فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۱، شمارهٔ ۷۱ (پاییز و زمستان ۱۴۰۱) صص. ۱۵۱ تا ۱۷۲

بررسی مثال‌های نقض در کتاب اثبات‌ها و ابطال‌ها*

صامت باغچه، سن باشکنت
ترجمهٔ هانیه هاشمی

چکیده. لاکاتوش در کتاب دوران‌سازش به نام اثبات‌ها و ابطال‌ها از طریق بحث دربارهٔ تاریخچه و پیشرفت‌های روش‌شناختی صورت‌گرفته در بررسی فرمول اویلر، $V - E + F = ۲$، برای چندوجهی‌های سه‌بُعدی، روش اثبات‌ها و ابطال‌ها را توضیح می‌دهد. لاکاتوش تاریخچهٔ چندوجهی‌ها را مثال خوبی برای توضیح فلسفه و روش‌شناسی خودش در ریاضیات و هندسه می‌دانست. تمرکز ما در اینجا روی ویژگی‌های ریاضی و توپولوژیکی است که در رهبرد روشمندانهٔ لاکاتوش نقش دارند. برای هر مثال و مثال نقضی که لاکاتوش آورده است، همتای توپولوژیکش را به‌اختصار شرح می‌دهیم. سپس پیشینهٔ ریاضی و مبنای فلسفهٔ لاکاتوش درخصوص روش‌شناسی ریاضیات را در ضمن فرمول اویلر بیان می‌کنیم، و بدین‌ترتیب شناختی از کارکرد مفاهیم راهنمون ایجابی و سلبی لاکاتوش حاصل خواهیم کرد.

۱ مقدمه

با کتاب تأثیرگذار ایمره لاکاتوش[1]، اثبات‌ها و ابطال‌ها[2] (به‌اختصار، اثبات‌ها)، که اولین‌بار در مجلهٔ انگلیسی فلسفهٔ علم بین سال‌های ۱۹۶۳ و ۱۹۶۴ در چهار قسمت منتشر شد، بسیاری از مفاهیم جدید وارد فلسفه و روش‌شناسی ریاضیات شد. ما از میان این مفاهیم بر مفهوم راهنمون[3] تمرکز می‌کنیم. مفهوم راهنمون را، که در آن کتاب به کار رفته است، از طریق توجه خاص به مثال‌های نقضی که در مقاله‌های اولیهٔ لاکاتوش مورد بحث قرار گرفته‌اند تجزیه و تحلیل خواهیم کرد.

عبارات و کلمات کلیدی: اثبات‌ها و ابطال‌ها، چندوجهی، راهنمون ایجابی، راهنمون سلبی، مثال نقض
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۷/۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۳/۲۲

*Bağçe, S., Başkent, C., An examination of counterexamples in *Proofs and Refutations*, *Philosophia Scientiæ*, **13-2** (2009), 3-20.

[1]Imre Lakatos [2]Proofs and Refutations [3]heuristics

doi: 10.30504/mct.2022.1179.1823

در کتاب \اثبات‌ها\، روش‌های اثبات‌ها و ابطال‌ها از طریق بحث از تاریخچه و پیشرفت‌های صورت‌گرفته در روش‌شناسی فرمول اویلر $V - E + F = ۲$ برای چندوجهی‌های[1] سه‌بُعدی توضیح داده می‌شود؛ در اینجا V تعداد رأس‌ها، E تعداد یال‌ها، و F تعداد وجوه آن چندوجهی است. لاکاتوش تاریخچهٔ چندوجهی‌ها را مثال خوبی برای توضیح فلسفه و روش‌شناسی خودش در ریاضیات و هندسه می‌دانست. این انتخاب چند دلیل دارد. نخست اینکه تاریخچهٔ فرمول اویلر جابه‌جایی پارادایم از مکتب تحلیلی کوشی به مکتب توپولوژیک پوانکاره را در بر می‌گیرد، و بنابراین نمونه‌ای مناسب از تغییر نظریه است. دومین دلیل این است که شرح لاکاتوش از فرمول اویلر گزارش یک «بازسازی عقلانی» از موضوع مورد بحث است، و بنابراین، همان‌طورکه لاکاتوش در مقدمهٔ کتاب \اثبات‌ها\ اشاره می‌کند، از جنبه‌های خاصی با تاریخ واقعی فاصله دارد. بااین‌حال، این نقص چیزی از موضع لاکاتوش کم نمی‌کند زیرا تمرکز وی بر جابه‌جایی نظریه بود نه تاریخ‌نگاری دقیق. گواه آن مطلب این اظهار نظر اوست که «ریاضیات غیرصوری و شبه‌تجربی به‌واسطهٔ اصلاح مداوم حدس‌ها ازطریق تفکر و نقد، ازطریق منطق اثبات‌ها و ابطال‌ها، رشد می‌کند نه با افزایش یکنواخت تعداد قضیه‌های غیرقابل‌انکار» [۸، ص ۵]. بااین‌حال، همان‌طورکه اشتاینر تأکید می‌کند، «این نتیجه‌گیری منجر به تضعیف ”صورت‌گرایی“[2] می‌شود» [۹، ص ۵۰۳]. هدف اصلی ما در مقاله حاضر، پر کردن فاصلهٔ بین راهنمون لاکاتوشی و صورت‌گرایی موجود در مثال‌های نقض مذکور در کتاب \اثبات‌ها\ است. ازاین‌رو، فاصلهٔ یادشده از تاریخ واقعیِ فرمول اویلر اثری بر بحث ما ندارد.

قبل از شروع بحث، خلاصه‌ای از روش اثبات‌ها و ابطال‌ها را ارائه می‌دهیم، اما به شرح مفصل روش‌شناسی لاکاتوش نمی‌پردازیم؛ به خوانندهٔ علاقه‌مند توصیه می‌شود برای مطالعهٔ دقیق‌تر روش‌شناسی اثبات‌ها و ابطال‌های لاکاتوش به [۲، ۶] مراجعه کند. ما از شرحی که در [۲] آمده است استفاده می‌کنیم. روش اثبات‌ها و ابطال‌ها مرکب از گام‌های روش‌شناختی زیر است:

۱. حدس اولیّه[3].

۲. اثبات (آزمایش ذهنی [نظری] یا استدلال اولیّه، تجزیهٔ حدس اولیّه به حدس‌های فرعی و لم‌های دیگر).

۳. مثال‌های نقض کلی[4].

۴. بازنگری اثبات. لم مشکل‌دار شناسایی می‌شود. این لم ممکن است قبلاً از نظر پنهان یا مخفی مانده باشد.

---

[1] polyhedra [2] formalism [3] primitive conjecture [4] global

۵. اثبات قضیه‌های دیگر مورد بررسی قرار می‌گیرد تا معلوم شود آیا این لم در آن‌ها بوده است.
۶. نتایج پذیرفته‌شدهٔ قبلی از حدس اولیّه، و اکنون ابطال‌شده، بررسی می‌شوند.
۷. مثال‌های نقض قبل تبدیل می‌شوند به مثال‌های فعلی، و مباحث جدیدی برای تحقیق گشوده می‌شود.

در این مقاله، هدف ما نشان دادن نقش راهنمونی [الهام‌بخشی] مثال‌های نقض است. معلوم خواهیم کرد که چگونه مثال‌های نقض خاص به اصلاح حدس‌ها کمک می‌کنند و چگونه می‌توان این مثال‌های نقض را تشخیص داد. برای اینکه این تشخیص تا حد ممکن از دقت ریاضی برخوردار باشد مفاهیم هندسی و توپولوژیک خاصی نظیر گونا، مولفهٔ همبندی، و غیره را به کار می‌بریم.

مقاله حاضر به شرح زیر سازمان یافته است. ابتدا، فرمول مورد نظر و اثبات کوشی برای آن را مرور می‌کنیم. سپس، در بخش دوم، با پیروی از سلسلهٔ ایده‌های خود لاکاتوش در کتاب «اثبات‌ها»، مثال‌های نقض را موردبه‌مورد بررسی و به کارکردهای راهنمونی آن‌ها اشاره می‌کنیم. با ذکر برخی از موضوعات برای تحقیقات بعدی مقاله را به پایان می‌رسانیم.

۲ حدس مورد نظر و اثبات آن

حدس اصلی مورد بحث در «اثبات‌ها» این است: $V - E + F = ۲$، که در آن V تعداد رأس‌ها، E تعداد یال‌ها و F تعداد وجوه چندوجهی منتظم است. این حدس اغلب، به دلایل تاریخی، حدس دکارت–اویلر نامیده می‌شود. عدد صحیحی که جواب معادلهٔ $V - E + F$ برای چندوجهی‌ای چون P است مشخصهٔ اویلر P نامیده می‌شود.

برهان ارائه‌شده در کتاب «اثبات‌ها» به کوشی منسوب شده است. بگذارید آن را گام‌به‌گام به‌اختصار یادآوری کنیم.

