فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۱، شمارهٔ ۷۰ (بهار و تابستان ۱۴۰۱) صص. ۵۷ تا ۷۴

میراث مسئلهٔ نوزدهم هیلبرت

مرتضی فتوحی

چکیده. مسئلهٔ نوزدهم هیلبرت به موضوع نظم جواب‌های معادله‌های دیفرانسیل جزئی می‌پردازد. در این مقاله با مرور سیر تحولات این شاخه از ریاضیات، دستاوردهای علمی آن را به اجمال از نظر می‌گذرانیم. همچنین، برای نمونه، به معرفی دو زیرشاخهٔ مهم از مسائلی که به دنبال مسئلهٔ نوزدهم مطرح شدند، یعنی نامساوی‌های تغییراتی و رویه‌های مینیمال، خواهیم پرداخت و نتایج به دست‌آمده در این زمینه‌ها را مرور خواهیم کرد.

۱ مقدمه

پیدایش نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیل جزئی (یا به‌اختصار، پی‌دی‌ایی) به قرن هیجدهم و تحقیقات اویلر[1]، دالامبر[2]، لاگرانژ[3] ، و لاپلاس[4] باز می‌گردد که با ابزارهای جدید به بررسی مدل‌های مکانیک محیط‌های پیوسته و نظریهٔ کشسانی[5] پرداختند. در اواسط قرن نوزدهم، دستاوردهای ریمان در توسعهٔ توابع تحلیلی مختلط و همچنین نظریهٔ رویه‌های ریمانی، پی‌دی‌ایی را به شاخه‌ای مهم از ریاضیات تبدیل کرد. امروز نه تنها مدل‌های بسیار زیادی در فیزیک و مهندسی برحسب پی‌دی‌ایی‌ها بیان می‌شوند، بلکه شاخه‌های دیگر ریاضی نیز ارتباط تنگاتنگی با این نظریه دارند. مثلاً پیدایش نظریهٔ هاج[6] و قضیهٔ شاخص اَتیا–سینگر[7] در هندسهٔ جبری یا نظریهٔ لی در توپولوژی دیفرانسیل

عبارات و کلمات کلیدی: مسئلهٔ نوزدهم هیلبرت، معادلهٔ دیفرانسیل جزئی، نظم جواب‌ها، نامساوی‌های تغییراتی، رویه‌های مینیمال

نوع مقاله: مروری؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۲/۲۹

[1]Leonhard Euler (1707-1783) [2]Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783) [3]Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) [4]Pierre-Simon Laplace (1749-1827) [5]theory of elasticity [6]Hodge theory [7]Atiyah-Singer index

doi: 10.30504/mct.2022.336

رابطهٔ عمیقی با نظریهٔ پی‌دی‌ایی داشته‌اند. ازطرف‌دیگر، نظریهٔ پی‌دی‌ایی عمیقاً وام‌دار پیشرفت‌های صورت‌گرفته در آنالیز ریاضی (حقیقی، تابعی، و فوریه) است زیرا بدون توسعهٔ آن‌ها، ساده‌ترین اثبات‌های وجود جواب در مسائل با شرط مرزی با چالش جدی روبه‌رو بود.

در ابتدای قرن بیستم، هیلبرت[۱] در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان در پاریس (۸ اوت سال ۱۹۰۰) ۲۳ سؤال مطرح کرد که سه سؤالِ نوزدهم، بیستم، و بیست و سوم در زمینهٔ نظریهٔ پی‌دی‌ایی بود. سؤال بیست و سوم بیشتر به اهمیت و ترویج نظریهٔ حساب تغییرات[۲] مربوط بود و مسئلهٔ مشخصی را مطرح نمی‌کرد. مسئلهٔ بیستم به وجود جواب معادله‌های پی‌دی‌ایی با شرط مرزی می‌پرداخت. مسئلهٔ نوزدهم در مورد نظم جواب‌های مینیمم‌ساز تابع‌های انرژی است و به صورت زیر بیان شده است [۲۹]:

مسئلهٔ نوزدهم هیلبرت[۳]: فرض کنید $f(x,u,p)$ تابعی تحلیلی و u مینمم‌سازی برای تابع انرژی زیر باشد

$$\int_\Omega f(x,u,\nabla u)\,dx.$$

به‌طور طبیعی u جوابی از معادلهٔ اویلر–لاگرانژ

$$F(x,u,\nabla u,D^2u) = \sum_{i,j}\partial^2_{p_ip_j}f\partial^2_{ij}u + \sum_i\left(\partial^2_{up_i}f\partial_i u+\partial^2_{x_ip_i}f\right)-\partial_u f = 0 \tag{۱.۱}$$

است. به‌علاوه، فرض کنید تابع f در شرط بیضوی[۴]

$$\sum_{ij}\partial^2_{p_ip_j}f(x,u,p)\xi_i\xi_j > 0 \tag{۲.۱}$$

برای

$$0\neq\xi\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}, x\in\Omega, p\in\mathbb{R}^n$$

صدق کند. آیا در این شرایط، تابع u تحلیلی است؟

[۲] حساب تغییرات به شاخه‌ای از ریاضیات گفته می‌شود که در آن مسئله پیدا کردن مقدار بهینه (بیشترین یا کمترین) برای یک نگاشت است که روی فضای توابع تعریف شده است. اولین‌بار این ابزار را نیوتن در سال ۱۶۸۷ برای حل مسئلهٔ کمترین مقدار مقاومت استفاده کرد. همچنین از اولین مسائل معروفی که با این روش حل شد مسئلهٔ منحنی چرخزاد است که آن را برنولی در ۱۶۹۶ مطرح کرده بود. [۳] هرچند صورت اصلی مسئله‌ای که هیلبرت تعریف کرده است برای دامنه‌های دوبُعدی است، در اینجا صورت کلی‌تر را بیان کرده‌ایم. [۴] در آن زمان به شرط منظم (regular) معروف بود.

[1] David Hilbert (1862-1943)

هیلبرت بعد از طرح این سؤال تأکید می‌کند که رویه‌هایی با انحنای گاوسی ثابت و منفی وجود دارند که همهٔ مشتق‌های تابع‌های نمایش‌دهندهٔ آن‌ها پیوسته است ولی آن تابع‌ها تحلیلی نیستند. او این سؤال را نیز مطرح می‌کند که آیا رویه‌های با انحنای گاوسی ثابتِ مثبت تحلیلی‌اند؟

در این مقاله به دستاوردهایی خواهیم پرداخت که نتیجهٔ تلاش برای پاسخ دادن به سؤال نوزدهم هیلبرت بوده‌اند. البته به هیچ وجه قصد نداریم تمامی این تحولات و دستاوردها را به هیلبرت نسبت دهیم، زیرا به احتمال زیاد بدون طرح این سؤال نیز سیر طبیعی پژوهش‌های ریاضی به سمت این نتایج پیش می‌رفت. درهرحال، نباید نقش هیلبرت را با جمع‌بندی سؤالات مهم ریاضیات در سال ۱۹۰۰ در جهت‌دهی و انسجام پژوهش‌های ریاضی نادیده گرفت.

