فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۱، شمارهٔ ۷۰ (بهار و تابستان ۱۴۰۱) صص. ۱۱۳ تا ۱۳۰

مربع محاطی: مسئله‌ای زیبا در هندسه و توپولوژی

محمدعلی سیدمظفری، زنده‌یاد علی‌اصغر رضائی

چکیده. این مقاله دربارهٔ مسئلهٔ مربع محاطی است که یکی از زیباترین مسائل حل‌نشده در هندسهٔ مسطحه است. این مسئله که به حدس توپلیتس نیز مشهور است حاکی از آن است که روی هر خم سادهٔ بسته در صفحه، چهار نقطه وجود دارد که رئوس یک مربع‌اند. حدس توپلیتس برای خم‌های محدب و هموار و دسته‌های بزرگ‌تری از خم‌ها ثابت شده است، اما حالت اصلی هنوز مسئلهٔ حل نشده‌ای است.

۱ مقدمه

مسئلهٔ مربع محاطی یا حدس توپلیتس[1] اولین‌بار در گزارش کنفرانسی به سال ۱۹۱۱ مشاهده شد [۲۲]. در آن کنفرانس توپلیتس سخنرانی‌ای ایراد کرد که عنوان قسمت دوم آن «دربارهٔ برخی مسائل در توپولوژی» بود. او پس از ارائهٔ دو مسئله همراه با حل آن‌ها، مسئلهٔ سوم را به صورت زیر مطرح کرد: روی هر خم سادهٔ بسته در صفحه، چهار نقطه وجود دارد که رئوس یک مربع‌اند.

هر خم سادهٔ بسته در صفحه را یک خم ژوردان[2] نیز می‌نامند که توسط نگاشت پیوستهٔ یک‌به‌یکی مانند $\gamma : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ نشان داده می‌شود. همچنین می‌توان آن را معادل یک نشانندهٔ توپولوژیک مانند $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ نیز در نظر گرفت. توجه کنید که در مسئلهٔ توپلیتس لزومی به قرارگیری کامل مربع در داخل خم قید نشده است. ازاین‌رو، شاید به جای واژهٔ «محاط»، «میخ‌کوب‌کردن[3]» مناسب‌تر باشد.

عبارات و کلمات کلیدی: خم سادهٔ بسته، مسئلهٔ مربع محاطی، حدس توپلیتس، خم موضعاً یکنوا، خم محدب
نوع مقاله: مروری؛ تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱/۲۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۱/۱۴

[1] Otto Toeplitz [2] Jordan curve [3] peg

doi: 10.30504/mct.2022.337

به‌نظر می‌رسد که توپلیتس هیچ‌گاه اثباتی از این مسئله انتشار نداده است. در سال ۱۹۱۳ آرنولد امچ[1] برهانی برای خم‌های محدب «به‌اندازۀکافی هموار» ارائه کرد [۳]. دو سال بعد، برهان دیگری ارائه کرد که در آن شرط هموارى را ضعیف‌تر کرد. باوجوداین، او توجه نکرده بود که حالت خاصِ خم‌های هموار، با یک استدلال حدی، درستی مسئله را برای همۀ خم‌های محدب ایجاب می‌کند [۴]. او در مقالۀ سومی مسئله را برای همۀ خم‌های تکه‌ای‌تحلیلی، که فقط تعدادی متناهی نقطۀ شکستگی دارند، اثبات کرد [۵].

امچ در دومین مقاله‌اش اذعان کرده بود که از تحقیقات توپلیتس و شاگردانش آگاه نبوده و مسئله را کمپنر[2] به او پیشنهاد کرده است. بین سال‌های ۱۹۰۶ تا ۱۹۱۳ توپلیتس یک دورۀ پسادکترا را در گوتینگن سپری نمود و کمپنر ریاضیدانی انگلیسی بود که دکترای خود را در گوتینگن تحت سرپرستی ادموند لانداو[3] در سال ۱۹۱۱ اخذ کرده بود. این‌که کدام‌یک از آن‌ها اول‌بار مسئلۀ مربع محاطی را از نظر گذرانده است مشخص نیست؛ اما آنچه که امروز در کتاب‌های ریاضی دیده می‌شود این است که نام دیگر مسئلۀ مربع محاطی «حدس توپلیتس» است.

مسئله ۱.۱. آیا هر خم سادۀ بسته در صفحه دارای چهار نقطه است که تشکیل مربعی دهند؟

هر چند راه‌حل‌هایی جالب برای این مسئله در حالت‌هایی خاص، مثلاً برای دستۀ خم‌های محدب یا هموار، ارائه شده است که وجود مربع محاطی در آن‌ها اثبات می‌شود، کمی دانش ما دربارۀ این مسئله، حیرت‌آور است. با وجود تمام تحقیقات ارزشمندی که دربارۀ این مسئله و مسائل مربوط به آن در طول بیش از یک سده انجام گرفته است، هنوز دانش کافی برای توصیف هریک از حالت‌های ممکن زیر را برای مسئله نداریم:

امکان ۱: هر مجموعۀ بسته و کران‌دار در صفحه که آن را به بیش از یک بخش تقسیم کند، دارای چهار رأس یک مربع است. در اینجا توجه به این نکته حائز اهمیت است که بنابر قضیۀ خم ژوردان، هر خم سادۀ بسته در صفحه، آن را به دو بخشِ درون و بیرون تقسیم می‌کند. بنابراین، چنانچه این حالت برقرار باشد، مسئلۀ مربع محاطی نیز حل می‌شود.

امکان ۲: بیشتر خم‌های سادۀ بسته در صفحه، دارای مربع محاطی نیستند. به‌طور کلی می‌توان گفت که اگر خم سادۀ بسته‌ای را به‌صورت تصادفی از میان همۀ خم‌های سادۀ بسته در صفحه انتخاب کنیم، احتمال اینکه این خم جزء آن دسته از خم‌هایی باشد که دارای مربعی محاطی‌اند صفر است.

[1]Arnold Emch [2]Aubrey J. Kempner [3]Edmund Landau

حال سؤال مهم این است که بین این دو سر طیف از ناشناختگی، تاکنون تا چه اندازه‌ای از این مسئله را توانسته‌ایم پاسخ دهیم؟

مسئلهٔ مربع محاطی را ریاضی‌دانان بسیاری برای رده‌های گوناگونی از جمله خم‌های محدب، خم‌های هموار، و خم‌های تکه‌ای‌تحلیلی ثابت کرده‌اند. مهم‌ترین رده از خم‌های سادهٔ بسته که وجود مربع محاطی برای آن‌ها ثابت شده است، ردهٔ خم‌های موضعاً یکنوا است که توسط والتر استروم‌کوئیست[۱] در سال ۱۹۸۹ به اثبات رسیده است. باوجوداین، مسئلهٔ اصلی که مربوط به ردهٔ خم‌های پیوسته است بدون حل باقی مانده است و تاکنون اثبات یا ردیه‌ای برای آن ارائه نشده است. در پژوهش‌های ده سال اخیر، تعمیم‌هایی از این حدس بررسی و اثبات شده است که نشان‌دهندهٔ پویایی مسئله برای علاقه‌مندان ریاضی است. از دیدگاه هندسی، مربع چهارضلعی ویژه‌ای است، اما همچنان که خواهیم دید، پژوهشگران بسیاری، درستی حدس توپلیتس را در مورد دیگر چهارضلعی‌ها، نظیر مستطیل و ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین بررسی نموده‌اند. همچنین در مورد مثلث‌ها هم نتایج نسبتاً کاملی به‌دست آمده است.

