

# طولانی‌ترین زیر دنباله‌های صعودی و مدل الدوس - دیاکونیس - همرزلی\*

فریدون رضاخانلو

مترجم: یوسف امیرارجمند

## مقدمه

بحث را با توصیف یک مسأله کلاسیک ترکیبیات شروع می‌کنیم. فرض می‌کنیم  $S_n$  مجموعه جایگشت‌های مجموعه  $\{1, 2, \dots, n\}$  باشد. به ازای هر جایگشت

$$\Pi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

می‌گوییم  $n$  یک زیردنباله صعودی است هرگاه

$$\Pi(i_1) < \Pi(i_2) < \dots < \Pi(i_k).$$

مثلا جایگشت

$$\Pi(1) = 4, \Pi(2) = 9, \Pi(3) = 2, \Pi(4) = 5, \Pi(5) = 6,$$

$$\Pi(6) = 10, \Pi(7) = 1, \Pi(8) = 7, \Pi(9) = 8, \Pi(10) = 3$$

یا به عبارت ساده‌تر

$$7, 3, 10, 1, 4, 5, 8, 9, 2, 6$$

تعداد زیادی زیردنباله صعودی دارد، اما دوتای از آنها دارای بیشترین طول ممکن‌اند که عبارتند از

$$3, 4, 5, 8, 9 \quad , \quad 1, 4, 5, 8, 9$$

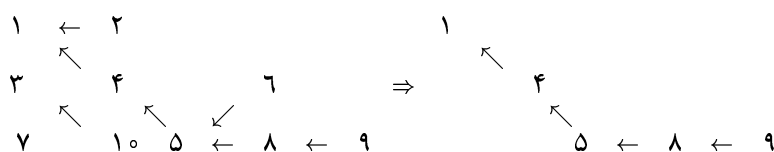
از اینجا، نگاشت  $L_n: S_n \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  تعریف می‌شود که در آن طول طولانی‌ترین

\*) D. J. Aldous - P. Diaconis - Hammersley

زیردنباله صعودی هر جایگشت در  $S_n$  است.  $L_n$  در یک نوع فال ورق نیز دیده می‌شود که ذکر آن در اینجا بی‌مناسبت نیست. یک دست ورق شامل  $n$  ورق را در نظر می‌گیریم که از ۱ تا  $n$  شماره‌گذاری شده‌اند. ورق‌ها را بُر می‌زنیم و فالی با قواعد زیر تعریف می‌کنیم: ورقی با شماره پایین‌تر را می‌توانیم روی ورقی با شماره بالاتر قرار دهیم و یا این که با آن، ستون جدیدی در سمت راست ستون‌های موجود ایجاد کنیم. اگر هدف این باشد که طوری بازی کنیم که در انتها تعداد ستون‌ها حداقل ممکن باشد، در این صورت دقیقاً  $L_n$  ستون باقی خواهد ماند. در واقع، الگوریتم ساده‌ای برای رسیدن به این هدف وجود دارد. استراتژی طماع این کار را انجام می‌دهد. بر طبق این استراتژی، همیشه باید ورق جدید را در آخرین ستون ممکن دست چپ قرار داد. اگر این استراتژی را در مورد جایگشت بالا به کار ببریم، خواهیم داشت

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & & & & \\ & 3 & 4 & & 6 & & \\ 7 & 10 & 5 & 8 & 9 & & \end{array}$$

واضح است که اگر  $\Pi(i_1) < \Pi(i_2) < \dots < \Pi(i_k)$  یک زیردنباله صعودی باشد، در این صورت  $k$  نمی‌تواند از تعداد ستون‌ها بیشتر باشد، زیرا  $\Pi(i_{r+1})$  باید در ستون سمت راست ستونی گذاشته شود که در آن  $\Pi(i_r)$  قرار دارد. از طرف دیگر، می‌توانیم با استفاده از استراتژی طماع، طولانی‌ترین زیردنباله صعودی‌ای را تولید کنیم که از هر ستون یک عضو در بر دارد. این کار به ترتیب زیر قابل انجام است: هرگاه ورقی را در ستونی غیر از ستون اول قرار می‌دهیم، پیکانی از آن ورق به بالاترین ورق ستون قبل از آن وصل می‌کنیم. سپس از بالاترین ورق آخرین ستون دست راست شروع و پیکان‌ها را تا به آخر تعقیب می‌کنیم. برای نمونه، در مثال قبل دنباله زیر را به دست می‌آوریم:



که زیردنباله صعودی ۱, ۴, ۵, ۸, ۹ را تولید می‌کند. این فال را با ورق‌های بُرخورده می‌گیریم. این بدان معناست که  $\Pi$  به طور یکنواخت از  $S_n$  انتخاب می‌شود. به عبارت دیگر، احتمال یکنواخت  $\mathbb{P}_n$  را بر  $S_n$  تعریف می‌کنیم به طوری که هر  $\Pi \in S_n$  با احتمال  $1/n!$  انتخاب می‌شود. می‌خواهیم رفتار  $L_n$  را وقتی  $n \rightarrow \infty$  بررسی کنیم. نتایج زیر اکنون قضیه‌هایی کلاسیک به حساب می‌آیند.

قضیه ۱.۱. (ورشیک - کِروف، لوگان - شپ<sup>۱</sup>)

$$L_n = 2\sqrt{n} + o(1), \quad n \rightarrow \infty$$

1) Vershik-Kerov, Logan-Shepp

به عبارت دقیق‌تر، به ازای  $\epsilon > 0$  داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n \left( \left| n^{-\frac{1}{4}} L_n - \sqrt{2} \right| > \epsilon \right) = 0 \quad \square$$

قضیه ۲.۱. (بیک - دفت - یوهانسون<sup>۱</sup>)

$$L_n = \sqrt{2}\sqrt{n} + \sqrt{2}n^{\frac{1}{4}} + o(n^{\frac{1}{4}}), \quad n \rightarrow \infty$$

به عبارت دقیق‌تر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n \left( \frac{L_n - \sqrt{2}\sqrt{n}}{n^{\frac{1}{4}}} \leq x \right) = F(x)$$

که در آن

$$F(x) = \exp \left( - \int_x^\infty (x-t) q^\vee(t) dt \right)$$

در این عبارت  $q$  تابع  $\Pi$  پن لوه<sup>۲</sup> است که در معادله دیفرانسیل

$$q''(x) = xq(x) + \sqrt{2}q^\vee(x)$$

با شرط مرزی  $q(x) \sim A_i(x)$  صدق می‌کند. در اینجا  $A_i(x)$  تابع آیری<sup>۳</sup> است.  $\square$

قانون  $F$  به توزیع تریسی - ویدام<sup>۴</sup> شهرت دارد و این به سبب کارهای قبلی آنهاست. تریسی - ویدو [TW] همین قضیه را در مورد بزرگترین مقدار ویژه یک ماتریس هرمیتی  $n \times n$  تصادفی به دست آورده بودند.

در این سخنرانی‌ها قضیه ۱.۱ را اثبات می‌کنیم و با بهره‌گیری از استدلال‌های احتمالاتی که با روش‌های اثبات اولیه این قضیه‌ها تفاوت دارد، برخی از نتایج قضیه ۲.۱ را مورد بحث قرار می‌دهیم. در بخش ۲، به بحث در مورد مدل هم‌مرزلی و گونه پیوسته آن که توسط آلدوس - دیاکونیس [AD1] تعریف شده است می‌پردازیم و چگونگی استفاده از مدل‌های تصادفی را برای بررسی  $L_n$  بیان می‌کنیم.

## ۲. دستگاه ذرات هم‌مرزلی

هم‌مرزلی دستگاه ذرات ساده‌ای را تعریف کرد که می‌توان برای بررسی  $L_n$  از آن استفاده کرد. برای تعریف این دستگاه، ابتدا نکته ساده‌ای را مورد توجه قرار می‌دهیم: اگر نقاط  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$  را به طور مستقل و یکنواخت انتخاب کنیم، در این صورت این انتخاب، نگاشتی مانند  $\Pi \in S_n$  القا می‌کند که بر طبق  $\mathbb{P}_n$  توزیع شده است. دقیق‌تر بگوییم، فرض می‌کنیم نقاط  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$  متمایز باشند. این نقاط را می‌توان به صورت

$$0 \leq x_{\Pi^{-1}(1)} < x_{\Pi^{-1}(2)} < \dots < x_{\Pi^{-1}(n)} \leq 1$$

1) Baik-Deift-Johansson 2) Painlevé 3) Airey 4) Tracy-Widom

مرتب کرد که این ترتیب، جایگشت  $(\Pi(1), \Pi(2), \dots, \Pi(n))$  را القا می‌کند. از آنجا که به ازای هر  $\Pi$  داریم

$$|\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \Pi \text{ را القا می‌کند}\}| = \frac{1}{n!}$$

در نتیجه قانون  $\Pi = \Pi_{x_1, x_2, \dots, x_n}$  همان  $\mathbb{P}_n$  است. نقاط  $x_1, x_2, \dots, x_n$  را می‌توان مواضع  $n$  ذره دانست. اکنون می‌خواهیم دستگاهی از ذرات برهمکنش‌کننده معرفی کنیم که در زمان  $n$  تعداد  $L_n$  ذره در آن تولید می‌شود. در واقع، خواهیم توانست تمامی متغیرهای تصادفی را در یک فضای احتمال واحد بسازیم. برای این کار، قانون دنباله  $x_1, x_2, \dots$  در  $[0, 1]$  متشکل از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت را با  $\mathbb{P}$  نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم  $w = (x_1, x_2, \dots)$  چنین دنباله‌ای باشد، دستگاهی از ذرات را با قواعد زیر تعریف می‌کنیم: اگر در مرحله  $n$  ام دستگاه ذرات عبارت از نقاطی در  $X_n \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  باشد، در مرحله  $n+1$  ام، نزدیکترین ذره‌ای در  $X_n$  که در سمت راست  $X_{n+1}$  قرار دارد نابود می‌شود. اگر چنین ذره‌ای وجود نداشته باشد، قرار می‌دهیم  $X_{n+1} = X_n \cup \{x_{n+1}\}$ .

ادعای ما این است که توزیع  $X_n$  با توزیع  $L_n$  یکسان است. در واقع اگر ذرات نابود شده را نگه می‌داشتیم و در بالای ذره جدید قرار می‌دادیم، همان ستون‌های فال ورق را به دست می‌آوردیم؛ در غیر این صورت، آنچه در  $X_n$  باقی می‌ماند عبارت است از ورق‌های زیرین ستون‌ها.

تا اینجا یک دستگاه ذرات برهمکنش‌کننده در  $[0, 1]$  با زمان گسسته ساخته‌ایم. اکنون به توصیف دستگاهی از ذرات می‌پردازیم که یک فرایند مارکوف با زمان پیوسته است و به یک معنا، مشابه زمان پیوسته مدل همرزلی است. این فرایند را مدل آلدوس - دیاکونیس - همرزلی یا به اختصار مدل ADH می‌نامیم. واضح است که برای گذار به زمان پیوسته به یک فرایند نقطه‌ای پواسن نیاز داریم، زیرا می‌خواهیم فرایند خاصیت مارکوفی داشته باشد. معلوم شده است که اگر متغیرهای فضا را نیز پواسنی کنیم، می‌توانیم  $\mathbb{R}^+$  را جایگزین  $[0, 1]$  کنیم. حاصل، یک فرایند فضا - زمان نقطه‌ای پواسن خواهد بود. یادآور می‌شویم که یک فرایند پواسن در  $\mathbb{R}^+$  با شدت  $\lambda$ ، یک اندازه احتمال  $\mathbb{P}$  بر روی فضای  $\Omega$  شامل زیرمجموعه‌های گسسته  $\mathbb{R}^+$  با ویژگی‌های زیر است:

(i) اگر  $\mathfrak{N}_A(w) = \#(A \cup w)$ ، آنگاه  $\mathfrak{N}_A$  یک متغیر تصادفی پواسن با شدت  $\lambda$  است:

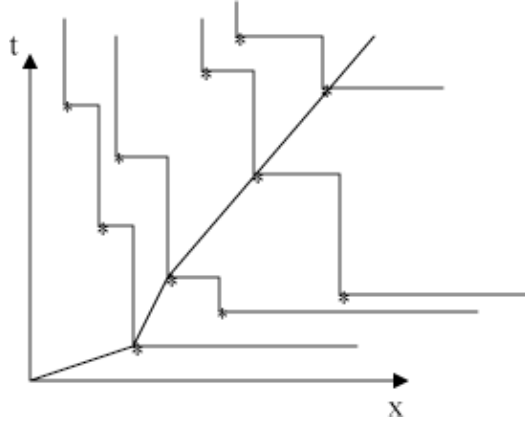
$$\mathbb{P}(\mathfrak{N}_A = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda |A|}$$

(ii) قانون  $\mathbb{P}(\cdot | \mathfrak{N}_A = n)$  را اندازه یکنواخت

$$\frac{1}{|A|^n} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

تعیین می‌کند. (در اینجا  $x_1, x_2, \dots, x_n$  برجسب ذرات‌اند، اما در مورد  $w$  این برجسب‌ها را در نظر نمی‌گیریم و در عوض مجموعه  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  را مورد توجه قرار می‌دهیم.)