این نوشته روایتی تاریخی از مطالعات در زمینهٔ مفهوم نظم در جواب‌های معادله‌های دیفرانسیل جزئی است. برای درک بهتر تأثیر هیلبرت در این زمینه، ابتدا در فصل دوم سعی می‌کنیم تصویری کلی از نظریهٔ پی‌دی‌ایی در قرن‌های ۱۸ و ۱۹ ارائه کنیم. سپس در فصل سوم خلاصه‌ای از تلاش‌های انجام گرفته برای حل مسئلهٔ نوزدهم را مرور خواهیم کرد. در فصل چهارم تلاش‌های ناموفق در تعمیم مسئلهٔ نوزدهم هیلبرت به حالت برداری را روایت می‌کنیم. در فصل‌های پنجم و ششم، به‌ترتیب، به نامساوی‌های تغییراتی و رویه‌های مینیمال می‌پردازیم. این دو، موضوع‌های مهم در نظریهٔ نظم محسوب می‌شوند و هر تصویر کلان از این نظریه بدون پرداختن به تحولات در این حوزه‌ها ناقص است. در پایان، تعمیم نتایج نظریهٔ نظم به معادله‌های غیرخطی را مرور خواهیم کرد.

۲ نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیل جزئی در قرن‌های هیجدهم و نوزدهم

اولین تحقیقات منسجم در زمینهٔ معادله‌های دیفرانسیل جزئی به معادلهٔ موج یک‌بُعدی برمی‌گردد که دالامبر در سال ۱۷۴۷ دربارهٔ مدل یک سیم مرتعش انجام داد؛ علاقهٔ فراوان او به موسیقی انگیزهٔ اصلی او برای کشف مدل ارتعاش سیم بود. بعدها، اویلر (۱۷۵۹) و برنولی[۱] (۱۷۶۲) این مدل را به بُعدهای دو و سه تعمیم دادند.

موارد زیر نمونه‌هایی است از معادله‌های دیفرانسیل جزئی که در قرن‌های هیجدهم و نوزدهم معرفی شدند و مورد بررسی قرار گرفتند [۵]:

- معادلهٔ اویلر برای مدل جریان‌های سیالات تراکم‌ناپذیر در ۱۷۵۷؛
- معادلهٔ رویه‌های مینیمال در ۱۷۶۲ توسط لاگرانژ (دراصل، این معادله اولین نمونه از کاربرد

[1] Daniel Bernoulli (1700-1782)

اصل اویلر–لاگرانژ در قالب جواب‌های انرژی بهینه بود)؛

- معادلهٔ لاپلاس در سال ۱۷۸۰ برای بررسی میدان پتانسیل گرانشی؛
- معادلهٔ مونژ-آمپر توسط مونژ[۱] در ۱۷۸۴ و آمپر[۲] در ۱۸۱۹؛
- معادلهٔ گرما توسط فوریه[۳] در ۱۸۰۷ (تحقیقات فوریه برای حل معادلهٔ گرما به پیدایش و توسعهٔ سری فوریه منجر شد)؛
- معادله‌های مکانیک سیالات، معروف به معادله‌های ناویه–استوکس، توسط ناویه[۴] در ۱۸۲۲ و استوکس[۵] در ۱۸۴۲؛
- مدل‌های کشسانی خطی توسط ناویه در ۱۸۲۱ و کوشی[۶] در ۱۸۲۲؛
- معادلهٔ هلمهولتس[۷] و مسائل مقدارویژهٔ عملگر لاپلاس در ۱۸۶۰؛
- معادله‌های ماکسول[۸] در الکترومغناطیس در ۱۸۶۴؛
- معادلهٔ KdV[۹] برای امواج آب در ۱۸۹۶.

تا قبل از آغاز قرن بیستم روش‌هایی برای بررسی و تحلیل این مدل‌ها و معادله‌ها متداول بود. به‌طورخلاصه بعضی از این روش‌ها را ذکر می‌کنیم [۵]:

۱. **روش جداسازی متغیرها:** این روش را ابتدا دالامبر (۱۷۴۷) برای حل معادله‌های موج به کار گرفت و یک‌سال بعد اویلر صورت دقیقی از آن را عرضه کرد. لاپلاس (۱۷۸۲) این ایده را با معرفی توابع همساز[۱۰] کروی برای حل معادلهٔ لاپلاس به کار برد. در ابتدا مسئلهٔ همگرایی سری‌های تابعی که در این روش ساخته می‌شود (به‌خصوص برقراری شرایط اولیه و مرزی مسئله) محل تردید بود تا اینکه فوریه (۱۸۰۷) این روش را برای حل معادلهٔ گرما به کار برد و اثباتی (هرچند ناقص) برای همگرایی این سری بیان کرد. اثبات او را دیریکله (۱۸۲۹) تکمیل کرد. امروزه با داشتن مفهوم فضاهای هیلبرت و همچنین نظریهٔ مقادیر ویژهٔ عملگرهای اشتورم–لیوویل این روش کاربرد وسیعی در حل تحلیلی مسائل خطی مختلف پیدا کرده است.

۲. **روش توابع گرین:** گرین[۱۱] در مقالهٔ معروف خود در ۱۸۲۸، که دربارهٔ مسائل مربوط به الکتریسیته و مغناطیس است، ایدهٔ توابع پتانسیل، توابع گرین، و قضیهٔ گرین (تبدیل

[1] Gaspard Monge (1746-1818) [2] André-Marie Ampére (1775-1836) [3] Joseph Fourier (1768-1830) [4] Claude-Louis Navier (1785-1836) [5] George Stokes (1819-1903) [6] Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) [7] Hermann von Helmholtz (1821-1894) [8] James Clerk Maxwell (1831-1879) [9] Diederik Korteweg (1848-1941)-Gustav de Vries (1866-1934) [10] harmonic [11] George Green (1793-1841)

انتگرال داخل ناحیه به انتگرال روی مرز آن) را مطرح کرد. با استفاده از روش او یک نمایش انتگرالی برای جواب‌های معادلهٔ لاپلاس با شرط مرزی به دست می‌آید. این نمایش ابزاری قوی برای تخمین جواب و مشتق‌های آن به دست می‌دهد.

۳. **روش انرژی:** گرین در ۱۸۳۳ ارتباطی بین جواب‌های معادلهٔ لاپلاس

$$\Delta u = \circ, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^{3} \text{ روی}$$

همراه با شرط مرزی $u = \phi$ روی $\partial\Omega$ (که بعداً به مسئلهٔ دیریکله معروف شد) و مینیمم‌سازهای تابع انرژی $\int_\Omega |\nabla v|^2 dx$ برقرار کرد. درحقیقت او نشان داد که اگر تابع هموار u از بین همهٔ توابعی که شرط مرزی را برآورده می‌کنند کمترین انرژی را داشته باشد، u تابعی همساز خواهد بود. این رویکرد سرمنشأ پیدایش روش‌های تغییراتی در آنالیز شد. هر چند در اینجا تابع انرژی مثبت و از پایین کران‌دار است، در آن زمان وجود مینیمم‌ساز مورد شک بود. به‌طورطبیعی، می‌توان دنباله‌ای از توابع پیدا کرد که انرژی آن‌ها به بزرگ‌ترین کران پایینی انرژی همگرا باشد. اما برای اثبات همگرایی این دنباله به مفاهیم فشردگی فضای توابع احتیاج بود که در آن موقع هنوز شناخته شده نبود. ریمان[1] (۱۸۵۱) وجود مینیمم‌ساز را اصل دیریکله نامید و در آثارش از این اصل استفاده کرد، هرچند او نتوانست اثبات دقیقی برای این اصل ارائه کند. وایرشتراس[2] (۱۸۷۰) با مثال‌هایی وجود مینیمم‌ساز را برای توابع انرژی شبیه به انتگرال دیریکله به چالش کشید. هیلبرت در سال ۱۹۰۰ تحت عنوان مسئلهٔ بیست و سوم تلاش‌های ریمان و وایرشتراس را قدر نهاد و سعی کرد توجه ریاضی‌دان‌ها را به حساب تغییرات جلب کند. او اولین فردی بود که اصل دیریکله را اثبات کرد، [۱۸].

