فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۱، شمارهٔ ۷۱ (پاییز و زمستان ۱۴۰۱) صص. ۱۲۹ تا ۱۵۰

تجاهل بورباکی*

اِی. آر. دی. متیاس
ترجمهٔ محسن خانی

توضیح: آدریان متیاس، رویکرد بورباکی به مبانی ریاضیات، منطق، و نظریهٔ مجموعه‌ها را به نقد کشیده است. او معتقد است که بورباکی با اینکه از نتایج گودل در عدم امکان تکمیل برنامهٔ صورت‌گرایی هیلبرت برای ریاضیات مطّلع بوده است، خود را به تجاهل زده و از آوردن نام گودل و اشاره به قضیه‌های او به‌کلی خودداری کرده است. پس از گمانه‌زنی دربارهٔ علت احتمالی این امر، نویسنده به تفاوت درک حسابی و هندسی در ریاضیات پرداخته است. به نظر وی، اصول تسرملو، که مورد تأیید بورباکی نیز بوده، برای جنبهٔ هندسی ریاضیات کافی‌اند، ولی جنبهٔ حسابی ریاضیات نیازمند اصول تسرملو–فرانکل است. م.

در تاریخ ریاضیات دوره‌هایی هست که در آن‌ها خلاقیت به حدّ انفجار می‌رسد. در این دوره‌ها ایده‌های تازه، پیشی‌جویانه و ازاین‌رو گاهی عجولانه منتشر می‌شوند. و نیز در دوره‌هایی افراد درمی‌یابند که ایده‌های رایج، نادقیق، نامفهوم، و گاهی ناسازگار با هم‌اند. در این دوره‌های دوم گرایش عمومی بیشتر به استوارسازی یافته‌های گذشتگان است.

گفتم «تاریخ ریاضیات»، ولی ریاضیات یک دستگاه پیچیدهٔ اجتماعی است که رشد آن در شاخه‌ها و در کشورها و حتی در دانشگاه‌های مختلف با روش‌ها و سرعت‌های متفاوت روی می‌دهد. چه‌بسا کسانی در دوره‌ای احساس کنند که ریاضیات در کشورشان وضع خوشایندی ندارد؛ نمونه‌ای از چنین احساسی در مقدمهٔ کتابِ ریاضیات محض نوشتهٔ هاردی[1] یافت می‌شود. به اقرار نویسنده،

عبارات و کلمات کلیدی: مبانی ریاضیات، نظریهٔ مجموعه‌ها، بورباکی، هیلبرت، صورت‌گرایی
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۶/۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۸/۱۵

*Mathias, A. R. D., The ignorance of Bourbaki, *Math. Intelligencer*, **14** (1992), 4-13.

[1]Hardy

doi: 10.30504/mct.2022.768.1542

این کتاب از سرِ غیرت و در تقابل با خودمحوری ریاضی‌دانان انگلیسی در انتهای قرن و کم‌اعتنائیِ آنان به پیشرفت‌های ریاضیات در قرن نوزدهمِ فرانسه نوشته شده است.

فرانسه در سال ۱۹۱۰ مفتخر به سلسله‌ای از ریاضی‌دانان بزرگ چون لژاندر، لاگرانژ، لاپلاس، فوریه، کوشی، گالوا، آدامار، و پوانکاره بود که بی‌شک فهرستی تحسین‌برانگیز از محققان برجسته است.

ولی پس از جنگ جهانی اول حال‌وهوای حاکم بر فرانسه عوض شد و ریاضی‌دانان جوان فرانسویِ آن روز به‌تدریج پنداشتند که مشعل ریاضیات دیگر از کف آن‌ها خارج شده و به دست آلمانی‌ها افتاده و ریاضیات فرانسه رو به اُفول است. درست همان زمان در آلمان ریاضی‌دانان بزرگی چون کلاین، هیلبرت، وایل، آرتین، نوتر، لانداو، و هاسدورف بنای ریاضیاتشان را بر پایهٔ آثار گذشتگانی چون ریمان، فروبنیوس، ددکیند، کومر، کرونکر، مینکوفسکی، و کانتور روزبه‌روز استوارتر می‌ساختند.

در ۱۹۳۵، گروهی از ریاضی‌دانان جوان فرانسوی[۱] بر آن شدند که برای احیای مکتب از کف‌رفته، با نوشتن سلسله کتاب‌هایی تحت نام مستعارِ مشترکِ «نیکولا بورباکی» ریاضیات را در حوزه‌هایی، که به نظرشان مهم‌تر می‌آمد، با نهایت صلابت[۲] از نوع فرانسوی آن عرضه کنند.