فرض می‌کنیم  $w$  معلوم باشد، می‌توانیم دستگاهی از ذرات برهمکنش کننده در  $\mathbb{R}^+$  تعریف کنیم که در ابتدا تهی است.



شکل ۱. \*ها نقطه‌های پواسنی هستند.

نقطه ثابت  $x > 0$  را تثبیت و  $\vec{\eta}(t, x)$  را تعریف می‌کنیم که به ازای هر  $t$  زیرمجموعه‌ای متناهی از  $[0, x]$  است. ابتدا نقطه‌ای را در  $([0, x] \times \mathbb{R}^+)$  نشان می‌کنیم که مختصه  $t$  آن کوچک‌ترین باشد، مثلاً نقطه  $(x_1, t_1)$ . سپس قرار می‌دهیم  $\vec{\eta}(x, t) = \{x_1\}$  و آن را خلق یک ذره در  $x_1$  در زمان  $t_1$  به حساب می‌آوریم. پس از آن، نقطه دیگری را در  $w^*$  نشان می‌کنیم که بعد از نقطه اول دارای کوچک‌ترین مختصه  $t$  باشد، مثلاً نقطه  $(x_2, t_2)$  و داریم  $t_2 > t_1$  (این کار همیشه با احتمال ۱ صورت می‌گیرد). اگر  $x_2 > x_1$ ، در این صورت ذره جدیدی در  $x_2$  خلق شده است به طوری که  $\vec{\eta}(x, t_2) = \{x_1, x_2\}$ ؛ در غیر این صورت  $x_1 > x_2$  و ما  $x_1$  را به  $x_2$  می‌بریم (یا  $x_1$  را نابود می‌کنیم) به طوری که  $\vec{\eta}(x, t_2) = \{x_2\}$ . این روند را ادامه می‌دهیم: اگر  $w^*$  شامل نقاط  $(x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots$  با  $t_1 < t_2 < \dots$  شود و به ازای  $t = t_k$  داشته باشیم  $\vec{\eta}(x, t) = \{y_1, y_2, \dots, y_l\}$ ، در این صورت، به شرط این که هیچ  $d$ -ذره‌ای در سمت راست  $d$  نباشد، داریم

$$\vec{\eta}(x, t_k+) = \vec{\eta}(x, t_k-) \cup \{x_k\}$$

در غیر این صورت، نزدیک‌ترین  $y$ -ذره‌ای را که در سمت راست  $x_k$  قرار دارد به  $x_k$  منتقل می‌کنیم. حال نقطه  $(x, t) \in (\mathbb{R}^+)^2$  را تثبیت می‌کنیم و نقاط پواسون واقع در  $[0, x] \times [0, t]$  را با  $(x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots, (x_n, t_n)$  مشخص می‌کنیم که در آن  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ . بنابراین  $n$  تصادفی است و توزیع آن مانند یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر  $xt$  است، یعنی  $n = \aleph_{[0, x] \times [0, t]}(w)$

$$\mathbb{P}(n(w) = n) = e^{-xt} \frac{(xt)^n}{n!}$$

یادآور می‌شویم که  $\mathbb{P}(\cdot | n(w) = n)$  عبارت است از اندازه یکنواخت در  $[\circ, x] \times [\circ, t]$ . در صورتی که  $t$  - مختصه‌ها مشخص شوند،  $x$  - مختصه‌ها به‌طور یکنواخت در  $[\circ, x]$  توزیع می‌شوند. مختصه‌های  $x_1, \dots, x_n$  که به  $[\circ, x]$  تعلق دارند، جایگشت  $\Pi \in S_n$  را القاء می‌کنند به طوری که

$$x_{\Pi^{-1}(1)} < x_{\Pi^{-1}(2)} < \dots < x_{\Pi^{-1}(n)}$$

از آنجا که  $x_i$ ها مستقل‌اند و به‌طور یکنواخت توزیع شده‌اند، توزیع جایگشت القا شده بر طبق  $\mathbb{P}_n$  خواهد بود. اکنون نشان می‌دهیم که در واقع  $L_n(\Pi) = \#\eta(x, t)$ ، یعنی مقدار ذرات در زمان  $t$  اندازه طولانی‌ترین زیر دنباله صعودی  $\Pi$  را تعیین می‌کند. برای این کار کفایت مشاهده کنیم که یک زیر دنباله صعودی  $i_1 < i_2 < \dots < i_l$  بدین معناست که  $x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_l}$  یا به عبارت دیگر، یک مسیر بالا رونده از  $(\circ, \circ)$  به  $(x, t)$  وجود دارد که از نقاط پواسن می‌گذرد. می‌توانیم مسیر هر ذره را در فضا - زمان با استفاده از خطوط قائم و خطوط افقی رسم کنیم به طوری که هر پاره خط افقی نشان دهنده پرش خود به خود یک ذره و هر پاره خط عمودی نشان دهنده فاصله زمانی باشد که در طی آن ذره در یک مکان متوقف است. اما تعداد کل ذرات،  $\#\overrightarrow{\eta}(x, t)$  در زمان  $t$  در  $[\circ, x]$  دقیقاً برابر است با تعداد مسیرهای فضا - زمان که این خود با تعداد نقاط پواسن که بر روی طولانی‌ترین مسیر بالا رونده از  $(\circ, \circ)$  به  $(x, t)$  قرار دارند، یکی است. به جای  $\#\overrightarrow{\eta}(x, t)$  می‌نویسیم  $h(x, t)$ . در این صورت به‌ازای هر  $w$  داریم

$$h(x, t; w) = L_{\mathbb{N}(x, t; w)}(\Pi(w)) \quad (۱)$$

که در آن  $\mathbb{N}(x, t; w)$  تعداد نقاط پواسن در  $[\circ, x] \times [\circ, t]$  و  $\Pi(w)$  عبارت است از جایگشت القا شده وابسته به این نقاط. می‌دانیم که بر طبق قانون اعداد بزرگ، برای فرایندهای پواسن تقریباً به‌طور حتم

$$\lim_{x, t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{N}(x, t)}{xt} = ۱ \quad (۲)$$

یا

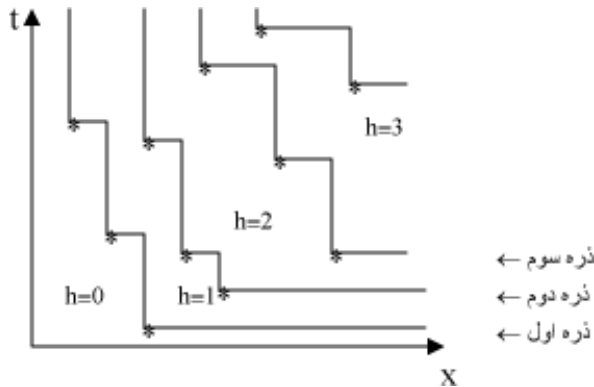
$$\lim_{\epsilon \rightarrow \circ} \epsilon^2 \mathbb{N}\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon}\right) = xt. \quad (۳)$$

در نتیجه قضیه ۱.۱ معادل است با این که بگوئیم تقریباً به‌طور حتم

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \circ} \epsilon h\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon}\right) = 2\sqrt{xt}.$$

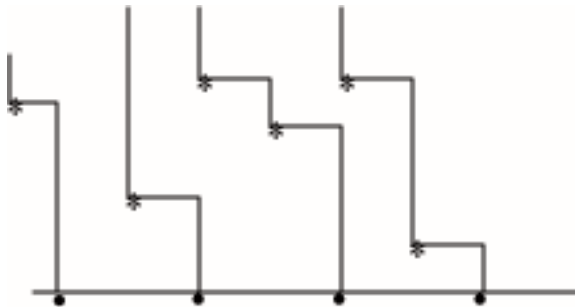
در بخش ۳ رابطه (۳) را به‌طور شهودی اثبات خواهیم کرد. در واقع، در مسیرهای فضا - زمانی

ذرات مجموعه‌های تراز تابع  $h : (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{N}$  هستند.



شکل ۲. مجموعه‌های تراز  $h$

مثلاً ذره‌ای وجود دارد که ابتدا در  $+\infty$  است و به تدریج که  $t \rightarrow +\infty$ ، ذره به  $0$  نزدیک می‌شود. اگر مسیر این ذره را رسم کنیم منحنی‌ای به دست می‌آوریم که از پاره‌خط‌های عمودی و افقی تشکیل شده است و در زیر آن هیچ نقطه پواسنی وجود ندارد. اما در هر یک از  $L$ -گوشه‌هایش یک نقطه پواسن واقع است. این ذره را می‌توانیم ذره اول بنامیم و همین طور  $n$  امین ذره را تعریف می‌کنیم. می‌توانیم  $h(x, t; w)$  را یک تابع ارتفاع تعبیر کنیم که با گذشت زمان به صورت تصادفی رشد می‌کند. آنچه که ساخته‌ایم دارای یک تابع ارتفاع اولیه بسیار خاص است که تنها برای  $x > 0$  تعریف شده است. این مسأله را می‌توان در  $\mathbb{R}$  در نظر گرفت و از یک فرایند نقطه‌ای پواسن در  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$  برای ساختن  $h$  و یا معادل آن، یک دستگاه ذرات متناظر با داده‌های اولیه دلخواه، استفاده کرد. ابتدا دستگاه ذرات را توصیف خواهیم کرد. با یک زیر مجموعه گسسته از  $\mathbb{R}$  که مکان‌های اولیه ذرات را نمایش می‌دهد شروع می‌کنیم.



شکل ۳

مکان ذرات را با  $\dots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \dots$  نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم

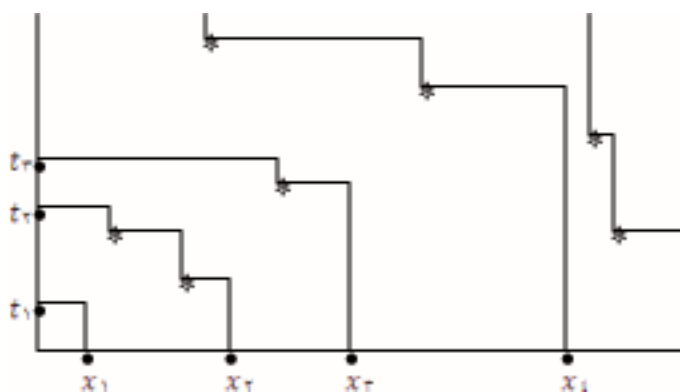
$$\lim_{i \rightarrow \pm\infty} x_i = \pm\infty$$

در این صورت، آفرینش ذره وجود نخواهد داشت و از آنجا که نقطه پواسن \* بین  $x_i$  و  $x_{i-1}$  ظاهر می‌شود، ذره  $i$  ام به مکان \* می‌جهد. (نگاه کنید به شکل ۳.)

این بخش را با شرح نوع دیگری از مدل ADH به پایان می‌رسانیم. این نوع را گروئن بوم [G] مورد مطالعه قرار داد که به صورت زیر است. یک فرایند پواسنی با شدت ۱ در  $(\mathbb{R}^+)^2$  در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم مجموعه‌ای از ذرات (یا چشمه‌ها) در  $t = 0$  در مکان‌های  $x = 0$  و مجموعه‌ای از حفره‌ها در  $0 < t_1 < t_2 < \dots$  بر روی خط مرزی  $x = 0$  قرار دارند. فرض می‌کنیم

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty.$$

در اینجا هم هرگاه یک نقطه پواسن بین  $x_i$  و  $x_{i-1}$  قرار گیرد،  $x_i$  را به مکان \* منتقل می‌کنیم. به علاوه، اگر در زمان  $t_i$  ذره‌ای بین  $0$  و  $x_j$  قرار نداشته باشد،  $x_j$  را خارج می‌کنیم، یعنی اولین ذره از طریق مبدأ از دستگاه خارج می‌شود.



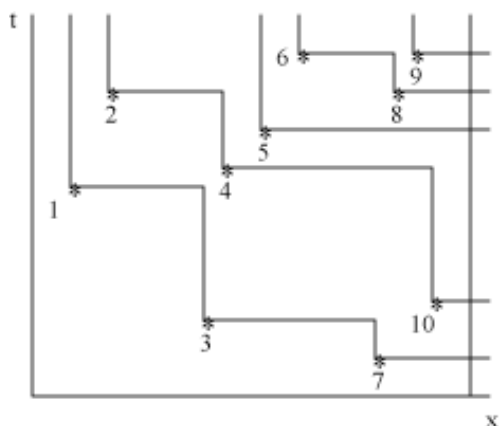
شکل ۴

در بخش‌های بعد چندین حد مقیاس برای مدل ADH و انواع آن را مورد بحث قرار خواهیم داد.

