جدید و واقعاً بدیعی فراتر از مطالب جاافتاده و معروف به وجود نیاورد.

در هریک از این موارد، مبحث مذکور فعالیت و پیشرفت بیشتری را در کوتاه‌مدت از خود نشان می‌دهد اما مخاطرهٔ کاهش موضوعیت و عدم جذب ریاضی‌دان‌های جوان در درازمدت را نیز دارد. خوشبختانه، راکدماندن برای یک مبحث با این وضع دشوار می‌شود چون از طریق نحوهٔ ارتباطش با سایر مباحث ریاضیات (یا علوم مرتبط) و قرارگرفتن در معرض (یا تبعیت از) فرهنگ‌های چندگانهٔ «ریاضیات خوب» دائماً به چالش کشیده می‌شود و جانی تازه می‌یابد. این سازوکارهای خوداصلاحی، ریاضیات را متعادل، متّحد، پربار، و سرزنده نگه می‌دارند.

حال برمی‌گردیم به سؤال دیگری که در بالا مطرح شد و اینکه آیا اصلاً لازم است برای «ریاضیات خوب» تعریفی معین کنیم. زیرا با این کار، مخاطرهٔ در افتادن در دام خودپسندی و غرور را داریم؛ مثلاً، ممکن است موفق نشویم نمونه‌های نامتعارف پیشرفت اصیل ریاضیات را تشخیص دهیم به این دلیل که آن‌ها خارج از روند کلی تعریف‌های[1] «ریاضیات خوب» قرار می‌گیرند. ازسوی‌دیگر، خطری هم در طرف دیگر وجود دارد ــ اینکه تمام رویکردهای ریاضی برای مطالعهٔ هر مبحث ریاضیات به یک اندازه مناسب و سزاوار منابع برابرند[2] یا همهٔ دستاوردهای ریاضیات اهمیّتی برابر دارند؛ شاید چنین مواضعی برای آرمان‌گرایی‌شان قابل تحسین باشند، اما آن‌ها معنا و مفهوم مسیر و هدف را در ریاضیات به تحلیل می‌برند و همچنین منجر به تخصیص نامطلوب منابع موجود در ریاضی

[1] مشکل دیگر این است که، به‌جز ویژگی بسیار استثنائی دقت ریاضی، بیشتر ویژگی‌های بالا تا حدودی ذهنی‌اند و ذاتاً عدم صراحت یا قطعیت دارند. از گیل کالای برای اشاره به اهمیّت این نکته تشکر می‌کنیم. [2] پول، زمان، توجه، استعداد، و مجال عرضه در مجلات برتر مثال‌هایی از منابع کمیاب‌اند.

می‌شوند.[۱] حالت درست در جایی مابین این دو موضع قرار دارد؛ در هر زمینه‌ای از ریاضیات، نتایج عمدهٔ موجود در آن، باورهای اهل فن، و شهود و تجربه (یا عدم آن) مشخص می‌کند که احتمالاً کدام رویکردها مفیدترند و بنابراین سزاوار سهم بیشتری از منابع‌اند و کدام‌یک نامطمئن‌ترند و کدام‌یک شاید اعتبار داشته باشد تا فقط چندتایی ریاضی‌دان با افکار مستقل به آن بپردازند صرفاً برای اینکه موارد بنیادی لحاظ شود. مثلاً، در مباحث پیشرفته و توسعه‌یافته، ممکن است پیگیری برنامه‌های اصولی و توسعهٔ نظریه‌های کلی به روشی دقیق و جدی و اجرای محتاطانهٔ روش‌های آزمون‌وخطا و برداشت‌های عمیق شخصی معنادار باشد؛ اما در مباحث جدیدتر و کمتر جاافتاده، ممکن است تأکید بیشتری بر پروراندن حدس‌ها و حل آن‌ها و تجربهٔ رویکردهای مختلف بشود و تا حدی هم بر شباهت‌ها و روش‌های اکتشافی تکیه شود. بنابراین از دیدگاه اجرائی مهم است که حداقل یک توافق جزئی (ولی در حال گسترش) در هر شاخه داشته باشیم در مورد اینکه برای کدام ویژگی‌های پیشرفت ریاضی باید بیشترین اهمیّت را قائل شد تا اینکه بتوانیم آن مبحث را تا حد ممکن در هر مرحله توسعه و پیشرفت دهیم. مثلاً، مبحثی ممکن است نیاز مُبرم به حل مسائل مطرح‌شده داشته باشد، دیگری ممکن است شدیداً به چارچوب نظری برای سروسامان دادن به آشفتگی نتایج موجود داشته باشد یا به برنامه‌ای کلان با سلسله‌ای از حدس‌ها برای گرمی بازار نتایج جدید؛ مبحث دیگر ممکن است از اثبات‌های جدید، ساده‌تر، و مفهومی برای قضیه‌های کلیدی بیشتر منتفع بشود؛ بااین‌همه، شاید بیشتر مباحث نیازمند ترویج خوب و معرفی گویای موضوعات باشند تا توجه و فعالیت بیشتری جذب آن‌ها شود. بنابراین تعیین اینکه ریاضیات خوب برای یک مبحث چیست شاید و باید تا حد زیادی به وضعیت خود آن مبحث وابسته باشد. همچنین آنچه معین شده است باید به‌روزگردانی و بازبینی مداوم شود، هم از درون و هم توسط ناظران خارجی بیرون از آن مبحث؛ همان‌طورکه قبلاً ذکر شد، اگر ایرادات به‌موقع تشخیص داده و اصلاح نشوند منجر به عدم‌توازن‌هایی در آن مبحث می‌شوند.

از بحث بالا به نظر می‌رسد که هرچند مسئلهٔ ارزیابی کیفیت ریاضی مهم است، پیچیدگی آن مأیوس‌کننده است، خصوصاً اینکه بسیاری از دستاوردهای خوب ریاضی ممکن است در فقط بعضی از خصیصه‌های ذکرشده در بالا امتیاز بالایی بگیرد. همچنین، بسیاری از این خصیصه‌های ذهنی‌اند و اندازه‌گیری آن‌ها به‌جز از طریق بازنگری دشوار است. با این وصف، نکتهٔ قابل توجهی[۲] در اینجا

[۱] راه‌حل دیگر این مشکل استفاده از این مطلب است که منابع ریاضی هم دارای ابعاد بالایی است: برای مثال، می‌توان به نوشتارهای توضیحی‌ـ‌توصیفی، خلاقیت، و غیره جوایزی داد، یا مجلات مختلفی را مختص انتشار دستاوردهای متفاوتی کرد. از گیل کالای برای ذکر این نکته تشکر می‌کنیم. [۲] این نکته تا حدودی به «کارآمدی نامعقول ریاضیات» که توسط ویگنر بیان شده است ارتباط دارد[۳۸].