گام اول: فرض کنید چندوجهی مورد نظر توخالی باشد و سطح آن از لاستیک نازکی ساخته شده باشد. یکی از وجوه آن را ببرید و وجوه باقی‌مانده را روی سطحی (یا تخته‌ای) صاف، بدون آنکه پاره شود، بکشید[1]. طی این فرآیند، V و E تغییری نخواهند کرد؛ زیرا یک وجه را خودمان کنار گذاشته‌ایم. بنابراین داریم $V - E + F = ۱$.

گام دوم: نقشه باقی‌مانده را مثلث‌بندی می‌کنیم. اگر قطرهای چندضلعی‌های خمیده‌خطی را، که بعد از کشیدن سطح لاستیکی حاصل شده، ترسیم کنیم، مقدار $V - E + F$ تغییر نمی‌کند زیرا E و

[1] stretch

F هم‌زمان افزایش می‌یابند.

گام سوم: از نقشه مذکور مثلث‌ها را کنار می‌گذاریم. به دو طریق می‌توان این کار را انجام داد: یا یک یال و یک وجه را هم‌زمان کنار می‌گذاریم، یا یک وجه، یک رأس و دو یال را هم‌زمان کنار می‌گذاریم.

در آخر این فرایند، ما به یک مثلث معمولی می‌رسیم که به‌وضوح رابطهٔ $V - E + F = ۱$ برای آن برقرار است.

اما توجه داشته باشید که از سه لم زیر به‌طور ضمنی در طی این اثبات استفاده شده است.

لم (۱) هر چندوجهی را، که یک وجه آن برداشته شده است، می‌توان به‌صورت صاف روی یک سطح صاف کشید.

لم (۲) در ضمن مثلث‌بندی نقشهٔ مذکور، به ازای هر یال جدید یک وجه جدید به دست می‌آید.

لم (۳) فقط دو روش برای حذف یک مثلث از نقشهٔ مثلث‌بندی‌شده وجود دارد: حذف یک یال یا حذف دویال و یک رأس. علاوه‌براین، نتیجهٔ نهایی این فرایند یک مثلث واحد خواهد بود.

چون این سه لم نقش مهمی در اثبات دارند، اینک کمی بیشتر دربارهٔ آن‌ها بحث می‌کنیم.

۳ مثال‌های نقض و الگوهای راهنمونی آن‌ها

اولین دسته از مثال‌های نقض به سه لم استفاده‌شده در اثبات بالا مربوط می‌شود. این مثال‌های نقض را با پیروی از طبقه‌بندی ارائه‌شده در کتاب \اثبات‌ها\ دسته‌بندی خواهیم کرد. الگوهای راهنمونی هر مثال نقض و ابطال آن، در مباحث کتاب \اثبات‌ها\ بسیار مهم‌اند، بنابراین آن‌ها را از منظر توپولوژی/ریاضی شرح می‌دهیم.

۱.۳ مثال‌های نقضی که محدودند نه کلی

مثال‌های نقضِ محدود[1] بعضی لم‌ها و ساختارهایی را که در اثبات به کار رفته‌اند نقض می‌کنند بی‌آنکه ارتباطی به حدس اصلی داشته باشند. اینک روش اثبات و لم‌های به کاررفته در اثبات بالا را بررسی می‌کنیم.

[1] local

حذف مثلث از «داخل» نقشهٔ مثلث‌بندی‌شدهٔ مکعب در فرایند حذف یک مثلث از «داخل» نقشهٔ مثلث‌بندی‌شده، می‌توان یک مثلث را حذف کرد بدون آنکه هیچ یال یا رأسی برداشته شود. اما، این راه یکی از دو روش مذکور در لم (۳) برای حذف مثلث نیست و ازآنجاکه حکم این لم این بود که این روش‌ها تنها راه‌های حذف مثلث هستند، این امر ثابت می‌کند که این لم نادرست است. ولی حدس اویلر به‌روشنی برای مکعب برقرار است. بنابراین، می‌بینیم که این مثال نقض، نه حدس اصلی بلکه فقط لمی را که بخشی از اثبات آن است ابطال می‌کند. برای اینکه این مثال نقض را بی‌اثر کنیم، اصلاحی در لم (۳) صورت می‌دهیم.

لم (۳) اصلاح‌شده راه دیگر این است که مثلث‌های مرزی را دقیقاً با رعایت الگوی توصیف‌شده در لم سوم حذف کنیم. ولی، مثال نقض دیگری آورده شده است که لم (۳) اصلاح‌شده را نقض می‌کند.

مثال‌های نقض حاصل از قطع شبکهٔ موجود با قطع کردن شبکهٔ موجود می‌توان به‌راحتی مثلث‌ها را برداشت. به‌این‌ترتیب، با برداشتن دو یال بدون برداشتن هیچ رأسی، از مقدار $V-E+F$ یک واحد کاهش می‌یابد. بنابراین، برای حفظِ اثبات قبلی، لم (۳) دوباره به اصلاح نیاز دارد.

دومین اصلاح لم (۳) مثلث‌ها را به‌گونه‌ای بردارید که مقدار $V - E + F$ تغییر نکند. یا می‌توانیم تعریف‌ها را تغییر دهیم: مثلث‌هایی را مرزی می‌نامیم که حذفشان باعث قطع شبکهٔ موجود نشود. به‌عبارت‌دیگر، مثلث‌های موجود در شبکه را می‌توان طوری شماره‌گذاری کرد که اگر آن‌ها را با ترتیب درست حذف کنیم، مقدار $V - E + F$ تا رسیدن به آخرین مثلث تغییر نکند.

نقش این مثال نقض ارائهٔ توصیفی روشن برای طریقهٔ حذف مثلث‌ها از نقشهٔ مثلث‌بندی‌شدهٔ چندوجهی است طوری که اثبات گفته‌شده درست از آب دربیاید. همان‌طورکه قبلاً ملاحظه شد، نمی‌توان مثلث‌ها را از داخل نقشهٔ مسطح حذف کرد. بنابراین، نقش این مثال نقض، نقش راهنمون ایجابی[1] است زیرا به ما کمک کرد تا آنچه را که خواهان اثبات آن بودیم، اثبات کنیم. راهنمون ایجابی بودن این مثال نقض خاص در برجسته کردن خصلت توپولوژیک اثبات کوشی بسیار نقش داشته است. دلیلش این است که کار انجام شده روی چندوجهی از یک دیدگاه توپولوژیکی، جدای از کمیّات و کیفیّات متریکی آن، انجام گرفته است. اندازه یک یال یا یک وجه از چندوجهی هرچه که باشد، این اثبات هنوز هم درست است. اما، چه چیزی این اثبات خاص را ممکن می‌سازد؟ این

[1] positive heuristics

مثال نقض ویژگی توپولوژیکی به‌کار رفته در اثبات، موسوم به «همبندی ساده»، را برجسته می‌کند، زیرا، تاوقتی‌که شبکهٔ مسطح همبند ساده است، حذف مثلث‌ها از خارج نیز ویژگی همبند ساده‌بودن شبکه را تغییر نمی‌دهد. بنابراین، ناورداهای توپولوژیک شبکه تغییر نمی‌کنند. توجه داشته باشید که عمل «حذف» که باعث می‌شود اثبات درست پیش برود، یک همسان‌ریختی است. به یاد بیاورید که یک همسان‌ریختی (یا یکریختی توپولوژیک) یک یکریختی است که ویژگی‌های توپولوژیک را حفظ می‌کند. پس یک همسان‌ریختی تابعی دوسویی و پیوسته با معکوس پیوسته است؛ درنتیجه، اشیائی که همسان‌ریخت توپولوژیک‌اند دارای ویژگی‌های توپولوژیک یکسانی هستند. نتیجه اینکه، این لم نشان می‌دهد که شیئی که از لحاظ توپولوژیکی «ساده» است تحت همسان‌ریختی پایدار می‌ماند، و در این مورد خاص، همسان‌ریختی ما حذف یک مثلث خارج از شبکهٔ مسطح است. علاوه‌براین، این نگاشت سادگیِ شیءِ توپولوژیک را برهم نمی‌زند.

۲.۳ مثال‌های نقض کلی

مثال‌های نقض کلی، حدسِ اصلی را نقض می‌کنند. در اصل، مثال‌های نقض کلی، بدون اینکه به اثبات حدس اصلی کاری داشته باشند، نادرستی آن را مستدل می‌کنند. بااین‌حال، اولین مثال نقض کلی که در کتاب \اثبات‌ها\ داده شده نیز از نوع محدود است.

یک جفت مکعب تودرتو یک مکعب تودرتو شیئی درهم‌تنیده است که از دو مکعب، یکی در داخل دیگری، تشکیل شده است. پس مثال نقضی برای اولین لم است، چون نمی‌توانیم بعد از برداشتن وجهی از چندوجهی داخلی، مکعب تودرتو را به روی صفحه‌ای بکشیم. همچنین، برای مکعب تودرتو داریم $V - E + F = ۴$.