۴. **روش سری‌های توانی:** هرچند این روش جزو ابتدایی‌ترین ایده‌ها و روش‌ها برای حل معادله‌ها بود، به‌طور روشمند توسط کوشی در ۱۸۴۰ برای حل مسائل غیرخطی با شرایط اولیه به‌کار رفت. بعداً این روش برای اثبات وجود جواب تحلیلی توسط کوالفسکی[3] (۱۸۷۵) تکمیل شد.

۵. **استفاده از توابع تحلیلی مختلط:** در پژوهش‌های ریمان (۱۸۵۱) ارتباط بین توابع همساز دوبُعدی و توابع تحلیلی مختلط بیان شد. بدین‌ترتیب، ابزاری قوی برای حل معادلهٔ لاپلاس

---
[1] Bernhard Riemann (1826-1866) [2] Karl Weierstrass (1815-1897) [3] Sophie Kowalevski (1850-1891)

دوبُعدی پیدا شد که آن را نیومن[1] ، شوارتس[2] ، و کریستوفل[3] (حدود سال ۱۸۷۰) تکمیل کردند.

۶. **روش پتانسیل‌های لایه‌ای:** نیومن در ۱۸۷۷ با تبدیل مسئلهٔ دیریکله به معادله‌ای انتگرالی روش جدیدی برای حل مسئلهٔ دیریکله ابداع کرد. این روش را بعداً پوانکاره[4]، فردهولم[5]، و هیلبرت کامل‌تر کردند.

۳ قرن بیستم و حل مسئلهٔ نوزدهم

برای اینکه تصویر بهتری از پیشرفت آنالیز ریاضی در قرن بیستم داشته باشیم بهتر است اشاره کنیم که در ابتدای آن قرن هنوز فضاهای L^p [۶] و انتگرال لبگ[۷] شناخته شده نبودند. ازقضا، تحقیقاتی که برای پاسخ به مسئلهٔ بیستم (وجود جواب معادله از طریق اثبات وجود مینیم‌ساز تابع انرژی) انجام گرفت (اولین‌بار توسط لوی[8] در ۱۹۰۶) به بررسی همگرایی دنبالهٔ مینیمم‌ساز با نرم گرادیان تابع (در آن موقع به نرم دیریکله معروف بود) و فضاهای متناظر این نرم منتهی شد. اکنون این فضاها به نام فضاهای سوبولف[۹] بسیار معروف‌اند.

بحث از تأثیرات مسئلهٔ نوزدهم بدون درنظر گرفتن مسئلهٔ بیستم (مسئلهٔ وجود جواب) دشوار است؛ زیرا تحقیقات برای اثبات وجود جواب منجر به تعریف جواب ضعیف، مشتق ضعیف، و فضاهای سوبولف در حوالی سال‌های ۱۹۲۰ تا ۱۹۴۰ شد. همچنین در دههٔ ۱۹۵۰، شوارتس[10] مفهوم توزیع[11] (توابع تعمیم‌یافته) را مطرح کرد و جواب‌های توزیعی وارد نظریهٔ پی‌دی‌ایی شد. طبعاً سؤالی که پس از آن مطرح شد این بود که آیا این جواب‌های ضعیف، جواب کلاسیک هم هستند؟ جدا از کاربرد فضاهای سوبولف در مطالعهٔ نظم جواب‌ها، رسیدن از جواب ضعیف به جواب کلاسیک موضوع جدیدی در این شاخه از معادله‌های دیفرانسیل گشود. درواقع، بزرگ‌تر کردن فضایی که در آن به دنبال جواب هستیم هرچند مسئلهٔ وجود جواب را ساده‌تر می‌کند، ما را از مفهوم واقعی جواب دور می‌کند. حلقهٔ اتصال این دو مسئله، نظم جواب‌هاست.

در ادامه، به‌ترتیب زمان وقوع، دستاوردهای مختلف در حل کامل این مسئله را، که حدود ۶۰

---

[۶] اولین‌بار ریس (Frigyes Riesz) آن‌ها را در سال ۱۹۱۰ مطرح کرد. [۷] اولین‌بار لبگ (Henri Lebesgue) در سال ۱۹۰۴ آن را تعریف کرد. [۹] سوبولف (Sergei Sobolev) آن‌ها را درسال ۱۹۳۵ تعریف کرد.

[1] Carl Neumann (1832-1925) [2] Hermann Schwarz (1843-1921) [3] Elwin Bruno Christoffel (1829-1900) [4] Henri Poincaré (1854-19120 [5] Erik Ivar Fredholm (1866-1927) [8] Beppo Levi (1875-1961) [10] Laurent Schwartz (1915-2002) [11] distribution

سال طول کشید، عرضه می‌کنیم.

۱) اولین تلاش برای حل مسئلهٔ نوزدهم به نام برنشتاین[۱] به سال ۱۹۰۴ ثبت شده است. وی در رسالهٔ دکترای خود نشان داد که هر جواب C^3 از معادلهٔ بیضوی تحلیلیِ غیرخطی در صفحه،

$$F(x, y, u, \nabla u, D^2 u) = 0,$$

(که در آن F نیز تحلیلی است) حتماً تابعی تحلیلی است [۳].

۲) لیختنشتاین[۲] در سال ۱۹۱۲ نشان داد که یک جواب C^2 به‌طورقطع نظم C^3 را دارد و درنتیجه بنابر قضیهٔ برنشتاین باید تابعی تحلیلی باشد [۲۳].

۳) در سال ۱۹۲۹ هوپف[۳] نتایج قبلی را با فرض اولیهٔ نظم $C^{1,\alpha}$ به دست آورد [۱۹]. او همین نتیجه را در سال ۱۹۳۲ برای بُعدهای بالا ثابت کرد [۲۰]. مزیت دیگر نتایج او این بود که فرض می‌کرد تابع انرژی f تنها نظم $C^{2,\alpha}$ را داشته باشد.

۴) شاودر[۴] در سال‌های ۱۹۳۴–۱۹۳۷ نشان داد که اگر همهٔ ضرایب معادلهٔ خطی بیضوی، پیوستهٔ هولدر باشد، جواب آن $C^{2,\alpha}$ است. نتایج او به تخمین‌های شاودر معروف‌اند. علاوه‌بر اینکه این نتیجه دستاورد ارزشمندی در نظریهٔ نظم محسوب می‌شود، به‌راحتی نتایج قبلی مسئلهٔ هیلبرت را با روشی دیگر اثبات می‌کرد. اگر بدانیم مینیمم‌ساز $C^{1,\alpha}$ است، آنگاه در معادله‌ای با ضرایب پیوستهٔ هولدر صدق خواهد کرد و درنتیجه نظم بهتر $C^{2,\alpha}$ برای آن به دست خواهد آمد.