۲ اولین اثبات‌های مسئله

از میان تمام راه‌حل‌هایی که برای این مسئله در حالت‌هایی خاص ارائه شده است، تعدادی مقدم بر بقیه‌اند به‌گونه‌ای‌که یا قضیه‌های مهمی‌اند که اول‌بار برای دسته‌ای خاص از خم‌ها ارائه شده‌اند و یا ایده‌ها و ترفندهای آن‌ها در زمانهٔ خود رهگشای تحقیقات و تعمیم‌های بعدی بوده‌اند. از جملهٔ این‌ها، می‌توان به نخستین اثبات و دستاوردها پس از معرفی و طرح مسئله توسط توپلیتس اشاره کرد که توسط اِمچ [۵] در سال ۱۹۱۶، برای خم‌های ژوردان تکه‌ای‌تحلیلی، تنها با تعداد نقاط شکستگی متناهی ارائه شد و همچنین اثبات اشنیرلمان[۲] [۱۹] در سال ۱۹۲۹، که مسئلهٔ مربع محاطی را برای دستهٔ خم‌های ژوردان اندکی بزرگ‌تر از $C^{۲}$ ثابت کرد. هرچند اثبات اشنیرلمان دارای خطاهای کوچکی بود که بعداً توسط خود او و گوگنهایمر[۳] [۶] رفع شد، روش او در تحقیقات بعدی ریاضی‌دانان برای این مسئله مورد توجه قرار گرفت. در اینجا چکیده‌ای از این دو برهان اولیه را می‌آوریم.

طرحی از برهان امچ

خم ژوردان $\gamma : S^{۱} \hookrightarrow \mathbb{R}^{۲}$ را تکه‌ای‌تحلیلی و خط ℓ را در صفحه درنظر می‌گیریم. مجموعهٔ همهٔ

[1] Walter Stromquist [2] Lev G. Schnirelmann [3] Heinrich W. Guggenheimer

نقاط در وسط وترهای γ موازی با ℓ را M_ℓ می‌نامیم. تحت مفروضات کلی، امچ ثابت کرد که برای خطوط عمود برهم ℓ و $\ell^\perp$، دو مجموعهٔ M_ℓ، و $M_{\ell^\perp}$ یکدیگر را در تعداد فردی از نقاط قطع می‌کنند. امروزه این گزاره را می‌توان به‌شکل همولوژیکی نیز بیان کرد. این نقاط برخورد بیانگر لوزی‌های محاط در γاند که دو وتر عمود برهم متقاطر متناظر، قطرهای هرکدام از این لوزی‌ها هستند. اینک خط ℓ را به‌طور پیوسته ۹۰ درجه دوران می‌دهیم و درنتیجهٔ نقاط مجموعهٔ برخورد $M_\ell \cap M_{\ell^\perp}$ نیز در صفحه پیوسته حرکت می‌کنند به‌گونه‌ای‌که به دفعات متناهی‌بار در این مسیر، دو نقطه از این مجموعه ممکن است روی‌هم قرار گیرند و ناپدید شوند و یا دو نقطهٔ برخورد جدید ظاهر شود. وقتی ℓ به اندازهٔ ۹۰ درجه بچرخد ممکن است خانوادهٔ یک‌بُعدی از نقاط برخورد، اجتماعی از مؤلفه‌های دایره‌ای تبهگن تشکیل دهند. ازآنجاکه تعداد اعضای مجموعهٔ $M_\ell \cap M_{\ell^\perp}$ فرد است، امچ استدلال کرد که تعداد فردی از این مؤلفه‌ها باید $\frac{\mathbb{Z}}{۴\mathbb{Z}}$ـناوردا باشند، بدین‌معنی‌که اگر $R_۱R_۲R_۳R_۴$ لوزی‌ای در یکی از این مؤلفه‌ها باشد، $R_۲R_۳R_۴R_۱$ نیز باید در همان مؤلفه قرار داشته باشد. اینک با استفاده از قضیهٔ مقدار میانی، هنگامی‌که به‌طور پیوسته از $R_۱R_۲R_۳R_۴$ به $R_۲R_۳R_۴R_۱$ در طول مؤلفه‌ای از لوزی‌های محاطی حرکت کنیم، در نقطه‌ای، قطرها باید طول یکسانی داشته باشند و درنتیجه مربعی محاطی به‌دست می‌آید. این استدلال همچنین نتیجه می‌دهد که تعداد مربع‌های محاطی برای ردهٔ خم‌های امچ (به‌طورکلی) فرد است.

طرحی از برهان اشنیرلمان

فضای $(S^۱)^۴$ را فضای نمایش پارامتری همهٔ چهارضلعی‌های محاط در خم $\gamma : S^۱ \to \mathbb{R}^۲$ درنظر می‌گیریم. با توجه به اینکه هر چهارضلعی در صفحه را می‌توان با ۶تا اندازهٔ طول اضلاع و اقطار مشخص کرد، نگاشت $f_\gamma \;:\; (S^۱)^۴ \longrightarrow \mathbb{R}^۶$ را که هر چهارتایی $(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴)$ از نقاط روی دایره را به طول فواصل دوبه‌دوی تصویر این نقاط در $\mathbb{R}^۲$، یعنی $\gamma(x_۱)$، $\gamma(x_۲)$، $\gamma(x_۳)$، و $\gamma(x_۴)$ می‌نگارد درنظر می‌گیریم. گیریم V زیرفضایی خطی و دوبُعدی از $\mathbb{R}^۶$ متناظر با همهٔ چهارضلعی‌ها در $\mathbb{R}^۲$ با طول اضلاع و طول اقطار برابر به‌عنوان همهٔ ۶تایی‌های (a, a, a, a, b, b) باشد که $a, b \in \mathbb{R}$. اینک $f_\gamma^{-۱}(V)$، مجموعهٔ تمام مربع‌های محاط در γ همراه با تعدادی مؤلفه تبهگن را پارامتری می‌کند. مربع‌های تبهگن، به‌طورکلی، چهارتایی‌هایی هستند که $x_۱ = x_۳$ و $x_۲ = x_۴$. در ادامه، اشنیرلمان چنین استدلال می‌کند: می‌دانیم بیضی، تنها یک مربع را محاط می‌کند. حال به‌طور پیوسته و هموار، بیضی e را تغییر شکل می‌دهیم تا از طریق دسته‌ای از خم‌های

ژوردان γ_t با شرط $t \in [0, 1]$ و $e = \gamma_0$، به خم مطلوب $\gamma = \gamma_1$ برسیم. به‌دلیل هموار‌ی این انتقال، می‌توان نشان داد که دنباله‌ای از مربع‌های محاطی در این دسته از خم‌ها، تبهگن نخواهند شد. بنابراین بخش ناتبهگن $f_{\gamma_t}^{-1}(V)$، وقتی t به‌طور پیوسته از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند، خمینه‌های یک‌بُعدی تشکیل می‌دهد که مجموعهٔ جواب γ را به بیضی e متصل می‌کند. اینک چون ۱ـ‌خمینه‌ها همیشه تعداد زوجی نقاط مرزی دارند، در نتیجه زوجیت تعداد مربع‌های محاطی γ با بیضی e یکی خواهد شد و بنابراین γ به‌طورکلی تعداد فردی مربع را محاط می‌کند.

در اینجا این نکته حائز اهمیت است که خم γ در اثبات اشنیرلمان با شرط هموار‌ی اندکی قوی‌تر از هموار‌ی C^2 درنظر گرفته شده است، اما با یاری از روش او در این اثبات، ریاضی‌دانان بعدی مسئله را برای خم‌های هموار γ اثبات کردند.