در این مرحله، دانش‌آموزان حاضر در کلاس خیالی لاکاتوش، در مورد اینکه آیا یک جفت مکعب تودرتو یک چندوجهی واقعی است اختلاف نظر داشتند. بنابراین، آن‌ها، برای اینکه حدس به قوت خود باقی بماند، برخی از تعریف‌ها در مورد چندوجهی‌ها را تغییر داده و تعریف‌های زیر را پیشنهاد کردند.

تعریف ۱. چندوجهی جسمی است که سطح آن تشکیل شده است از وجه‌هایی به شکل چندضلعی.

تعریف ۲. یک چندوجهی سطحی است متشکل از ساختاری از چندضلعی‌ها.

اجازه دهید ببینیم این تعرّضات از لحاظ راهنمونی چه اثراتی دارند. اول اینکه توجه داشته باشید

که از بابت مورد مکعب تودرتو، از کمربند حفاظتی هستهٔ سخت[1] برای نظریهٔ چندوجهی‌ها استفاده شده است. این امر، برای حفظ اعتبار حدس، بحثی در مورد تعریف‌های چندوجهی را پیش می‌کشد. دلیل این موضوع به این قرار است. برای اینکه مکعب تودرتو را به‌عنوان یک چیز عجیب ـیا به قول لاکاتوش، هیولاـ کنار بگذاریم باید ثابت کرد که مکعب تودرتو اصلاً چندوجهی نیست. برای تحقق این امر، می‌توان چندوجهی را مفهومی زاییدهٔ اثبات در نظر گرفت. مادامی‌که دانش‌آموزان دل به به اثبات کوشی بسته بودند، تعریفی دقیق و مشخص از چندوجهی لازم بود و این تعریفی بود که از خود اثبات به‌گونه‌ای استخراج می‌شد که با اثبات و هیچ‌یک از لم‌های آن تضادی نداشته باشد. اساساً، این مطلب یکی از مفاهیم بسیار مهم در «روش‌شناسی برنامه‌های پژوهش علمی» لاکاتوش است، و خود لاکاتوش از آن برای رد روش‌شناسی قیاسی و اقلیدسی ریاضیات، در پیوست ۲ی کتاب «اثبات‌ها» با عنوان «رویکرد قیاسی در مقابل رویکرد راهنمونی»، استفاده کرده است. چون لاکاتوش این مفاهیم را صریحاً و به‌طور اساسی بررسی کرده است، لذا از بیان آن‌ها خودداری می‌کنیم. بااین‌حال باید توجه داشت که در بحث لاکاتوش، وجود اثبات برای شکل دادن به مفهوم (یا تعریف) چندوجهی‌ها لازم است.

اگر بخواهیم اصطلاحات راهنمون را به کار ببریم باید این‌گونه تعریف‌ها را در دستهٔ راهنمونی سلبی قرار دهیم، زیرا آن‌ها برخی از اشکال اشیاءِ هندسی را که خارج از این دو تعریف قرار می‌گیرند حذف می‌کنند و بنابراین ردهٔ اشیاءِ مشمول این دو تعریف را محدود می‌کنند. متذکر می‌شویم که این بازنگری در تعاریف به‌صورت تبصره‌ای [استعجالی][2] است. بعد از هر مثال نقض، ممکن است لازم باشد برای حذف هیولاها، تعاریف را مورد بازنگری قرار دهیم. همان‌طور که شاید حدس بزنید، مثال‌های نقض بلافاصله بعد از بیان تعریف‌های جدید ظاهر می‌شوند.

مثال‌های نقض برای تعریف‌های ۱ و ۲ یک جفت چهاروجهی که دارای یک یال مشترک‌اند و یک جفت چهاروجهی دیگر که دارای یک رأس مشترک‌اند، مثال‌های نقضی برای تعریف‌های ۱ و ۲اند، لاکاتوش در کتاب «اثبات‌ها» آن‌ها را ۲a و ۲b نامیده است. توجه داشته باشید که هر دو مثال نقض با هر دو تعریف جور در می‌آیند. علاوه‌براین، برای هر دو مثال نقض، داریم $V+E+F=3$. به‌منظور حذف این مثال‌های نقض، اصلاحی در تعریف‌ها، بیشتر به‌صورت تبصره‌ای انجام می‌شود.

تعریف‌های ۱ و ۲ بسیار شهودی‌اند، بنابراین تعجبی ندارد که برای آن‌ها مثال‌های نقض پیدا شده است. مثال‌های نقض ۲a و ۲b طوری ساخته شده‌اند که نشان دهند این تعریف‌ها بسیار محدود

[1] protective belt of the hard core [2] ad hoc

کننده‌اند، یعنی درجهٔ سلبی‌بودن آن‌ها از نظر راهنمونی بسیار زیاد است. از آنجایی که تعریف‌های ۱ و ۲ مفاهیم نسبتاً شهودی اما ضعیفی هستند، اشیاءِ بسیاری را جزو چندوجهی‌های منتظم محسوب می‌کنند و این باعث می‌شود بعضی از آن‌ها به‌صورت مثال‌های نقض در بیایند.

اکنون تعریف جدیدی را امتحان می‌کنیم.

تعریف ۳. یک چندوجهی ساختاری مرکب از چندضلعی‌هاست به‌طوری‌که (۱) دقیقاً دو چندضلعی در هر یال آن وجود داشته باشد و (۲) امکان رفتن از داخل هر چندضلعی به داخل هر چندضلعی دیگر از طریق مسیری که هیچ یالی را در رأسی قطع نمی‌کند، وجود داشته باشد.

به‌راحتی می‌توان دریافت که در اولین زوج از چهاروجهی‌های نام‌برده‌شده در آخرین مثال نقض ما، یالی وجود دارد که مشترک بین چهارتا چندضلعی است و در دومین جفت از چهاروجهی‌ها نیز غیرممکن است از داخل یک چندضلعی متعلق به چهاروجهی بالایی به داخل چندضلعی دیگری متعلق به چهاروجهی پایینی برویم بدون اینکه از مسیری برویم که یالی را در رأسی قطع کند.

پس، مثال‌های نقض $۲a$ و $۲b$ علّت تجدیدنظر در تعریفی از چندوجهی شدند که زاییدهٔ اثبات بود و تعریف ۳ نتیجه‌ای از این تجدید نظر است. این همان کمربند حفاظتی نظریهٔ مورد بحث بود که با وارد کردن تعریف ۳ از هستهٔ سخت این نظریه محافظت کرد. حاصل کار یک «تعریف بی‌نقص» است، که آن را تعریف **ب.** می‌نامیم.

تعریف ب. یک چندوجهی ساختاری مرکب از چندضلعی‌هاست که رابطهٔ $V - E + F = ۲$ برای آن برقرار است.

تعریف **ب.** تعریفی تاحدی قیاسی است و لاکاتوش هرگز به آن رضایت نمی‌داد. به نظر ما دلیل اینکه کتاب \اثبات‌ها\ مباحث دیگری نیز دارد همین است. اگر تعریف بی‌نقصی هم می‌بود، استفاده از آن به مسائل مربوط به چندوجهی‌ها خاتمه نمی‌داد. چون بعد از آن این سؤال مطرح می‌شد که چرا لاکاتوش این تعریف موقتی را که عملاً بسیار محدود و از نظر راهنمونی ضعیف می‌باشد آورده است؟ به نظر ما دلیل اصلی برای آوردن تعریف **ب.** نشان دادن خطاهای روش اقلیدسی در ریاضیات است که لاکاتوش در پیوست کتاب \اثبات‌ها\آن را آماج حمله قرار می‌دهد. بدیهی است که در دامنهٔ بسیار محدودی که تعریف **ب.** به دست داده است، حدس دکارت–اویلر آشکارا برقرار است، زیرا تعریف **ب.** اویلری‌بودن یک چندوجهی را منوط به برقرای یک تک فرمول، یعنی $V - E + F = ۲$، کرده است، که هیچ فایده‌ای برای توضیح ویژگی‌های کلی اویلری‌بودن چندوجهی ندارد. علاوه‌براین،

باید بر این نکته نیز تأکید کنیم که این تعریفی زاییدهٔ اثبات است، و بنابراین بعد از اثبات می‌آید. در نگاه اول، به‌نظر می‌رسد تعریف **ب.** یک مفهوم قیاسی است. اما، با توجه به این مطلب که تعریف **ب.** از اثبات نتیجه شده است، می‌توان به‌راحتی دریافت که نمی‌تواند مفهومی قیاسی باشد. به نظر ما این کار لاکاتوش پیشرفتِ بسیار مهمی برای او بود: او با بازنگری در نتیجهٔ راهنمونی‌ها، مفهومی به‌ظاهر قیاسی را به صورت مفهومی زاییدهٔ اثبات در آورد.