در پایان این بخش، به نکته‌ای در مورد طول ستون‌ها در فال ورق که با استراتژی طماع به دست می‌آید و همچنین طول مسیرها در فرایند ADH اشاره می‌کنیم. در واقع اگر  $n$  نقطه پواسن در  $[0, t] \times [0, x]$  داشته باشیم، آنگاه تعداد نقاط پواسن در مسیر ذره  $z$  ام دقیقاً برابر خواهد بود با تعداد



ورق‌ها درستون زام.



شکل ۵

در شکل ۵ پیکربندی ADH متناظر با جایگشت بخش ۱ را ملاحظه می‌کنیم.

### ۳. حد هیدرودینامیکی

در یک نوع مدل ADH، ذرات را در مکان‌های  $x_i$  فرض می‌کنیم با این شرط که  $x_i < x_{i+1}$  و

$$\lim_{i \rightarrow \pm\infty} x_i = \pm\infty$$

با استفاده از یک فرایند پواسن با شدت ۱ در نیم‌صفحه بالایی، دستگاهی از ذرات با برهمکنش  $(x_i(t) : i \in \mathbb{Z})$  تعریف کردیم که در  $t = 0$  با پیکربندی اولیه ما تطبیق داشت و رابطه  $x_i(t) < x_{i+1}(t)$  در مورد آن در تمام زمان‌ها صادق بود. اکنون دو حد مقیاس را تعریف می‌کنیم که می‌توان آنها را در [AD1]، [V] و [S1] یافت. به‌عنوان نتیجه‌ای از این نتایج، قضیه ۱.۱ را اثبات می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$W^\epsilon(y, t) = \epsilon x_{[\epsilon^{-1}y]}(\epsilon^{-1}t)$$

قضیه ۱.۳. فرض می‌کنیم که حد زیر

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} W^\epsilon(y, 0) = W(y, 0)$$

وجود دارد. در این صورت  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} W^\epsilon(y, t) = W(y, t)$  به‌ازای  $t > 0$  وجود دارد و  $W$  جواب منحصر به فرد معادله همپلتون-ژاکوبی

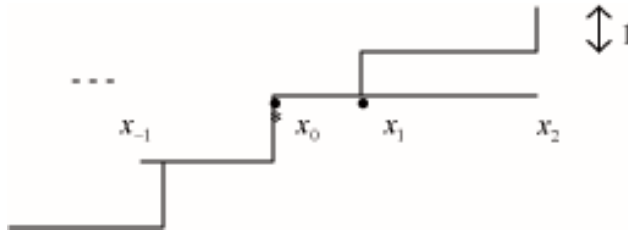
$$W_t + (W_y)^2 = 0 \tag{4}$$

طولانی‌ترین زیر دنباله‌های صعودی و مدل الدوس - دیاکونیس - همرزلی — ۱۰

است.

مکان ذرات را می‌توانیم به صورت تابع  $x: \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$  با تعریف  $x(i, t) = x_i(t)$  در نظر بگیریم که در آن مکان ذره  $i$  ام است. این تابع نسبت  $i$  صعودی است. معکوس این تابع  $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{Z}$ ، تعداد ذرات در یک بازه را به دست می‌دهد، یعنی

$$h(b, t) - h(a, t) = \#\{x_i(t) : a < x_i(t) \leq b\}.$$



شکل ۶. نمودار  $h$

توصیف جنبهٔ دینامیکی  $h$  ساده است: هرگاه یک نقطهٔ پواسن در  $[x_{i-1}, x_i]$  پیدا شود، ارتفاع  $h(x, t)$  در بازهٔ  $[\bar{x}, x_i]$  یک واحد افزایش پیدا می‌کند؛  $\bar{x}$  مکان نقطهٔ پواسن است. قرار می‌دهیم

$$h^\epsilon(x, t) = \epsilon h\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon}\right)$$

قضیهٔ ۲.۳. فرض می‌کنیم حد  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h^\epsilon(x, 0) = u(x, 0)$  وجود دارد. در این صورت  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h^\epsilon(x, t) = u(x, t)$  وجود دارد و  $u$  جواب منحصربه‌فرد معادلهٔ همپلتون - ژاکوبی

$$u_t = \frac{1}{u_x} \quad (5)$$

است. دو قضیه ۱.۳ و ۲.۳ در اصل معادلند. در واقع، اگر در ابتدا  $W$  برحسب  $y$  غیرصعودی باشد، در زمان‌های بعد نیز چنین خواهد بود و اگر  $u$  را وارون  $W$  فرض کنیم، در این صورت می‌توانیم (۵) را به راحتی از (۴) نتیجه بگیریم:

$$u_t = -W_t u_x = W_y^\vee u_x = \frac{1}{u_x^\vee} u_x = \frac{1}{u_x}$$

اکنون در وضعی قرار داریم که می‌توانیم، در صورتی که (۵) را بپذیریم، رابطهٔ (۳) را به طور صوری توجیه کنیم. در واقع  $u(x, t) = 2\sqrt{xt}$  تنها جواب (۵) است که در مورد آن داریم  $u(0, t) = u(x, 0) = 0$ . البته هنوز باید توضیح دهیم چرا (۵) درست است و برای اثبات قضیهٔ ۲.۳، یک نوع مدل ADH در نظر می‌گیریم که تنها در  $(\mathbb{R}^+)^2$  تعریف شده است. ابتدا رابطهٔ بین

جواب‌های (۵) را با جواب خاص  $2\sqrt{xt}$  که در قضیه ۱.۱ ظاهر می‌شود، توضیح می‌دهیم. برای این کار، یادآور می‌شویم که بر طبق فرمول هویف - لکس، جواب مسأله

$$\begin{cases} u_t = H(u_x) \\ \bar{u}(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

که در آن  $H$  محدب است، عبارت است از

$$u(x, t) = \sup_y \left[ g(y) - tL\left(\frac{y-x}{t}\right) \right] \quad (6)$$

که در آن  $L = H^*$  مزدوج محدب  $H$  است. در موردی که در دست بررسی داریم

$$H(p) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & p > 0 \\ +\infty, & p < 0. \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} L(v) &= \sup_p (vp - H(p)) = \sup_{p>v} (vp - 1/p) \\ &= \begin{cases} -2\sqrt{-v}, & v \leq 0 \\ +\infty, & v > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین جواب عمومی عبارت است از

$$\bar{u}(x, t) = \sup_{y \leq x} \left[ g(y) + 2\sqrt{t(x-y)} \right] \quad (7)$$

به ویژه، اگر

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -\infty & x < 0 \end{cases}$$

آنگاه در زمان‌های بعد خواهیم داشت

$$\bar{u}(x, t) = \begin{cases} 2\sqrt{xt}, & x \geq 0 \\ -\infty, & x < 0. \end{cases}$$

به طور کلی‌تر، به ازای هر  $y$ ، تابع

$$\Gamma(x, t; y) = \begin{cases} g(y) + 2\sqrt{t(x-y)}, & y \leq x \\ -\infty, & x < y, \end{cases} \quad (8)$$

یک جواب تحت شرایط اولیه زیر است

$$\Gamma(x, 0; y) = \begin{cases} g(y), & y \leq x \\ -\infty, & x < y. \end{cases}$$

در واقع اگر بنویسیم  $\bar{u}(x, t) = T_t g(x)$ ، آنگاه  $T_t$  یک نیم‌گروه غیرخطی است که دارای خاصیتی به نام یکنوایی قوی است، یعنی اگر  $\{g_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$  خانواده‌ای از توابع کراندار پیوسته باشد، آنگاه

$$T_t \left( \bigvee_{\alpha} g_{\alpha} \right) = \bigvee_{\alpha} T_t g_{\alpha} \quad (9)$$

به‌ویژه

$$T_t g = \sup_y T_t \Gamma(\cdot, \circ; y). \quad (10)$$

روابط (۷) و (۸) هر دو از (۶) و (۵) نتیجه می‌شوند. معلوم شده است که یکنوایی قوی یک مشابه میکروسکوپی دارد. به عبارت دقیق‌تر، اگر  $h_\alpha$  خانواده‌ای از توابع ارتفاع اولیه باشند و در ابتدا  $\hat{h} = \sup_{\alpha} h_{\alpha}$ ، آنگاه در زمان‌های بعدی

$$\hat{h}(x, t; w) = \sup_{\alpha} h_{\alpha}(x, t; w) \quad (11)$$

که در آن  $w$  تحقق یک فرایند نقطه‌ای پواسن است و  $w$ ‌ای که در  $\hat{h}$  و تمام  $h_{\alpha}$  ها ظاهر می‌شود یکی است.

به عنوان مثال  $h^{\circ} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  را به طور دلخواه به عنوان تابع ارتفاع اولیه در نظر می‌گیریم. تعریف می‌کنیم

$$\gamma^{\circ}(x; y, h(y)) = \begin{cases} h^{\circ}(y) & y \leq x \\ -\infty & y > x \end{cases}$$

در این صورت  $h^{\circ}(x) = \sup_y \gamma^{\circ}(x; y, h(y))$ . تابع ارتفاع متناظر را با  $\gamma(x, t; y, h(y); w)$  نشان می‌دهیم که در ابتدا از  $\gamma^{\circ}(\cdot; y, h(x))$  شروع می‌شود. در این صورت داریم

$$h(x, t; w) = \sup_y \gamma(x, t; y, h(y); w) \quad (12)$$

در واقع،  $\gamma(x, t; y, h(y); w)$  برحسب آن نوع فرایند ADH که در بخش ۲ بدان اشاره شد تعبیری دارد و آن این است که فرض می‌کنیم نمونه‌ای از فرایند پواسن در  $\mathbb{R}^2$  (یا  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ ) داریم،  $w$  را به  $\mathbb{R}^+ \times [y, \infty)$  محدود می‌کنیم. سپس از  $[y, +\infty)$  خالی شروع می‌کنیم و با استفاده از محدودیت  $w$  به  $\mathbb{R}^+ \times [y, \infty)$  ذرات را خلق کرده حرکت می‌دهیم. حاصل دستگاهی از ذرات در  $[y, \infty)$  خواهد بود و اگر تعداد ذرات حاضر در  $[y, x]$  در زمان  $t$  برابر  $\hat{\gamma}(x, t; y, h(y); w)$  باشد، آنگاه

$$\gamma(x, t; y, h(y); w) = \begin{cases} \hat{\gamma}(x, t; y, h(y); w) + h^{\circ}(y) & \text{if } x \geq y \\ -\infty & \text{if } x < y \end{cases}$$

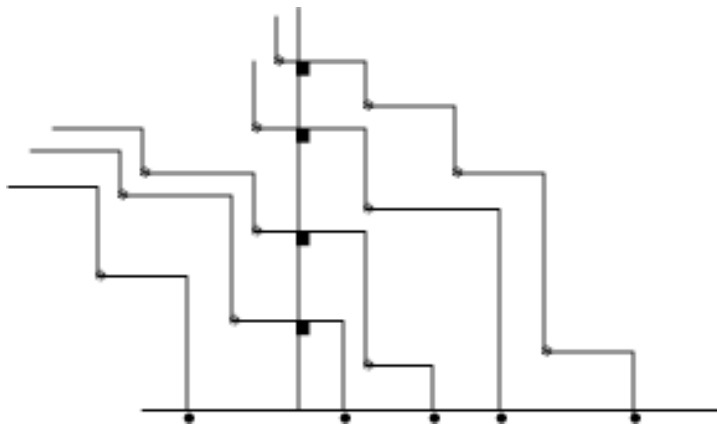
از رابطه فوق و (۱۲) نتیجه می‌شود

$$h(x, t; w) = \sup_{y \leq x} [h^{\circ}(y) + \hat{\gamma}(x, t; y, h(y); w)] \quad (13)$$

که مشابه میکروسکوپی (۷) است. اکنون می‌توانیم شکل تابع همیلتونی  $H$  را توجیه کنیم. مشاهده می‌کنیم که معادله  $u_t = H(u_x)$  یک جواب ابتدایی به صورت زیر دارد

$$u^p(x, t) = px + tH(p) = px + \frac{t}{p} \quad (۱۴)$$

که در شرط اولیه  $u^p(x, 0) = px$  صدق می‌کند. حتی این جواب نیز دارای یک مشابه میکروسکوپی است که آن را توصیف خواهیم کرد.  $p > 0$  داده شده است. در ابتدا، ذرات را بر طبق یک فرایند پواسن با شدت  $p$  در  $\mathbb{R}$  توزیع می‌کنیم تصادفی بودن شرط اولیه را مستقل از فرایند نقطه پواسن با شدت  $\lambda$  در  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  انتخاب می‌کنیم. می‌توان نشان داد که چنین توزیع اولیه‌ای  $v_p$  ناورداست، به این معنا که توزیع ذرات  $(x_i(t) : i \in Z)$  همواره همان  $v_p$  است. به علاوه، اگر به مکان‌های تلاقی مسیرهای ذرات با یک محور موازی با محور زمان نگاه کنیم، یک فرایند نقطه‌ای مشاهده می‌کنیم که آن هم یک فرایند پواسن است اما این بار با شدت  $\lambda/p$ .