۵) در سال ۱۹۳۹ موری[۵] با بررسی وجود و نظم جواب‌های یک معادلهٔ شبه‌خطی[۶] دو متغیری، مسئلهٔ هیلبرت را در حالت دوبُعدی به‌طورکامل حل کرد. درواقع، او نشان داد که هر جواب ضعیف H^1 الزاماً $C^{1,\alpha}$ و، درنتیجه، تحلیلی است [۲۴]. دستاورد او از یک جهت دیگر حائز اهمیت بود و آن این است که در نتایج او ضرایب معادله تنها لازم بود که اندازه‌پذیر باشند، درصورتی‌که در نتایج هوپف ضرایبْ پیوستهٔ هولدر فرض می‌شدند.

۶) وایل[۷] در ۱۹۴۰ نشان داد که جواب‌های ضعیف $\Delta u = 0$ هموارند. هرچند این نتیجه مستقیماً به مسئلهٔ نظم جواب‌های هیلبرت مربوط نمی‌شود، بعد از مطرح شدن مفهوم جواب‌های ضعیف (توزیعی) نتیجه ارزشمندی محسوب می‌شد. درواقع، او نشان داد که اگر $u \in L^1$ جوابی ضعیف

[1] Sergei Bernstein (1880-1968) [2] Leon Lichtenstein (1878-1933) [3] Eberhard Hopf (1902-1983) [4] Juliusz Schauder (1899-1943) [5] Charles Bradfield Morrey Jr. (1907-1984) [6] quasi-linear [7] Hermann Weyl (1885-1955)

به معنای زیر باشد

$$\int_\Omega u\,\Delta\phi\,dx = 0 \quad \text{برای هر } \phi \in C_0^\infty(\Omega)،$$

آنگاه u حتماً تابعی هموار است [۳۶].

۷) یکی دیگر از دستاوردهای مهم در نظم جواب‌ها قبل از حل کامل مسئلهٔ هیلبرت، نتایج معروف به کالدرون[1] ـزیگموند[2] در سال ۱۹۵۲ است. در ۱۹۲۷ ریس[3] ثابت کرده بود که تبدیل هیلبرتْ فضای L^p را به L^p تصویر می‌کند. کالدرون و زیگموند این نتیجه را به عملگر انتگرالی تکین[4] دلخواه به شکل

$$(Sf)(x) = \text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{K(x-y)}{|x-y|^n} f(y)\,dy,$$

توسعه دادند که در آن $K(x) = k(x/|x|)$ یک هسته هموار است و در شرط

$$\int_{S^{n-1}} k(\theta)d\theta = 0$$

صدق می‌کند [۱۰]. کاربرد مهم این نتیجه در نظم جواب‌های معادله‌های بیضویِ خطی است.

یکی از حالت‌های خاص انتگرال‌های تکین وقتی است که هستهٔ انتگرالْ مشتق دوم جواب اساسی معادلهٔ لاپلاس باشد. در این حالت پیوستگی $S : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ تخمین خوبی برای نرم L^pی مشتق دوم جواب‌های معادلهٔ $\Delta u = f$ به دست می‌دهد. کالدرون این نتایج را برای مسائل با شرط مرزی برای معادله‌های دیفرانسیل بیضوی خطی دلخواه تعمیم داد.

۸) مسئلهٔ هیلبرت را دِ جورجی[5] در ۱۹۵۷ تقریباً به‌طور کامل حل کرد [۱۲]. درواقع، او نشان داد که جواب‌های معادله‌های بیضوی که ضرایب اندازه‌پذیر (حتی نه لزوماً پیوسته) دارند، پیوستهٔ هولدرند. تقریباً هم‌زمان و به‌طور مستقل دستاورد مشابهی (البته با رویکرد متفاوتی) توسط نش[6] برای معادلهٔ سهموی پیدا شد [۲۶]. اثبات دِ جورجی را بعداً موزر[7] به شکل ساده‌تری بیان کرد. موزر ابتدا نامساوی هارناک را که در ۱۸۸۷ برای توابع همساز مثبت اثبات شده بود، برای عملگر دلخواه بیضوی با ضرایب اندازه‌پذیر کران‌دار تعمیم داد و به کمک آن نشان داد که هر جواب ضعیف H^1 از معادلهٔ $Lu = 0$ (که در آن L عملگری با ضرایب اندازه‌پذیر است) پیوستهٔ هولدر است [۲۵].

---

[1] Alberto Pedro Calderón (1920-1998) [2] Antoni Zygmund (1900-1992) [3] Marcel Riesz (1886-1969)
[4] singular integral [5] Ennio De Giorgi (1928-1996) [6] John Forbes Nash Jr. (1928-2015) [7] Jürgen Kurt Moser (1928-1999)

اگر به حالت سادهٔ مسئلهٔ هیلبرت نگاه کنیم و جواب‌های مینیمال تابع انرژی

$$\int_\Omega f(\nabla u)\, dx$$

را درنظر بگیریم، آن‌ها در معادلهٔ بیضوی

$$\sum_{i,j} f_{p_i p_j}(\nabla u)\partial_{ij} u = ۰ \tag{۱.۳}$$

صدق می‌کنند. اگر ∇u پیوستهٔ هولدر C^α باشد، باتوجه به شرط تحدب روی f (یا همان شرط بیضوی تابع انرژی که در صورت مسئلهٔ هیلبرت آمده است) u جواب معادلهٔ بیضوی با ضرایب C^α است. دراین‌حالت به کمک تخمین‌های شاودر، جواب باید نظم $C^{۲,\alpha}$ را داشته باشد. بدین‌ترتیب، با دستاوردهای قبلی تحلیلی‌بودن جواب اثبات خواهد شد. اما ما فقط می‌دانیم که $\nabla u \in L^۲$. ایدهٔ اصلی در این است که یک‌بار دیگر از معادلهٔ (۱.۳) مشتق بگیریم. اگر A ماتریس مشتق دوم f باشد، یعنی $A_{ij} = f_{p_i p_j}(\nabla u)$، ماتریس معین مثبتی است و $w = \partial_k u$ (برای هر مشتق جزئی $۱ \le k \le n$) در معادلهٔ

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla w) = ۰,$$

صدق می‌کند. نتایج دِ جورجی-نش-موزر ثابت می‌کند که w تابع پیوستهٔ هولدر است و بدین‌ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود.

۹) اورالتسوا[۱] در سال ۱۹۶۰ایدهٔ دِ جورجی- نش را برای مینیمم‌سازهای

$$\int_\Omega f(x, u, \nabla u)\, dx,$$

به کار برد و نشان داد که جواب‌های لیپ‌شیتسی حتماً در نظم درونی $C^{۲,\alpha}$ صدق می‌کنند [۳۵].

بدین‌ترتیب پس از حدود ۶۰ سال مسئلهٔ نوزدهم هیلبرت به‌طورکامل حل شد. از نتایج مهم پژوهش در این مسئله، توسعهٔ نظریهٔ نظم جواب‌های معادله‌های خطی و شبه‌خطی بیضوی است. در کنار این نتایج نظم جواب معادله‌های سهموی نیز اثبات شد. البته صورت‌های دیگری از مسئلهٔ نوزدهم هیلبرت مطرح شدند که در ادامه به آن‌ها خواهیم پرداخت.