وجود دارد اینکه ریاضیات خوب در هریک از معناهای بالا چنان است که ریاضیات خوب بیشتری در سایر معناهای دیگر هم به وجود می‌آورد، و این امر ما را به این حدس موقّتی می‌رساند که، به‌رغم همهٔ این‌ها، شاید یک مفهوم کلی از ریاضیاتِ با کیفیت وجود دارد و همهٔ سنجه‌های بیان‌شده مسیرهای مختلف کشف ریاضیات نو یا مراحل و جنبه‌های متفاوت تکامل داستان ریاضیات را می‌نمایانند.

۲ مطالعهٔ موردی: قضیهٔ سِمِرِدی

حالا اجازه دهید از حالت کلی به حالت خاص روی بیاوریم و پدیده‌ای را که در بند قبل ذکر کردیم با مثالی توضیح دهیم. آن مثال بررسی تاریخچه و موقعیّت قضیهٔ سِمِرِدی[۱] [۳۲] است؛ این نتیجهٔ زیبا و معروف بیان می‌کند که هر زیرمجموعه از اعداد صحیح با چگالی (بالایی) مثبت دارای تصاعدی حسابی با طول دلخواه است. در اینجا از بیان جزئیات فنی می‌پرهیزم؛ خوانندگان علاقه‌مند برای شرح بیشتر به [۳۳] و منابع موجود در آن مراجعه کنند.

این داستان را به‌طور طبیعی از چند جا می‌توان آغاز کرد. داستان را با قضیهٔ رمزی[۲] [۲۳] آغاز می‌کنم که می‌گوید هر گراف کاملِ به اندازهٔ کافی بزرگ و متناهیاً رنگ‌آمیزی‌شده، دارای زیرگراف‌های کامل تک‌رنگ و بزرگ است. (به عنوان مثال، بین هر شش نفر دلخواه، یا سه نفر از آن‌ها یکدیگر را می‌شناسند یا سه نفر از آن‌ها با یکدیگر غریبه‌اند، البته با فرض اینکه «شناختن یکدیگر» یک رابطهٔ خوش‌تعریف و متقارن است.) با اینکه این نتیجه به‌راحتی اثبات می‌شود (با چندین‌بار استفاده از اصل لانه‌کبوتری)، نمایانگر کشف پدیده‌ای جدید و خلق نوعی از نتایج ریاضی بود موسوم به قضیه‌هایی از نوع رمزی که هریک از آن‌ها صورت‌بندی متفاوتی از این بینش تازه در ریاضیات‌اند که بی‌نظمی کامل غیرممکن است.

یکی از اولین قضیه‌ها از نوع رمزی (که تاریخ آن چند سال قبل‌تر از قضیهٔ رمزی است) قضیهٔ وان در واردن[۳] است [۳۷]: در هر رنگ‌آمیزیِ متناهی از مجموعهٔ اعداد صحیح، یکی از رده‌های رنگی باید دارای تصاعد حسابی با طول به‌دلخواه بزرگ باشد. اثبات شدیداً بازگشتیِ وان در واردن برای این قضیه، بسیار زیبا بود، اما این عیب را داشت که کران کمّی فوق‌العاده ضعیفی برای ظاهرشدن اولین تصاعد حسابی با طول داده‌شده به دست می‌داد؛ دراصل، کران مذکور برحسب تابع اَکِرمن[۴] آن طول و تعداد رنگ‌ها بود. اردوش و توران[۵] [۴] ذوق ریاضی خوبی در دنبال کردن این سؤال

[1] Szemerédi's theorem [2] Ramsey [3] van der Waerden [4] Ackermann [5] Turan

کمّی داشتند؛[1] ذوقی که برانگیختهٔ تمایل به پیشرفت در حل مسئله‌ای (بعداً، حدسی) بود که می‌گفت مجموعهٔ اعداد اول شامل تصاعد با طول دلخواه است. سپس آن‌ها چندتایی حدس قوی مطرح کردند که یکی از آن‌ها به صورت قضیهٔ سِمِرِدی در آمد؛ حدس دیگر حکمی زیبا ولی قوی‌تر بود (که هنوز هم حل نشده است) که بیان می‌کند هر مجموعه از اعداد صحیح مثبت که معکوسشان مطلقاً مجموع‌پذیر نباشد، دارای تصاعدی حسابی با طول دلخواه است.

اولین پیشرفت دربارهٔ این حدسْ نتیجه‌ای از مثال‌های نقض بود که منتهی شد به روش بسیار زیبای بئرند[2] در ساختن مجموعه با تُنکی ملایم (مجموعه‌ای که به ازای هر ϵ ثابت، چگالی‌اش در $\{1, \cdots, N\}$ مجانباً بزرگ‌تر از $N^{-\epsilon}$ است) خالی از هر تصاعد حسابی با طول سه. این روش، بلندپروازانه‌ترین حدس اردوش و توران در این‌باره را رد کرد (که در آن حدس زده شده بود که مجموعه‌های به‌طور چندجمله‌ای تُنُک، دارای تصاعدهای بسیاری‌اند) و همچنین دستهٔ مهمی از روش‌های مقدماتی برای حل این مسائل را بی‌اعتبار کرد (مثل روش‌هایی که مبتنی‌بر نابرابری‌هایی از قبیل کوشی‑شوارتس یا هولدر بودند). گرچه این مثال‌ها مسئله را کاملاً حل نکردند، نشان از آن می‌دادند که اگر حدس‌های اردوش‑توران درست باشند باید اثباتی غیربدیهی (و احتمالاً جالب) داشته باشند.