شکل ۷ • توزیع بر طبق  $v_p$   
 ■ توزیع بر طبق  $v_{\lambda/p}$

این را می‌پذیریم و با استفاده از (۱۳) رابطه (۳) را اثبات می‌کنیم. در واقع (۱۳) لازم‌اش این است که

$$\epsilon h\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon}; w\right) = \sup_{y \leq x} \left[ \epsilon h^\circ\left(\frac{y}{x}\right) + t \hat{\gamma}\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon}; \frac{y}{\epsilon}; w\right) \right] \quad (۱۵)$$

اگر فرض کنیم که در ابتدا ذرات مطابق  $v_p$  توزیع شده‌اند و این که  $h^\circ(0) = 0$ ، در این صورت می‌توانیم با به کار گرفتن قانون اعداد بزرگ بگوییم که در (۱۵) قرار می‌دهیم  $x = 0$  و از این امر که  $h(0, t; w)$  یک فرایند پواسن با شدت  $\lambda/p$  است کمک می‌گیریم. در نتیجه

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon h\left(0, \frac{t}{\epsilon}, w\right) = \frac{t}{p}$$

و حاصل

$$\frac{t}{p} = \sup_{y \leq 0} \left[ yp + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \hat{\gamma} \left( 0, \frac{t}{\epsilon}; \frac{y}{\epsilon}; w \right) \right]$$

است که به‌ازای هر  $p > 0$  درست است. به‌ازای  $y \leq 0$  می‌نویسیم

$$A(y, t) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \hat{\gamma} \left( 0, \frac{t}{\epsilon}; \frac{y}{\epsilon}; w \right)$$

و در نتیجه

$$\frac{t}{p} = \sup_y [yp - A(y, t)]$$

به شرط این که مقدار  $A(y, t)$  را به‌ازای  $y > 0$  مثبت، بینهایت بدانیم. بنابراین، به‌ازای  $y \leq 0$  داریم

$$\begin{aligned} A(y, t) &= \sup_{p > 0} \left[ yp - \frac{t}{p} \right] = t \sup_{p > 0} \left[ \frac{y}{t} p - \frac{1}{p} \right] \\ &= tL \left( \frac{y}{t} \right) = -\sqrt{-yt} \end{aligned}$$

خلاصه این که به‌ازای  $y \leq 0$ ،

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \hat{\gamma} \left( 0, \frac{t}{\epsilon}; \frac{y}{\epsilon}; w \right) = \sqrt{-yt} \quad (16)$$

مشاهده می‌کنیم که توزیع احتمال  $\hat{\gamma} \left( 0, \frac{t}{\epsilon}; \frac{y}{\epsilon}; w \right)$  و  $\hat{\gamma} \left( -\frac{y}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon}; 0; w \right)$  یکسان است و مسلماً لازمه برقراری (۱۶) قضیه (۱.۱) است. این را هم مشاهده می‌کنیم که اثبات وجود حد  $\epsilon \hat{\gamma} \left( \frac{x}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon}; 0; w \right)$  وقتی  $\epsilon \rightarrow 0$  نسبتاً ساده است. تابع  $h(x, t; w) = \gamma(x, t, 0, w)$  ابر جمع‌ی است، یعنی به‌ازای هر  $s, t, x, y > 0$  داریم

$$h(x + y, t + s; w) \geq h(x, t; w) + h(y, s; t_{x,s}w)$$

که در آن نمونه پواسن است که از انتقال نقطه  $(0, 0)$  به نقطه  $(x, s)$  به‌دست می‌آید. وجود حد فوق‌الذکر پیامد قضیه ارگودیک زیرجمع‌ی است.

این بخش را با بحثی در مورد طول ستون وسط در فال ورق به پایان می‌بریم. همان‌طور که در پایان بخش ۲ گفته شد، اگر در مجموعه  $[0, t] \times [0, x]$   $n$  نقطه پواسن وجود داشته باشد، در این صورت تعداد نقاط پواسن در مسیر ذره  $i$  ام دقیقاً برابر است با تعداد ورق‌ها در ستون  $i$  ام. اکنون نتیجه‌ای را بیان خواهیم کرد که با استفاده از تکنیک‌های استاندارد قابل اثبات است. این نتیجه در [AD2] به صورت حدس آمده است.

قضیه ۳.۳. تعداد ورق‌ها در ستون  $\lfloor \frac{y}{\epsilon} \rfloor$  ام برابر است با  $(y \log \frac{y}{\epsilon}) \epsilon + O(\epsilon)$ .

در اینجا  $\epsilon$  طوری تعیین شده است که  $\epsilon^{-2} = n$  باشد. تعداد ورق‌ها  $\epsilon^{-2}$  است.

اکنون خطوط کلی اثبات قضیه (۳.۳) را ترسیم می‌کنیم. یادآور می‌شویم که

$$\epsilon x_{[\epsilon^{-1}y]}(\epsilon^{-1}t) = w(y, t) + O(1),$$

و  $w$  در (۴) صدق می‌کند. ما باید (۴) را تحت شرط اولیه  $w(y, 0) = +\infty$  و شرط مرزی  $w(0, t) = 0$  حل کنیم. تنها جواب  $w(y, t) = y^2/4t$  به‌ازای  $y > 0$  است که خود وارون  $u(x, t) = 2\sqrt{xt} = y$  است. می‌خواهیم تعداد نقاط پواسن در مسیر ذره  $[0, \epsilon^{-1}y]$  ام در مجموعه متناظر است با مجموعه ماکروسکوپی  $[0, 1] \times [0, 1]$ . بنابراین باید منتظر بمانیم تا ذره  $y/\epsilon$  ام وارد بازه  $[0, 1]$  شود. این اتفاق در زمان  $t_0$  که در رابطه  $y^2/4t_0 = 1$  صدق می‌کند، خواهد افتاد، یعنی  $t_0 = y^2/4$  در مقیاس ماکروسکوپی. بنابراین باید تعداد نقاط پواسن بر روی مسیر را در بازه زمانی ماکروسکوپی  $[y^2/4, 1]$  و یا بازه زمانی میکروسکوپی  $[\frac{y^2}{\epsilon^2}\epsilon^{-1}, \epsilon^{-1}]$  بشماریم. به‌جای  $[y\epsilon^{-1}]$  می‌نویسیم  $i$ . تعداد نقاط پواسنی که ذره  $i$  ام با آن برخورد می‌کند دقیقاً برابر است با تعداد دفعاتی که ذره  $i$  ام به طرف چپ می‌جهد. اگر  $N_i(t)$  تابعی باشد که هر بار که ذره  $i$  ام می‌جهد یک واحد بدان اضافه شود، در این صورت باید نشان دهیم

$$N_i(\epsilon^{-1}) - N_i\left(\frac{y^2}{\epsilon^2}\epsilon^{-1}\right) = \left(y \log \frac{2}{\epsilon}\right) \epsilon^{-1} - O\left(\epsilon^{-1}\right) \quad (17)$$

اما، می‌توان نشان داد که در واقع

$$N_i(t) - N_i(s) = \int_s^t (x_i(s) - x_{i-1}(s)) ds + M_i(s, t) \quad (18)$$

که در آن  $M_i(s, t)$  یک مارتینگل است. رابطه (۱۸) بدین سبب است که آهنگ جهش  $x_i$  به نقطه  $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$  برابر است با طول بازه  $[x_{i-1}, x_i]$ . از طرف دیگر، می‌توان نشان داد که  $\mathbb{E}M_i^2(s, t) = O(t - s)$  بنابراین

$$N_i(\epsilon^{-1}) - N_i\left(\frac{y^2}{\epsilon^2}\epsilon^{-1}\right) = \int_{\frac{y^2}{\epsilon^2}\epsilon^{-1}}^{\epsilon^{-1}} (x_i(s) - x_{i-1}(s)) ds + O(\epsilon^{-\frac{1}{2}})$$

سرانجام، رفتار میانگین  $x_i - x_{i-1}$  مانند مشتق  $w$  نسبت به  $y$  است. بنابراین، همان‌طور که می‌خواستیم داریم

$$\epsilon \int_{\frac{y^2}{\epsilon^2}\epsilon^{-1}}^{\epsilon^{-1}} (x_i(s) - x_{i-1}(s)) ds \approx \int_{\frac{y^2}{\epsilon^2}}^1 w_y(y, s) ds = \int_{\frac{y^2}{\epsilon^2}}^1 \frac{y}{\sqrt{s}} ds = y \log \frac{2}{y}.$$

#### ۴. قضیه حد مرکزی

در این بخش به قضیه (۱.۲) می‌پردازیم. در بخش‌های قبل مشاهده کردیم که چگونه می‌توان تعداد زیادی مسأله وابسته به جایگشت تصادفی را بر حسب مدل ADH بیان کرد. در واقع ADH نمونه‌ای است از چندین مدل رشد یک بعدی که از آن انتظار داشتن حد مقیاس نظیر قضایای (۱.۳) و (۲.۳) می‌رود. اگر این نتایج را یک قانون اعداد بزرگ برای دستگاه ذرات مورد بررسی بدانیم، طبیعتاً می‌خواهیم یک قضیه حد مرکزی برای همگرایی داشته باشیم و حدس زده شده است که تابع ارتفاع تغییر مقیاس یافته  $h^\epsilon(x, t; w) = \epsilon h\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon}; w\right)$  باید در معادله زیر صدق کند:

$$h^\epsilon(x, t; w) = u(x, t) + \epsilon^{\frac{1}{2}} z(x, t; w) + O(\epsilon^{\frac{1}{4}}) \quad (19)$$

این حدس در ابتدا از طریق شبیه‌سازی تأیید شد و سپس قضیه کاردار - پاریزی - زنگ شواهد بیشتری برای اعتبار آن فراهم آورد. در مورد مدل ADH، قضیه (۱.۲) رابطه (۱۹) را دقیقاً اثبات می‌کند و مهم‌تر از آن، قانون متغیر تصادفی  $z$  را نیز تعیین می‌کند. هرچند در اثبات کنونی قضیه (۱.۲) از فرمولی استفاده می‌شود که  $L_n$  را به دترمینان‌های Toeplitz ربط می‌دهد و نمی‌توان آن را در مورد دستگاه‌های ذرات برهمکنش کننده دیگر به کار برد. مثلاً اگر در مدل ADH اجازه دهیم ذرات هم به چپ و هم به راست بجهند، (۱۹) باید دوباره اثبات شود.

هدف اصلی این بخش توضیح نتیجه جدیدی است که کاتور و گروئن بوم به دست آورده‌اند و به کمک استدلال‌های احتمالاتی حالت ضعیف‌تری از (۱۹) را اثبات کرده‌اند که امتیاز آن این است که در مورد دستگاه‌های ذرات متعددی کاربرد دارد. (نگاه کنید به [BS] و [BCS]). یادآور می‌شویم که قانون مدل ADH در ربع اول دستگاه مختصات را که در ابتدا ذره‌ای در آن نیست، با  $\mathbb{P}$  نشان دادیم. در این مدل،  $h(x, t; w)$  تعداد ذرات در  $[0, x]$  در زمان  $t$  است و  $u(x, t) = 2\sqrt{xt}$ . این قضیه می‌گوید (۱۹) نسبت به  $\mathbb{P}$  اعتبار دارد و  $z(x, t; w)$  یک متغیر تصادفی است و توزیع  $\frac{z(x, t; w)}{2\sqrt{xt}}$  بر طبق قانون ترسی - ویدو است. در بخش ۳ گفتیم چگونه می‌توان رابطه  $h^\epsilon = u + O(1)$  را با استفاده از مقایسه بین ADH در ربع اول و مدل ADH در نیم‌صفحه فوقانی که در آن توزیع هیأت اولیه ذرات بر طبق یک فرایند پواسن با شدت  $p > 0$  است، اثبات کرد. قانون این مدل ADH آخر را با  $\mathbb{P}_p$  نشان می‌دهیم. ترجیح می‌دهیم با  $\mathbb{P}_p$  کار کنیم زیرا این مدل ایستا است. این سؤال را می‌توان مطرح کرد که آیا اگر  $w$  را طبق  $\mathbb{P}_p$  انتخاب کنیم، گونه‌ای از (۱۹) درست خواهد بود یا خیر؟ در این کار باید دقت شود، زیرا قضیه حد مرکزی برای توزیع اولیه مقیاس گاوسی دارد که با آنچه که می‌خواهیم ثابت کنیم متفاوت است. دقیق‌تر بگوییم،

$$h^\epsilon(x, 0; w^\circ) = xp + \epsilon^{\frac{1}{2}} B_p(x, w^\circ) + O(\epsilon^{\frac{1}{4}}) \quad (20)$$

که در آن  $B_p(x, w^\circ)$  یک حرکت براونی با واریانس  $p$  است:  $|x|p = \mathbb{E} B_p(x, w^\circ)^2$ . به علاوه، از



آنجا که  $h(\circ, t; w)$  شمارشگر تعداد نقاط در  $[\circ, t]$  بر حسب فرایند پواسن با شدت  $\lambda/p$  است، داریم

$$h^\epsilon(\circ, t; w) = \frac{t}{p} + \epsilon^\dagger B_{\frac{\lambda}{p}}(t; w) + O(\epsilon^\dagger) \quad (21)$$

به عبارت دیگر، وقتی  $h^\epsilon$  را در مورد  $\mathbb{P}_p$  در نظر می‌گیریم، دو منشأ نوفه وجود دارد: یکی از دینامیک ناشی می‌شود و از مرتبه  $O(\epsilon^\dagger)$  است و منشأ دیگر داده‌های اولیه است که از مرتبه  $O(\epsilon^\dagger)$  می‌باشد. اندازه نوفه اولیه بسیار بزرگتر است زیرا  $\epsilon^\dagger \gg \epsilon^\dagger$  و بر نوفه دینامیکی غلبه دارد. به عنوان مثال، مشاهده می‌کنیم که نوفه دینامیکی هم‌اکنون در پس جمله  $O(\epsilon^\dagger)$  در (۲۱) پنهان است و نمی‌توان آن را به راحتی در تنظیم (۲۱) مجزا کرد.