[1]Nina Nikolaevna Uraltseva (1934-)

۴ تعمیم مسئلهٔ هیلبرت: حالت برداری

هرچند صورت اصلی مسئلهٔ نوزدهم هیلبرت برای تابع‌های عددی مطرح شده بود، طبیعی بود که بررسی نظم جواب سیستم‌ها از همان ابتدا مدنظر قرار بگیرد. درحقیقت نتایج به دست آمده برای معادله‌ها در حالت عددی به‌طور موازی برای نظم سیستم‌های بیضوی نیز بررسی می‌شدند. مهم‌ترین نتیجه از این نوع متعلق به پیتروفسکی[1] به سال ۱۹۳۹ است که نشان داد جواب‌های C^1 دستگاه تحلیلی حتماً تحلیلی‌اند [۳۰]. در سال ۱۹۵۲ موری نشان داد جواب‌های C^1 برای دستگاه‌ها با ضرایب $C^{n,\alpha}$ باید نظم $C^{n,\alpha}$ را داشته باشند.

فاصله‌ای که بین H^1 تا C^1 برای نظم جواب‌ها وجود داشت چالش بزرگی به حساب می‌آمد. به‌خصوص بعد از نتایج دِ جورجی‌ـنش‌ـموزر امید داشتند که بتوان آن‌ها را برای دستگاه‌ها تعمیم داد. از آن موقع مثال نقض‌های زیادی پیدا شد که نشان می‌داد ایده آن‌ها قابل تعمیم به سیستم‌ها نیست. اولین مثال نقض را دِ جورجی در سال ۱۹۶۸ پیدا کرد. مثال او برای یک سیستم n معادله‌ای در زیردامنه‌ای از $\mathbb{R}^n$ بود با شرط $n \geq 3$. ولی تابع انرژی‌ای که مینیم‌سازش در نظر گرفته شده بود تابعی با ضرایب ناپیوسته بود. پس از مدت کوتاهی، مثالی را جوستی[2] و میراندا[3] پیدا کردند. آن‌ها تابع انرژی را به صورت زیر در نظر گرفتند

$$\int_{B_1} \sum_{1\leq\alpha,\beta\leq n} \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}^{\alpha\beta}(v)\partial_i v^\alpha \partial_j v^\beta \, dx,$$

که در آن ماتریس‌های معین‌مثبتِ $a_{ij}^{\alpha\beta}$ تحلیلی‌اند. در مثال آن‌ها، وقتی $n \geq 3$، تابع ناپیوستهٔ $u(x) = x/|x|$ مینیم‌ساز این تابع انرژی است. دقت کنید که در حالت دوبُعدی بنابر تعمیم نتایج موری برای سیستم‌ها مثال نقضی نمی‌توان پیدا کرد.

۵ نامساوی‌های تغییراتی

یکی از مسائل مهم در حساب تغییرات، مقید کردن مسئلهٔ بهینه‌سازی است. اگر توابع قابل قبول از مجموعهٔ محدب K انتخاب شوند، به جای معادلهٔ اویلرـلاگرانژ (۱.۱) نامساوی تغییراتی

$$\big(F(x,u,\nabla u, D^2 u), v-u\big) \geq 0 \quad \text{،} v \in K \text{ برای هر}$$

[1]Ivan Petrowskey (1901-1973) [2]Enrico Giusti (1940-) [3]Mario Miranda (1937-2017)

به دست خواهد آمد. طبیعتاً می‌توان مسئلهٔ هیلبرت را برای نظم جواب‌های مینیم‌سازهای این مسائل مقید نیز بیان کرد. مثالی معروف از این دست مسئلهٔ مانع[1] است. در ناحیهٔ Ω برای مانع مشخصِ $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ و شرط مرزی $g : \partial\Omega :\to \mathbb{R}$ که در شرط $g \geq \phi$ صدق می‌کند، جواب مسئلهٔ بهینه‌سازی

$$\min_{v\in K} \int_{\Omega} |\nabla v|^۲ \, dx, \quad K := \{v : \Omega \text{ روی } v \geq \phi \text{ و } \partial\Omega \text{ روی } v = g\},$$

به‌عنوان یک حالت تعادل رویهٔ کشسان با مرز مشخص در نظر گرفته می‌شود که همچنین توسط مانع ϕ نیز کنترل می‌شود. بررسی نظم جواب این مسئله و نظم و خواص هندسی مرز قسمت‌هایی که جواب با مانع در تماس است، $\partial\{v = \phi\}$، مورد توجه بسیاری از ریاضی‌دانان قرار گرفته است.

از نامساوی تغییراتی مربوط به این مسئله نتیجه می‌شود که اگر v جواب مسئلهٔ مانع باشد، $u := v - \phi \geq ۰$ در معادلهٔ $\Delta u = (-\Delta\phi)\chi_{\{u>۰\}}$ صدق می‌کند. یک حالت سادهٔ آن $\Delta\phi = -۱$ است که به مسئلهٔ

$$\Delta u = \chi_{\{u>۰\}} \tag{۱.۵}$$

منتهی می‌شود. این مسئله از دو جهت دیگر قابل توجه است.

۱) **مسئلهٔ مرزهای آزاد**[2]: در ناحیه Ω تابع u و ناحیهٔ $D \subset \Omega$ در مسئلهٔ زیر مجهول‌اند

$$\Delta u = ۱ \text{ روی } D\text{،} \qquad u = ۰ \text{ روی } \Omega \setminus D.$$

مرز ناحیهٔ D مرز آزاد نامیده می‌شود. اگر به جای معادلهٔ لاپلاس، عملگر معادلهٔ گرما را در نظر بگیریم، به مسئلهٔ ذوب‌شدن یخ می‌رسیم که آن را اولین‌بار اشتفان[3] در سال ۱۸۸۹ مطرح کرد [۳۴]. اگر $\theta(x,t)$ بیانگر دمای آب در ناحیه‌ای همگن باشد، در قسمتی از ناحیه که آب یخ زده است داریم $\theta \equiv ۰$. در بقیه قسمت‌ها که دمای آب مثبت است، معادلهٔ گرمای $\partial_t\theta = \Delta\theta$ حاکم است. در مرز گذار یخ به آب، $\partial\{\theta > ۰\}$، جریان گرمایی متناسب با گرادیان دما است و اشتفان شرط $\partial_t\theta = c|\nabla\theta|^۲$، را روی این مرز قرار داد. با تبدیل $u(x,t) := \int_۰^t \theta(x,s)ds$ می‌توان دید که u جواب مسئلهٔ مرز آزاد زیر است

$$\Delta u - \partial_t u = \chi_{\{u>۰\}}, \qquad u \geq ۰, \quad \partial_t u \geq ۰.$$

[1] obstacle problem [2] free boundary problem [3] Josef Stefan (1835-1893)

دقت کنید که $\{u > 0\} \equiv \{\theta > 0\}$ و درنتیجه مرز یخ همان مرز ناحیهٔ $\{u > 0\}$ است. حالت تعادل مسئلهٔ اشتفان همان مسئلهٔ مانع (۱.۵) است.