پیشرفت عمدهٔ بعدی به دست رات[3] صورت گرفت؛ او روش دایرهٔ[4] هاردی-لیتل‌وود[5] را همراه با روش جدیدی (استدلال افزایش چگالی) به‌طریقی بسیار ظریف به کار بُرد و قضیهٔ رات را ثابت کرد: هر مجموعه از اعداد صحیح با چگالی مثبت شامل تعداد نامتناهی تصاعد حسابی با طول سه است. طبیعی بود، پس از آن، تلاش کنند تا روش رات را به تصاعدها با طول بزرگ‌تر گسترش دهند. رات و بسیاری از افراد دیگر، سال‌ها تلاش کردند این کار را انجام دهند، اما موفق نشدند؛ دلیل این عدم موفقیت را تا سال‌ها، قبل از اثر گاوئرز[6] در این زمینه، درست متوجه نشدند. بالاخره نبوغ فوق‌العادهٔ اِندره سِمِرِدی [۳۱]، [۳۲]، آن کار را به انجام رساند. او سراغ روش‌های صرفاً ترکیبیاتی (به‌ویژه، ارتقاء استدلال افزایش چگالی به صورت یک چیرگی حرفه‌ای در سطوح بسیار

[1] اردوش همچنین دنبال یافتن کران‌های کمّی برای قضیهٔ رمزی بود که، علاوه بر چیزهای دیگر، منجر به ابداع بسیار مهم روش‌های احتمالاتی در ترکیبیات شد، اما این موضوع داستان مفصّل دیگری است و مجال بحث آن را در اینجا نداریم.

[4] تاریخچهٔ روش دایره داستان جالب دیگری است که، بازهم، در اینجا نمی‌توانیم آن را شرح دهیم. به ذکر این نکته اکتفا می‌کنیم که این روش، به زبان ریاضیات امروز، جزو این بینش متداول است که آنالیز فوریه ابزاری مهم برای حل مسائلِ ترکیبیات جمعی می‌داند.

[2]Behrend [3]Roth [5]Hardy-Littlewood [6]Gowers

جدید) رفت و از این طریق قضیهٔ رات را ابتدا به تصاعدها با طول چهار[۱] و بعد به تصاعدها با هر طول دلخواه توسیع داد، و به‌این‌ترتیب قضیهٔ معروف خود را ثابت کرد. اثبات سِمِرِدی یک شاهکار تخصصی بود که با خود ایده‌ها و روش‌های جدید بسیاری را همراه آورد، و مهم‌ترین آن‌ها طرز نگرشی جدید به گراف‌های بسیار بزرگ بود که همان تقریب زدن آن‌ها از طریق مدل‌هایی با پیچیدگی کران‌دار است. این نتیجهٔ معروف و بسیار مفید، موسوم به لم نظم سِمِرِدی، در مراتب بسیاری اهمیت دارد. همان‌طورکه در بالا اشاره شد، این قضیه بینش کاملاً جدیدی دربارهٔ ساختار گراف‌های بزرگ به ما داد (امروزه آن را قضیهٔ ساختاری یا قضیهٔ فشردگی برای چنین گراف‌هایی می‌نامند)؛ یک روش جدیدِ اثبات به دست داد (روش افزایش انرژی) که در ادامهٔ داستان ما نقش حیاتی خواهد داشت، و نیز تعداد فوق‌العاده زیادی کاربردهای غیرمنتظره پیدا کرده است، از نظریهٔ گراف گرفته تا آزمون خاصیت[۲] در ترکیبیات جمعی. متأسفانه داستان کامل این لم آن‌قدر طولانی است که نمی‌توان آن را در اینجا شرح داد.

هرچند دستاورد سِمِرِدی بی‌شک نقطه‌ای برجسته در این داستان است، به‌هیچ‌وجه کلام آخر آن نیست. اثبات سِمِرِدی، در عین مقدماتی‌بودن، خیلی پیچیده بود و درک آن کار آسانی نبود. همچنین به سؤال‌های اصلی اردوش و توران به‌طور کامل پاسخ نمی‌داد، زیرا در خود اثبات در دو جای اساسی از قضیهٔ وان در واردن استفاده می‌کرد و بنابراین هیچ کران کمّی بهتری برای آن قضیه به دست نمی‌داد. فورستنبرک[۳] این ذوق ریاضی را داشت که به دنبال اثباتی کاملاً متفاوت (و بسیار غیرمقدماتی[۴]) بگردد، اثباتی که پایه در مقایسهٔ پُرمغز نظریهٔ ترکیبیاتی اعداد و نظریهٔ ارگودیک داشت و اندکی بعد آن را به قالب اصل بسیار مفید تناظر فورستنبرک در آورد. بی‌درنگ از این اصل[5] نتیجه می‌شود که قضیهٔ سِمِرِدی با قضیهٔ بازگشت چندگانه برای سیستم‌های حافظ اندازه معادل است. پس طبیعی بود این قضیه (که امروزه قضیهٔ بازگشت فورستنبرک نامیده می‌شود) را مستقیماً با روش‌های نظریهٔ ارگودیک، به‌ویژه استفاده از طبقه‌بندی‌های مختلف و تجزیه‌های ساختاری (مثل تجزیهٔ ارگودیک) موجود برای آن سیستم‌ها، ثابت کنند. واقع امر هم این است که طولی نکشید که فورستنبرک قضیهٔ

[۱] کمی بعد، رات [۲۸] توانست بعضی از ایده‌های سِمِرِدی را با روش خودش، روشی از نوع آنالیز فوریه، ترکیب کند و یک اثبات ترکیبی برای قضیهٔ سِمِرِدی برای تصاعدها با طول چهار ابداع کند. [۴] مثلاً، بعضی صورت‌های استدلال فورستنبرک خیلی به اصل انتخاب تکیه دارد، هرچند می‌توان آن را مستقل از اصل انتخاب نیز بازنویسی کرد. [5] همچنین اصل تناظر مشابهی وجود دارد که قضیهٔ وان در واردن را با یک قضیهٔ بازگشت چندگانه برای سیستم‌های دینامیکی توپولوژیک یکی می‌کند. این موضوع ما را به داستان جذاب سیستم‌های دینامیکی توپولوژیک می‌برد که متأسفانه به دلیل کمی جا نمی‌توانیم آن را شرح دهیم.