برای این که نوفه دینامیکی را از فرایند ایستای  $\mathbb{P}_p$  جدا کنیم، باید ابتدا چگونگی انتشار نوفه اولیه در زمان را درک کنیم. برای این کار، ابتدا به بررسی یک PDE می‌پردازیم. مسأله فوق را در مورد PDE زیر بررسی می‌کنیم

$$u_t = H(u_x) \quad (22)$$

دو جواب (۲۲)،  $u$  و  $\hat{u}$ ، تحت شرایط اولیه

$$u(x, \circ) = g(x), \quad \hat{u}(x, \circ) = g(x) + \delta k^\circ(x) \quad (23)$$

را در نظر می‌گیریم. در این رابطه  $\delta$  یک عدد مثبت کوچک است. در این صورت، انتظار ما این است که داشته باشیم

$$\hat{u}(x, t) = u(x, t) + \delta k(x, t) + O(\delta) \quad (24)$$

که در مسأله

$$\begin{cases} k_t = H'(u_x)k_x \\ k(x, \circ) = k^\circ(x) \end{cases} \quad (25)$$

صدق می‌کند. در اینجا فرض بر این است که  $u$  یک جواب کلاسیک است و در نتیجه  $H'(n_x)$  خوش‌تعریف است و معادله (۲۵) در چارچوب کلاسیک معنادار است. حل (۲۵) آسان است. معادله دیفرانسیل معمولی زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = H'(u_x(x, t)) \\ x(\circ) = x, \end{cases} \quad (26)$$

و جواب را به صورت  $\Phi(x, t)$  می‌نویسیم. در این صورت

$$k(x, t) = k^\circ(\Phi(x, t))$$

در واقع، به آسانی می‌توان نشان داد که  $u_x$  در امتداد جواب (۲۶) ثابت است و در نتیجه  $\Phi(x, t) = x + H'(v)t$  که در آن  $v$  یک بردار ثابت است. این یک خط است که به خط مشخصه معروف است. به ویژه، هرگاه  $g(x) = px$  و  $u(x, t) = xp + tH(p)$ ، آنگاه  $k(x, t) = k^\circ(x + tH'(p))$ . به عبارت دیگر، یک اختلال کوچک در داده اولیه  $g$  در نقطه  $x$ ، در امتداد خط مشخصه  $x + tH'(p)$  منتشر می‌شود که در آن  $p = \nabla g(x)$ .

اکنون به مرحله‌ای رسیده‌ایم که می‌توانیم ربط بین (۲۰) و (۲۱) را توضیح دهیم. چون «جمله اصلاحی»،  $\epsilon^{\frac{1}{\nu}} B_p(x)$ ، از نوفه دینامیکی بسیار بزرگ‌تر است، این اصلاح در امتداد خط مشخصه انتقال پیدا می‌کند تا جایی که

$$B'_p = B_p(tH'(p)) = B_p\left(-\frac{t}{p}\right)$$

توجه کنید که طبق انتظار،

$$\mathbb{E}_p B_p\left(-\frac{t}{p}\right) = \frac{t}{p} p = \frac{t}{p} = \mathbb{E}_p B'_p(t)$$

اکنون که چگونگی انتقال نوفه اولیه برای ما روشن‌تر شده است، می‌توانیم حدسی بزنیم.

$$h^\epsilon(x, t; w) = xp + tH(p) + \epsilon^{\frac{1}{\nu}} B_p(x + tH'(p), w^\circ) + \epsilon^{\frac{\nu}{\nu}} \hat{z}(x, t; \hat{w}) + O(\epsilon^{\frac{\nu}{\nu}}) \quad (27)$$

که در آن  $w = (w^\circ, \hat{w})$  و  $w^\circ$  نماینده تصادفی بودن اولیه و  $\hat{w}$  نشان دهنده فرایند نقطه پواسن با شدت ۱ در نیم‌صفحه فوقانی است. بنابراین

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(h^\epsilon(x, t)\right) &= \mathbb{E}_p\left(h^\epsilon(x, t) - xp - tH(p)\right)^2 \\ &= \epsilon|x + tH'(p)|p + \epsilon^{\frac{\nu}{\nu}} \text{Var}\left(\hat{z}(x, t)\right) \\ &\quad + O(\epsilon^{\frac{\nu}{\nu}}) \end{aligned} \quad (28)$$

به خصوص

$$\text{Var}\left(h^\epsilon(-tH'(p), t)\right) = \epsilon^{\frac{\nu}{\nu}} \text{Var}\left(\hat{z}(x, t)\right) + O(\epsilon^{\frac{\nu}{\nu}}) \quad (29)$$

یعنی این که، اگر قرار دهیم  $x = -tH'(p)$ ، آنگاه دیگر نوفه‌ای از جانب توزیع اولیه نخواهد آمد، زیرا  $h(\circ, \circ)$  را طوری انتخاب کرده‌ایم که  $h(\circ, \circ) = \circ$ .

اکنون می‌خواهیم (۲۵) را ثابت کنیم. قضیه زیر در [CG2] اثبات شده است:

قضیه ۱.۴. به ازای  $t, p > \circ$  داریم

$$\circ < \limsup_{\epsilon \rightarrow \circ} \text{Var} \Gamma^\epsilon(t) \leq \limsup \text{Var} \Gamma^\epsilon(t) < \infty \quad (30)$$

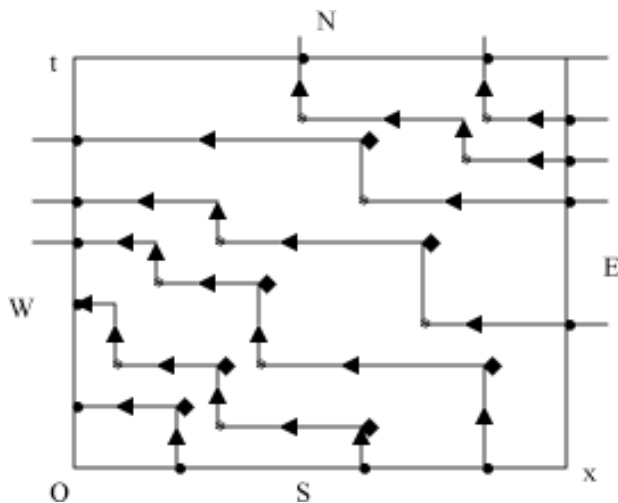
که در آن واریانس نسبت به  $P_p$  حساب شده است و

$$\Gamma^\epsilon(t) = \epsilon^{-\frac{1}{p}} h^\epsilon(-tH'(p), p)$$

اکنون که می‌دانیم مشابه قضیه (۱.۲) برای فرایند ایستای  $\mathbb{P}_p$  چه باید باشد، خوب است مدل ADH را مورد بررسی دقیق‌تری قرار دهیم. یادآور می‌شویم که برای  $\mathbb{P}_p$  هم تصادفی بودن اولیه  $w^\circ$  و هم تصادفی بودن دینامیک آن  $\hat{w}$  را داریم.  $w^\circ$  محدود به  $\mathbb{R}^+$  و  $\mathbb{R}^-$  را به ترتیب با  $w_+^\circ$  و  $w_-^\circ$  نشان می‌دهیم. محدودیت  $\hat{w}$  به راست و چپ محور  $t$  را نیز با  $\hat{w}_\pm$  نمایش می‌دهیم. می‌دانیم که  $w_+$ ،  $w_-$ ،  $\hat{w}_+$ ،  $\hat{w}_-$  مستقل از یکدیگر هستند. محدودیت هیئت ذرات به  $(0, +\infty)$  و  $(0, -\infty)$  را به صورت  $\rightarrow\eta^\pm(t)$  می‌نویسیم. اکنون می‌گوییم که چون ذرات تنها به سمت چپ می‌جهند،  $\rightarrow\eta^-(t)$  فقط به  $w_+^\circ$  و  $w_-^\circ$  بستگی دارد. در واقع هم اگر یک نقطه پواسن  $\hat{w}_-$  بین دو ذره ظاهر شود، از یک نقطه پواسن  $\hat{w}$  برای جهش یک ذره  $w_-^\circ$  استفاده می‌کنیم؛ در غیر این صورت، هیچ ذره جدیدی در آن مکان خلق نمی‌شود. اگر از تمامی  $w$  استفاده کنیم، به جای یک ذره جدید، ذره‌ای داریم که از روی  $0$  پریده است. به عبارت دیگر، هیئت‌های ذرات در سمت چپ مبدأ تغییری نمی‌کنند چه از کل  $w$  استفاده کنیم چه از  $w_-$  فقط. با در نظر داشتن این امر، مشاهده می‌کنیم که زمان‌های خلقت ذرات جدید به تعبیر  $w_-$ ، معادل همان مواقعی هستند که ذره‌ای، به تعبیر  $w$  کل، از مبدأ می‌گذرد. هدف ما از بیان این مطالب این است که نقاطی بر روی محور  $t$  ها که محل عبور ذرات هستند فرایندی تشکیل می‌دهند که تنها به  $w_-$  بستگی دارد و از این رو مستقل از  $w_+$  است. اکنون فقط دستگاه ذراتی را در نظر می‌گیریم که در سمت راست مبدأ قرار می‌گیرد. این دستگاه را می‌توان به شیوه مارکوفی و به کمک سه فرایند پواسن توصیف کرد که عبارتند از یک فرایند نقطه پواسنی با شدت  $1$  در ربع اول، یک فرایند پواسنی با شدت  $p$  برای هیأت اولیه و یک فرایند نقطه پواسنی با شدت  $1/p$  برای نقاط خروجی واقع بر محور  $t$  ها. این فرایند جدید معادل است با  $\mathbb{P}_p$  که به ربع اول محدود شده باشد و آن را با  $\mathbb{P}_p^+$  نمایش می‌دهیم. یکی دیگر از خواص مفید  $\mathbb{P}_p$  را که برحسب  $\mathbb{P}_p^+$  قابل بیان است، توضیح خواهیم داد.

یادآور می‌شویم که نقاط پواسن داخل مستطیل  $[0, x] \times [0, t]$  نقاط پواسن در ضلع  $\{0\} \times [0, x]$  و نقاط خروجی پواسن در ضلع غربی  $[0, t] \times \{0\}$  برحسب  $\mathbb{P}_p^+$  مستقل هستند و شدت آنها به ترتیب  $1$ ،  $p$  و  $1/p$  است. اما یک ویژگی خاص که در نظریه صف به قضیه برک معروف است، می‌گوید که فرایند ذره نقطه‌ای در ضلع شمالی  $\{t\} \times [0, x]$ ، نقاط ورودی در ضلع شرقی  $[x] \times [0, t]$  و گوشه‌های غیر  $L$  شکلی در داخل  $[0, x] \times [0, t]$  همگی مستقل اند. به علاوه این فرایندها باز هم پواسن هستند با شدت  $p$ ،  $1/p$  و  $1$  باهمین ترتیب. اکنون آمادگی داریم تا فرمولی برای واریانس به دست آوریم که بعداً از آن در جزئی از اثبات حدس مان (۲۷) بهره خواهیم برد. باید توجه داشت که  $h(x, t) = h(x, t; w)$  برحسب  $h(x, t) = (w_+^\circ, \hat{w}_+)$  چیزی جز تعداد نقاط خروجی روی ضلع تعداد نقاط در ضلع شمالی، نیست. به این دلیل ساده که

$$h(x, t) = h(0, t) + \#\hat{\eta}'(x, t)$$



شکل ۸. \* فرایند پواسن با شدت ۱ ، فرآیند پواسن با شدت ۱ (W, S, \*) مستقل، (N, E, ♦) مستقل ، N, S فرایند پواسن با شدت p ، E, W فرایند پواسن با شدت ۱/p

که در آن  $\vec{\eta}'(x, t)$  هیأت ذرات است که به بازه  $[0, x]$  در زمان  $t$  محدود شده باشد. قانون بقای جرم می‌گوید

$$h(0, t) + \# \vec{\eta}(x, 0) = (h(x, t) - h(x, 0)) + \# \vec{\eta}(x, t)$$

$W, E, S$  و  $N$  به اختصار نشان دهنده تعداد نقاط در اضلاع شرقی، جنوبی، غربی و شمالی  $[0, x] \times [0, t]$  خواهند بود. بنابراین داریم

$$W + N = S + E$$

اما

$$\begin{aligned} \text{Var}(h(x, t)) &= \text{Var}(W + N) = \text{Var}(W) + \text{Var}(N) + 2\text{Cov}(W, N) \\ &= \text{Var}(W) + \text{Var}(N) + 2\text{Cov}(S + E - N, N) \\ &= \text{Var}(W) - \text{Var}(N) + 2\text{Cov}(S, N) \end{aligned}$$

زیرا طبق قضیه برک،  $N$  و  $E$  مستقل‌اند. قرار می‌دهیم  $N = S + E - W$  و به دست می‌آوریم

$$\text{Var}(h(x, t)) = \text{Var}(N) - \text{Var}(W) + 2\text{Cov}(W, E)$$

در نتیجه

$$Var(h(x, t)) = p(-tH'(p) - x) + 2Cov(S, N) \quad (31)$$

$$Var(h(x, t)) = p(x + tH'(p)) + 2Cov(W, E) \quad (32)$$

این روابط را باید با (۲۸) مقایسه کرد.