سرانجام اینکه، استفاده از این روش و روش‌های مشابه برای حل حالت کلی خم‌های ژوردان کارگر نیست، زیرا تشخیص چهارضلعی‌های تبهگن و مربع‌های موردنظر ما در $f^{-1}(V)$ کاری دشوار است. درواقع، بزرگ‌ترین مانع موجود بر سر راه بیشتر روش‌های به‌کاررفته در حل مسئله در حالت کلی، این است که استدلال‌های حدی به‌کار گرفته‌شده روی مجموعه‌ای از خم‌های حدی که دارای مربع محاطی‌اند، در نهایت نمی‌توانند تضمینی از ناتبهگنی مربع حدی روی خم مورد نظر ما به دست دهند. تاکنون هیچ راه‌کاری برای حل این مشکل شناخته نشده است.

۳ زیباترین برهان‌ها برای خم‌های محدب

نخستین برهان مسئلهٔ مربع محاطی برای خم‌های محدب را تسیندلر[1] در سال ۱۹۲۱ ارائه کرد [۲۵]. برهان دیگری را در سال ۱۹۵۰ کریستنسن[2] منتشر کرد [۲]. در سال ۱۹۷۰ راجر فِن[3] قضیه‌ای کلی موسوم به قضیهٔ میز[4] ثابت کرد که مسئلهٔ مربع محاطی در حالت خم‌های محدب، یکی از نتایج آن است. برهان این قضیه یکی از زیباترین برهان‌ها برای مسئلهٔ مربع محاطی در حالت خم‌های محدب است.

قضیه ۱.۳ (قضیهٔ میز). فرض کنید D قرص محدب فشرده با مرز S در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ باشد. همچنین $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و نامنفی باشد که خارج از D صفر است. اگر $d > 0$ عددی حقیقی باشد، آنگاه چهار نقطه در $\mathbb{R}^2$ وجود دارند که تشکیل مربع‌ای با طول ضلع d و مرکز در D می‌دهند به‌طوری‌که مقدار f در این چهار نقطه برابر است.

[1] Konrad Zindler [2] Carl M. Christensen [3] Roger Fenn [4] table theorem

خلاصه‌ای از برهان قضیهٔ میز. یک جهت دلخواه (ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد) و از این پس ثابت برای $\mathbb{R}^۲$ درنظر می‌گیریم. برای عدد مثبت $d > ۰$ چهارتایی مرتب $(a_۱, a_۲, a_۳, a_۴)$ از نقاط $\mathbb{R}^۲$ را یک (d, D)ـ مربع می‌نامیم اگر این چهار نقطهٔ متوالی، رئوس مربع‌ای با طول ضلع d و با مرکز واقع در D باشند. همچنان‌که خواهیم دید، مجموعهٔ همهٔ (d, D)ـ مربع‌ها با چنبرهٔ توپر $D \times \mathbb{S}^۱$ متناظر است. مختصات دکارتی $\mathbb{R}^۳ = \mathbb{R}^۲ \times \mathbb{R}$ را چنان درنظر می‌گیریم که نقطهٔ $(۰, ۰, ۰)$ نقطه‌ای درونی از D باشد. فرض کنید $(a_۱, a_۲, a_۳, a_۴)$ یک (d, D)ـ مربع با مرکز x باشد، یعنی $x \in D$. اگر $\mathbb{S}^۱$ نشان‌دهندهٔ دایرهٔ یکه در $\mathbb{R}^۲$ باشد، آنگاه نقطهٔ $\alpha \in \mathbb{S}^۱$ را چنان می‌گیریم که بردار $\overrightarrow{o\alpha}$ هم‌جهت با بردار $\overrightarrow{a_۱a_۲}$ باشد. دراین‌صورت، تناظری یک‌به‌یک بین مجموعهٔ همهٔ (d, D)ـ مربع‌ها و نقاط (x, α) در $D \times \mathbb{S}^۱$ وجود دارد. اکنون نمودار f را در $\mathbb{R}^۳ = \mathbb{R}^۲ \times \mathbb{R}$ درنظر بگیرید. هر (d, D)ـ مربع، چهار نقطه به‌صورت $Q_i = (a_i, f(a_i))$ در $\mathbb{R}^۳$ نتیجه می‌دهد که $i = ۱, ۲, ۳, ۴$. نقاط $Q_۱$، $Q_۲$، و $Q_۳$ یک صفحهٔ $\pi(x, \alpha)$ را در $\mathbb{R}^۳$ مشخص می‌کنند. محل تلاقی این صفحه و خط گذرنده از $a_۴$ و عمود بر $\mathbb{R}^۲$ را $p = p(x, \alpha)$ می‌نامیم. برداری را درنظر بگیرید که $Q_۴$ را به p وصل می‌کند و با محور zها موازی است. فرض کنید $\varphi(x, \alpha)$، مؤلفهٔ سوم این بردار باشد. دراین‌صورت، نگاشت حقیقی‌مقدار $\varphi : D \times \mathbb{S}^۱ \longrightarrow \mathbb{R}$ با تعریف $(x, \alpha) \longmapsto \varphi(x, \alpha)$ به‌دست می‌آید. تعریف می‌کنیم

$$A = \{(x, \alpha) \in D \times \mathbb{S}^۱ : \varphi(x, \alpha) = ۰\}$$

گیریم $g : \mathbb{S}^۱ \longrightarrow \mathbb{S}^۱$ دوران مثبت $\mathbb{S}^۱$ به اندازهٔ $\pi/۲$ باشد. از تعریف فوق نتیجه می‌شود که سه گزارهٔ (۱) $\varphi(x, \alpha) = ۰$؛ (۲) $\varphi(x, g(\alpha)) = ۰$؛ (۳) $(x, \alpha) \in A$، معادل‌اند. توجه کنید که اگر یکی از این شرایط برقرار نباشد، آنگاه $\varphi(x, \alpha)$ و $\varphi(x, g(x))$ علامت مختلف دارند.

برای $(x, \alpha) \in D \times \mathbb{S}^۱$، فرض کنید $n(x, \alpha)$ بیانگر بردار نرمالِ یکه بر صفحهٔ $\pi(n, \alpha)$ باشد که مؤلفهٔ سوم آن مثبت است. همچنین فرض کنید $\psi(x, \alpha)$ تصویر بردار $n(x, \alpha)$ بر صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$ باشد. در این‌صورت نگاشت $\psi : D \times \mathbb{S}^۱ \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ نگاشتی پیوسته است. B را مجموعهٔ صفر ψ درنظر می‌گیریم، یعنی

$$B = \{(x, \alpha) \in D \times \mathbb{S}^۱ : \psi(x, \alpha) = ۰\}$$

کافی است نشان دهیم $A \cap B \neq \emptyset$. به‌ازای هر $x \in S$ (S مرز D است) و هر $\alpha \in \mathbb{S}^۱$،

چهارتایی $(a_۱, a_۲, a_۳, a_۴)$ وجود دارد که مؤلفه‌های آن رأس‌های یک مربع باشند که به‌وسیلهٔ (x, α) مشخص می‌شود. اگر f در هر چهار نقطه صفر شود، اثبات تمام است.

فرض کنید f در حداقل یکی از این نقاط مثبت باشد. اگر (x, α) یک نقطه از A باشد، آنگاه چون نقاط $Q_۱$، $Q_۲$، $Q_۳$ و $Q_۴$ در یک صفحه قرار دارند، نتیجه می‌شود که f در حداقل دو نقطه، مثلاً $a_۱$ و $a_۲$ مثبت است. اما D محدب است و لذا f در دو نقطهٔ دیگر، یعنی $a_۳$ و $a_۴$ صفر است. به‌این‌ترتیب، برای هر $(x, \alpha) \in A$ و هر $x \in S$، بردار $\psi(x, \alpha)$ ناصفر است و جهت آن به سمت خارج D است.