۲) **توابع انرژی با نظم کمتر**: جواب‌های مسئلهٔ (۱.۵) مینیمم‌سازهای تابع انرژی

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 + 2\max(0, v)\, dx,$$

اند. همان‌طورکه مشاهده می‌کنیم تابع انرژی نسبت به v فقط لیپ‌شیتسی است. تعمیمی از مسئلهٔ هیلبرت می‌تواند این سؤال باشد که وقتی تابع انرژی f در مسئلهٔ (۱.۱) نظم پایین‌تری دارد، درخصوص نظم جواب‌ها چه می‌توان گفت؟ (دقت کنید موری در بُعد دو و بعداً اورالتسوا در بُعدهای بالاتر نشان داد که با فرض اینکه f تابع $C^{2,\alpha}$ است، مشتق دوم مینیمم‌سازها پیوستهٔ هولدر است.) مثالی خاص برای این‌گونه توابع انرژی که در شرط بیضوی (۲.۱) نیز صدق می‌کند، توابعی به‌صورت $f(x, u, \nabla u) = |\nabla u|^2 + g(x, u)$ است که در آن g نظم پایینی نسبت به u داشته باشد. مسئلهٔ مانع حالتی است که g صرفاً لیپ‌شیتسی است. یا مثلاً اگر g رفتاری شبیه به u^q داشته باشد با شرط $q > 0$، مطالعه و بررسی نظم جواب‌ها و نظم سطوح تراز آن مسئلهٔ با اهمیتی است.

مسئلهٔ نظم (۱.۵) را اولین‌بار فرسه[1] در سال ۱۹۷۲ اثبات کرد. او نشان داد که مشتق دوم جواب‌ها کران‌دارند، یعنی در ردهٔ توابع $C^{1,1}$ قرار دارند [۱۷]. دقت کنید این نظم بهترین نظم ممکن برای جواب‌ها است، زیرا Δu دارای ناپیوستگی است. در [۲] مثالی برای جواب معادلهٔ $\Delta u = -\chi_{\{u>0\}}$ آمده است که هرچند در همهٔ رده‌های $C^{1,\alpha}$ واقع می‌شود، مشتق دوم آن بی‌کران است.

تفاوت این معادله با (۱.۵) در علامت منهای سمت راست معادله است. به نظر می‌رسد وقتی سمت راست این معادله نسبت به u صعودی باشد، نظم بهتری برای جواب پیدا خواهد شد. این مطلب را شاهقلیان[2] در [۳۲] تایید کرده است. او نشان داد که جواب‌های

$$\Delta u = f(x, u)$$

در نظم $C^{1,1}$ صدق می‌کنند هرگاه $\partial_x f$ کران‌دار و $\partial_u f \geq -C$ به‌معنای مشتق ضعیف از پایین کران‌دار باشد (مثلاً مشتقْ شبیه منهای دلتای دیراک نباشد). نادیراشویلی[3] در سال ۲۰۱۳ نشان داد

[1] Jens Frehse (1943-) [2] Henrik Shahgholian (1960) [3] Nikolai Nadirashvili (1955-)

که جواب‌های معادلهٔ $\Delta u = f(u)$ به شرط آن‌که در فرض $|\nabla u| > c > 0$ صدق کنند، دارای نظم C^2 (یا $C^{1,1}$) هستند هرگاه f پیوسته (یا کران‌دار) باشد [۲۷].

مسئله نظم مرز آزاد بسیار پیچیده‌تر و ظریف‌تر است. در [۲۲] نشان داده شده است که اگر مرز آزاد C^1 باشد، حتماً یک رویهٔ تحلیلی است. در یکی از دستاوردهای باارزش در این زمینه، کافّارلّی[1] مرزهای آزاد را به دو دستهٔ نقاط منظم و نقاط تکین تقسیم کرد. او نقاط منظم را نقاطی در نظر گرفت که جواب معادله در نزدیکی آن نقاط به‌اصطلاح به‌شکل نیم‌فضا[2] رفتار می‌کردند (شبیه تابع $1/2 \max(x_1, 0)^2$ که در ناحیهٔ $x_1 < 0$ جواب معادله برابر صفر می‌شود) و درواقع در رابطهٔ

$$\limsup_{r\to 0} \frac{|B_r(x_0) \cap \{u = 0\}|}{|B_r|} > 0$$

صدق می‌کنند. او در [۶] نشان داد که مرزهای آزاد در نزدیکی نقاط منظم رویه‌ای C^1 تشکیل می‌دهند و درنتیجه تحلیلی نیز هستند. نقاط تکین نقاطی هستند که رفتار جواب در نزدیکی آن نقاط همانند چندجمله‌ای‌های مربعی است (جواب شبیه $1/2(x^t Ax)$ است با شرط $\mathrm{tr}A = 1$) و مرز آزاد تیزه‌شکل[3] است. در این نقاط شرط

$$\lim_{r\to 0} \frac{|B_r(x_0) \cap \{u = 0\}|}{|B_r|} = 0$$

برقرار است.

درحالت‌کلی، ممکن است نقاط تکین ساختار هندسی خیلی پیچیده‌ای داشته باشند و لزوماً رویه‌ای هموار تشکیل ندهند. در [۳۱] مثالی برای حالت دوبُعدی داده شده است که نقاط تکین، مرز آزاد مجموعهٔ کانتور است. سؤال مهم این بوده است که منظم‌ترین رویه‌هایی که می‌توانند این نقاط تکین را بپوشانند چیستند؟ کافّارلّی در [۷] نشان داد که این نقاط روی رویه‌ای C^1 قرار می‌گیرند. اخیراً در یک دستاورد شگرف و ارزشمند در [۱۶] این نتیجه به رویهٔ $C^{1,1}$ بهبود پیدا کرد. نویسندگان در آنجا ضمن مثالی نشان داده‌اند که این حالت بهترین نظمی است که نقاط تکین مرز آزاد می‌توانند داشته باشند.

۶ مسئلهٔ رویه‌های مینیمال

یکی از مسائل قدیمی که موضوع و ایدهٔ آن به نظریهٔ نظم جواب‌های پی‌دی‌ایی بسیار نزدیک است، مسئلهٔ رویه‌های مینیمال است که اولین‌بار آن را لاگرانژ در سال ۱۷۶۰ مطرح کرد. این مسئله به

[1] Luis Angel Caffarelli (1948-) [2] half-space [3] cusp

دلیل آزمایش‌هایی که پلاتو[1] دربارهٔ حباب صابون انجام داده به مسئلهٔ پلاتو معروف شده است. در حالت ساده‌ای که رویه به‌صورت نمودار تابعی فرض شود، هدف پیدا کردن مینیمم‌سازهای زیر است

$$\int_\Omega (1+|\nabla u|^2)^{1/2}\, dx ،\qquad u=g \text{ روی } \partial\Omega.$$

این بدان معنی است که اگر رویهٔ مینیمال را به‌طور موضعی نمودار تابعی مانند u بنگریم، معادلهٔ

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{(1+|\nabla u|^2)^{1/2}}\right)=0$$

برقرار است.

اولین پاسخ به سؤال وجود رویه‌های مینیمال دوبُعدی را داگلاس[2] و رادو[3] ، مستقلاً، در سال ۱۹۳۰ به دست آوردند. آن‌ها نشان دادند که هر خم ژردانِ هموار در فضا می‌تواند مرز دیسک مینیمالی باشد. مسئلهٔ وجود رویهٔ مینیمال در ابعاد بالاترا دِ جورجی، فدرر[4] ، فلمینگ[5] ، و ریاضی‌دانان دیگری بررسی کردند.

در پاسخ به این سؤال مفهوم ساختار رویهٔ مجرد جریان[6] توسعه پیدا کرد. هرچند این ابتکار، مفهوم جواب را ضعیف‌تر کرد و طبیعتاً بررسی مسئلهٔ وجود راحت‌تر می‌شد، موضوع یکتایی جواب مسئله را پیچیده‌تر می‌کرد. بررسی نظم جواب‌ها راهکاری است که مشخص می‌کند تا چه اندازه جواب‌های حاصل طبیعی‌اند.