[2] property testing [3] Furstenberg

ساختاری فورستنبرگ را ثابت کرد. این قضیه توصیفی برای هر سیستم حافظ اندازه به‌صورت یک توسیع ضعیف‌آمیزنده از برجی از توسیع‌های فشردهٔ یک سیستم بدیهی به دست می‌دهد، و با این قضیه و چندین استدلال دیگر (ازجمله صورتی از استدلال وان در واردن) فورستنبرگ توانست قضیهٔ بازگشت چندگانه را ثابت کند و اثبات جدیدی برای قضیهٔ سِمِردِی ارائه دهد. همچنین شایان ذکر است که فورستنبرگ کتابی عالی [۶] در این زمینه و موضوعات مرتبط تهیه کرد که در آن صورت نظام‌مندی از نظریهٔ اصلی آمده است و به رشد و توسعهٔ این مبحث نیز کمک بزرگی کرد.

مدتی بعد، فورستنبرگ و همکارانش پی بردند که این روش جدید قابلیت‌های بسیار زیادی دارد و از آن می‌توان برای اثبات انواع دیگری از قضیه‌های بازگشتی استفاده کرد، که از آن‌ها هم (با استفاده از اصل تناظر) می‌توان تعدادی قضیهٔ ترکیبیاتی کاملاً غیربدیهی به دست آورد. با این دید، فورستنبرگ، کتس‌نلسون[۱]، و افرادی دیگر صورت‌ها و تعمیم‌های بسیاری از قضیهٔ سِمِردِی به دست آوردند، مثلاً صورت‌هایی از آن قضیه در ابعاد بالاتر و حتی اثبات صورتی از قضیهٔ هیلز‑جوئت مبتنی بر چگالی [۱۸] (که تعمیمی بسیار قوی و مجرد از قضیهٔ وان در واردن است). بسیاری از این نتایج که با روش‌های متناهی‌وار نظریهٔ ارگودیک ثابت شده‌اند، حتی تا امروز، اثباتی با روش‌های «مقدماتی» ندارند، و این امر گواه توانایی این روش است. علاوه‌براین، یکی از نتایج جانبی مهم این تلاش‌ها درک عمیق‌تری بود که از طبقه‌بندی ساختاری سیستم‌های حافظ اندازه حاصل شد. مثلاً، معلوم شده است که در دسته‌های بسیاری از مسئلهٔ بازگشت، ویژگی‌های بازگشتی از نوع مجانبی هر سیستم دلخواه، تقریباً به‌طور کامل توسط عامل خاصی از آن سیستم، موسوم به عامل مشخصهٔ (مینیمال) آن سیستم[۲]، کنترل می‌شود. بنابراین تعیین دقیق ماهیت این عامل مشخصه برای انواع مختلفی از بازگشت‌ها بدل به کانون اصلی تحقیقات شد، زیرا پی برده بودند که این عامل می‌تواند آگاهی‌های دقیق‌تری دربارهٔ رفتار حدی سیستم‌ها به دست دهد (درحالت خاص، از آن نتیجه خواهد شد که بعضی عبارت‌های مجانبی مرتبط با بازگشت چندگانه عملاً به نقطه‌ای همگرایند، که خود این سؤال حل‌نشده‌ای در اثبات اولیهٔ فورستنبرگ بود). از مثال‌های نقض فورستنبرگ و وایس[۳] و نیز نتایج کونتسه[۴] و لِسینی[۵] سرانجام این نتیجه حاصل شد که این عامل‌های مشخصه باید توسط نوع بسیار خاصی (و جبری) از سیستم حافظ اندازه، موسوم به پوچ‌سیستم وابسته به گروه‌های

[۲] یکی از اولین مثال‌های آن، قضیهٔ میانگین ارگودیک فِن نویمان است که در آن تابع‌های انتقال‌ناوردا به منزلهٔ یک عامل، رفتار حدی میانگین‌های سادهٔ انتقال‌ها را کَنترل می‌کند.

[1]Katznelson [3]Weiss [4]Conze [5]Lesigne

پوچ‌توان، قابل توصیف باشند؛ این نتایج در مقاله‌ای تأثیرگذار از اوست و کرا [۲۰] (و همچنین بعد از آن، تسیگلر [۳۹]) به توصیفاتی بسیار دقیق و موشکافانه از این عامل‌ها انجامید، که، علاوه‌بر چیزهای دیگر، مسئلهٔ مذکور در مورد همگرایی میانگین‌های بازگشت مجانبی چندگانه را فیصله داد. اهمیت زیاد این عامل‌های مشخصه آشکارا بیانگر وجود یک دوگانگی میان ساختار (در اینجا، پوچ‌سیستم‌ها) و تصادفی‌بودن (که از طریق نوع خاصی از ویژگی «درآمیزندگی» ثبت می‌شود) بود و موجب این بینش شد که دراصل همین دوگانگی، شالوده و قدرت قضیهٔ سِمِردی و مشتقات آن است. یکی دیگر از ویژگی‌های شایان ذکر کار اوست‌ـکرا حضور پررنگ میانگین‌های وابسته به «مکعب‌ها» یا «متوازی‌السطوح‌ها» است، که معلوم شد به دلایل متعددی، نسبت به میانگین‌های بازگشت چندگانهٔ وابسته به تصاعد حسابی بررسی آن‌ها راحت‌تر است.