خارپشت کپلر[1] خارپشت کپلر نام اصلی ستارهٔ کوچک دوازده‌وجهی است، که یک مثال نقض به حساب می‌آید زیراکه برای این «چندوجهی» داریم $V - E + F = -۶$، و بااین‌حال در تعریف ۳ صدق می‌کند.

قطعاً یکی از جالب‌ترین مثال‌های نقض در کتاب اثبات‌ها خارپشت کپلر است که برای ابطال تعریف ۳ آورده شده است. بنابراین، طبق قواعد راهنمونی سلبی[2]، تعریف ۳ مورد بازنگری قرار می‌گیرد تا خارپشت کپلر از دامنهٔ تعریف خارج گردد.

معلوم بود که بعد از پیدا شدن خارپشت کپلر، باید تعریف ۳ مورد بازنگری قرار می‌گرفت. برای خارج ساختن خارپشت کپلر از دامنهٔ تعریف، تعریف جدید دیگری پیشنهاد می‌شود.

تعریف ۴. یک چندضلعی ساختاری از یال‌هاست به‌طوری‌که (۱) دقیقاً دو یال در هر رأس وجود داشته باشد، و (۲) یال‌ها هیچ نقطهٔ مشترکی جز رأس‌ها نداشته باشند.

با تعریف ۴ مشکل خارپشت کپلر رفع شد، چون، در خارپشت کپلر، یال‌ها در خارج از رأس‌ها نقاط مشترک دارند. پس، برای «حفظِ» خارپشت در دامنهٔ تعریف، دوباره تعریف ۴ مورد بازنگری قرار گرفت.

تعریف $'۴$. یک چندضلعی ساختاری از یال‌هاست به‌طوری‌که دقیقاً دو یال در هر رأس وجود داشته باشد.

برای حفظِ خارپشت کپلر در دامنهٔ تعریف، صورت جدیدی از تعریف چندوجهی، تعریف $'۴$، درآمد. این تعریف هم محصول راهنمون سلبی است، زیرا یک بند از تعریف قبلی را حذف و مفهوم چندضلعی را محدودتر کرد. پیشنهاد دهندهٔ تعریف $'۴$ برای توجیه تعریف ۴ دلیلی عالی می‌آورد بدین‌قرارکه چندضلعی‌ها را باید در فضا در نظر گرفت نه در صفحه. به‌این‌ترتیب، به نظر او، بند

[1] the Urchin of Kepler [2] negative heuristics

دوم تعریف ۴ بی‌استفاده است، زیرا «آنچه را شما یک نقطهٔ مشترک تصور می‌کنید واقعاً یک نقطه نیست، بلکه دو نقطهٔ متفاوت‌اند که یکی بالای دیگری قرار گرفته است» [۷، ص ۱۷].

به‌روشنی، افزایش تعداد ابعاد فضایی جسم، نشانی از شهود توپولوژیکی است. خطوطی که در ابعاد دو یکدیگر را قطع می‌کنند ممکن است در ابعاد سه یکدیگر را قطع نکنند. می‌توان از دید توپولوژی بُعد پایین[1] یا حتی جبر خطیِ فضاهای برداری به این مشاهدهٔ خام پرداخت.

مساحت خارپشت کپلر تلاش شد که مشکل خارپشت کپلر به این طریق حل شود که بگویند بعضی از چندضلعی‌های داخل آن مساحتی ندارد. سعی شد با نشان دادن صفربودن مساحت بعضی از چندضلعی‌های داخل خارپشت، آن را ابطال کنند. اما این اِشکال به زیرکی پاسخ داده شد به این طریق که گفتند «مفهوم مساحت» و «مفهوم چندضلعی» رابطهٔ قابل اعتنایی ندارند.

این ابطال هم از طریق یک راهنمون سلبی مطابق با سنت پوپری بود. اما، از لحاظ ریاضی این رویکرد مبتنی‌بر مفهوم فاصله به اشیای هندسی با یک رویکرد توپولوژیک فاصلهٔ بسیار دارد. همین‌که مفهوم مساحت به صورت یک کمیت تعریف شد، می‌شود، مثلاً، چندضلعی‌های تبهگن را نادیده گرفت. به‌عبارت‌دیگر، دو شی ممکن است همسان‌ریخت باشند ولی مساحت‌های مختلفی داشته باشند. مثلاً، دو مکعب را درنظر بگیرید که یکی دارای مساحت a است و دیگری دارای مساحت $۲a$، واضح است که این دو مکعب همسان‌ریخت‌اند اما مساحت آن‌ها متفاوت است.

مسئلهٔ مساحت صفر را از دیدگاه توپولوژی نیز می‌توان بررسی کرد. مساحت‌های صفر وقتی ظاهر می‌شوند که فاقد بُعدی باشیم که بعضی از ناحیه‌ها هم پوشیده بشوند. این موضوع دراصل شبیه به مسئلهٔ خطوط متقاطع است که در بالا بحث کردیم.

قاب عکس[2] مثال نقض بعدی ما است.

قاب عکس قاب عکس مثال نقضی برای تعریف‌های ۴ و $۴'$ است. اگرچه قاب عکس در تمام تعریف‌ها صدق می‌کند اما برای آن داریم $V - E + F = ۰$. بلافاصله پس از این موضوع، با استفاده از تعریف جدیدی برای چندوجهی‌ها، مشکل قاب عکس رفع‌ورجوع می‌شود.

تعریف ۵. در چندوجهی‌های واقعی، از هر نقطهٔ دلخواه در فضا، حداقل یک صفحه می‌توان عبور داد که سطح مقطع آن با چندوجهی یک چندضلعی واحد باشد.

قاب عکس درتمام تعریف‌هایی که تاکنون مطرح شده بود، صدق می‌کرد. ولی، مشخصهٔ اویلر

[1] lower-dimensional topology [2] picture frame

آن برابر صفر بود. یادآوری این مطلب لازم است که قاب عکس دارای «سوراخ» است و فقط می‌توان آن را با باد کردن به شکل یک چنبره درآورد. دلیل این امر آن است که چنبره فقط دارای یک سوراخ است، یا به‌عبارت دقیق‌تر، چنبره از گونای یک است. اگر بخواهیم دقیق‌تر بگوییم، همیشه می‌توان یک همسان‌ریختی بین یک قاب عکس و یک چنبره پیدا کرد. ازاین‌رو، ویژگی‌های توپولوژیکی چنبره و قاب عکس یکسان‌اند. پس، خیلی غیرمعمول نیست که بتوان مشکل قاب عکس را با همین ویژگی‌ها به نوعی رفع‌ورجوع کرد. تعریف ۵ برای همین منظور آورده شده است؛ این تعریف شرط همبندی ساده در چندوجهی‌های دکارت–اویلر را برجسته می‌کند. توجه کنید که اگر نقطه‌ای را در قاب عکس درنظر بگیریم، صفحه‌ای که سطح مقطع آن فقط شامل یک چندضلعی واحد باشد وجود ندارد.

باوجوداین، تعریف ۵ تعریف نهایی نیست. مثال‌های نقض زیر، تعریف ۵ را به چالش می‌کشند.

استوانه استوانه مثال نقضی برای تعریف ۵ و همهٔ تعریف‌های قبلی است. استوانه مثال نقضی برای تعریف ۵ است چون برای آن داریم $V - E + F = ۱$. در بحث زیر که در مورد مفهوم یال است به «ساختار غیرمعمول» استوانه نگاهی شده است. بعد از آن ادعا شده است که استوانه نمی‌تواند مثال نقضی برای تعریف‌های چندوجهی باشد، زیرا سازگاری‌ای با تعریف مناسبی از یال ندارد. درنتیجه، تعریف جدیدی برای یال ارائه شده است.

تعریف ۶. هر یال دارای دو رأس است.

در بحث از مفهوم یال، که زاییدهٔ اثبات است، به استوانه پرداخته شده است. ملاحظه می‌کنیم که اگر تعریفی از یال به دست دهیم، آن وقت، با روش‌های راهنمون سلبی، استوانه از شمول چندوجهی‌ها خارج خواهد شد. بااین‌حال، این نیز گام آخر نیست. تعریف به دست‌آمده برای یال در این حالت را می‌توان نتیجه‌ای از یک راهنمون ایجابی نیز در نظر گرفت. لاکاتوش متعاقب بحث در مورد تعریف یال، طرز عمل روش‌شناسی برنامه‌های پژوهش علمی خود را به دقت نشان می‌دهد. ممکن است از پس یک راهنمون سلبی یک اقدامِ راهنمونی ایجابی داشته باشیم به‌گونه‌ای‌که، شبیه به دیالکتیک هگلی، مفهوم جدیدی تولید شود.