مهم‌ترین دستاورد این موضوع برای مسئلهٔ نظم جواب‌ها این است که رویه‌های مینیمال با نقص بُعد یک در فضایی با بُعد $n\le 7$ تحلیلی است [۱۵، ۱۳، ۳۳]. به‌علاوه، در ابعاد $n\ge 8$ بُعد هاسدورفِ تکینگی‌های رویهٔ مینیمال حداکثر $n-8$ است [۱۴]. مثالی معروف از رویه‌های مینیمال غیرهموار، مثال مخروط سایمنز[7]،

$$\{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2\},$$

است که بعداً در [۴] ثابت شد که رویه‌ای مینیمال با تکینگی $n-8$ بُعدی است.

[1] Joseph Antoine Ferdinand Plateau (1801-1883) [2] Jesse Douglas (1897-1965) [3] Tibor Radó (1895-1965) [4] Herbert Federer (1920-2010) [5] Wendell Helms Fleming (1928-) [6] current [7] James Harris Simons (1938-)

۷ معادله‌های غیرخطی

ردهٔ بزرگی از معادله‌های دیفرانسیل به‌شکل

$$F(x, u, \nabla u, D^{۲}u) = ۰ \qquad (۱.۷)$$

است که در آن F عملگری غیرخطی است. مثلاً معادله‌های همیلتون–ژاکوبی–بلمن، که در مسائل کنترل بهینه ظاهر می‌شوند، به شکل عمومی

$$\inf_{\alpha} \{L_\alpha u(x) - f_\alpha(x)\} = ۰$$

است که در آن L_α عملگرهای دیفرانسیل بیضوی خطی مرتبهٔ دو هستند. مثال معروف دیگر معادلهٔ مونژ–امپر است:

$$\det(D^{۲}u) = f(x).$$

در حالت کلی عملگر دیفرانسیل غیرخطیِ F را بیضوی گوییم هرگاه ثابت‌های بیضوی λ و Λ وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر ماتریس متقارن معین‌نامنفی مانند N و هر ماتریس متقارن دلخواه مانند M و برای هر $p \in \mathbb{R}^n$، $r \in \mathbb{R}$، $x \in \Omega$ داشته باشیم

$$\lambda \|N\| \leq F(x, r, p, M + N) - F(x, r, p, M) \leq \Lambda \|N\|.$$

اولین چالش در بررسی این رده از معادله‌ها ارائه تعریفی برای جواب ضعیف است که با آن بتوانیم وجود جواب را اثبات کنیم (دقت کنید جواب‌های ضعیف به معنای توزیعی در اینجا قابل تعریف نیستند). اولین تعریف برای جواب ضعیف از این نوع را الکساندرُف[1] در سال ۱۹۵۸ برای معادلهٔ مونژ–امپر مطرح کرد [۱]. او جواب ضعیف را تابعی محدب در نظر گرفت و با صفحاتی که از پایین بر نمودار جواب مماس می‌شدند کار می‌کرد. در سال ۱۹۸۳ جواب‌های چسبناکی[2] برای معادله‌های همیلتون–ژاکوبی مرتبهٔ اول در [۱۱] تعریف شدند و کمی بعد برای معادله‌های همیلتون–ژاکوبی مرتبهٔ دوم نیز تعمیم داده شدند. همچنین در سال ۱۹۸۹ برای همهٔ معادله‌های بیضوی غیرخطی آن‌ها را به کار گرفتند [۲۱]. تعریف جواب‌های چسبناکی به کمک اصل ماکسیمم و توابع آزمونی انجام می‌گیرد که از بالا یا پایین بر نمودار جواب مماس می‌شوند. با این تعریف می‌توانستند روش پرون را برای اثبات وجود جواب معادله‌های غیرخطی به کار ببرند.

[1] Aleksandr Danilovich Aleksandrov (1912-1999) [2] viscosity

تعریف ۱.۷. تابع پیوستهٔ u را زیرجواب[۱] چسبناکی (یا زبرجواب[۲] چسبناکی) معادلهٔ (۱.۷) گوییم هرگاه برای هر نقطهٔ $x_\circ$ و تابع هموار ϕ به‌شرطی‌که $u-\phi$ ماکسیمم موضعی (مینیمم موضعی) خود را در $x_\circ$ اختیار کند، داشته باشیم

$$F(x_\circ, \phi(x_\circ), \nabla\phi(x_\circ), D^{\text{۲}}\phi(x_\circ)) \geq \circ$$

(برای زبرجواب علامت نامساوی برعکس خواهد شد). اگر u هم‌زمان زیرجواب و زبرجوابی چسبناکی باشد، آن را جواب چسبناکی معادلهٔ (۱.۷) می‌نامیم.

جواب کلاسیک معادلهٔ (۱.۷) تابعی مانند $u \in C^{\text{۲}}$ است که در هر نقطه در معادله صدق می‌کند. به‌راحتی می‌توان دید که هر جواب کلاسیک جوابِ چسبناکی نیز است.

اما مهم‌تر، مسیر برگشت از جواب چسبناکی به جواب کلاسیک است. اولین دستاورد از این نوع از طریق تعمیم نامساوی هارناک برای عملگرهای بیضوی غیردیورژانسی به دست آمد که آن را کریلف[۳] و سافانوف[۴] در ۱۹۷۹ اثبات کرده بودند. با کمک این نامساوی می‌توان نشان داد که جواب‌های چسبناکی $F(D^{\text{۲}}u) = f$ حتماً $C^{\text{۱},\alpha}$اند ([۸] را ببینید). نتیجهٔ نهایی در ۱۹۸۲ برای معادله‌های غیرخطی $F(D^{\text{۲}}u) = \circ$ را، مستقلاً، کریلف و اونس[۵] به دست آوردند. آن‌ها نشان دادند با شرط تحدب یا تقعر روی عملگر F جواب‌های چسبناکی در فضای $C^{\text{۲},\alpha}$ قرار می‌گیرد. با روش اغتشاش[۶] کافّارلّی در ۱۹۸۹ نشان داد که جواب‌های $F(D^{\text{۲}}u, x) = f(x)$ در رده‌های $C^{\text{۱},\alpha}$، $W^{\text{۲},p}$ یا $C^{\text{۲},\alpha}$ قرار می‌گیرند به‌شرطی‌که جواب‌های $F(D^{\text{۲}}u, \circ) = \circ$ در این فضاها قرار داشته باشند ([۸] را ببینید). این نتایج به‌راحتی برای عملگرهای کلی‌تری به‌شکل معادلهٔ (۱.۷) که در آن عملگر دیفرانسیلی به u، و ∇u وابسته است، تعمیم داده شده‌اند.

در همهٔ این نتایج شرط تحدب یا تقعر عملگر دیفرانسیلی ضروری است. نتیجه‌ای متفاوت در [۹] آمده است که نظم $C^{\text{۲},\alpha}$ برای جواب‌های چسبناکی عملگرهایی که به‌صورت

$$F(D^{\text{۲}}u) = \min(F_{\text{۱}}(D^{\text{۲}}u), F_{\text{۲}}(D^{\text{۲}}u)) = f$$

هستند، نشان داده شده است. در اینجا $F_{\text{۱}}$ یک عملگر محدب و $F_{\text{۲}}$ مقعر است.