در کنار این پیشرفت‌ها در نظریهٔ ارگودیک، ریاضی‌دانان دیگری در پی فهم، اثبات مجدد، و اصلاح قضیهٔ سِمِردی با روش‌های دیگر بر آمدند. پیشرفت فکری مهمی به دست روژا و سِمِردی [۲۹] رخ داد، این دو با استفاده از لم نظم سِمِردی تعدادی نتیجه در نظریهٔ گراف اثبات کردند، از جمله آنچه امروز به لم حذف مثلث معروف است، که، به‌طورکلی، حکم می‌کند که اگر گرافی تعداد کمی مثلث داشته باشد، می‌توان آن مثلث‌ها را با حذف تعداد فوق‌العاده کمی یال حذف کرد. سپس آن‌ها ملاحظه کردند که مثال یادشدهٔ بئرند، محدودیت‌هایی برای کران کمّی این لم ایجاد می‌کند، به‌ویژه اینکه بسیاری از رویکردهای مقدماتی به این لم را بی اثر می‌کند (زیرا چنین رویکردهایی غالباً کران‌های چندجمله‌ای به دست می‌دهند)؛ عملاً هم تا امروز، همهٔ اثبات‌های موجود برای لم حذفی براساس گونه‌ای از لم نظم انجام می‌گیرند. با استفاده از عکسِ نقیض این ارتباط، ریاضی‌دانان پی بردند که لم حذف مثلث، دراصل، قضیهٔ رات برای تصاعدها با طول سه را نتیجه می‌دهد. برای اولین‌بار، این کشف این امکان را فراهم کرد که قضیه‌ها از نوع سِمِردی را بتوان با استفاده از روش‌های خالص نظریهٔ گرا\ف اثبات کرد و به‌این‌ترتیب ساختار جمعی مسئله را تقریباً به‌طور کامل ندید گرفت (توجه داشته باشید که در رویکرد مبتنی‌بر قضیهٔ ارگودیک، این ساختار در پوشش عمل عملگر انتقال روی سیستم موردبحث همچنان برجاست. همچنین، اثبات اولیهٔ سِمِردی از نظریهٔ گراف استفادهٔ جزئی می‌کند، اما در جاهای مختلف از ساختار جمعی تصاعدها بهره می‌برد.) کمی طول کشید تا پی بُردند روش‌های نظریهٔ گراف هم مثل روش قبل از آن، روشی از نوع آنالیز فوریه، عمدتاً محدود به ردیابی الگوها با «پیچیدگی کم» نظیر مثلث‌ها یا تصاعدها با طول ۳ است و همچنین ردیابی تصاعدهایی با طول بزرگ‌تر نیاز به نظریهٔ اساساً بسیار دشوارتر \برگ\ف دارد. به‌خصوص، این امر انگیزه‌ای شد برای

پیگیری برنامه‌ای (با پیشگامی فرانکل و رودل[1]) در راستای به دست آوردن نظیری رضایت‌بخش از لم نظم برای ابرگراف‌ها، که به قدر کافی قابلیت داشته باشد که بتوان از آن نتایجی مثل قضیهٔ سِمِردی (و نیز تعمیم‌ها و گونه‌های گوناگون آن) را به دست آورد. این مسئله، کاری بی‌اندازه بُغرنج از آب در آمد، ازجمله آرایش دقیق سلسله‌مراتب[2] پارامترهایی که در چنین منظم‌سازی‌ای ظاهر می‌شوند طوری‌که هریک با ترتیب صحیحی مسلط بر دیگری باشد. عملاً هم صورت‌های نهایی لم نظم، و «لم‌های شمارش» همراه آن که از آن‌ها قضیهٔ سِمِردی نتیجه می‌شود، همین اخیراً پیدا شده‌اند ([۲۲]، [۲۴]، [۲۵]، [۲۶]، [۱۴]،...). همچنین مثال نقض بسیار آموزندهٔ [۱۰] گاوئرز شایان ذکر است، که نشان می‌دهد کران‌های کمّی در لم اصلی نظم باید دست‌کم رفتاری توانی_نمایی داشته باشند، که این هم باز ماهیت غیربدیهی (و قابلیت) این لم را می‌رساند.

سرانجام، گاوئرز اصلاحاتی در رویکردی از نوع آنالیز فوریه به قضیهٔ سِمِردی، که تا پیش از کار رات پیشرفت قابل‌توجهی نکرده بود، انجام داد [۱۱]، [۱۳]. روش از نوع آنالیز فوریه، مانند سایر رویکردها، از طریق ایجاد یک تقسیم‌بندی دوگانه روی مجموعهٔ اعداد صحیح، که به تعبیری یا ساخت‌مند می‌شوند یا شبه‌تصادفی، انجام می‌شد. این مفهوم ساختار در کارهای رات در این‌باره پیدا شد _در این حکم که مجموعه‌های ساخت‌مند باید روی تصاعدهای حسابی با طول متوسط از یک چگالی افزایشی برخوردار باشند_ اما معنای درست شبه‌تصادفی‌بودن یا «یکنواختی» خیلی روشن نبود. گاوئرز مثالی ساخت (دراصل، این مثال ارتباط نزدیکی با مثال‌های فورستنبرک و وایس که قبلاً ذکر شد دارد) که نشان می‌داد مفاهیم شبه‌تصادفی‌بودن، که از نوع آنالیز فوریه‌اند، برای کنترل تصاعدها با طول چهار و بیشتر نامناسب‌اند و درنتیجه او اقدام به وارد کردن مفهوم دیگری از یکنواختی (که ارتباط بسیار نزدیکی با میانگین‌های مکعبی اوست و کرا و همچنین بعضی مفاهیم نظم‌پذیری ابرگراف‌ها دارد) کرد که مناسب این کار بودند. کار بر زمین‌مانده اثبات صورت کمّی و دقیق این حالت دوگانه بود. انجام این کار بی‌اندازه دشوار از آب در آمد (دلیل عمدهٔ آن محدودیت کاربرد تبدیل فوریه در این حالت بود) و از جهات بسیاری شبیه کارهای اوست_کرا و تسیگلر بود که می‌خواستند ساختار جبری پوچ‌سیستم‌ها را با عامل‌های مشخصه مجهز کنند. اما، گاوئرز از طریق ترکیب کردن ابزارهای تحلیلی آنالیز فوریه با قضیه‌های مهمی از ترکیبیات جمعی مانند قضیهٔ

[2] بِه نظر می‌رسد این سلسله‌مراتب ارتباطی با برج توسیع‌هایی که فورستنبرک در برنامهٔ مشابه «منظم‌سازی» سیستم‌های حافظ اندازه با آن‌ها مواجه شد داشته باشد، اگرچه در حال حاضر درک کمی از ارتباط دقیق آن‌ها داریم.