اکنون که در مورد \اصطلاحات مُعرِّف[1] مانند یال بحث کردیم، سراغ یکی از مهم‌ترین ابعاد راهنمون‌های لاکاتوشی می‌رویم. اجازه دهید به‌طور مختصر روش مسدودسازی هیولا[2] را مرور کنیم.

[1] defining terms [2] monster-barring

روش مسدودسازی هیولا «با استفاده از این روش می‌توان هر مثال نقض برای حدس اصلی را حذف کرد به این طریق که یا تعریفی، گاهی ظریف اما همواره تبصره‌ای، برای چندوجهی، [یا] برای اصطلاحات معرّف آن، یا برای اصطلاحات معرِّفِ اصطلاحات معرّف آن از نو بدهیم» [۸].

همان‌طور که لاکاتوش در کتاب \اثبات‌ها\ اشاره می‌کند، روش مسدودسازی هیولا «همواره استعجالی» است. در این روش، ممکن است اصطلاحات را از لحاظ نظری به‌صورت بازگشتی از نو تعریف کنیم، یعنی ابتدا با اصطلاحات مفروض شروع و آن‌ها را تعریف کنیم، و سپس اصطلاحاتی را تعریف کنیم که اصطلاح اولیه را تعریف می‌کنند و همین‌طور الی آخر. بنابراین، روند تعریف به‌صورت استعجالی در می‌آید، و ممکن است به ابزار دیگری احتیاج پیدا کنیم تا از این دور باطلِ استعجالی‌بودن خلاص شویم. این دقیقاً همان کاری است که لاکاتوش از ما می‌خواسته است انجام دهیم.

بااین‌حال، این روش لزوماً راهنمون‌های ایجابی به بار نمی‌آورد. دلیلش این است که از این روش می‌توان با صیقل‌دادن اصطلاحات معرّف از بروز مثال‌های نقض اجتناب یا اینکه حدس مورد بحث را اصلاح کرد.

بیان جدیدی از قضیهٔ مورد بحث برای کلیه چندوجهی‌هایی که هیچ حفره، تونل، و «ساختارهای چندگانه»ای ندارند، داریم ۲ $V - E + F =$.

این بیان جدید مانع ورود همهٔ هیولاها، یا همان استثناها، می‌شود. بااین‌حال، همان‌طورکه گفتیم، این روند استعجالی است. هرچند مانع ورود همهٔ استثناها شده است، ممکن است نتوانیم درستی یا نادرستی آن را معلوم کنیم. عملاً، همان‌طورکه درکتاب \اثبات‌ها\گفته شده است، خارپشت کپلر و استوانه مثال‌های نقضی برای این بیان جدید قضیه‌اند.

همچنین شایان ذکر است که روش مسدودسازی هیولا، روشی است که در آن اثبات \از قلم می\افتد. در این روش، تمرکز روی تعریف‌ها، دامنه و مجموعه‌های صدق آن‌ها، یعنی اشیائی که در حدس صدق می‌کنند، است. همان‌طورکه در \اثبات‌ها\گفته شده است، در این روش، «با محدودسازی مناسب حدس و اثبات به یک دامنهٔ مناسب، حدس، که اینک صادق است، بی‌نقص می‌شود، و اثبات، که اساساً معتبر است و اینک دقیق، بی‌نقص خواهد شد و دیگر مبتنی‌بر هیچ لم نادرستی نخواهد بود» [۷، ص ۲۹].

اینک اجازه دهید به‌اختصار کاربردی از تعدیلِ هیولا[1] را ذکر کنیم که مورد خارپشت را «تعدیل

[1]monster-adjustment

می‌کند». به‌بیان‌دیگر، اصطلاحات معرّفِ هیولای مورد بحث (خارپشت) را طوری از نو تعریف کنیم که این هیولا عادی شود.

کاربرد روش تعدیل هیولا برای مورد خارپشت ادعایی مطرح می‌شود مبنی‌بر اینکه هیچ چندضلعی ستاره‌ای در خارپشت وجود ندارد و همهٔ وجوه مثلثی‌اند. وجود ۶۰تا وجه، ۹۰تا یال، و ۳۲تا رأس به ما مشخصهٔ اویلر ۲ را می‌دهد. سپس از آن نتیجه گرفته می‌شود که خارپشت یک چندوجهی و همچنین از نوع اویلری است. بااین‌حال، این تعبیر که خارپشت چندوجهی ستاره‌ای است اشتباه بود.

به یاد بیاورید که در اولین تعبیر برای خارپشت کپلر ادعا شده است که وجوه آن چندضلعی ستاره‌ای‌اند. بعداً برای اینکه بتوان از راهنمون ایجابی استفاده کرد، ادعا می‌شود که خارپشت کپلر دارای وجوه مثلثی‌شکل است. بنابراین، با این تعبیر و از طریق محاسبات مناسبی نتیجه می‌شود که خارپشت دراصل از نوع اویلری است. اما، استدلال‌های مخالفی علیه این‌گونه تعبیر از خارپشت کپلر، که هدف از آن مسدودسازی هیولا است، آورده می‌شود. ازآنجایی‌که، همهٔ مثلث‌های آن در یک صفحه و در گروه‌های پنج‌تایی قرار می‌گیرند و یک پنج‌ضلعی منتظم را در پشت یک زاویهٔ فضایی احاطه کرده‌اند، پس این تعبیر که وجوهْ مثلثی‌اند نادرست بوده است. در این مورد، این استدلال‌های مخالف نقش راهنمون ایجابی را ایفا می‌کنند، زیرا این استدلال‌ها باعث می‌شود چیستی واقعی و راه درست شناختن خارپشت آشکار شود. بازهم راهنمون‌های ایجابی به ما کمک کرد تا دریابیم از چه جهتی و چگونه پیش برویم. در این مثال خاص، راهنمون‌های ایجابی به ما گفتند که چگونه می‌توان خارپشت کپلر را تجزیه‌وتحلیل کرد و حدس اویلر را برای آن آزمود.

بحثی دربارهٔ توپولوژی هندسی پس از بحثِ تعدیل هیولا، زمینهٔ رویکردی شهودی مبنی‌بر توپولوژی هندسی چیده می‌شود. قاب عکس اولین مثال آن است. چنین نتیجه گرفته می‌شود که نمی‌توان قاب عکس را با باد کردن به شکل کره یا صفحه در آورد. دلیلش این است که گونای کره صفر است حتی اگر عمل کشیدن روی چیزی را از نوع مسطح در نظر بگیریم. یعنی، کشیدن چندوجهی روی صفحهٔ (اقلیدسی) یا روی کره از نظر توپولوژیکی «یکسان» باشد. به‌عبارت‌دیگر، بین این دو خمینه یک همسان‌ریختی وجود دارد. از اینجا نتیجه گرفته شده است که قاب عکس را می‌توان باد کرد و به شکل یک چنبره در آورد. اما به یاد داریم که چنبره از گونای یک است. ازاین‌رو

فرمول کلی مشخصهٔ اویلر برای خمینه‌ها به این صورت است:

$$v - e + f = ۲ - ۲g(S)$$

که در آن S رویه‌ای است که چندوجهی با باد کردن به شکل آن در می‌آید.

همان‌طورکه قبلاً گفته شد، مشخصهٔ اویلر برای هر چنبرهٔ S برابر $V-E+F = ۲-۲\times ۱ =$ ۰ است. پس می‌توان نتیجه گرفت که قاب عکس مسطح نیست، و چنبره دقیقاً به همین دلیل مثال نقض کلی به حساب می‌آید. ازآنجایی‌که چنبره همبند ساده نیست، با استدلال نشان داده می‌شود که حدس اصلی فقط برای چندوجهی‌های ساده برقرار است، یعنی برای آن‌هایی که با حذف یکی از وجوهشان، می‌توان آن‌ها را به‌روی یک صفحه کشید. بدین‌ترتیب، دامنهٔ حدس و لم (۱) محدود می‌شود، ولی اثبات تغییری نمی‌کند.

این تعبیر از قاب عکس برای این حالت یک راهنمون ایجابی است. ظاهراً با وارد کردن مفاهیم چنبره و گونا، راه درست تعبیر قاب عکس به ما نشان داده می‌شود. پس، ملاحظه می‌کنیم که راهنمون ایجابی باعث می‌شود به مفهوم جدید گونا برسیم تا بتوانیم تعبیر دقیقی از چندوجهی‌های غیرساده به دست آوریم. اینک حدس مورد بحث بهبود یافته است و ما نیز به صورت‌بندی جدیدی برای آن رسیده‌ایم.

اما این پایانی برای مثال‌های نقض نیست؛ مکعب تاجدار[1] اسم مثال نقض بعدی است.

مکعب تاجدار مکعب تاجدار ششمین مثال نقض است. این مثال نقض با همهٔ تعریف‌های قبلی جور در می‌آید، زیرا حفره، تونل، و ساختار چندگانه ندارد. بااین‌حال، مشخصهٔ اویلر مکعب تاجدار برابر ۳ است.