فرض کنید T چنبرهٔ توپر به‌دست‌آمده از $D \times \mathbb{S}^۱$ تحت یکسان‌سازی $(x, \alpha) \sim (x, g(\alpha))$ و $r : D \times \mathbb{S}^۱ \longrightarrow T$ نگاشت یکسان‌سازی باشد. دراین‌صورت، r نگاشت پوششی چهار لایه برای T است. نگاشت $\psi' : T \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\psi'(r(x, \alpha)) = \frac{۱}{۴} \sum_{i=۰}^{۳} \psi(x, g^i(\alpha))$$

می‌نویسیم $A' = r(A)$ و B' را مجموعهٔ صفر ψ' می‌گیریم. توجه کنید که

$$r(A \cap B) = A' \cap B'$$

و لذا اگر $A' \cap B'$ ناتهی باشد، آنگاه $A \cap B$ نیز چنین خواهد بود. تا بدین جای کار، تفسیر دقیق هندسی از حکم قضیه و معادل آن بیان گردید. واضح است که در ادامهٔ برهان، تلاش برای اثبات ناتهی بودن $A \cap B$ خواهد بود و یا به‌طور معادل، اثبات این مطلب که ψ' در نقطه‌ای از A' صفر می‌شود. برای این منظور، فِن با رویکردی صرفاً توپولوژیکی از چندین ترفند توپولوژی جبری از جمله همولوژی نسبی[1] و دوگان‌سازی لفشِتس[2] استفاده می‌کند و اثبات را به زیبایی به پایان می‌برد. $\square$

حال به هدف اصلی، یعنی حل مسئلهٔ مربع محاطی در مورد خم‌های محدب، می‌رسیم.

قضیه ۲.۳. روی هر خم سادهٔ بستهٔ محدب در صفحه، چهار نقطه وجود دارد که رأس‌های یک مربع‌اند.

اثبات. فرض کنیم S خم سادهٔ بستهٔ محدبی در صفحه باشد. می‌توان دستگاه مختصات در $\mathbb{R}^۲$ را چنان گرفت که مبدأ o نقطه‌ای درون S باشد. D را اجتماع S و نقاط درون S درنظر می‌گیریم. تابع $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ را چنان تعریف می‌کنیم که در $\mathbb{R}^۲ - D$ صفر، $f(o) = ۱$، و به‌ازای هر

[1] relative homology [2] Lefschetz duality

عضو ناصفر $p \in D$،

$$f(p) = \frac{\|\overrightarrow{pp'}\|}{\|\overrightarrow{op'}\|}$$

که در آن p' محل تلاقی نیم‌خط $\overrightarrow{op}$ و S است. دراین‌صورت f تابعی پیوسته است که در $D-S$ مثبت و در بقیهٔ نقاط، یعنی نقاط روی S و خارج از D، صفر است. به‌این‌ترتیب شرایط قضیهٔ میز برقرار است. d را چنان کوچک می‌گیریم تا مربع به‌دست‌آمده در قضیهٔ میز، به‌طور کامل درون S قرار گیرد. مقدار d را به‌طور پیوسته بزرگ می‌کنیم تا یکی از رأس‌های مربع روی S قرار گیرد. چون f در نقاط S صفر می‌شود، سه رأس دیگر نیز روی S قرار می‌گیرند و رأس‌های مربعی به طول ضلع d و محاط در S می‌باشند. □

۴ ردهٔ خم‌های موضعاً یکنوا

در سال ۱۹۸۹ ولتر استرام‌کوئیست [۲۰] سه قضیهٔ مهم مربوط به مسئلهٔ مربع محاطی اثبات کرد که یکی از آن‌ها اصلی و دوتای دیگر توسیع شرط لازم در قضیهٔ اصلی‌اند. قضیهٔ اصلی حکمی ارزشمند دربارهٔ وجود مربع‌گون[۱] محاطی در خم‌های سادهٔ بسته هموار C^1 در $\mathbb{R}^n$ ارائه می‌کند که در حالت $n = 2$ همان مسئلهٔ مربع محاطی برای خم‌های ژوردان هموار است (در سرتاسر این بخش منظور از خم هموار خمی با شرط همواری C^1 یا به‌عبارت‌دیگر، یک‌بار مشتق‌پذیری است که به معنی وجود خط مماس بر هر نقطه از خم است). برای بیان قضیهٔ اصلی ابتدا مفهوم مربع‌گون را می‌آوریم.

تعریف ۱.۴. فرض کنید A، B، C، و D چهار نقطه از $\mathbb{R}^n$ باشد به‌طوری‌که از وصل کردن متوالی آن‌ها با استفاده از خطوط راست، خم سادهٔ بسته‌ای به‌وجود آید. دراین‌صورت شکل حاصل را مربع‌گون نامیم هرگاه پاره‌خط‌های AB، BC، CD، و DA طول یکسانی داشته باشند و پاره‌خط‌های AC و BD قابل انطباق باشند.

توجه کنید که اگر چهار نقطه را در صفحه درنظر بگیریم، مربع‌گون همان مربع معمولی است.

قضیه ۲.۴ (قضیهٔ اصلی [۲۰]). هر خم سادهٔ بسته هموار در $\mathbb{R}^n$ مربع‌گونی را محاط می‌کند.

در اینجا منظور از خم سادهٔ بسته در $\mathbb{R}^n$ نگاشت پیوسته‌ای چون $\omega : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ است که نگارهٔ آن با دایره همسانریخت است و تساوی $\omega(x) = \omega(y)$ در صورتی برقرار است که $x - y$ عددی صحیح باشد.

---

[1] square like

روش و ایدهٔ اثبات استرام‌کوئیت برای این قضیهٔ مفید و کارآمد را می‌توان جزء زیباترین اثبات‌های توپولوژیکی به‌حساب آورد زیرا بسیار هنرمندانه و ظریف از توپولوژی جبری بهره می‌گیرد. ذکر یکی از کلیدی‌ترین ایده‌های اثبات این قضیه خالی از لطف نیست.

از دید بسیاری، ممکن است مفهوم زوجیت تنها برای تعداد متناهی عضو از یک مجموعه قابل درک باشد، اما آیا می‌توان مجموعه‌ای با تعداد نامتناهی عضو را زوج و یا فرد نامید طوری‌که با درک ما از زوجیت مجموعه‌های متناهی ناسازگار نباشد و به‌نوعی تعمیمی از آن باشد؟ تعجب‌آور است که جواب این سؤال مثبت است و ایدهٔ اولیهٔ به کارگیری این ترفند، چیز جدیدی نیست و ردپای آن را می‌توان در تحقیقات دههٔ چهل میلادی و در مقالهٔ [۲۳] و یا لم اشپرنر[1] در کتاب مقدمه‌ای بر توپولوژی [۱۲، صص. ۱۱۷–۱۱۹] یافت. استرام‌کوئیست نیز در اثبات خودش به زیبایی و با تعریف درجه برای ردهٔ همولوژی مربوط به زیرمجموعه‌ای باز و بسته از سادکی چهاربُعدی که نمایانگر چهارضلعی‌های پارامتری‌شدهٔ روی خم مفروض در قضیه است، زوجیت آن مجموعه را به‌عنوان عضوی از تصویر یک همریختی میان گروه‌های همولوژی در میدان $\mathbb{Z}_۲$ مشخص می‌سازد و از آن در طی اثبات بسیار بهره می‌برد.

برای بیان دومین قضیهٔ استرام‌کوئیست شرطی هندسی ضعیف‌تر از همواری روی خم‌های قضیهٔ اصلی گذاشته می‌شود که با وجود آن همچنان حکم قضیهٔ اول برقرار است.