بدون شرط تحدب یا تقعر برای عملگر غیرخطی مسئلهٔ وجود جواب کلاسیک هنوز مسئله‌ای حل نشده است. در [۲۸] نشان داده شده است که در بُعد ۱۲ برای هر شرط مرزی عملگری

[1] subsolution [2] supersolution [3] Nicolai Vladimirovich Krylov (1941-) [4] Mikhail V. Safonov [5] Lawrence Craig Evans (1949-) [6] perturbation method

بیضویِ غیرخطی وجود دارد که مسئلهٔ دیریکلهٔ متناظر آن جواب غیرکلاسیک دارد. آن‌ها اخیراً، در ۲۰۱۳، مثال دیگری در بُعد ۵ به دست آورده‌اند. با توجه به اینکه در بُعد ۲ جواب‌ها همیشه از نوع کلاسیک‌اند، مسئلهٔ وجود جواب کلاسیک برای بُعدهای ۳ و ۴ همچنان حل نشده است.

سپاسگزاری

این اثر تحت حمایت مادی صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور (INSF) برگرفته‌شده از طرح شماره «۹۹۰۳۱۷۳۳» انجام شده است.

مراجع

[1] Alexandrov, A. D., The Dirichlet problem for the equation $\mathrm{Det}\|z_{i,j}\| = \psi(z_1, \ldots, z_n, x_1, \ldots, x_n)$, *I. Vestnik, Leningrad Univ.*, **13** (1958), 5-24.

[2] Andersson, J., Weiss, G. S., Cross-shaped and degenerate singularities in an unstable elliptic free boundary problem, *J. Differential Equations*, **228** (2006), 633-640.

[3] Bernstein, S. N., Sur la nature analytique des solutions de certaines équations aux dériveés partielles du second order, *CR Acad. Sci. Paris*, **137** (1903), 778-781.

[4] Bombieri, E., De Giorgi, E., Giusti, E., Minimal cones and the Bernstein problem, *Invent. Math.*, **7** (1969), 243-268.

[5] Brezis, H., Browder, F., Partial differential equations in the 20th century, *Adv. Math.* **135** (1998), 76-144.

[6] Caffarelli, L. A., The regularity of free boundaries in higher dimensions, *Acta Math.*, **139** (1977), 155-184.

[7] Caffarelli, L. A., The obstacle problem revisited, *J. Fourier Anal. Appl.*, **4** (1998), 383-402.

[8] Caffarelli, L. A., Cabré, X., *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 43, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[9] Cabré, X., Caffarelli, L. A., Interior $C^{2,\alpha}$ regularity theory for a class of nonconvex fully nonlinear elliptic equations, *J. Math. Pures Appl.*, **82** (2003), 573-612.

[10] Calderón, A. P., Zygmund, A., On the existence of certain singular integrals, *Acta Math.*, **88** (1952), 85-139.

[11] Crandall, M. G., Lions, P. L., Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **277** (1983), 1-42.

[12] De Giorgi, E., Sulla differenziabilitae l'analiticita delle estremali degli integrali multipli regolari, *Mem. Accad. Sc. Torino, C. Sc. Fis. Mat. Natur.*, **3** (1957), 25-43.

[13] De Giorgi, E., Una estensione del teorema di Bernstein, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, **19** (1965), 79-85.

[14] Federer, H., The singular sets of area minimizing rectifiable currents with codimension one and of area minimizing flat chains modulo two with arbitrary codimension, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), 767-771.

[15] Fleming, W. H., On the oriented Plateau problem, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, **11** (1962), 69-90.

[16] Figalli, A., Joaquim S., On the fine structure of the free boundary for the classical obstacle problem, *Invent. Math.*, **215** (2019), 311-366.

[17] Frehse, J., On the regularity of the solution of a second order variational inequality, *Boll. Un. Mat. Ital. (4)*, **6** (1972), 312-315.

[18] Hilbert, D., Über das Dirichletsche Princip, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.-Vereinigung*, **8** (1900), 184-187.
[19] Hopf, E., Zum analytischen Charakter der Lösungen regulärer zweidimensionaler Variationsprobleme, *Math. Z.*, **30** (1929), 404-413.
[20] Hopf, E., Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Math. Z.*, **34** (1932), 194-233.
[21] Ishii, H., On uniqueness and existence of viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic PDE's, *Comm. Pure Appl. Math.*, **42** (1989), 15-45.
[22] Kinderlehrer, D., Nirenberg, L., Regularity in free boundary problems, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, **4** (1977), 373-391.
[23] Lichtenstein, L., Über den analytischen Charakter der Lösungen Zweidimensionaler Variationsproblem, *Bull. Acad. Sci. Cracovie Cl. Sci. Mat. Nat.* **A** (1912), 915-941.
[24] Morrey Jr., C. B., On the solutions of quasilinear elliptic partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **43** (1938), 126-166.
[25] Moser, J., A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **13** (1960), 457-468.
[26] Nash, J., Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 931-954.
[27] Nadirashvili, N., On Stationary Solutions of Two-Dimensional Euler Equation, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **209** (2013), 729-745.
[28] Nadirashvili, N., Vlădut, S., Nonclassical solutions of fully nonlinear elliptic equations, *Geom. Funct. Anal.*, **17** (2007), 1283-1296.
[29] Newson, M. W., Mathematical problems: Lecture delivered before the international congress of mathematicians at Paris in 1900 by Professor David Hilbert, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **8** (1902), 437-479.
[30] Petrowsky, I. G., Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'équations différentielles, *Rec. Math. Moscou*, (2) **5** (1939), 3-70.
[31] Schaeffer, D. G., Some examples of singularities in a free boundary, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **4** (1977), 133–144.
[32] Shahgholian, H., $C^{1,1}$ regularity in semilinear elliptic problems, *Comm. Pure Appl. Math.*, **56** (2003), 278-281.
[33] Simons, J., Minimal varieties in riemannian manifolds, *Ann. of Math.*, (2) **88** (1968), 62-105.
[34] Stefan, J., Über einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung, *Aus den Sitzungsberichten d. kais. Akademie d. Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Classe, 1889, XCVIII, Abth. II. a.*, 1889, 473-484.
[35] Uraltseva, N. N., Regularity of solutions of multidimensional elliptic equations and variational problems, *Dokl. Akad. Nauk*, **130** (1960), 1206-1209.
[36] Weyl, H., The method of orthogonal projection in potential theory, *Duke Math. J.*, **7** (1940), 411-444.

مرتضی فتوحی: دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ علوم ریاضی
رایانامه: fotouhi@sharif.ir

Farhang va Andishe-ye Riyazi
Volume 41, Number 70, Spring/Summer 2022, Pages 57–74
doi: 10.30504/mct.2022.336

The Heritage of Hilbert's Nineteenth Problem

M. Fotouhi[1]

[1]Department of Mathematical Sciences, Sharif University of Technology, Iran

Abstract. Hilbert's nineteenth problem concerns the regularity of partial differential equations solutions. In this paper, we review some of the developments and important results related to this problem. We also get a glimpse of two important classes of problems in regularity theory, variational inequalities and minimal surfaces.

Keywords: partial differential equation, Hilbert's nineteenth problem, regularity of solutions, variational inequalities, minimal surfaces
Article history: Recieved 28 January 2022; Accepted 19 May 2022

[1]fotouhi@sharif.ir

ISSN 1022-6443/