مشکل مکعب تاجدار با اصلاح کردن لم (۲) رفع‌ورجوع می‌شود. درنتیجه، صورت جدیدی از لم (۲) وارد حدس اصلی و به شرح زیر اصلاح می‌شود: برای هر چندوجهی ساده، که تمام وجوه آن همبند ساده‌اند، داریم $V - E + F = ۲$. بنابراین، در این حالت، «با اینکه [اثبات‌ها] چیزی را ثابت نمی‌کنند، [آن‌ها به ما] کمک می‌کنند تا حدس را بهبود بخشیم» [۷، ص ۳۷]. از مشاهدات لاکاتوش نتیجه می‌گیریم که محدودیت اعمال‌شده بر لم (۲) یک راهنمون ایجابی بود، زیرا این محدودیت به ما اجازه می‌دهد اثبات را بهتر درک کنیم و آن را به وسیلهٔ یک لم اصلاح‌شده بهبود دهیم. در این مورد خاص، سطوح جانبی مکعب تاجدار را به‌صورت وجوه حلقوی‌شکل درنظر

[1] crested cube

می‌گیریم. بنابراین شرط همبند ساده بودن وجوه باعث کنار گذاشتن مکعب تاجدار می‌شود، زیرا سطوح جانبی آن همبند ساده نیستند. ولی کمی بعد گفته می‌شود که برداشت حلقوی‌شکل بودن وجوه گمراه‌کننده بوده است و از روی راهنمون سلبی پی می‌بریم که این تعبیری نادرست بوده است و باید طرد شود، و نتیجه این می‌شود که مکعب تاجدار مثال نقض معتبری برای حدس اویلر است. این «برداشت ما از یک تعبیر نادرست» باز هم حاصل این نکته است که در خمینه‌ها با بُعد کمتر، وجوهی که در ابعاد بالاتر با هم تلاقی ندارند ممکن است تلاقی پیدا کنند.

این بحث‌ها به بیانی از آن قضیه به صورت زیر می‌انجامد.

صورت‌بندی جدیدی از قضیه چندوجهی‌هایی اویلری‌اند که (الف) ساده، (ب) هر وجه آن همبند ساده، و (ج) طوری باشند که مثلث‌های موجود در شبکهٔ مثلثی مسطح را، که نتیجهٔ فرایندهای کشیدن و مثلث‌بندی‌اند، بتوان به‌گونه‌ای شماره‌گذاری کرد که اگر آن‌ها را با ترتیب درستی حذف کنیم رابطهٔ $V-E+F$ تغییری نکند تا به آخرین مثلث برسیم. در این صورتِ جدید از قضیه، لم‌های قبلی به صورت شرط‌هایی در قضیه در آمده‌اند.

کاربرد نهایی روش الحاق لم‌ها، صورت‌بندی جدیدی از قضیه را به همراه داشت. بدون شک این صورتِ قضیه راهنمون ایجابی بوده است، زیرا صریحاً نشان داد که چندوجهی چیست و حدس اویلر برای چه اشیائی کاربرد دارد. توجه داشته باشید که در این صورت‌بندی جدید، تمام لم‌هایی که قبلاً در مورد آن‌ها صحبت کردیم به صورت شرط‌هایی در آمده‌اند. به‌عبارت‌دیگر، «حقایقی» که ما از آن‌ها در اثبات استفاده کردیم مورد بحث و بررسی قرار گرفتند و به نظر مشکوک می‌رسند، و حالا برای دفع این شک، آن‌ها به یک سطح بالاتر، به جایگاه شرایط قضیه، منتقل شدند.

بااین‌حال، روش الحاق لم‌ها گرفتار مشکل قدیمی استقراء است. حال این سوال مطرح می‌شود که چگونه می‌توان اطمینان حاصل کرد از اینکه همهٔ لم‌ها را به صورت شرایط قضیه بیان کرده باشیم؟

لم‌های پنهان گفته شده است که در برخی از احکام ریاضی یادشده لم‌های پنهان وجود دارد مانند این حکم که «همهٔ مثلث‌ها دارای سه یال و سه رأس‌اند». در روش الحاق لم‌ها، باید همهٔ لم‌ها را وارد کنیم. اما، دراین‌صورت مشکل دور نامتناهی به وجود می‌آید: از کجا بدانیم چه وقت باید کار تبدیل لم‌ها به شروط را متوقف کنیم؟

ملاحظه کردیم، که از دیدگاه راهنمون ایجابی، برای به‌کارگیری درست این روش باید لم‌ها را در تقریرهای جدید خود بگنجانیم. ولی، ما فقط لم‌هایی را گنجاندیم که برای آن‌ها مثال‌های نقض

داشتیم. پس اگرچه روش جدیدی را اتخاذ کرده‌ایم، هنوز استعجالی‌بودن کار ما پابرجاست.

۳.۳ مثال‌های نقضی که کلی‌اند نه محدود

باز هم استوانه دیدیم که استوانه مثال نقضی هم برای حدس اولیه و هم قضیه وابسته به آن بود. بنابراین، این یک مثال نقض کلی است نه محدود زیراکه قضیه را ابطال می‌کند نه لم‌ها را. این مشکل زمانی ایجاد می‌شود که شخص بخواهد با برداشتن وجه جانبی استوانه آن را با باد کردن به شکل صفحه‌ای در آورد. در این مرحله، به‌نظر می‌رسد استوانه باید در لم دیگری صدق کند و آنکه شبکهٔ مسطح حاصل باید همبند باشد. اما معلوم می‌شود که این خاصیت یک فرض پنهان است.

علاوه‌براین، ادعا شده است که استوانه در لم (۲) صدق نمی‌کند، یعنی «هر وجهی که به‌وسیله قطر شکافته می‌شود به دو بخش تقسیم می‌شود». استدلال متقابلی که بلافاصله پس از آن آورده شد این بود که چون نمی‌توانیم قطر را بر روی وجوه مستدیر ترسیم کنیم، استوانه باید درآن لم صدق کند. سپس مشاهده شد که این برداشت از قطری‌سازی منتج از اثبات نیست به این دلیل که امکان ندارد به یک شبکه مثلثی برسیم و اثبات به انجام برسد.

پس، اولاً ملاحظه می‌کنیم که مشکل استوانه توسط یک قاعدهٔ راهنمون ایجابی رفع شد که می‌گوید شبکهٔ حاصل، در اثبات، باید همبند باشد. ازسوی‌دیگر، قانون راهنمون سلبی دیگری حاکی از این بود که برای به دست آوردن شبکهٔ مسطح نباید هیچ وجه جانبی را جدا کنیم. پس، برای مورد استوانه، هر دو الگوی راهنمونی را به کار برده‌ایم. مشابه همین کار را درخصوص امکان استفاده از لم (۲) می‌توان تکرار کرد زیرا در اینجا نیز نمی‌توانیم قطری داخل دایره ترسیم کنیم. این بحث به مفهوم قطر (که زاییدهٔ اثبات است) و پاسخ به این سؤال که آیا می‌توان آن را در یک دایره ترسیم کرد یا نه می‌رسد.

۴.۳ بازگشت به مثال‌های نقض محدود و نه کلی

مشکل محتوا «تجزیه‌وتحلیل اثبات، هم‌زمان با افزایش یقین، محتوای قضیه را کاهش می‌دهد. هر لم جدیدی که در حین تجزیه‌وتحلیل اثبات پیدا می‌شود با شرط جدیدی در قضیه متناظر می‌گردد و باعث کاهش شمول قضیه می‌شود.» [۷، ص ۵۷] یکی دیگر از دانشجویان خیالی لاکاتوش اصطلاح دیگری را تعریف می‌کند: چندوجهی‌های شبه‌محدب[1] چندوجهی‌هایی هستند که حداقل دارای وجهی هستند که می‌توان از طریق آن از داخل چندوجهی عکس گرفت. باید توجه داشت که این تعبیر کاملاً

[1] quasi-convex

شبیه به مفهوم باد کردن چندوجهی‌ها به شکل کره است. آن دانشجو قضیهٔ بعدی را دراین‌باره مطرح می‌کند: «همهٔ چندوجهی‌های شبه‌محدب با وجوه همبند ساده، اویلری هستند». خارپشت کپلر را درنظر بگیرید؛ برای این چندوجهی داریم $V-E+F=2$. بعد از این صحبت‌ها، گفته می‌شود که لازم است اثباتی بیاوریم که پدیده اویلری‌بودن را در تمام ابعادش تبیین کند. زیراکه قابل تصور نیست بتوان اثباتی آورد که ویژگی اویلری‌بودن را برای هر دوی چندوجهی‌های محدب و مقعر، مثل (به‌ترتیب) مکعب و خارپشت کپلر، با یک روش واحد تبیین کند. این بدان معنی است که شرایط قضیه نه تنها کافی، بلکه لازم‌اند. پس نباید هیچ مثال نقضی در دامنهٔ شمول آن و همچنین هیچ مثالی خارج از آن قرار بگیرد.