شرط A: برای هر نقطهٔ $\omega(x)$ از خم ω، همسایگی بازی حول $\omega(x)$ بر روی خم در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد به‌طوری‌که هیچ دو وتری از خم در این همسایگی بر هم عمود نیستند. (منظور از وتر پاره‌خطی است که دو نقطه از خم ω را به هم وصل می‌کند).

قضیه ۳.۴ (قضیهٔ دوم [۲۰]). هر خم سادهٔ بستهٔ ω در $\mathbb{R}^n$ که در شرط A صدق کند مربع‌گونی را محاط می‌کند.

در قضیهٔ مهم بعدی، از این گزاره استفاده می‌کنیم و حکمی با ضعیف‌ترین شرط ممکن، که با روشِ اثبات استرام‌کوئیست دست‌یافتنی است، برای خم‌های سادهٔ بسته در صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$ به دست آید. این شرط که موضعاً یکنوایی[2] خم نامیده می‌شود، تا به امروز از دید بسیاری از ریاضی‌دانان، بهترین شرطی است تحت آن که مسئلهٔ مربع محاطی ثابت شده است، زیرا رده‌های فراوانی از خم‌ها از جمله همهٔ خم‌های هموار، خم‌های محدب، چندضلعی‌ها، و همچنین بیشتر خم‌های تکه‌ای‌هموار $C^۱$ در صفحه را در بر می‌گیرد و وجود مربع محاطی در آن‌ها را اثبات می‌کند.

[1] Sperner's lemma [2] locally monotone

تعریف ۴.۴. خم $\omega : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ را موضعاً یکنوا گوییم هرگاه برای هر نقطهٔ $\omega(x)$ روی خم، همسایگی بازی مانند (a,b) حول x و خطی مانند $\ell(x)$ گذرنده از نقطهٔ $\omega(x)$ در صفحه وجود داشته باشد به‌طوری‌که هیچ وتری از $\omega|_{(a,b)}$ با خط $\ell(x)$ موازی نباشد.

ویژگی موضعاً یکنوایی، خاصیتی کاملاً هندسی از خم ω در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ است زیرا تنها به فضای تصویر تابع ω مربوط است و نه به نحوهٔ پارامتری‌کردن خم. تعریف ۴.۴ ماهیت هندسی این شرط را به‌خوبی آشکار می‌کند چون‌که صرفاً با موازی‌بودن در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ سروکار دارد.

قضیه ۵.۴ (قضیهٔ سوم [۲۰]). هر خم سادهٔ بسته در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ که موضعاً یکنوا باشد، مربعی را محاط می‌کند.

استرام‌کوئیست در اثبات این صورت از قضیهٔ مربع محاطی از قضیهٔ اصلی خود و از استدلال حدی دربارهٔ مجموعه‌ای از خم‌های هموار خاص که دارای مربع محاطی بزرگ‌تر از اندازه‌ای ثابت‌اند و به خم موضعاً یکنوای مفروض قضیه میل می‌کنند، بهره می‌گیرد.

این قضیهٔ استرام‌کوئیست در مورد خم‌ها با ویژگی موضعاً یکنوایی در صفحه، آن‌قدر قوی، پراهمیت، و نزدیک به حالت کلی مسئله در نظر گرفته می‌شود که حتی برخی آن را جوابی عرفاً درست برای حدس توپلیتس می‌دانند، زیرا شرط موضعاً یکنوایی برای هر خم بسته‌ای که بتوان با مداد بر روی صفحه کشید، برقرار است و درنتیجه دارای مربعی محاطی است. البته از دیدگاه تیزبین و دقیق ریاضی‌دانان، خم تعریف‌شده در صورت رسمی مسئله، بسیار مجردتر و فراتر از خم‌هایی است که ما می‌توانیم به‌صورت عملی با مداد بر روی کاغذ رسم کنیم. همچنین می‌دانیم اکثر خم‌های بسته در صفحه شکل‌هایی فرکتالی دارند و با مداد نمی‌توان آن‌ها را رسم کرد.

۵ تعمیم‌هایی از مسئله

به‌روش‌های متعددی می‌توان مسئلهٔ مربع محاطی را تعمیم داد. در این قسمت منظور ما از قابل‌محاط‌بودن چند ضلعی P در یک خم ژوردان، محاط‌شدن یک چندضلعی متشابه با P در خم مذکور است. در این حالت می‌گوییم P با تقریب متشابه‌بودن در خم مورد نظر محاط می‌شود.

مثلث‌ها

کامل‌ترین قضیه‌ای که تاکنون برای مثلث‌های محاطی در هر خم ژوردان در صفحه ارائه شده است به نیلسن[1] منسوب است [۱۶].

[1] Mark J. Nielsen

قضیه ۱.۵. اگر J خم سادهٔ بسته‌ای در صفحه و T مثلثی دلخواه باشد، آنگاه J تعداد بی‌نهایت مثلث متشابه با T را محاط می‌کند و مجموعهٔ نقاط رأس‌های این مثلث‌ها روی J چگال است.

اثبات نیلسن اثباتی خلاقانه، زیبا، و نسبتاً پیچیده است که با آنالیز ریاضی و توپولوژی مقدماتی قابل فهم است و نتیجهٔ شگفت‌انگیزی در مورد مثلث‌های محاطی در هر خم ژوردان به‌دست می‌دهد. پیش از نیلسن، مارک مِیِرسون[1] قضایای جالبی دربارهٔ مثلث‌های متساوی‌الاضلاع محاط در هر خم ژوردان واقع در صفحه، یا در هر خمینهٔ حداقل دوبُعدی همبند در $\mathbb{R}^n$، و شکل‌های دیگر اثبات کرده بود [۱۵].

چهارضلعی‌ها

در سال ۲۰۱۷ تِرِنس تائو[2]، ریاضی‌دان مشهور، با رویکردی متفاوت و مبتنی‌بر کاربرد انتگرال‌ها، مقاله‌ای طولانی شامل قضیه‌ها و حدس‌هایی دربارهٔ مسئلهٔ مربع محاطی ارائه کرد. مهم‌ترینِ این قضیه‌ها، از دید هندسه‌دانان، قضیهٔ زیر است که وجود مربع محاطی را برای ردهٔ خاصی از خم‌های ژوردان که جزء ردهٔ خم‌های ژوردان موضعاً یکنوای استرام‌کوئیست نیست اثبات می‌کند [۲۱].

قضیه ۲.۵. اگر $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ دو تابع $(1-\varepsilon)$-لیپ‌شیتسی[3] باشند که تنها در دو نقطهٔ ۰ و ۱ برخورد می‌کنند، آنگاه خم ژوردان حاصل از نمودار این دو تابع، مربعی را محاط می‌کند.

شایان ذکر است که اهمیت این مقاله فراتر از این قضیه است زیرا تمام مطالعات انجام‌شده بر روی مسئله مربع محاطی تا پیش از این، بجز تحقیقات هندسی و تحلیلی رومن کاراسِف[4]، بیشتر رویکرد توپولوژیکی را دنبال می‌کردند و رویکرد انتگرالی تائو مسیری نوین پیشِ روی پژوهشگران قرار داد.

قضیه ۳.۵. هر خم سادهٔ بسته در صفحه، مستطیلی را محاط می‌کند.

قضیهٔ مهم بالا، که در سال ۱۹۷۷ توسط وون [۲۴] ثابت شد و تنها به‌وجود حداقل یک مستطیل با نسبت اضلاع نامشخص محاط در هر خم ژوردان در صفحه اشاره می‌کند، اثبات توپولوژیکی زیبا، کوتاه، و مقدماتی دارد که از نوار موبیوس حاصل از یکسان‌سازی جفت نقاط روی خم ژوردان، تشکیل $\mathbb{R}P^2$ (فضای تصویری حقیقی دوبُعدی) توسط اجتماع آن با قرص واحد، و همچنین استفاده از این مطلب که $\mathbb{R}P^2$ را نمی‌توان در فضای $\mathbb{R}^3$ بدون برخورد با خود نشاند بهره می‌برد.