[1] Rodl

فرایمان[1] و بالوگ[2]ـسِمِرِدی (تاریخچهٔ این قضیه‌ها هم برای خودش داستان جذابی دارد؛ برای نمونه [۳۵] را ببینید)، توأم با چند روش احتمالاتی و ترکیبیاتی جدید، توانست با مهارت و خلاقیتی فوق‌العاده به این هدف دست یابد و به‌ویژه کران‌های کمّی فوق‌العاده قوی‌ای نسبت به قضیه‌های وان در واردن و سِمِرِدی به‌دست آورد.[۳]

خلاصه اینکه، چهار اثبات هم‌تراز برای قضیهٔ سِمِرِدی به دست آمده است: یکی با استفادهٔ مستقیم از ترکیبیات، یکی با استفاده از نظریهٔ ارگودیک، یکی با استفاده از نظریهٔ ابرگراف، و یکی هم با استفاده از آنالیز فوریه و ترکیبیات جمعی. اما، با وجود این همه اثبات، هنوز احساس می‌شد که فهم ما از این نتیجه ناقص است؛ مثلاً، با هیچ‌یک از این رویکردها نمی‌توان تصاعدها را در اعداد اول ردیابی کرد، عمدتاً به این دلیل که دنبالهٔ اعداد اول، تُنُکی دارد. (اما می‌توان روش فوریه، یا دقیق‌تربگوییم، روش دایرهٔ هاردی‌ـلیتل‌وود‌ـویناگرادُف، را برای اثبات وجود تعداد نامتناهی تصاعد با طول سه در مجموعهٔ اعداد اول به کاربرد [۳۶] و با زحمت خیلی بیشتری هم می‌توان وجود تصاعدها با طول چهار را تا حدودی بررسی کرد [۱۹].) اما، گرین [۱۵]، با استفاده از مفاهیم نظریهٔ تحدید در آنالیز هارمونیک (که داستان جالب دیگری است و در اینجا به آن نخواهیم پرداخت)، توانست اعداد اول را طوری در نظر بگیرید که «انگار» چگال‌اند و مشابه قضیهٔ رات را، به عنوان حالت خاص، برای زیرمجموعه‌های چگال از اعداد اول به دست آورد. این کار، چیزی جالب توجه را محتمل ساخت و آن وجود یک قضیهٔ سِمِرِدی نسبی بود که امکان ردیابی تصاعدهای حسابی را در زیرمجموعه‌های چگال مجموعه‌هایی غیر از اعداد صحیح، مانند زیرمجموعه‌های چگال اعداد اول، می‌دهد. عملاً هم، نمونه‌ای از قضیهٔ نسبی رات برای زیرمجموعه‌های چگال از مجموعه‌های تصادفی بسیار تُنُک، قبلاً در نوشته‌های نظریهٔ گراف آمده بود [۲۱].

در پژوهشی مشترک[۴] با بن گرین[5] دست به کار نسبی‌سازی روش‌های تحلیلی و ترکیبیاتی گاوئرز در زمینه‌هایی مانند زیرمجموعه‌های چگالِ مجموعه‌های تصادفی تُنُک و «شبه‌تصادفی» شدیم. با تلاش فراوان (که بخشی از آن ملهم از نظریهٔ ابرگراف بود که برای شمارش الگوها در مجموعه‌های تُنُک به‌خوبی تطبیق یافته بود، و بخشی دیگر نیز «لم نظم حسابی» متعلق به گرین [۱۶] بود که

[۳] اثبات خلاقانهٔ شلاه [۳۰] هم برای قضیهٔ وان در واردن شایان ذکر است، که رکوردار قبلی بهترین ثابت‌های موجود در این قضیه بود. هنوز توفیقی در تلفیق ایده‌های اثبات شلاه درکل موضوع حاصل نشده است، اما پیش‌بینی می‌کنم در آینده این اتفاق بیفتد.

[۴] ازقضا، علت اولیهٔ توجه من به این مسائل مشترکاتی بود که آن‌ها با یک موضوع مهم ریاضی دیگر، حدس کاکیا، داشتند، که بازهم در اینجا نمی‌توانیم به آن بپردازیم. بااین‌حال، این حدس به‌طرزی شگفت‌آور با داستان نظریهٔ تحدید یادشده، ارتباط پیدا می‌کند.

[1] Freiman [2] Balog [5] Ben Green

ایده‌های لم نظم در نظریهٔ گراف را وارد مباحث جمعی کرده بود) سرانجام توانستیم (در مقاله‌ای که هنوز منتشر نشده) تصاعدها با طول چهار را در این‌گونه مجموعه‌ها ردیابی کنیم. در این مسیر متوجه شدیم که میان روش لم نظم که ما استفاده کرده بودیم و روش‌های ساختن عامل مشخصه توسط اوست‌ـکرا مشابهتی وجود دارد، و با تعویضی[۱] در آن‌ها (به‌خصوص، با تکیهٔ بسیار بر میانگین‌های مکعبی)، توانستیم صورت رضایت‌بخشی از قضیهٔ سِمِردی نسبی را اثبات کنیم، که مبتنی‌بر نوعی اصل انتقال بود که، تقریباً، حاکی از این است که این دسته از زیرمجموعه‌های چگال از مجموعه‌های شبه‌تصادفی تُنُک طوری رفتار می‌کنند «که انگار» در فضای اصلی چگال‌اند. برای به کار گرفتن این قضیه در مورد اعداد اول، لازم بود اعداد اول را در یک مجموعهٔ شبه‌تصادفی مناسب (یا دقیق‌تر است بگوییم، با یک اندازه) محصور کنیم؛ اما از خوش‌اقبالی بسیار ما، در مقالهٔ بسیار مهم و جدید[۲] گلدستون و یُلدُرُم [۸] دربارهٔ فاصلهٔ بین اعداد اول[۳] تقریباً همان چیزی را که ما لازم داشتیم ساخته بودند، و با آن توانستیم بالاخره این حدس قدیمی را که اعداد اول دارای تصاعدهای حسابی به دلخواه بزرگ است ثابت کنیم.

این داستان اینجا نیز به پایان نمی‌رسد، بلکه به راه‌های مختلفی ادامه پیدا می‌کند. از یک سو، اکنون کاربردهای بیشتری برای اصل انتقال وجود دارد، برای نمونه در به‌دست آوردن مجموعه‌های خاص در اعداد اول گاوسی یا تصاعدهای چندجمله‌ای در اعداد اول گویا. مسیر خوش‌آتیهٔ دیگری برای پژوهش این است که روش‌های از نوع آنالیز فوریه، ابرگراف، و نظریهٔ ارگودیک را به یکدیگر نزدیک کنیم، مثلاً برای ابداع روایت‌های متناهی‌وار از نظریهٔ گراف و ابرگراف (که در سایر مباحث ریاضیات، نظیر آزمون خاصیت، نیز کاربرد دارد) یا روایت‌های متناهی‌وار از نظریهٔ ارگودیک. مسیر سوم این است که پوچ‌سیستم‌هایی که بازگشت را در نظریهٔ ارگودیک کنترل می‌کنند طوری بسازیم که انواع میانگین‌های متناهی‌وار از تصاعدهای حسابی را نیز کنترل کنند؛ یک مورد خاص آن کاری است که من و گرین به‌جد مشغول آنیم و آن محاسبهٔ همبستگی‌های بین اعداد اول و دنباله‌های