اکنون به بررسی  $Cov(S, N)$  و  $Cov(W, E)$  می‌پردازیم. برای این کار، نوعی از این مدل را در نظر می‌گیریم که در آن هیئت اولیه به مقدار کمی مختل شده است. دقیق‌تر بگوییم،  $\mathbb{P}_p^+$  را در نظر می‌گیریم اما به جای توزیع اولیه، یک فرایند نقطه پواسن با شدت  $p + \delta$  قرار می‌دهیم. حاصل را با  $\mathbb{P}_{p, \delta}^+$  نشان می‌دهیم. ادعای ما این است که

$$\frac{d}{ds} \mathbb{E}_{p, \delta}^+ N \Big|_{\delta=0} = \frac{1}{p} Cov(S, N) \quad (33)$$

از آنجا که  $\mathbb{E}_{p, \delta}^+(N | S = n)$  مستقل از  $\delta$  است، داریم

$$\frac{d}{ds} \mathbb{E}_{p, \delta}^+ N \Big|_{\delta=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_p^+(N | S = n) \frac{d}{ds} \mathbb{P}_{p, \delta}^+(S = n) \Big|_{\delta=0},$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathbb{P}_{p, \delta}^+(S = n) \Big|_{\delta=0} &= \frac{d}{ds} \frac{(x(p + \delta))^n}{n!} e^{-(p+\delta)x} \Big|_{\delta=0} \\ &= n \frac{(xp)^n}{n!} \frac{1}{p} e^{-px} - x e^{-px} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathbb{E}_{p, \delta}^+ N \Big|_{\delta=0} &= \frac{1}{p} \mathbb{E}_p^+ NS - x \mathbb{E}_p^+ N \\ &= \frac{1}{p} (\mathbb{E}_p^+ NS - \mathbb{E}_p^+ S \mathbb{E}_p^+ N) \\ &= \frac{1}{p} Cov(S, N) \end{aligned}$$

که (۳۳) را ثابت می‌کند. آنچه (۳۳) می‌گوید اساساً این است که کواریانس  $S$  و  $N$  برابر است با  $p$  ضرب در حساسیت بینهایت کوچک  $\mathbb{E}_p^+ N$  نسبت به شدت  $S$ . اکنون سمت چپ (۳۳) را مورد توجه قرار می‌دهیم. ابتدا مشاهده می‌کنیم که  $\mathbb{P}_{p, \delta}^+$  را می‌توان به طریق زیر ساخت. یک فرایند پواسن با شدت  $p + \delta$  را می‌توان در شروع به صورت اجتماع دو فرایند نقطه پواسنی مستقل با شدت  $p$  و  $\delta$  بیان کرد. نقاط فرایند اول را ذرات درجه یک و نقاط فرایند دوم را ذرات درجه دو می‌نامیم. (توجه: این دقیقاً مشابه میکروسکوپی (۲۷) است). ادعای ما این است که این وضعیت در زمان‌های بعد نیز ادامه می‌یابد. یعنی این که، در زمان  $t$ ، فرایند  $\vec{\eta}(t)$  را می‌توان به صورت اجتماع دو فرایند  $\vec{\eta}^1$  و  $\vec{\eta}^2$  نوشت که توزیع  $\vec{\eta}^1$  بر طبق  $\mathbb{P}_p^+$  است و تشکیل شده است از ذرات درجه

یک، در صورتی که  $\vec{\eta}^2$  تشکیل شده است از ذرات درجه دو و تحولات آن به  $\vec{\eta}^1$  بستگی دارد. منظور ما این است که چون در ربع اول و همین‌طور بر روی محور  $t$  ها از فرایند نقطه پواسنی واحدی استفاده می‌کنیم، فرایندهای  $\mathbb{P}_p^+$  و  $\mathbb{P}_{p,\delta}^+$  را می‌توان طوری جفت کرد که  $\vec{\eta}$ ، که طبق  $\mathbb{P}_{p,\delta}^+$  توزیع شده است، برابر باشد با  $\vec{\eta}^2 \cup \vec{\eta}^1$  که  $\vec{\eta}^1$  بر طبق  $\mathbb{P}_p^+$  توزیع شده است. درستی این امر را می‌توان به سادگی، با بررسی دینامیک  $\vec{\eta}^2$ ، تحقیق کرد.



شکل ۹. ● ذرات درجه یک ■ ذرات درجه دو

فرض می‌کنیم نقطه پواسنی \* در لحظه  $t$  ظاهر شود. نزدیک‌ترین ذره درجه یک را در سمت راست این نقطه قرار می‌دهیم. در آن لحظه، ذره درجه یک به مکان \* انتقال داده می‌شود. اگر یک ذره درجه دو بین \* و ذره درجه یک قرار داشته باشد، چیز دیگری اتفاق نمی‌افتد؛ در غیر این صورت نزدیک‌ترین ذره درجه دو که در سمت چپ \* قرار دارد به مکان قبلی ذره درجه یک انتقال می‌یابد (نگاه کنید به شکل ۹). توجه داشته باشید که ذرات درجه دو تنها می‌توانند به سمت راست حرکت کنند. برای محاسبه سمت چپ معادله (۳۳) اکنون آمادگی داریم. مکان ذرات درجه دو را با  $(y_1(t), \dots, y_k(t))$  مشخص می‌کنیم. در ابتدا تمام  $y_i$  ها در بازه  $[0, x]$  قرار دارند و توزیع آنها بر طبق یک فرایند پواسن با شدت  $\delta$  است. پس داریم

$$\mathbb{E}_p^+ N - \mathbb{E}_{p,\delta}^+ N = \mathbb{E}_{p,\delta}^+ \sum_j \mathbb{P}(y_j(t) < x)$$

تعداد اولیه ذرات درجه دو را با  $\eta^2$  نمایش می‌دهیم. از آنجا که  $O(\delta^2) = \mathbb{P}_{p,\delta}^+(\eta^2 \geq 2)$ ، داریم

$$\mathbb{E}_{p,\delta}^+ N - \mathbb{E}_p^+(N) = \mathbb{P}_{p,\delta}^+(\eta^2 = 1, X(t) \leq x) + O(\delta^2)$$

که در آن  $X(t)$  مکان تنها ذره درجه دو است. توجه داشته باشید که مکان اولیه  $X(0)$  به طور یکنواخت از  $(0, x)$  انتخاب شده است. مکان تنها ذره درجه دو را که از نقطه  $z$  شروع می‌کند با  $X(t; z)$  نشان می‌دهیم. داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{p,\delta}^+ N - \mathbb{E}_p^+ N &= \delta \int_0^x \mathbb{P}_{p,\delta}^+(X(t; z) \leq x) dz + O(\delta^2) \\ &= \delta \int_0^x \mathbb{P}_{p,\delta}^+(X(t; 0) \leq x - z) dz + O(\delta^2) \\ &= \delta \int_0^x \mathbb{P}_{p,\delta}^+(x - X(t; 0) \geq z) dz + O(\delta^2) \end{aligned}$$

$$= \delta \mathbb{E}_{p,\delta}^+(x - X(t; \circ)) + O(\delta^2)$$

که برای تساوی دوم از ایستا بودن  $\mathbb{P}_p$  استفاده کرده‌ایم. به جای  $X(t, \circ)$  به اختصار می‌نویسیم  $X(t)$ ، و به دست می‌آید

$$\frac{d}{d\delta} \mathbb{E}_{p,\delta}^+ N \Big|_{\delta=\circ} = \mathbb{E}_{p,\delta}^+(x - X(t))^+$$

از این رابطه و روابط (۳۳) و (۳۱) نتیجه می‌شود که

$$\text{Var}(h(x, t)) = p(-tH'(p) - x) + 2p \mathbb{E}_p^+(x - X(t))^+$$

$Cov(W, E)$  را نیز به همین منوال حساب می‌کنیم. برای این کار، محورها را  $90^\circ$  درجه می‌چرخانیم و نقش  $x$  و  $t$  را با یکدیگر عوض می‌کنیم. اکنون «در ابتدا» ذرات روی ضلع شرقی مستطیل  $[0, x] \times [0, t]$  قرار گرفته‌اند و از ضلع جنوبی وارد می‌شوند. در داخل، یک فرایند نقطه پواسنی با شدت ۱ داریم که در گوشه‌هایی که  $L$  شکل نیستند قرار دارند. به تدریج که مختصه  $x$  کاهش می‌یابد، ذرات به سمت شمال حرکت می‌کنند و مختصه  $t$  افزایش پیدا می‌کند. اگر یک «درجه دو» از گوشه  $(x, t)$  مستطیل شروع کند، به سمت جنوب حرکت خواهد کرد در حالی که ذرات درجه یک به سمت بالا حرکت می‌کنند. اگر مختصه  $t$  این ذره درجه دو را با  $t - z(\circ)$  نشان دهیم، در این صورت  $z(x) = 0$  و

$$\text{Var}(h(x, t)) = p(x + tH'(p)) + \frac{2}{p} \mathbb{E}_p^+(t - z(\circ))^+ \quad (34)$$

حال وقت آن رسیده که (۳۴) را مورد بررسی قرار داده درباره معنای آن بیاندیشیم. اگر انتخاب کنیم  $x = -tH'(p)$ ، خواهیم داشت

$$\text{Var}(h(x, t)) = 2p \mathbb{E}_p^+(x - X(t))^+$$

این رابطه می‌گوید که نوفه دینامیکی مسوول افت و خیزهای  $h(x, t)$  است. به علاوه،

$$X(t) = -tH'(p) + O(t)$$

و واریانس  $h(-tH'(p), t)$  برابر است با  $p$  ضرب در نوعی واریانس بینهایت کوچک که مقدار انحراف  $X(t)$  از مکان ماکروسکوپی آن  $-tH'(p)$  تعیین کننده آن است و این رابطه بسیار نزدیکی دارد با این امر که تغییرات کوچک در جواب  $u_t = H(u_x)$  در امتداد خطوط مشخصه انتقال پیدا می‌کنند. یک ذره درجه دو در واقع یک تغییر بینهایت کوچک در چگالی است (تنها یک ذره بدان اضافه می‌شود) و این تغییر در مقیاس ماکروسکوپی، در امتداد خط مشخصه‌ای که از مکان اولیه ذره شروع می‌شود حرکت می‌کند. سرانجام، (۳۴) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\text{Var}(h^\epsilon(x, t)) = \epsilon p(-tH'(p) - x) + 2p\epsilon \mathbb{E}_p^+(x - X^\epsilon(t))^+$$

که در آن  $X^\epsilon(t) = \epsilon X(\frac{t}{\epsilon})$ . در بخش ۵ نشان خواهیم داد که

$$\mathbb{E}_p^+(x - X^\epsilon(t))^+ = O(\epsilon^{\frac{1}{3}})$$

یا معادل آن

$$\mathbb{E}_p^+(x - X(t))^+ = O(t^{\frac{1}{3}})$$

به ازای  $x = -tH'(p)$ .