یکی از آن دانشجویان فکر می‌کرد که مسئله مورد بحث کشفِ دامنهٔ صدق رابطهٔ $V-E+F=2$ است. اما یکی دیگر از آن‌ها نظر دیگری داشت و مسئله برای او به‌دست آوردن روابطی بین V، E، و F بود؛ نه فقط رابطه‌ای مثل $V-E+F=2$ بلکه روابطی مثل $V-E+F=0$، $V-E+F=-6$، و غیره. بعد از آن دانشجویان متوجه شدند که قاب عکسی که در قسمت جلوی و عقب دارای وجوه حلقوی است نیز اویلری می‌باشد، ولی چندوجهی از نوع کوشی نیست.

روی همین حساب، دانشجویان بر آن می‌شوند که، در بحث از مبنای استقرائی و قیاسی روش اثبات‌ها و ابطال‌ها، به بررسی روابط بین یال‌ها و رأس‌ها در چندضلعی‌ها نیز بپردازند.

در مرحلهٔ بعد دانشجویان سراغ استدلال قیاسی می‌روند. دانشجویی با این فکر یک عمل چسباندن، که در توپولوژی به آن مجموع همبند[1] می‌گویند، روی چندوجهی‌ها انجام می‌دهد. او می‌گوید [۷، ص ۷۶]:

> دو چندوجهی معمولیِ بسته را انتخاب کرده و آن‌ها را در امتداد یک دور چندضلعی‌شکل به‌گونه‌ای به هم بچسبانید که دو وجهی که روبه‌روی هم قرار می‌گیرند پیدا نباشند. چون در هر دو چندوجهی داریم $V-E+F=4$، حذف‌شدن آن دو وجه در چندوجهی حاصل، فقط باعث می‌شود که فرمول اویلر دوباره برقرار شود. (...) حالا اجازه دهید با چسباندن مضاعف آزمایشی کنیم: دو چندوجهی را در امتداد دو دور چندضلعی‌شکل به هم بچسبانید. حالا ۴تا وجه ناپیدا می‌شود و برای چندوجهی

[1] connected sum

جدید داریم $V - E + F = ۰$.

$$V - E + F = ۲ - ۲ \times (n - ۱) + \sum_{k=۱}^{F} e_k$$

دانشجو با ادامهٔ این روش نتیجه می‌گیرد که:

برای یک چندوجهی تک‌کره‌وار[1] داریم $V - E + F = ۲$، برای یک چندوجهی دوکره‌وار[2] داریم $V - E + F = ۰$ و $(\ldots)$ برای چندوجهی nـکره‌وار داریم $V - E + F = ۲ - ۲ \times (n - ۱)$.

بلافاصله امگا [3] تذکر می‌دهد که مکعب تاجدار، با رابطهٔ $V - E + F = ۱$، یک مثال نقض برای رابطهٔ ما است. اما زتا تصور می‌کند که روش او شاید برای همهٔ چندوجهی‌ها به کار نیاید، بلکه فقط در مورد چندوجهی‌های nـکره‌وار برقرار باشد که مطابق با روش او ساخته شده‌اند. بعد، سیگما در مورد چندوجهی‌ها با وجوه حلقوی‌شکل بحث می‌کند. او می‌تواند با حذف یک یال در ساختار مناسبی از چندضلعی‌ها و بدون کاهش تعداد وجوه، یک چندضلعی حلقوی‌شکل ایجاد کند. سپس فرمول زیر را نتیجه‌گیری می‌کند

$$V - E + F = ۲ - ۲ \times (n - ۱) + \sum_{j=۱}^{K} \{۲ - ۲ \times (n_j - ۱) + \sum_{k=۱}^{F} e_{kj}\}.$$

درخصوص راهنمون‌ها ذکر این نکته ضروری است که از تمایزات و تعاملات بین راهنمون‌های سلبی و ایجابی برای تعیین شرایط لازم و کافی در یک قضیهٔ ریاضی، در اینجا حدس دکارت‌ـاویلر، استفاده می‌شود. اما، خیلی عجولانه است اگر نتیجه‌گیری کنیم که راهنمون‌های ایجابی نظیر شرایط لازم و راهنمون‌های سلبی نظیر شرایط کافی‌اند و یا برعکس. پس در حال حاضر از این نتیجه‌گیری اجتناب می‌کنیم.

مسئلهٔ محتوا مربوط می‌شود به نگه‌داشتن هر چندوجهی واقعی در دامنهٔ شمول قضیهٔ مورد بحث و کنار گذاشتن هر مثال نقض از. همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم، ابزارهایی که مورد استفاده قرار

[3] امگا، سیگما، و زتا نام‌های دانشجویان در کلاس خیالی لاکاتوش‌اند.

[1] monospheroid [2] dispheroid

گرفتند در درجهٔ اول راهنمون‌های سلبی و ایجابی بودند. گاهی اوقات، به کمک آن‌ها دامنهٔ قضیه بزرگ یا محدود می‌شد. روشن نیست که آیا این دو نزد لاکاتوش وظایفی از پیش تعریف‌شده و از پیش تعیین‌شده دارند یا نه.

اما ازآنجایی‌که لاکاتوش با روش‌شناسی اقلیدسی اختلافات زیادی دارد، نمی‌توان انتظار داشت که وظایف مشخصی را برای هر دو قاعدهٔ راهنمونی مقرر کرده باشد. دقیقاً به همین دلیل است که ما سریعاً نتیجه‌گیری نکردیم که «شرایط لازم و کافی» متناظر با «راهنمون‌های سلبی و ایجابی»اند.

یکی از ایده‌های قابل توجهی که لاکاتوش در کتاب اثبات‌ها به‌کار برده است در نظر گرفتن مشخصهٔ اویلر به‌عنوان یک تابع است. این ایده را یکی از دانشجویان کلاس خیالی لاکاتوش بیان می‌کند. این رویکرد راهنمونی ایجابی به ما درک بهتری از حوزهٔ عمل مشخصهٔ اویلر می‌دهد. به‌این‌ترتیب که نه تنها اعداد صحیح خاصی که از تابع مشخصهٔ اویلر به دست می‌آیند، بلکه هر عدد صحیحی هم که ممکن است خروجی این تابع باشد مورد توجه قرار می‌گیرد. ازاین‌رو، در کل، وجود چنین فرمول‌های طولانی و پیچیده‌ای که در صفحات قبل آمد جای تعجب ندارد. آن‌ها محصول راهنمون‌های ایجابی بودند و ما را به این اجسام چندوجهی و تقریرهای مختلف قضیه‌ها رساندند.

لاکاتوش کتاب اثبات‌ها را با یک گفتهٔ نسبتاً خوش‌بینانه به پایان می‌رساند که در بخش بعد به آن می‌پردازیم.

۵.۳ نقّادی چگونه می‌تواند صدق ریاضی را به صدق منطقی تبدیل کند؟

خوش‌بینی لاکاتوش در آخرین بخش کتاب اثبات‌ها خودش را نشان می‌دهد، آنجاکه بحث خود را با ذکر نکته‌ای دربارهٔ «کشیدن» به پایان می‌برد.

صورت جدیدی از قضیه در این مرحله، صورت جدیدی از قضیه مطرح می‌شود: «برای همهٔ اجسام ساده که وجوه آن‌ها همبند ساده است و یال‌های وجوه در رأس‌ها به هم می‌رسند داریم $V - E + F = ۲$». اما، سریعاً ابطالی، به نام چهاروجهی دوقلو، برای این حکم داده می‌شود. با باد کردن چهاروجهی دوقلو، یال اصلی به دو یال دیگر منشعب می‌شود.

تعریف ۷. کشیدن، یک نگاشت همسان‌ریخت یک‌به‌یک است. اختلاف نظر بر سر تعریف آن عمدتاً مربوط به کشیدن یک مربع در طول مرزهایش بود. پس از چند مورد بحث دربارهٔ مفهوم همبندی ساده جلسه به پایان می‌رسد و یکی از دانشجویان می‌گوید: «(...) خُب حالا من ماندم و مسائل» [۷، ص ۸۰].

۶.۳ راهنمون‌ها و قاعدهٔ ضرورت

تا اینجا تعریف دقیقی از مفاهیم راهنمونی ایجابی و سلبی ارائه نکردیم. اکنون به‌طور خلاصه تعریف آن‌ها را یادآوری می‌کنیم تا از تطبیق شرح ما بر تعریف آن‌ها مطمئن شویم.

لاکاتوش راهنمون سلبی را، به‌طور غیررسمی، «قاعدهٔ روش‌شناختی (. . .) [تعریف می‌کند که] به ما می‌گوید از کدام مسیرهای پژوهش باید اجتناب کنیم»؛ و به‌نحومشابه گفته است که راهنمون ایجابی «به ما می‌گوید کدام مسیرهای [پژوهش] را دنبال کنیم» [۸، ص ۴۷]. اما، هدف ما در این مقاله نه شرح و بسط مفاهیم راهنمون‌های سلبی و ایجابی است و نه رابطهٔ آن‌ها با هستهٔ سخت نظریه. بنابراین، خوانندهٔ علاقه‌مند به بحث و تشریح مُفصل این مطالب را به مقالهٔ اصلی لاکاتوش [۸] ارجاع می‌دهیم.

کیش خاطر نشان کرده است که «هدف از بررسی‌های مبتنی بر راهنمون‌ها، یافتن روش تفکر است، یعنی یافتن قوانینی که با استفاده از آن‌ها بتوان آسان‌تر و مطمئن‌تر نتایج را یافت» [تأکیدها از خود اوست] [۵، ص ۲۴۳]. از این نظر هدف ما تفاوت چندانی با هدف کیش ندارد. بااین‌حال، با توجه به همین مطالعهٔ موردی حاضر، از دادن شرحی رسمی از راهنمون سلبی و ایجابی که متکی به ضرورت[1] ریاضی باشد امتناع کردیم. چنان‌که یکی از همکاران لاکاتوش خاطر نشان کرده است کتاب اثبات‌ها «آخرین عنصر ارسطویی، یعنی قاعدهٔ ضرورت، را از علم جدید حذف می‌کند» [۳، ص ۱۴]. در این مقاله، تلاش کردیم مستدل کنیم که چرا و چگونه کتاب اثبات‌ها عنصر ضرورت را از استدلال‌های مبتنی بر مفاهیم توپولوژیک حذف می‌کند.

یکی از دلایل این امر آن است که برخی از آزمایش‌های ذهنی و مثال‌های نقض هر دو کارکرد راهنمون سلبی و ایجابی را داشتند و این امر مانع از آن شد که جایگاه این آزمایش‌های ذهنی و مثال‌های نقض را نسبت به مفهوم ارسطویی ضرورت پیدا کنیم. این مطلب با این نظر لاکاتوش نیز مطابقت دارد که طبق آن ریاضیات علمی شبه‌تجربی است. به‌عبارت‌دیگر، «هیچ چیز در ریاضیات بی‌نیاز از اثبات[2] نیست. بی‌نیازی از اثبات در ریاضیات یک توهم است» [تأکید از اوست] [۶، ص ۲۴].

بااین‌حال، می‌توان روش‌شناسی لاکاتوش را بسط بیشتری داد و با کمی انحراف از مفاهیم واقعی فلسفی، تقریری صوری از منطق راهنمون‌ها عرضه کرد. به‌نظر می‌رسد که تحقیقات اخیر در منطق معرفتی از طریق عملگرهای موجه برای مفهوم ضرورت، راهگشای منطق راهنمون‌ها باشد [۱].

---

[1] necessitation [2] self-evidence

البته این کار از نگاه روش‌شناسی برنامه‌های پژوهش علمی لاکاتوش بسیار دور از دقت لازم است. از این‌رو، ابزار منطق موجهات ـبا فرض اینکه منطق موجهات ابزاری مناسب برای صوری‌سازی ضرورت باشدـ هنوز فاصلهٔ زیادی دارد که بخواهد توصیفی دقیق و به زبان صوری برای راهنمون‌های لاکاتوشی عرضه دارد.

۴ نتیجه‌گیری و تحقیقات آینده

هدف اصلی این مقاله شناسایی مثال‌های نقض در کتاب اثبات‌ها و بررسی این موضوع، با استفاده از بعضی مفاهیم ساده و شهودی توپولوژی هندسی، بود که آیا این مثال‌های نقض نقش راهنمونی سلبی را ایفا می‌کنند یا ایجابی و یا هر دو.

در حین بررسی فلسفه و روش‌شناسی لاکاتوش در ریاضیات (آن‌گونه‌که در پیوست‌های کتاب اثبات‌ها طرح شده است)، از بیان تمایزهای مشخص بین این دو نوع از راهنمون‌ها خودداری کردیم. به این دلیل که متوجه شدیم که چنین تمایزی اشتباهاً ما را به سمت ایجاد تمایزی مشابه سوق می‌دهد بین مطابقت راهنمون ایجابی با شرایط لازم و مطابقت راهنمون سلبی با شرایط کافی یک قضیه. از نظر ما دلیل اصلی اینکه لاکاتوش قائل به این گونه تمایز نیست در این نکته نهفته است که لاکاتوش با قاعدهٔ نقض مضاعف و بنابراین روش برهان خلف مخالفتی نداشت [۷]. ازاین‌رو، هرگونه استفاده از ابزارهای منطق شهودی و همین‌طور منطق موجهات برای صوری‌سازی راهنمون‌های لاکاتوشی محکوم به شکست خواهد بود زیرا این ابزارها نمی‌توانند با مفاهیم راهنمونی سازگاری کامل پیدا کنند.

یادداشت ویراستاران خوشبختانه مقالات بسیاری به زبان فارسی دربارهٔ موضوع این مقاله موجود است که خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به آن‌ها رجوع کند از جمله

۱) اردشیر، محمد، ففرمن و فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ **۲۷** (۱۳۸۰)، ۱-۱۳.
۲) تابش، یحیی، لاکاتوش: اثبات و ابطال، پیک ریاضی، شمارهٔ **۲** (۱۳۶۵)، ۶۰-۶۸.
۳) شهشهانی، سیاوش، سیر تاریخی فلسفه‌های ریاضی، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ **۵۹** (۱۳۹۵)، ۷-۲۷.
۴) سیاوشی، احسان، فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ **۴۵** (۱۳۸۹)، ۵۱-۶۰.
۵) محمدی، علیرضا، روش‌شناسی فلسفی ایمره لاکاتوش، انتشارات تمدن علمی، تهران، ۱۳۹۸.

مراجع

[1] Başkent, C., *Topics in Subset Space Logic*, Institute for Logic, Language and Computation, Universiteit van Amsterdam, Technical Report, 2007.

[2] Corfield, D., Argumentation and the mathematical process, in *Appraising Lakatos: Mathematics, Methodology, and the Man*, G. Kampis, L. Kvasz, M. Stöltzner, eds., Kluwer Academic Publish-

ing, Dordrecht, 2002.

[3] Feyerabend, P., Imre Lakatos, *British Journal of Philosophy of Science*, **26** (1975), 1–18.

[4] Kampis, G., Kvasz, L., Stöltzner, M., *Appraising Lakatos: Mathematics, Methodology, and the Man*, Kluwer Academic Publishing, Dordrecht, 2002.

[5] Kiss, O., Mathematical Heuristics–Lakatos and Pólya, in *Appraising Lakatos: Mathematics, Methodology, and the Man*, G. Kampis, L. Kvasz, M. Stöltzner, eds., Kluwer Academic Publishing, Dordrecht, 2002.

[6] Koetsier, T., *Lakatos' Philosophy of Mathematics*, Studies in the History and Philosophy of Mathematics, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1991.

[7] Lakatos, I., *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

[8] Lakatos, I., *The Methodology of Scientific Research Programmes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1978.

[9] Steiner, M., The Philosophy of Mathematics of Imre Lakatos, *The Journal of Philosophy*, **80** (1983), 502–521.

هانیه هاشمی: دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، گروه ریاضی

رایانامه: hhanieh.hashemi@srbiau.ac.ir

Farhang va Andishe-ye Riyazi
Volume 41, Number 71, Fall/Winter 2022, Pages 151–172
doi: 10.30504/mct.2022.1179.1823

An Examination of Counterexamples in *Proofs and Refutations*

S. Bağçe, C. Başkent
Translated by H. Hashemi[1]

Department of Mathematics, Islamic Azad University, Science and Research Branch, Iran

Abstract. Lakatos's seminal work Proofs and Refutations introduced the methods of proofs and refutations by discussing the history and methodolog- ical development of Euler's formula $V - E + F = 2$ for three dimensional polyhedra. Lakatos considered the history of polyhedra illustrating a good ex- ample for his philosophy and methodology of mathematics and geometry. In this study, we focus on the mathematical and topological properties which play a role in Lakatos's methodological approach. For each example and counterexample given by Lakatos, we briefly outline its topological counter- part. We thus present the mathematical background and basis of Lakatos's philosophy of mathematical methodology in the case of Euler's formula, and thereby develop some intuitions about the function of his notions of positive and negative heuristics.

Keywords: Proofs and Refutations, polyhedra, positive heuristics, negative heuristics, counterexample
Article history: Recieved 30 September 2020; Accepted 12 June 2022

---

[1]hhanieh.hashemi@srbiau.ac.ir

ISSN 1022-6443/