[۱] این کار به دلایلی، اندکی دشوار بود، و مهم‌ترین دلیلش این بود که ساختارهای نظریهٔ ارگودیک دراساس نامتناهی‌وارند، حال آنکه، در بررسی اعداد اول لازم بود در چارچوبی متناهی‌وار کار کنیم. خوشبختانه، قبلاً سعی کرده بودم رویکرد ارگودیک به قضیهٔ سِمِردی را به شکل متناهی در آورم [۳۴]؛ هرچند این تلاش من در آن زمان ناقص بود، معلوم شد که برای کاربرد به‌دردبخور در اعداد اول مفاهیم لازم را دارد. [۲] طرز ساختی که ما در آن زمان به کار بردیم از مقاله‌ای از گلدستون و یُلدُرُم گرفته شده بود که به دلیل اشتباهی نامرتبط به بحث ما، مقاله را پس گرفته بودند، که بالاخره آن‌ها با به کار بردن چند روش جدید و زیرکانه از پینتز [۹] آن را اصلاح کردند. این اتفاق تأییدی است بر نکته‌ای که پیش از این ذکر شد، اینکه اصلاً ضرورتی ندارد که ریزبه‌ریز یک اثر ریاضی درست باشد تا ارزش استفاده در آثار (دقیق) بعدی را داشته باشد. [۳] داستان فاصله‌های بین اعداد اول داستان جالب دیگری است که باز هم نمی‌توانیم آن را در اینجا پی بگیریم.

تولیدشده توسط پوچ‌سیستم‌ها (با استفاده از روش‌های عهد ویناگرادُف) است به منظور اثبات برآوردهای مجانبی دقیق‌تر درخصوص الگوهای مختلفی که در اعداد اول می‌توان یافت. آخرین مسیر که ارزشش از بقیه کمتر نیست، حدس اصلی اردوش‌ـتوران است، که بعد از این همه پیشرفت هنوز هم حل نشده است، اما پیشرفت‌های بورگِن [۲]، [۳]، در این مسئله بسیار امیدبخش است و به تحولات بیشتری خواهد انجامید.

۳ نتیجه‌گیری

همان‌طور که در این مطالعهٔ موردی دیدیم، این‌طور نیست که بهترین مثال‌های ریاضیات خوب صرفاً در یک یا چند معیار از معیارهای ذکرشده برای کیفیت ریاضیات صدق کنند، بلکه نکتهٔ مهم‌تر این است که آن‌ها قطعه‌ای از یک داستان مفصّل‌تر ریاضی‌اند، که بعداً با پیش‌رفتن داستان، قطعه‌های متنوع دیگری از ریاضیات خوب را به وجود می‌آورند. واقع امر این است که می‌توان تاریخچهٔ تمام مباحث ریاضیات را اساساً منبعث از معدودی از چنین داستان‌های مفصّل، سیر تکاملشان در طول زمان، و تأثیر متقابلشان بر یکدیگر تلقی کرد. با این حساب، نتیجه‌گیری من این است که ریاضیات خوب صرفاً براساس یک یا چند خصیصه از خصیصه‌های «خُرد» ذکرشده سنجیده نمی‌شود (گرچه مسلماً این خصیصه‌ها مهم‌اند و ارزش پیگیری و بحث را دارند)، بلکه موضوع «کلانی» نیز وجود دارد و آنکه این ریاضیات تا چه حد با دیگر قطعه‌های ریاضیات خوب، چه آن‌هایی که روی دستاوردهای قبلی بنا شده‌اند یا آن‌هایی که ابداع دستاوردهای مهم آینده را باعث می‌شوند، جور در می‌آیند. البته، دشوار بتوان، بدون بازنگری، با اطمینان پیش‌بینی کرد که کدام انواع دیگر ریاضیات چنین خصیصه‌ای را خواهند داشت. بااین‌همه، به نظر می‌رسد این عبارت که یک قطعه از ریاضیات «متعلق به چیز دیگری» است، مفهومی، هرچند غیرقابل تعریف، به این مضمون دارد که آن قطعه، جزئی از یک معمای بزرگ‌تر است و محتاج جستجوی بیشتر. بنابراین به نظرم می‌رسد که پیگیری چنین امیدهای ناملموسی دربارهٔ محتملات آتی، دست‌کم به همان اندازه جنبهٔ مهمی از پیشرفت ریاضی است که جنبه‌های ملموس‌تر و آشکارتر ذکرشده از کیفیت ریاضی. بنابراین معتقدم که ریاضیات خوب چیزی بیش از صِرفِ حل مسائل، نظریه‌پردازی، و کوتاه‌تر، قوی‌تر، روشن‌تر، ظریف‌تر، یا دقیق‌تر ساختن استدلال‌هاست، گرچه همهٔ این‌ها نیز اهداف عالی هستند. لازم است حین انجام این امور (و بحث در مورد اولویت آن‌ها در یک مبحث خاص)، به زمینه‌های وسیع‌تری که نتایج ما می‌توانند در ذیل آن‌ها قرار گیرند توجه داشته باشیم، زیرا این امر ممکن است به بیشترین نفع برای آن نتیجه، مبحث، و کل ریاضیات در درازمدت بینجامد.

۴ سپاسگزاری

از لورا کیم[۱] برای مطالعه و پیشنهاد اصلاحاتی در نسخهٔ اولیه این نوشته و از گیل کالای برای تعداد بسیاری اصلاحات عمیق و پیشنهاد سپاسگزاری می‌کنم.

۵ دربارهٔ نویسنده

حوزهٔ تحقیقات تِرِنس تائو شامل آنالیز هارمونیک، معادله‌های دیفرانسیل با مشتق جزئی، ترکیبیات، و نظریهٔ اعداد است. او جایزه‌ها زیادی کسب کرده است، از جمله جایزهٔ سِیلِم[۲] در سال ۲۰۰۰ میلادی، جایزهٔ بوخنر[۳] در سال ۲۰۰۲ میلادی، مدال فیلدز در سال ۲۰۰۶ میلادی، و بورس مک‌آرتور در سال ۲۰۰۷ میلادی. تائو درحال‌حاضر کرسی جیمز و کارول کالینز در ریاضیات در دانشگاه UCLA را در اختیار دارد.