### ۵. ذره درجه دو

در بخش ۴، تخمین واریانس  $Var(h^\epsilon(-tH'(p), t)) = O(\epsilon^{\frac{1}{3}})$  را تبدیل به تخمینی برای اندازه افت و خیزهای یک ذره درجه دو کردیم. یک ذره درجه دو  $X(t)$  از مبدا آغاز می‌کند و انتظار ما این است که هرگاه  $t \rightarrow +\infty$  داشته باشیم

$$X(t) = -tH'(p) + \bar{Z}t^{\frac{1}{3}} + O(t^{\frac{1}{3}})$$

برای قضیه (۱.۴)، کفایت نشان دهیم

$$t^{\frac{1}{3}} \lesssim \mathbb{E}_p^+(-tH'(p) - X(t))^+ \lesssim t^{\frac{1}{3}}$$

که در آن  $a(t) \lesssim b(t)$  بدین معناست که عدد ثابتی مانند  $C$  وجود دارد به طوری که به ازای تمام  $t$   $a(t) \leq Cb(t)$  باشد. قبل از بررسی فرایند  $X(t)$ ، این مسأله را در مقیاس ماکروسکوپی در نظر می‌گیریم. یادآور می‌شویم که هر اختلال کوچک در جواب معادله  $u_t = H(u_x)$  در امتداد خط مشخصه منتشر می‌شود. اگر  $u$  یک جواب غیرکلاسیک این معادله باشد، خطوط مشخصه را باید به نحوی مناسب تعبیر کرد. با استفاده از فرمول وردش هویف و لکس<sup>۱)</sup>، این کار آسان می‌گردد. داریم

$$u(x, t) = \sup_y \left[ u(y, 0) - tL\left(\frac{y-x}{t}\right) \right] \quad (۳۵)$$

می‌دانیم که اگر  $u$  در نقطه  $x$  و در زمان  $t$  مشتق‌پذیر باشد، آنگاه سوپریمم فوق تنها در یک نقطه می‌پیوندد؛ در غیراین صورت ماکزیمم کننده منحصر به فرد نیست و یک تناظر یک به یک بین مجموعه کاندیدهایی که برای  $u_x$  داریم (که بستگی به نحوه نزدیک شدن به  $(x, t)$  از نقاط نزدیک به آن دارد)  $y = y(x, t)$  به وقوع و مجموعه ماکزیمم کننده‌ها وجود دارد. این تناظر از طریق رابطه

$$u_x = L'\left(\frac{y-x}{t}\right)$$

1) Lax

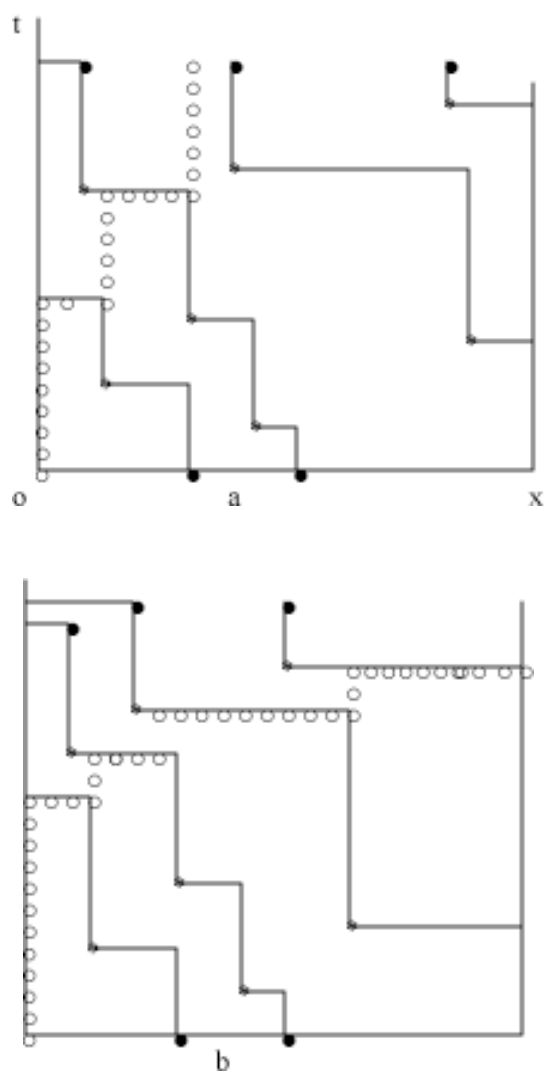


برقرار می‌شود. در واقع، می‌توانیم تابعی مانند  $y(x, t)$  تعریف کنیم که نسبت به  $x$  غیر نزولی باشد و هرگاه  $u_x$  تک مقداری باشد،  $y$  هم نسبت به  $x$  پیوسته باشد؛ در غیراین صورت  $y$  در  $x$  یک ناپیوستگی جهشی داشته باشد و  $y(x_+, t)$  و  $y(x, t)$  نشان دهنده بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ماکزیمم کننده در عبارت (۳۵) باشد. همچنین، هرگاه  $y(x_+, t) = y(x_-, t) = y(x, t)$  یک خط مشخصه واحد وجود دارد که پس از  $t$  واحد زمانی به  $x$  می‌رسد. در واقع می‌توانیم  $y(x, t) = y$  را معکوس کنیم و یک تابع غیر نزولی  $x(y, t)$  به دست آوریم. این تابع به عنوان تابعی از زمان در معادله دیفرانسیل

$$\frac{dx}{dt} = -H'(u_x(x, t)) \quad (36)$$

با شرط اولیه  $x(y, 0) = y$  صدق می‌کند. معادله دیفرانسیل معمولی (۳۶) مکان ماکروسکوپی یک ذره درجه دو را به دست می‌دهد. به عبارت دقیق‌تر، اگر یک ذره درجه دو،  $X(t) = X\left(t; \frac{y}{\epsilon}\right)$ ، از  $\left[\frac{y}{\epsilon}\right]$  شروع کند، در این صورت  $X^\epsilon(t) = \epsilon X\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$  وقتی  $\epsilon \rightarrow 0$  به  $x(y, t)$  همگرا می‌شود. بخصوص، اگر  $u(x, t) = px + tH(p)$ ، در این صورت  $x(y, t) = y - tH'(p)$ . خلاصه این که، مورد نظر ما مکان ذره درجه دو یعنی  $x(y, t)$  است، اما اگر معکوس آن  $y(x, t)$  را در نظر بگیریم، یک شاخص وردشی در اختیار داریم که همان ماکزیمم کننده سمت راست رابطه (۳۵) است. در حالت کلی توصیف وردشی مشابهی برای  $x(y, t)$  در دست نداریم. هر چند، هنگامی که همتای ماکروسکوپی آن تابع، یعنی  $x(t; y)$  را مورد بررسی قرار می‌دهیم، به شرط این که فقط اندازه ایستای  $\mathbb{P}_p$  را در نظر بگیریم، یک مشخصه ایستا برای آن وجود خواهد داشت. در واقع، قضیه باک این اجازه را می‌دهد که زمان را معکوس کنیم و ضلع شمالی مستطیل  $[0, t] \times [0, x]$  را ضلع آغازین فرض کنیم. متغیر فضا را هم تحت انعکاس قرار می‌دهیم به طوری که گوشه  $(x, t)$  نقش مبدأ را ایفا کند.





شکل ۱۱

علامت  $o$  مسیر یک ذره درجه دو را نشان می‌دهد.  $x = -tH'(p)$

در شکل ۱۰ دو نمونه از ذرات درجه دو نشان داده شده است. در (a) داریم  $X(t) < x$  و در  $b$  داریم  $X(t) > x$  و  $x = -tH'(p)$  مکان ماکروسکوپی است. در شکل ۱۱، زمان معکوس شده است

و مختصه  $x$  نیز نسبت به نقطهٔ وسط بازه انعکاس یافته است. در شکل ۱۱، در هر دو قسمت  $a$  و  $b$ ، داریم  $h(x, t) = ۴$ ، یعنی چهار مسیر ذره در مستطیل  $[۰, t] \times [۰, x]$  وجود دارد.

در مورد  $(a)$ ، یک منحنی بالارونده را که به‌طور ضعیف صعودی است به این ترتیب انتخاب می‌کنیم که ابتدا دو ذره روی محور  $x$  ها در نظر گرفته و سپس یک منحنی بالارونده اکیداً صعودی را برمی‌گزینیم. اما در مورد  $(b)$  ابتدا نقطه‌ای را روی محور  $t$  ها انتخاب کرده و سپس یک منحنی اکیداً بالارونده را گزینش می‌کنیم. به‌طور کلی‌تر

$$h(x, t) = \max \left( h_1(x, t), h_2(x, t) \right) \quad (۳۷)$$

که در آن

$$h_1(x, t) = \sup_{۰ < \xi < x} \{h(\xi, ۰) + \hat{\gamma}(x, t; \xi, ۰)\} \quad (۳۸)$$

$$h_2(x, t) = \sup_{۰ < \xi < t} \{h(۰, \xi) + \hat{\gamma}(x, t; ۰, \xi)\} \quad (۳۹)$$

در این روابط  $\hat{\gamma}(x, t; a, b)$  اندازهٔ طولانی‌ترین منحنی بالارونده صعودی از  $(a, b)$  تا  $(x, t)$  است. همان‌طور که شکل‌های ۱۰ و ۱۱ نشان می‌دهند، نقطهٔ مرزی ماکزیمم‌کننده بر روی محور  $x$  ها خواهد بود اگر و تنها اگر  $X(t) < x$ . فرض می‌کنیم  $Z(t)$  بزرگترین مختصه  $x$  ممکن برای چنین ماکزیمم‌کننده‌ای باشد. اگر تمام نقاط مرزی ماکزیمم‌کننده بر روی محور  $x$  ها واقع باشند، قرار می‌دهیم  $Z(t) = ۰$ . خلاصه این که

$$Z(t) \stackrel{D}{=} (x - X(t))^+ \quad (۴۰)$$

یعنی متغیرهای تصادفی  $Z(t)$  و  $(x - X(t))^+$  دارای توزیع یکسان هستند. اما رابطهٔ (۳۵) معادل است با این که بگوییم قضیهٔ ۲.۵ داریم

$$t^{\frac{1}{p}} \lesssim \mathbb{P}_p^+(Z(t)) \lesssim t^{\frac{1}{p}} \quad (۴۱)$$

ابتدا توضیحی راهگشا برای (۴۱) ارائه خواهیم داد. این توضیح به درک بهتر استراتژی نهفته در پس اثبات این قضیه که به کاتور و گروئن بوم [CG2] باز می‌گردد، خواهد انجامید. نقطهٔ  $Z(t)$

برای سویریمم در رابطه (۳۸) یک ماکزیمم کننده است. یاد آور می شویم که  $x = -tH'(p)$  و  $CLT$  برای فرایندهای پواسنی میگوید

$$h(z, 0) = pz + B_p(z) + O(\sqrt{z})$$

که در آن  $B_p(z)$  یک حرکت براونی است. این را به صورت زیر می نویسیم:

$$h(at^{\frac{1}{\nu}}, 0) = apt^{\frac{1}{\nu}} + t^{\frac{1}{\nu}} B_p(a) + O(t^{\frac{1}{\nu}}), \quad (42)$$

به ازای  $0 < a < t^{\frac{1}{\nu}}$ . البته، انتظار داریم که متغیر تصادفی  $A$ ، مستقل از  $a$ ، وجود داشته باشد به طوری که

$$\hat{\gamma}\left(-tH'(p), t; at^{\frac{1}{\nu}}, 0\right) = 2\left[\left(-tH'(p) - at^{\frac{1}{\nu}}\right)t\right]^{\frac{1}{\nu}} + t^{\frac{1}{\nu}} A + O(t^{\frac{1}{\nu}}) \quad (43)$$

این را از قضیه (۲.۱) می دانیم و سعی ما بر این است که از یکی از نتایج (۴۳)، که از طریق استدلالهای احتمالاتی اثبات پذیر است و برای قضیه (۵.۱) لازم می باشد، استفاده کنیم. فعلاً (۴۳) را می پذیریم و به توضیح راهگشا ادامه می دهیم. اگر طرف راست (۴۳) را بسط دهیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & 2t\left(-tH'(p) - at^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\frac{1}{\nu}} + t^{\frac{1}{\nu}} A + O(t^{\frac{1}{\nu}}) \\ &= 2t\sqrt{-H'(p)}\left(1 - \frac{a}{-H'(p)}t^{-\frac{1}{\nu}}\right)^{\frac{1}{\nu}} + t^{\frac{1}{\nu}} A + O(t^{\frac{1}{\nu}}) \\ &= 2t\sqrt{-H'(p)}\left(1 - \frac{1}{\nu}\frac{a}{-H'(p)}t^{-\frac{1}{\nu}} - \frac{1}{\lambda}\frac{a}{(-H'(p))^2}t^{-\frac{2}{\nu}}\right) + t^{\frac{1}{\nu}} A + O(t^{\frac{1}{\nu}}) \\ &= \frac{2t}{p} - apt^{\frac{1}{\nu}} - \frac{1}{\nu}p^{\nu}a^{\nu}t^{\frac{1}{\nu}} + t^{\frac{1}{\nu}} A + O(t^{\frac{1}{\nu}}). \end{aligned} \quad (44)$$

از رابطه فوق، (۴۲) و (۳۸) به دست می آوریم

$$\begin{aligned} h\left(-tH'(p), t\right) &= h\left(\frac{t}{p}, t\right) \\ &= \frac{2t}{p} + t^{\frac{1}{\nu}} \max_{0 < a < t^{\frac{1}{\nu}}} \left[B_p(a) - \frac{1}{\nu}p^{\nu}a^{\nu} + A\right] + O(t^{\frac{1}{\nu}}) \end{aligned} \quad (45)$$

از آنجا که  $A$  یک متغیر تصادفی مستقل از  $a$  است،  $a$  ی ماکزیمم کننده در (۴۴) نمی تواند خیلی بزرگ باشد؛ یعنی هرگاه  $t \rightarrow \infty$ ، ماکزیمم کننده باید کراندار باقی بماند. بنابراین  $z$  ماکزیمم کننده در (۳۸) باید از مرتبه  $t^{\frac{1}{\nu}}$  باشد. در واقع محاسباتی که در بالا انجام دادیم به فرمول زیر منجر می شود:

$$h^e\left(-tH'(p), t\right) = 2tH(p) + t^{\frac{1}{\nu}} Z_p(t) + O(\epsilon^{\frac{1}{\nu}})$$

که  $\bar{Z}_p(t)$  یک متغیر تصادفی است که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\bar{Z}_p(t) \stackrel{D}{=} t^{\frac{1}{p}} \max_a \left( B_p(a) - \frac{1}{p} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} \right) + \left( \frac{t}{p} \right)^{\frac{1}{p}} Z^* \quad (46)$$

$B_p(a)$  یک حرکت براوننی است با واریانس  $pa$ ،  $Z^*$  یک متغیر تصادفی تریسی - ویدام است و این دو از یکدیگر مستقل هستند.