[1] Mark D. Meyerson [2] Terence Tao [3] Rudolf Lipschitz [4] Roman Karasev

اخیراً هوگلمیرِ قضیه‌های زیر را در ادامه ایدهٔ وون، با استفاده از ترفندها و مطالب پیشرفته و نوین در توپولوژی و نظریهٔ گره‌ها، اثبات کرده است [۷]. او در اثبات قضیهٔ دوم از نشاندن نوار موبیوس در فضای چهاربُعدی و این مطلب که با ثابت نگه‌داشتن یک نوار موبیوس و چرخش ۳۶۰ درجهٔ نسخه دیگری از آن تحت شرایطی خاص و در فضای چهاربُعدی، تنها در ۱/۳ این چرخش‌ها میان نوارها برخورد صورت می‌گیرد و درنتیجه ۱/۳ نسبت مستطیل‌ها در مستطیل‌های محاطی در هر خم ژوردان هموار یافت می‌شوند، استفاده می‌کند.

قضیه ۴.۵ ([۷]). اگر γ خم ژوردان C^∞ باشد، آنگاه برای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$، عدد طبیعی $k \in \{۱, ۲, \dots, n-۱\}$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که خم γ مستطیلی با نسبت اضلاع $\tan(\pi k/(۲n))$ را محاط می‌کند.

نتیجه ۵.۵. هر خم ژوردان C^∞، مستطیلی با نسبت اضلاع $r = \sqrt{۳}$ را محاط می‌کند.

قضیه ۶.۵ ([۸]). فرض کنید γ خم ژوردان C^∞ و X مجموعهٔ اعداد حقیقی $۰ \leq r \leq ۱$ باشد به‌گونه‌ای‌که γ مستطیلی با نسبت اضلاع $\tan(r\pi/۴)$ را محاط کند. در این‌صورت اندازهٔ لُبگ مجموعهٔ X حداقل ۱/۳ است.

قضیه‌ای که نسبت به حدس ۱۹.۵ صورت ضعیف‌تری دارد، از امکان محاط‌شدن مجموعهٔ همهٔ مستطیل‌ها با هر نسبت اضلاع (که زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی همهٔ چهارضلعی‌های دوری است)، در خم‌های ژوردان C^∞ حکایت دارد. این قضیهٔ مهم، که به قضیهٔ میخ‌کوب‌کردن مستطیل برای خم‌های هموار مشهور است و سال‌ها به‌صورت حدس باقی مانده بود، را گرین و لوب [۹] در سال ۲۰۲۰ اثبات کردند. این دو نفر در ادامهٔ اثبات هوگلمیر و با بهره‌گیری از چارچوب هندسهٔ همتافته[1] و این قضیه از شفچیشین [۱۰] که هیچ بطری کلاینِ لاگرانژی[2] را نمی‌توان بدون برخورد با خود در فضای چهاربُعدی با ساختار هندسهٔ همتافته به‌صورت هموار نشاند، نشان دادند که نه فقط ۱/۳ کل مستطیل‌ها، بلکه همهٔ آن‌ها (با هر نسبت اضلاع)، را می‌توان در هر خم سادهٔ بسته هموار محاط کرد.

قضیه ۷.۵. هر خم ژوردان C^∞ در صفحه، مستطیلی با نسبت اضلاع از پیش تعیین‌شدهٔ $r > ۰$ را محاط می‌کند.

همچنین، اخیراً در سال ۲۰۲۰، شوارتس [۱۸] یک دسته‌بندی سه‌گانه[3] را برای مستطیل‌های

[1] symplectic geometry [2] Lagrangian Klein bottle [3] trichotomy

محاط در خم‌های ژوردان ارائه کرده است که گامی بلندپروازانه در حل مسئلهٔ مربع محاطی به نظر می‌رسد. او در اثبات قضیهٔ خود از اتخاذ حد مناسبی از چندضلعی‌ها بهره می‌برد. حالت‌های مطرح او امکان‌هایی متمایزکننده[1] هم بر مجموعهٔ رأس‌های مستطیل‌های محاطی بر خم و هم بر مجموعهٔ مستطیل‌های محاطی از حیث نسبت اضلاع ارائه می‌دهد. او تثلیث خود را به یکی از دسته‌ها قابل تقلیل می‌داند و حدس جاه‌طلبانهٔ زیر را بیان می‌کند.

حدس ۸.۵. هر خم ژوردان در صفحه، هر مستطیل با هر نسبت اضلاع را محاط می‌کند. به‌علاوه، همهٔ نقاط خم به‌جز حداکثر چهار نقطه، رأس‌های مستطیل‌های محاطی‌اند.

بدیهی است که حدس بالا، بسیار قوی‌تر و کلی‌تر از مسئلهٔ مربع محاطی است اما حتی در حالت‌های خاص چندضلعی‌ها و خم‌های هموار هم در حد حدس است.

دو قضیهٔ زیر از نیلسن وجود مستطیل‌هایی با هر نسبت اضلاع محاط در هر خم ژوردان با شرط‌های سراسری تقارن را بیان می‌کند [۱۷].

قضیه ۹.۵. اگر J خم سادهٔ بسته‌ای در صفحه باشد که نسبت به نقطه‌ای چون Z متقارن است، آنگاه برای هر مستطیل Q مستطیلی محاط در J با مرکز Z وجود دارد که با Q متشابه است.

قضیه ۱۰.۵. اگر J خم سادهٔ بسته‌ای در صفحه باشد که نسبت به خطی چون L متقارن است، آنگاه برای هر مستطیل Q مستطیلی محاطی در J و متشابه با Q وجود دارد. وانگهی، مستطیل محاطی می‌تواند به‌گونه‌ای انتخاب شود که هریک از محورهای تقارنش بر خط L منطبق باشد.

هر چهارضلعی محاط در دایره یک چهارضلعی دوری نامیده می‌شود. چهارضلعی دوری دارای این ویژگی است که زوایای روبرویش مکمل یکدیگرند. در سال ۲۰۱۸ آکوپیان و آواکوموف قضیهٔ جالب زیر را اثبات کردند [۱].

قضیه ۱۱.۵. هر چهارضلعی دوری را می توان با تقریب متشابه بودن، در هر خم بستهٔ محدب C^1، محاط کرد.

در قضیهٔ فوق شرط C^1 بودن لازم است. برای مثال، اگر Q یک کایت با زوایای $\pi/۲$ و $۲\pi/۳$ باشد، آنگاه نمی‌توان Q را در یک مثلث متساوی‌الساقین با زوایای $\pi/۱۰$ و $۴\pi/۵$ محاط نمود. باوجوداین، اگر Q مستطیلی باشد، آنگاه شرط همواری را می‌توان حذف کرد. به‌عبارت‌دیگر [۱]:

[1] sharp

قضیه ۱۲.۵. هر مستطیل را می‌توان با تقریب متشابه بودن، در هر خم بستهٔ محدب، محاط کرد.

شایان ذکر است که برهان دو قضیهٔ بالا براساس رویکردی کاملاً غیرتوپولوژیکی است که با استفاده از قضیهٔ سارد[1] از آنالیز ،ایده و لمی کاملاً هندسی از کاراسِف و استدلال‌هایی حدی که به‌نحوی زیبا با تقریب چهارضلعی دوری مفروض Q با چهارضلعی‌های دوری εـ‌نزدیک به آن که در خم‌های اکیداً محدب C^∞ میل‌کننده به خم C^1 محدب γ محاط می‌شوند، به‌دست می‌آیند.

بنژامن ماچکه در سال ۲۰۱۸ چند قضیهٔ جالب ارائه کرد که تعمیم‌های گسترده‌ای از دو قضیهٔ فوق‌اند [۱۴].

قضیه ۱۳.۵. هر خم ژوردان محدب، هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین را با تقریب متشابه بودن محاط می‌کند. علاوه‌برآن، مجموعهٔ متشکل از تمام ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین، بزرگ‌ترین زیرمجموعه از مجموعهٔ همهٔ چهارضلعی‌هایی است که هر عضو آن دارای این ویژگی است.

به‌عبارت‌دیگر، اگر Q چهارضلعی‌ای به‌غیر از ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین باشد، آنگاه خم ژوردان محدبی وجود دارد که نمی‌توان Q را با تقریب متشابه بودن در آن محاط کرد. ازآنجاکه هر مستطیل یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است، بدیهی است که قضیهٔ ۱۲.۵ دربارهٔ مستطیل‌ها حالت خاصی از قضیهٔ ۱۳.۵ است [۱۴].

قضیه ۱۴.۵. هر خم ژوردان محدب و هموار C^1 هر چهارضلعی دوری را محاط می‌کند. به‌علاوه، این مجموعه، بزرگ‌ترین زیرمجموعه از چهارضلعی‌هایی است که هر عضو آن دارای این ویژگی است.

یعنی اگر Q چهارضلعی‌ای غیردوری باشد، آنگاه خم ژوردان محدب هموار‌ی وجود دارد که نمی‌توان Q را با تقریب متشابه بودن در آن محاط کرد.

حدس ۱۵.۵. اگر T ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین باشد، آنگاه هر خم ژوردان تکه‌ای‌خطی نسخه‌ای متشابه با T را محاط می‌کند.

حدس بالا در مورد امکان محاط‌شدنِ هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین در هر چندضلعی (محدب و مقعر) واقع در صفحه است. با وجود قضیهٔ قوی ۱۳.۵ در مورد محاط‌شدن همهٔ ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین در هر خم سادهٔ بسته محدب، حتی در مورد امکان محاط‌شدن همهٔ مستطیل‌ها با هر نسبت اضلاع (که زیرمجموعه‌ای از همهٔ ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین است)، در چندضلعی‌ای دلخواه اطلاعی در دست نیست. در قضیهٔ بعدی، حکمی کلی‌تر ارائه می‌شود که برای هر چهارضلعی

[1] Sard theorem

دوری مفروض، ردهای از خمهای ژوردان محدب را مشخص میکند که آن را محاط میکنند [۱۴].

قضیه ۱۶.۵. فرض کنید Q چهارضلعیای دوری باشد که رأسهای آن بهترتیب ساعتگرد A، B، C و D باشند، و دو زاویهٔ α و β بهترتیب زوایای حادهٔ حاصل از برخورد خطهای $(\overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{AB})$ و $(\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AD})$ باشند. دراینصورت، اگر γ خم ژوردان محدبی باشد که تمام زوایای داخلی آن بزرگتر از $\min\{\alpha, \beta\}$ باشد، آنگاه γ، Q را با تقریب متشابه بودن، محاط میکند.

توجه کنید که دو قضیهٔ ۱۳.۵ و ۱۴.۵، بیدرنگ از قضیهٔ ۱۶.۵ قابل استنتاجاند، زیرا در مورد قضیهٔ ۱۴.۵ میدانیم که خم γ هموار است اگر و فقط اگر تمام زوایای داخلی آن π باشند. بنابراین هر چهارضلعی دوری در γ محاط میشود، زیرا برای هر چهارضلعی دوری، رابطهٔ $\min\{\alpha, \beta\} < \pi$ همواره برقرار است. همچنین اگر Q در قضیهٔ ۱۶.۵ دو ضلع موازی داشته باشد، از دوری بودن آن نتیجه میشود که ذوزنقهای متساویالساقین است و $\min\{\alpha, \beta\}$ صفر میشود و درنتیجه شرط محدودکنندهٔ زوایای داخلی γ برداشته میشود و بنابراین هر خم ژوردان محدب γ هر دوزنقهٔ متساویالساقین چون Q را محاط میکند. جالب اینجاست که ماچکه که سه قضیهٔ بالا را در ادامهٔ ایده هندسی و تحلیلی کاراسِف و رویکرد انتگرالی تائو با چیرهدستی و مهارت بالایی ثابت کرده است، قضیهٔ عجیب زیر را معادل با قضیهٔ ۱۶.۵ نتیجه میگیرد [۱۴].

قضیه ۱۷.۵. هر خم ژوردان تکهایهموار[۱] C مجموعهٔ تمام ذوزنقههای متساویالساقین را، که در اینجا Q_{IsTr} مینامیم، محاط میکند اگر و فقط اگر هر خم ژوردان C^∞، Q_{IsTr} را محاط کند.

قضیهٔ ۱۶.۵، که شرطی کافی روی خمهای ژوردان محدب برای محاطشدنِ چهارضلعیهای دوری ارائه میدهد، تا امروز مهمترین قضیه در این باره است.

قضیهٔ بعدی از کاراسف است که در مورد امکان محاطشدن چهارضلعیهای دوری در خمهای هموار گزارهای جالب ارائه میدهد.

قضیه ۱۸.۵ ([۱۱]). اگر γ یک خم ژوردان هموار در صفحه باشد و Q چهارضلعیای دوری با رأسهای به ترتیب ساعتگردِ A، B، C، و D باشد، آنگاه یکی از دو حالت زیر همیشه برقرار است:

الف) یک تبدیل تشابهی حافظ جهت در صفحه وجود دارد که تصویر Q تحت آن در γ محاط میشود.

ب) دو مثلث متمایز و متشابه با مثلث ABC، مانند $A'B'C'$ و $A''B''C''$، روی خم γ

وجود دارد به‌طوری‌که اگر با اضافه کردن نقاط D' و D'' به آن‌ها چهارضلعی‌های متشابه با Q به‌دست آیند، آنگاه D' و D'' بر هم منطبق‌اند.

نکتهٔ قابل توجه در مورد مسائل حل‌نشده مربوط به مسئلهٔ مربع محاطی این است که بیشتر آن‌ها مسائلی هندسی‌اند تا توپولوژیکی. گرچه در بسیاری از موارد توپولوژی جبری حضوری پررنگ در مسائل مذکور دارد، همچنان از محدودیت‌های هندسی که بر ماهیت توپولوژیکی مسئله اعمال می‌شود، ناآگاهیم. نیاز به ایده‌های هندسی جدید، همانند آنچه کاراسِف برای قضیهٔ ۱۸.۵ ارائه کرد، بیش‌ازپیش برای حل این مسائل احساس می‌شود. حدس زیر که نمایانگر سرحد انتظار ما از چهارضلعی‌های دوری است همچنان حل‌نشده است، هرچند در سال ۲۰۲۰ در حالت خاص برای مستطیل‌ها در ۷.۵ اثبات شده است.

حدس ۱۹.۵. اگر Q چهارضلعی دوری باشد، آنگاه هر خم ژوردان C^∞ در صفحه، نسخه‌ای متشابه و هم‌جهت با Q را محاط می‌کند.

حدس بالا نشان می‌دهد که هنوز، حتی در مورد خم‌های C^∞ هم، اطمینان نداریم که بتواند هر چهارضلعی دوری را محاط بکند چه رسد به ردهٔ خم‌های C^1 که در قضیهٔ ۱۸.۵ اشاره شد. بنابراین، تا به امروز دو قضیهٔ ۱۶.۵ و ۱۸.۵ مهم‌ترین قضیه‌ها در مورد چهارضلعی‌های دوری‌اند.

سرانجام در مورد چهارضلعی‌ها، سؤال حل‌نشدهٔ زیر همچنان مطرح است.

مسئله ۲۰.۵. آیا برای هر چهارضلعی چون Q، خم ژوردانی در صفحه وجود دارد که هیچ چهارضلعی‌ای متشابه با Q را محاط نکند؟

فضاهای متری و ابعاد بالاتر

در مورد تعمیم مسئلهٔ مربع محاطی به فضاهای متری و نیز تعمیم مربع به شکل‌های دیگر، نظیر مکعب و هشت‌وجهی منتظم و مانند آن، نتایج گسترده‌ای به‌دست آمده است. یک گزارش نسبتاً کامل از این پژوهش‌ها و نتایج مربوط در [۱۳] گردآوری شده است که خوانندهٔ علاقه‌مند را به آن ارجاع می‌دهیم.

۶ سخن آخر

گرچه در نگاه اول ممکن است به‌نظر رسد این مسئله صورتی ساده و مقدماتی دارد، برای ریاضی‌دانان هنوز معمایی پیچیده و حل‌نشده است و میان دو شاخهٔ مهم هندسه و توپولوژی سرگردان است. تاکنون

روش‌ها و ترفندهای متعدد توپولوژیکی به خدمت گرفته شده‌اند تا نشان دهند رده‌های گوناگونی از این خم‌ها تعداد فرد و درنتیجه حداقل یک مربع را شامل می‌شوند ولی همهٔ آن‌ها ناآگاه از هندسهٔ حاکم بر صفحهٔ اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ (به‌منزلهٔ فضای پس‌زمینه) که بر این خم‌ها اعمال می‌شود، موفق به رازگشایی از حالت کلی مسئله در مورد خم‌های سادهٔ بسته صرفاً پیوسته، نشده‌اند. به‌نظر می‌رسد طرح و گسترش نظریه‌ای جدید که بتواند پیوندی عمیق میان هندسه و توپولوژی برقرار کند، در نهایت جوابی درخور این معمای صد ساله بیابد.

چون تا زمان نگارش این مقاله، در بین نوشته‌های فارسی هیچ مطلبی دربارهٔ مسئلهٔ مربع محاطی یافت نشد، هدف ما نگاهی، تا حد امکان کامل، به این مسئلهٔ حل‌نشده بود تا شاید خواننده‌ای با آشنایی بیشتر با این مسئلهٔ زیبا به حل کامل آن نائل آید!

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله مراتب تشکر خود را از دانشگاه کاشان برای حمایت مالی از این اثر در قالب پژوهانه به شماره ۹۸۵۹۸۷/۱ ابراز می‌دارند.

مراجع

[1] Akopyan, A., Avvakumov, S., Any cyclic quadrilateral can be inscribed in any closed convex smooth curve, *Forum Math. Sigma*, **6** (2018), e7.

[2] Christensen, C. M., A square inscribed in a convex figure (in Danish), *Matematisk Tidsskrift B*, (1950), 22–26.

[3] Emch, A., Some properties of closed convex curves in a plane, *Amer. J. Math.*, **35** (1913), 407–412.

[4] Emch, A., On the medians of a closed convex polygon, *Amer. J. Math.*, **37** (1915), 19–28.

[5] Emch, A., On some properties of the medians of closed continuous curves formed by analytic arcs, *Amer. J. Math.*, **38** (1916), 6–18.

[6] Guggenheimer, H. W., Finite sets on curves and surfaces, *Israel J. Math.*, **3** (1965), 104–112.

[7] Hugelmeyer, C., Every smooth Jordan curve has an inscribed rectangle with aspect ratio equal to $\sqrt{3}$ (2018), available at `arXiv: 1803:07417`.

[8] Hugelmeyer, C. , Inscribed rectangles in a smooth Jordan curve attain at least one third of all aspect ratios (2019), available at `arXiv:1911.07336`.

[9] Greene, J. E., Lobb, A., The rectangular peg problem (2020), available at `arXiv:2005.09193`.

[10] Shevchishin, V. V., Lagrangian embeddings of the Klein bottle and the combinatorial properties of mapping class groups, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, **73** (2009), 153–224.

[11] Karasev, R. N., A note on Makeev's conjectures, *J. Math. Sci.*, **212** (2016), 521–526.

[12] Lefschetz, S.,*Introduction to Topology*, Princeton University Press, Princeton, 1949.

[13] Matschke, B., A survey on the square peg problem, *Notices Amer. Math. Soc.*, **61** (April 2014), 346–351.

[14] Matschke, B., Quadrilaterals inscribed in convex curves (2018), available at `arXiv:1801:01945v2.`

[15] Meyerson, M. D., Equilateral triangles and continuous curves, *Fund. Math.*, **110** (1980), 1–9.
[16] Nielsen, M. J., Triangles inscribed in simple closed curves, *Geom. Dedicata*, **43** (1992), 291–297.
[17] Nielsen, M. J., Wright, S. E., Rectangles inscribed in symmetric continua, *Geom. Dedicata*, **56** (1995), 285–297.
[18] Schwartz, R. E., *A trichotomy for rectangles inscribed in Jordan loops*, *Geom. Dedicata*, **208** (2020), 177–196.
[19] Schnirelman, L. G., On some geometric properties of closed curves (in Russian), *Uspekhi Mat. Nauk*, **10** (1944), 34–44.
[20] Stromquist, W. R., Inscribed squares and squarelike quadrilaterals in closed curves, *Mathematika*, **36** (1989), 187–197.
[21] Tao, T., An integration approach to the Toeplitz square peg problem, *Forum Math. Sigma*, **5** (2017), e30.
[22] Toeplitz, O., Ueber einige Aufgaben der Analysis situs, Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden *Gesellschaft in Solothurn*, **4** (1911), 197.
[23] Tucker, A. W., Some topological properties of disk and sphere, in *Proc. First Canadian Mathematical Congress (Montreal, 1945)*, University Toronto Press, 1946, 285–309.
[24] Vaughan, H., Rectangles and simple closed curves, Lecture, University of Illinois at Urbana-Champagne.
[25] Zindler, K., Über konvexe Gebilde, *Monatsheftefür Mathematik und Physik*, **31** (1921), 25–56.

محمدعلی سیدمظفری: دانشگاه کاشان، دانشکدهٔ علوم ریاضی
رایانامه: masmozaffary@yahoo.com
علی‌اصغر رضائی: دانشگاه کاشان، دانشکدهٔ علوم ریاضی

Farhang va Andishe-ye Riyazi
Volume 41, Number 70, Spring/Summer 2022, Pages 113–130
doi: 10.30504/mct.2022.337

The Inscribed Square: A Beautiful Problem in Geometry and Topology

M. S. Mozaffary[1], the late A. Rezaei[1]

[1,2]Faculty of Mathematics, University of Kashan, Iran

Abstract. The inscribed square problem, also known as the square peg problem or the Toeplitz' conjecture, is an unsolved question in geometry: Does every plane simple closed curve contain all four vertices of some square? This is true if the curve is convex or piecewise smooth and in other special cases. The problem was proposed by Otto Toeplitz in 1911. Some early positive results were obtained by Arnold Emch and Lev Schnirelmann. As of 2022, the general case remains open. In this paper we give a brief survey of most important results in this respect.

Keywords: inscribed square problem,Toeplitz' conjecture, convex curve, simple closed curve,
Article history: Recieved 17 April 2020; Accepted 2 February 2021

[1]masmozaffary@yahoo.com

ISSN 1022-6443/© Iranian Mathematical Society