مراجع

[1] Behrend, F. A., On sets of integers which contain no three terms in arithmetic progression, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **32** (1946), 331–332.

[2] Bourgain, J., On triples in arithmetic progression, *Geom. Func. Anal.*, **9** (1999), 968–984.

[3] Bourgain, J., Roth's theorem on arithmetic progressions revisited, (preprint).

[4] Erdös, P., Turan, P., On some sequences of integers, *J. London Math. Soc.*, **11** (1936), 261–264.

[5] Furstenberg, H., Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions, *J. Analyse Math.*, **31** (1977), 204–256.

[6] Furstenberg, H., *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton University Press, Princeton NJ, 1981.

[7] Furstenberg, H. Katznelson, Y., Ornstein, D., The ergodic theoretical proof of Szemerédi's theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **7** (1982), 527–552.

[8] Goldston, D., Yıldırım, C., Small gaps between primes, I, (preprint).

[9] Goldston,D. A., Pintz, J., Yıldırım, C.Y., Small gaps between primes II, (preprint).

[10] Gowers, T., Lower bounds of tower type for Szemerédi's uniformity lemma, *Geom. Func. Anal.*, **7** (1997), 322–337.

[11] Gowers, T. A, New proof of Szemerédi's theorem for arithmetic progressions of length four, *Geom. Func. Anal.*, **8** (1998), 529–551.

[12] Gowers, T., The two cultures of mathematics, in *Mathematics: Frontiers and Perspectives, International Mathematical Union*, V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, B. Mazur, eds., American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[13] Gowers, T., A new proof of Szemerédi's theorem, *Geom. Func. Anal.*, **11** (2001), 465-588.

[14] Gowers, T., Quasirandomness, counting and regularity for 3-uniform hypergraphs, *Combin. Probab. Comput.*, **15** (2006) , 143–184.

[15] Green, B. J., Roth's theorem in the primes, *Ann. of Math.*, **161** (2005), 1609–1636.

[16] Green, B. J., A Szemerédi-type regularity lemma in abelian groups, *Geom. Func. Anal.*, **15** (2005), 340–376.

---

[1] Laura Kim [2] Salem [3] Bochner

[17] Green, B. J., Tao, T., The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions, *Ann. Math.* (to appear).

[18] Hales, A. W., Jewett, R. I., Regularity and positional games, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **106** (1963), 222–229.

[19] Heath-Brown, D. R., Three primes and an almost prime in arithmetic progression, *J. London Math. Soc.*, (2), **23** (1981), 396–414.

[20] Host, B. Kra, B., Non-conventional ergodic averages and nilmanifolds, *Ann. of Math.*, **161** (2005), 397–488.

[21] Kohayakawa, Y., Luczak, T., Rodl, V., Arithmetic progressions of length three in subsets of a random set, *Acta Arith.*, **75** (1996), 133–163.

[22] Nagle, B., Rodl, V., Schacht, M., The counting lemma for regular k-uniform hypergraphs, (preprint).

[23] Ramsey, F. P., On a problem of formal logic, *Proc. London Math. Soc.*, **30** (1930), 264–285.

[24] Rodl, V., Schacht, M. Regular partitions of hypergraphs, (preprint).

[25] Rodl, V., Skokan, J., Regularity lemma for k-uniform hypergraphs, *Random Structures and Algorithms*, **25**, no. 1 (2004), 1–42.

[26] Rodl, V., Skokan, J., Applications of the regularity lemma for uniform hypergraphs, *Random Structures and Algorithms*, **28** (2006), 180–194.

[27] Roth, K. F., On certain sets of integers, *J. London Math. Soc.*, **28** (1953), 245-252.

[28] Roth, K. F., Irregularities of sequences relative to arithmetic progressions, IV, *Period. Math. Hungar*, **2** (1972), 301–326.

[29] Ruzsa, I., Szemerédi, E., Triple systems with no six points carrying three triangles, *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, **18** (1978), 939–945.

[30] Shelah, S., Primitive recursive bounds for van der Waerden numbers, *J. Amer. Math. Soc.*, **1** (1988), 683–697.

[31] Szemerédi, E., On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **20** (1969), 89–104.

[32] Szemerédi, E., On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression, *Acta Arith.*, **27** (1975), 299–345.

[33] Tao, T., The dichotomy between structure and randomness, arithmetic progressions, and the primes, in *Proceedings of ICM 2006*, (to appear).

[34] Tao, T. A quantitative ergodic theory proof of Szemerédi's theorem, (preprint).

[35] Tao T., Vu, V., *Additive Combinatorics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.

[36] van der J. G., Corput, ¨Uber Summen von Primzahlen und Primzahlquadraten, *Math. Ann.*, **116** (1939), 1–50.

[37] van der Waerden, B. L., Beweis einer Baudetschen Vermutung, *Nieuw. Arch. Wisk.*, **15** (1927), 212–216.

[38] Wigner, E., The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences, *Comm. Pure Appl. Math.*, **13** (1960)

[39] Ziegler, T., Universal characteristic factors and Furstenberg averages, *J. Amer. Math. Soc.*, **20** (2007), 53-97.

طیبه طباطبایی: دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر

رایانامه: t.tabaee@gmail.com

بهزاد نجفی: دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر

رایانامه: behzad.najafi@aut.ac.ir

Farhang va Andishe-ye Riyazi
Volume 41, Number 70, Spring/Summer 2022, Pages 131–146
doi: 10.30504/mct.2022.1121.1783

What Is Good Mathematics?

T. Tao
Translated by T. Tabatabeefar[1], B. Najafi[2]

[1,2]Department of Mathematics and Computer Science, Amirkabir University, Iran

Abstract. Some personal thoughts and opinions on what “good quality mathematics” is, and whether one should try to define this term rigorously. As a case study, the story of Szemerédi’s theorem is presented.

Keywords: good quality mathematics, Szemerédi’s theorem
Article history: Recieved 27 January 2020; Accepted 1 June 2020

[1]t.tabaee@gmail.com
[2]behzad.najafi@aut.ac.ir

ISSN 1022-6443/