خطوط کلی اثبات (41) را ادامه می‌دهیم. اول مشاهده می‌کنیم که اگر تابع ارتفاع واسطه به اندازه  $\mathbb{P}_q$  را با  $h^*(x, t)$  نشان دهیم، همیشه خواهیم داشت

$$\hat{\gamma}(x, t; Z, \circ) \leq h^q(x, t) - h^q(z, \circ) \quad (47)$$

رابطه (45) به این دلیل است که می‌دانیم  $h^q(\circ, \circ) = 0$  و  $h^q(x, t)$  شمارشگر تعداد مسیرهای ذراتی است که در داخل مستطیل  $[0, x] \times [0, t]$  قرار دارند. سمت راست رابطه (45) هم آن مسیرهایی را می‌شمارد که یک از یک نقطه بازه  $[0, z]$  شروع نمی‌شوند. این عدد را می‌توان به عنوان مشخصه اندازه طولانی‌ترین منحنی رو به بالایی که به طور ضعیف صعودی است و نقطه  $(z, \circ)$  را به نقطه  $(x, t)$  وصل می‌کند، در نظر گرفت. یعنی این که این منحنی اجازه دارد، قبل از این که از  $[z, x] \times [0, t]$  نقاط پواسنی را انتخاب کند، نقاطی را از  $\{0\} \times [z, x]$  یا  $[z, x] \times [0, t]$  برگزیند. البته، تعداد منحنی‌هایی که به طور ضعیف صعودی هستند، اقلاباً برابر است با تعداد منحنی‌هایی که اکیداً صعودی هستند و بنابراین (45) به ازای هر  $q$  ای درست است. انتخاب بهترین  $q$  برای ما چندان مشکل نیست. از نظر ماکروسکوپی (45) متناظر است با

$$2\sqrt{(x-z)t} \leq (x-z)q + tH(q) = (x-z)q + \frac{t}{q}$$

این نابرابری یک تساوی می‌شود هرگاه

$$q = \left( \frac{t}{x-z} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{x}{t} - \frac{z}{t} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

در موردی که با آن سروکار داریم  $x = -tH'(p) = \frac{t}{p^2}$ ، و این بدان معناست که بهترین  $q$  عبارت است از

$$q = \left( \frac{1}{p^2} - \frac{z}{t} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (48)$$

باید توجه داشت که اگر  $z$  ماکزیمم کننده (38) باشد، در این صورت

$$\begin{aligned} h_1(x, t) &= h^p(z, \circ) + \hat{\gamma}(x, t; z, \circ) \\ &\leq h^p(z, \circ) + h^q(x, t) - h^q(z, \circ) \end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned} h^q(z, \circ) - h^p(z, \circ) &\leq h^q(x, t) - h_1^q(x, t) \\ &\leq h^q(x, t) + h^p(x, t). \end{aligned}$$

در این رابطه به جای  $h$  نوشته ایم  $h^p$ . انتخاب ما (۴۶) به ازای  $q < p$  صادق است. از آنجا که  $h^q(z, \circ) - h^p(z, \circ)$  را می توان تعداد ذرات پواسنی با شدت  $q - p$  فرض کرد، داریم

$$h^{q-p}(z, \circ) \leq h^q(x, t) - h^p(x, t)$$

جفت شدگی بین  $\mathbb{P}_p$  و  $\mathbb{P}_q$  را با  $\hat{\mathbb{P}}$  نشان می دهیم. داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(Z(t) > \lambda) &\leq \hat{\mathbb{P}}(h^{q-p}(\lambda, \circ)) \leq h^q(x, t) - h^p(x, t) \\ &\leq \hat{\mathbb{P}}(h^{q-p}(\lambda, \circ)) \leq \hat{\mathbb{P}}(h^{q-p}(\lambda, \circ) - a) \\ &\quad + \hat{\mathbb{P}}(\hat{\mathbb{P}}(h^{q-p}(\lambda, \circ) - a) \leq h^q(x, t) - h^p(x, t)) \\ &\leq \frac{Var(h^{q-p}(\lambda, \circ))}{a^2} + \frac{Var(h^q(x, t) - h^p(x, t))}{b^2} \end{aligned} \quad (49)$$

که در آن

$$\begin{aligned} b &= \hat{\mathbb{P}}[h^{q-p}(\lambda, \circ) - h^q(x, t) + h^p(x, t)] - a \\ &= \lambda(q-p) - x(q-p) - t(H(q) - H(p)) - a \end{aligned}$$

$q$  را برابر  $\left(\frac{1}{p^2} - \frac{\lambda}{t}\right)^{-\frac{1}{2}}$  انتخاب می کنیم به طوری که

$$b = b(\lambda) = -\lambda p - 2\left((X - \lambda)t\right)^{\frac{1}{2}} + xp + \frac{t}{p} - a$$

اما  $b(\circ) = -a$  و  $b_1(\circ) = \circ$  زیرا  $x = -tH'(p) = tp^{-2}$ . از طرف دیگر،  $b$  محدب است زیرا  $b''(\lambda) = \frac{t}{\lambda^3}(x - \lambda)^{-\frac{3}{2}}$  و در نتیجه،

$$b \geq \frac{b''(\circ)}{2} \lambda^2 - a = p^2 \frac{\lambda^2}{4t} - a$$

اکنون مقدار  $a$  را برابر  $p^2 \frac{\lambda^2}{4t}$  انتخاب می کنیم به طوری که

$$b \geq p^2 \frac{\lambda^2}{4t}$$

اکنون کرانی برای عبارت سمت راست (۴۳) تعیین می کنیم. مسلماً داریم

$$Var(h^{q-p}(\lambda, \circ)) = (q-p)\lambda \quad (50)$$

به علاوه

$$Var(h^q(x, t) - h^p(x, t)) \leq 2Varh^q(x, t) + 2Varh^p(x, t)$$

حال رابطه‌ای بین  $Varh^p$  و  $Varh^q$  خواهیم یافت. داریم

$$Var(h^q(x, t)) = \frac{tq}{xq} - : xq + \Upsilon q \mathbb{F}_q^+(x - X(t))^+ \quad (51)$$

از آنجا که تبدیل  $\mathbb{P}_q^+, (x, t) \mapsto (\frac{q}{p}x, \frac{p}{q}t)$  را به  $\mathbb{P}_p^+$  تبدیل می‌کند، نتیجه می‌گیریم که

$$\mathbb{F}_q^+(x - X(t))^+ = \mathbb{F}_q^+(x - \frac{p}{q}X(\frac{p}{q}t))^+$$

از این رابطه، (۴۹) و این که  $x = tp^{-\Upsilon}$  می‌توان نتیجه گرفت که

$$\begin{aligned} Var(h^q(x, t)) &= \frac{t}{q} - xq + \Upsilon q \mathbb{F}_p^+(x - \frac{p}{q}X(\frac{p}{q}t))^+ \\ &= \frac{t}{q} - xq + \Upsilon(xq - \frac{t}{q}) + \Upsilon \mathbb{F}_p^+(\frac{t}{q} - pX(\frac{p}{q}t))^+ \\ &= xq - \frac{t}{q} + \Upsilon p \mathbb{F}_p^+(\frac{t}{q} \frac{1}{p^\Upsilon} - X(\frac{p}{q}t))^+ \\ &= xq - \frac{t}{q} + Var(h^p(\frac{t}{q} \frac{1}{p^\Upsilon}, \frac{p}{q}t)) \end{aligned}$$

در اینجا به یک نابرابری اشاره می‌کنیم که در [CG2] آمده و از اثبات آن صرف‌نظر می‌کنیم: به ازای هر  $a < 1$  داریم

$$Var(h^p(-tH'(p)a, ta)) \leq Var(h^p(-tH'(p), t))$$

اگر این رابطه را بپذیریم، رابطه زیر لازم می‌آید

$$Var(h^q(x, t)) \leq xq - \frac{t}{q} + Var(h^p(x, t))$$

بنابراین

$$\begin{aligned} Var(h^q(x, t) - h^p(x, t)) &\leq \Upsilon(xq - \frac{t}{q}) + \Upsilon Var(h^p(x, t)) \\ &= \Upsilon(xq - \frac{t}{q}) + \Upsilon p \mathbb{F}_p^+(Z(t)) \end{aligned}$$

از رابطه فوق و نابرابری ساده زیر،

$$xq - \frac{t}{q} \leq \Upsilon p^\Upsilon \lambda$$

نتیجه می‌گیریم که

$$Var(h^q(x, t) - h^p(x, t)) \leq \Upsilon p^\Upsilon \lambda + \Upsilon p \mathbb{F}_p^+(Z(t))$$



از این رابطه و روابط (۴۸) و (۴۷) به دست می آید

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(Z(t) > \lambda) &\leq \frac{\gamma^2 t^\gamma}{p^{\gamma} \lambda^{\gamma}} (p-q)\lambda + \frac{\gamma^2 t^\gamma}{p^{\gamma} \lambda^{\gamma}} \left[ \gamma p^\gamma \lambda + \lambda p \mathbb{E}_p^+(Z(t)) \right] \\ &\lesssim \frac{t^\gamma}{\lambda^\gamma} + \frac{t^\gamma}{\lambda^\gamma} \mathbb{E}_p(Z(t)) \end{aligned}$$

به ازای  $\lambda \in (0, tp^{-\gamma})$  با استفاده از این نابرابری، رسیدن به رابطه

$$\mathbb{E}_p(Z(t)) \lesssim t^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

دیگر مشکل نیست. برای مشاهده جزئیات می توان به [CG2] مراجعه کرد.

## مراجع

- [1] A. Arjmand, *Test*. Iran J.Math. 28, 36, 295-306, (2008).
- [AD1] D. J. Aldous and P. Diaconis. Hammersley's interacting particle process and longest increasing subsequences. *Probab. Th. Rel. Fields*, 103: 199-213, 1995.
- [AD2] D. J. Aldous and P. Diaconis. Longest increasing subsequences: From patience sorting to Baik-Deitt-Johansson Theorem. *Bulletin of AMS*, 36: 413-432, 1999.
- [BDK] J. Baik, P.A. Deift, and K. Johansson. On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random Permutations. *J. Amer. Math. Soc.* 12: 1119-1178, 1999.
- [CG1] E. Cator and P. Groeneboom. Hammersley's process with sources and sinks. *Ann. Probab.* 33: 879-903, 2005.
- [CG2] E. Cator and P. Groeneboom. Second class particles and cube root asymptotics for Hammersley's process. *Ann. Probab.* 34: 1273- 1295, 2006.
- [FF] P.A. Ferrari and L. R. G. Fontes. Current fluctuations for the asymmetric simple exclusion process. *Ann. Probab.* 22: 820-832, 1994.
- [C] T. Sepäläinen. Hydrodynamic scaling, convex duality and asymptotic shapes of growth models. *Markov Process. Related Fields*, 4: 1-26, 1998.
- [V] R. Venkatsubramani. Hydrodynamic limit for the asymmetric exclusion process with deterministic initial data and the Hammersley process on  $S^1$ . Ph. D. thesis, New York University, 1995.

- [VK] A. M. Vershik and S. V. Kerov. Asymptotics for the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tables. *Soviet Math. Dokl.*, 18: 527-531, 1977. Translation of *Dokl. Acad. Nauk. SSSR* 233: 1024-1027, 1977.

---

مؤلف: فریدون رضاخانلو rezakhan@math.berkeley.edu  
دانشگاه برکلی کالیفرنیا، دانشکده ریاضی

مترجم: یوسف امیرارجمند amirarj@aut.ac.ir  
دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر