فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۱، شمارهٔ ۷۰ (بهار و تابستان ۱۴۰۱) صص. ۱۶۵ تا ۱۶۹

مثالی از یک تابع تومای یک‌به‌یک*

زولتان کانای
ترجمهٔ منصوره موسی‌پور، اسماعیل نیکوفر

چکیده. در این مقاله، طرز ساختن مثالی ملموس از تابعی پیوسته و یک‌به‌یک از نوع تابع توما روی خط حقیقی را بیان می‌کنیم.

۱ مقدمه

از قرن نوزدهم به بعد، مثال و مثال‌های نقض زیادی دربارهٔ مفهوم رسمی پیوستگی تابع‌ها لازم بود تا بتوانند ما را از دام تصورات اشتباه برهانند. در سال ۱۸۷۵، کارل یوهانس توما[۱] تابعی حقیقی تعریف کرد که در تمام نقاط گنگ پیوسته است، درحالی‌که در نقاط گویا ناپیوسته است. تابع توما به تابع ریمان و یا، نام متداولش، «تابع ذرتِ بوداده»[۲] نیز معروف است و به‌خوبی ویژگی پیوستگی–ناپیوستگی را نشان می‌دهد. بنابراین طبیعی است بپرسیم: آیا تابعی یک‌به‌یک روی خط حقیقی با همین ویژگی پیوستگی وجود دارد؟ جواب مثبت است. تناظری یک‌به‌یک از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ ارائه می‌کنیم که در تمام نقاط گنگْ همانی و درنتیجه پیوسته است، اما در نقاط گویا ناپیوسته است. به‌علاوه، این تابع نیم‌پیوستهٔ بالایی و درنتیجه یک تابع بِر[۳] از ردهٔ ۱ است. پیوستگی تابع از نوع ذرتِ بوداده را می‌توان با استفاده از نکته‌ای از نظریهٔ اعداد مرتبط با تابع یاکوپستال[۴] به دست آورد.

عبارات و کلمات کلیدی: پیوستگی، تابع توما، تابع یک‌به‌یک، تابع یاکوپستال
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۵/۱۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۶/۲۷
*Kánnai, Z., A one-to-one popcorn function, *Amer. Math. Monthly*, **124** (2017), 746–748.

[1]Carl Johannes Thomae [2]popcorn function [3]René-Louis Baire [4]Ernst Jacobsthal

doi: 10.30504/mct.2022.339

تابع دیریکلهٔ $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$d(x) = \begin{cases} ۱ & \text{گویا } x \\ ۰ & \text{گنگ } x \end{cases}$$

در هیچ نقطه‌ای از خط حقیقی پیوسته نیست. تابع توما $t : [۰, ۱] \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$t(x) = \begin{cases} ۰ & \text{گنگ } x \\ \frac{۱}{q} & \text{نسبت به هم اول‌اند } q \text{ و } p \text{ و } x = \frac{p}{q} \end{cases}$$

در تمام نقاط گنگ پیوسته است و در تمام نقاط گویا ناپیوسته است (می‌دانیم که مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی هر تابع همیشه $\mathcal{F}_\sigma$، یعنی اجتماع شمارا از مجموعه‌های بسته، است. بنابراین، تابعی که در همهٔ نقاط گویا پیوسته و در همهٔ نقاط گنگ ناپیوسته باشد، وجود ندارد). فکر ساختن چنین توابعی برمبنای تفاوت بین تصوّر گمراه‌کننده ترسیمی و تصوّر دقیق از مفهوم پیوستگی است. توجه کنید که تابع $h(x) = x + d(x)$ مثالی خاص از تناظری یک‌به‌یک از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است که در هر x حقیقی ناپیوسته است. ازاین‌رو انتظار داریم که روشی طبیعی برای به دست آوردن یک دوسویی وجود داشته باشد که در نقاط گنگ پیوسته و در نقاط گویا ناپیوسته باشد. متأسفانه، تناظر مشابه $x \to x + t(x)$ دوسویی نیست (مثلاً، ۱/۲ هم تصویر ۱/۴ است و هم تصویر ۰.۳/۸) اما مثال بعدی خواستهٔ ما را برآورده می‌کند. تابع دوسویی $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را تعریف می‌کنیم که در نقاط گنگ همانی است و نشان می‌دهیم در نقاط گنگ پیوسته و در نقاط گویا ناپیوسته و همچنین در همهٔ نقاط نیم‌پیوستهٔ بالایی است.

۲ طرز ساخت

گیریم $\mathbb{N}$ مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت و $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ تمام اعداد صحیح باشد. برای هر $q \in \mathbb{N}$ بنویسید

$$H_q := \left\{ \frac{p}{q} : \text{نسبت به هم اول‌اند } q \text{ و } |p| \text{ و } p \in \mathbb{Z} \right\}.$$

توجه کنید که $H_۱ = \mathbb{Z}$ و

$$\bigcup_{q=۱}^{\infty} H_q = \mathbb{Q}$$

افرازی برای $\mathbb{Q}$ است. اعضای مجموعهٔ H_q را با ترتیبِ زیر در فهرستی وارد می‌کنیم: فرض کنیم $a_۰(q)$ کوچک‌ترین عضو نامنفی H_q باشد (توجه کنید که H_q شامل نقاط تنها[1] است). اکنون

[1] isolated points

اعضایی از H_q را که بزرگ‌تر از $a_۰(q)$ هستند با ترتیب صعودی

$$a_۱(q) < a_۲(q) < a_۳(q) < \cdots$$

و اعضای منفی مجموعهٔ H_q را گام‌به‌گام به‌صورت نزولی

$$a_{-۱}(q) > a_{-۲}(q) > a_{-۳}(q) > \cdots$$

در فهرستی وارد می‌کنیم (بااین‌حال، تناظر $k \to a_k(q)$ روی $\mathbb{Z}$ صعودی است). تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را به‌صورتِ زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{گنگ } x \\ a_{n+۱}(q) & \text{برای } x = a_n(q) \text{ ای}(n,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \end{cases}$$

این تابع روی $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ همانی، و به‌وضوح روی $\mathbb{R}$ دوسویی است. تنها موضوع نابدیهی درموردِ این تابع، اثبات پیوستگی f در نقاط گنگ است. برای دستیابی به این هدف، به ویژگی‌های تابع یاکوپستال نیاز داریم.

۳ تابع یاکوپستال

در سال ۱۹۶۰، اِرنست یاکوپستال [۲] تابعی را به‌این‌صورت تعریف کرد: گیریم $g(n)$ کوچک‌ترین عدد صحیح mای باشد به‌گونه‌ای‌که هر دنباله از m عدد صحیح متوالی، شامل عدد صحیح اولی نسبت به n است؛ به‌عبارت‌دیگر، $g(n)$ بزرگ‌ترین فاصلهٔ بین اعداد صحیح متوالی است که نسبت به n اول باشند. این تابع $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را تابع یاکوپستال می‌نامند. در سال ۱۹۷۸، خنریک ایوانیتس[1] نشان داد [۲] که برای هر عدد صحیح و مثبتی مانند n داریم

$$g(n) \leq C \log^۲ n$$

که در آن C ثابتی مناسب است. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{n} = ۰.$$

[1] Henryk Iwaniec

۴ اثبات پیوستگیِ نوع تومای تابع f

بنابه تعریف $g(n)$ در میان اعداد صحیحی که نسبت به عدد معیّن $q \in \mathbb{N}$ اول هستند، فاصلهٔ بین دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اول کرانی مثل $g(q)$ دارد. بنابراین فاصلهٔ بین دو عضو متوالی از مجموعهٔ H_q کران‌دار به $g(q)/q$ است. به‌ویژه، برای هر $n \in \mathbb{Z}$ و $q \in \mathbb{N}$ داریم

$$\frac{۱}{q} \leq a_{n+۱}(q) - a_n(q) \leq \frac{g(n)}{q}$$

یعنی برای هر $x \in H_q$ داریم

$$\frac{۱}{q} \leq f(x) - x \leq \frac{g(q)}{q}.$$

ناپیوستگی تابع در نقاط گویا ابتدا نشان می‌دهیم که f در نقاط گویا ناپیوسته است. فرض کنید $x \in \mathbb{Q}$. دراین‌صورت اندیس qای وجود دارد که $x \in H_q$. اکنون با آخرین تخمینی که در بالا به‌دست آمد نتیجه می‌شود که تصویر هر نقطهٔ گنگ $y \in (x - \frac{۱}{۲q}, x + \frac{۱}{۲q})$ تحت تابع f در خارج از بازهٔ $(f(x) - \frac{۱}{۲q}, f(x) + \frac{۱}{۲q})$ قرار دارد. یعنی f در x ناپیوسته است.

اثبات رابطهٔ $\lim_{y\to x} f(y) = x$ گیریم $x \in \mathbb{R}$ و ε عدد مثبت دلخواهی باشد. بنابه رابطهٔ حدی تابع یاکوپستال g، اندیس $q_۰$ را می‌توان طوری انتخاب کرد که برای هر $q \geq q_۰$ داشته باشیم

$$\frac{g(q)}{q} < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

چون همهٔ مجموعه‌های H_q حول x موضعاً متناهی[۱] هستند، بنابراین شعاع مثبت $\delta \leq \varepsilon/۲$ را می‌توان طوری پیدا کرد که برای هر $q < q_۰$ داشته باشیم

$$((x - \delta, x + \delta) \setminus \{x\}) \cap H_q = \emptyset.$$

ثابت دلخواه $y \in (x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\}$ را درنظر می‌گیریم. اگر y گنگ باشد، آنگاه $f(y) = y$ در همان همسایگی باقی می‌ماند، ازاین‌رو $|x - f(y)| < \delta < \varepsilon$.

اگر y گویا باشد، آنگاه برای اندیسی مناسب مانند q، $y \in H_q$. چون $y \in (x-\delta, x+\delta)$، پس با توجه به نحوهٔ انتخاب δ داریم $q \geq q_۰$. بنابراین

$$۰ < f(y) - y \leq \frac{g(q)}{q} < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

[1] locally finite

درنتیجه

$$|x-f(y)| \leq |x-y|+|y-f(y)| < \frac{\varepsilon}{۲}+\frac{\varepsilon}{۲}=\varepsilon$$

که نشان می‌دهد برای هر $x \in \mathbb{R}$، $\lim_{y\to x} f(y)=x$.

بنابراین، چون $f(x) \geq x$، بی‌درنگ نتیجه می‌شود که f نیم‌پیوستهٔ بالایی است؛ پس حد نقطه‌ای دنباله‌ای از توابع پیوسته است. برای هر نقطهٔ $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ داریم $f(x)=x$، پس f در همهٔ نقاط گنگ پیوسته است.

این تابع f را تابع توما_یاکوپستال می‌نامیم. توجه کنید که با یک تغییر جزئی در این نمونه (با جابه‌جایی دوبه‌دو در هر H_q)، تابع به‌دست‌آمده برگشتی [خودوارون] خواهد شد، اما دیگر نیم‌پیوسته بالایی نیست. الگوی نمودار این تابع شبیه به «کهکشان راه شیری»[۱] است، ازاین‌رو آن را می‌توان تابع «راه شیری» نیز نامید.

مراجع

[1] Iwaniec, H., On the problem of Jacobsthal, *Demonstratio Math.*, **11** (1978), 225–231.

[2] Jacobsthal, E., Über Sequenzen ganzer Zahlen, von denen keine zu n teilerfremd ist. I, *Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim.*, **33** (1961), 117–124.

منصوره موسی‌پور: دانشگاه فرهنگیان، گروه ریاضی

رایانامه: m.mosapour@cfu.ac.ir

اسماعیل نیکوفر: دانشگاه پیام نور تهران، گروه ریاضی

رایانامه: nikoufar@pnu.ac.ir

[1] Milky Way

Farhang va Andishe-ye Riyazi
Volume 41, Number 70, Spring/Summer 2022, Pages 165–169
doi: 10.30504/mct.2022.339

A One-to-One Popcorn Function

Z. Kánnai
Translated by M. Mousapour[1], E. Nikoufar[2]

[1]Department of Mathematics, Farhangian University, Iran
[2]Department of Mathematics, Payame Noor University, Iran

Abstract. A palpable example for a one-to-one Thomae-type popcorn continuous function of the real line is constructed.

Keywords: one-to-one function, Thomae-type function, continuity, Jacobsthal function
Article history: Recieved 2 August 2020; Accepted 17 September 2020

[1]m.mosapour@cfu.ac.ir
[2]nikoufar@pnu.ac.ir

ISSN 1022-6443/