در آن زمان، در آغاز قرن بیستم ، کشف یک اشتباه اساسی به دست راسل در نظریهٔ پیشنهادی فِرگه برای کلاس‌ها، دقت ریاضی را تبدیل به پرسش روز کرده بود. در نظریهٔ فرگه، برای هر ویژگی چون $\Phi(y)$ ردهٔ $\{y|\Phi(y)\}$ از اشیائی چون y را که در خاصیت Φ صدق می‌کند درنظرگرفته، درعین‌حال خودِ این رده‌ها را نیز جزء اشیائی می‌گیریم که قاعدهٔ عضویت بر آن‌ها نیز اعمال‌شدنی است. اگر برای «a عضو b است» بنویسیم $a \in b$ و برای «a عضوِ b نیست» بنویسیم $a \notin b$ ، اصل عمومی فرگه را می‌توانیم به گونهٔ پیشِ رو بازگو کنیم. اگر $\{y|\Phi(y)\}$ را با C نشان دهیم، آنگاه برای هر شیء a، داریم $a \in C$ اگر و تنها اگر $\Phi(a)$. با تعمیم ایده‌ای از کانتور، راسل دریافت که اگر $\Phi(y)$ را خاصیتِ $y \notin y$ بگیریم به تناقض می‌رسیم. فرض کنید B ردهٔ همهٔ اشیائی باشد که عضوِ خود نیستند؛ $B = \{y|y \notin y\}$. آنگاه برای هر y، داریم $y \in B$ اگر و تنها اگر $y \notin y$. به‌ویژه اگر y خودِ B باشد، داریم $B \in B$ اگر و تنها اگر $B \notin B$.

[۱] شوالی در مصاحبه‌ای در [۷] فهرست نام‌های آن‌ها را به‌ترتیب زیر می‌آورد: آنری کارتان، سی. شوالی، جی. دلسارت، ژان دیودونه، شولم ماندلبرویت، رُنه دو پوسل، آندره وِی. در نامه‌ای در مراجع کتاب شرح‌حال کاوایه، به قلم خواهر او، [H۳]، نام شارل ارسمان نیز جزو اعضای گروه ذکر شده است.

[2] rigour

در مواجهه با این تناقض برخی تصمیم به کنارگذاشتن همهٔ حوزه‌های نامطمئن از ریاضی گرفتند که در آن‌ها مفهوم بی‌نهایت و به‌ویژه نظریهٔ اعداد اصلی و اعداد ترتیبی کانتور به کار رفته بود. ازجملهٔ آنان می‌توان پوانکاره، بروئوور[1]، و هرمان وایل را نام برد.

درعین‌حال، کسانی، و مهم‌ترین آن‌ها هیلبرت، این مُثله‌گری همه‌سویه را برنتافت و بنای برنامه‌ای را برای صورت‌گرایی در ریاضیات ـزبان، اصول، روش‌های استدلال، و غیره– پیشنهاد می‌کردند که طی آن بتوان از طریق اعتبار اصول کاملاً نامشکوک، فارغ بودن دستگاه از تناقض، یا به‌عبارت‌دیگر «سازگاری» آن را ثابت کرد.

گفتم «صورت‌گرایی در ریاضیات»؛ خودِ این عبارت نیز مبهم است. چه اندازه از ریاضیات را باید یا می‌شود در این صورت‌بندی گُنجاند؟ شکی نیست که هیلبرت به دنبال حفظ اعداد ترتیبی کانتور و صورت‌گرایی وی برای ریاضیات بود؛ زیراکه اگر نامی از کانتور نبود، از هیلبرت هم نامی نمی‌بود. هیلبرت را «قضیهٔ پایه»اش[2] مشهور کرده بود؛ قضیه‌ای که به بیان امروز می‌گوید اگر همهٔ ایده‌آل‌ها در حلقهٔ جابه‌جایی مثل R متناهی‌تولیدشده باشند، آنگاه همهٔ ایده‌آل‌ها در حلقهٔ $R[X_1, \dots, X_n]$ متشکل از چندجمله‌ای‌های با متغیرهای X_1، ...، X_n و ضرایب در R نیز متناهی‌تولیدشده‌اند؛ و بنابه تحقیقات امروز، اثبات این قضیه نه‌تنها نیازمند خوش‌بنیانی نوعِ ترتیبیِ[3] ω^ω است، بلکه به‌نوعی دقیقاً معادل آن است.[4]

آنجا که هیلبرت از بهشتِ کانتور سخن می‌گفت، صرفاً تعریفی بی‌جهت نبود؛ ایجاد یک چارچوب مفهومی برای استقراءِ ترامتناهی، که پیشرفت هندسهٔ جبری نیازمند آن بود، ستایش وی را برانگیخته بود.

خود راسل برای رهائی از تناقضاتْ نظریهٔ دشوارِ انواع[5] را پیش نهاد. تسرملو در دههٔ اوّلِ همان قرن نظام ساده‌تری را پیش نهاد؛ همچنین در دههٔ سوم، فرانکل[6] و اسکولم[7] افزودن اصل جایگزینی[8] را برای تقویت دستگاه تسرملو پیش نهادند و دستگاه حاصل دستگاه تسرملو–فرانکل نام گرفت. این اصول، به‌ویژه، به انضمام اصل انتخاب (که نخست خود تسرملو آن را تصریح کرد و اکنون در جبر پیشرفته و آنالیز تابعی حائز اهمیت بسیار است) و اصل بُنیان[9] (که نویمان[10] آن

---

[4] [۲۱] را ببینید.

[1] Brouwer [2] Hilbert's basic theorem [3] well-foundedness of the order-type ω^ω [5] theory of types
[6] Fraenkel [7] Skolem [8] axiom of replacement [9] axiom of foundation [10] Neumann

را پیشنهاد کرد)، اصول **ZFC**[1] را شکل دادند که تا این زمان دستگاهی مفید بوده است.[2]

برنامهٔ هیلبرت دو عنصر دارد: یکی جنبهٔ ابتکاری که ارائهٔ دستگاهی از اصول است برای انجام کارها، و دیگری جنبهٔ انتقادی که بناست طی آن کارایی و سازگاری این دستگاه آزموده شود. طبیعتاً گروه بورباکی، یا بورباکیان[3]، که نگران وجود تناقض در ریاضیات بودند، تصمیم به عرضهٔ مکتوباتی عاری از این مسائل گرفته بودند و ازاین‌رو نخستین جلد از سلسلهٔ مکتوباتشان، نظریهٔ مجموعه‌ها[4]، را به تحکیم پایه‌های لازم برای جلدهای بعدی اختصاص دادند.

روزی تصمیم به خواندن این کتاب گرفتم. از خواندن آن یکه خوردم. گو اینکه خالق این اثر، کتاب مبانی ریاضیاتِ[5] هیلبرت و آکِرمن و کتاب درس‌هایی دربارهٔ اعداد ترامتناهی[6] از شِرپینسْکی[7] (هردو به سال ۱۹۲۸) را خوانده ولی پیشرفت‌های بعد از آن تاریخ را ندیده است.

متعجب از رویکرد بورباکی به مبانی ریاضیات و نظریهٔ مجموعه‌ها، شروع به کاوش بیشتر در پیش‌زمینه‌های مطالب کردم و دریافتم که بورباکیان در سال‌های ۱۹۳۰ و ۱۹۴۰ چندین مقاله منتشر و در آن‌ها مواضعِ گروه را درخصوص موضوعات مربوط به مبانی ریاضیات به تفصیل بیان کرده‌اند. آنری کارتان و ژان دیودونه (از اعضای گروه) نیز مقالاتی به اسم خود دربارهٔ مبانی ریاضیات نوشته‌اند. پس از جنگ جهانی دوم، نیکولا بورباکی خود در انجمن منطق نمادین در آمریکا سخنرانی کرده است و این سخنرانی در جورنال آو سیمبولیک لاجیک به چاپ رسیده است. به‌علاوه، وی مقاله‌ای دربارهٔ «معماری بنای ریاضیات»[8] نوشته که به انگلیسی ترجمه‌شده و در امریکن متمتیکال مانتلی به چاپ رسیده است.

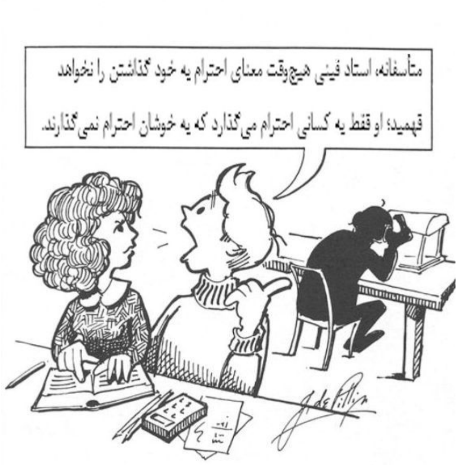
در همهٔ این مقالات رَویه‌ی واحدی به چشم می‌آید: از جنبهٔ ابتکاری، نظریه‌ای که برای مجموعه‌ها پیش نهاده‌اند، نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو (و نه تسرملو-فرانکل) است که آن را برای کل ریاضیات کافی می‌دانستند؛ و از جنبهٔ انتقادی، تماماً از برنامهٔ صورت‌گرایی هیلبرت متأثرند. هیچ‌یک از آن‌ها نامی از گودل نیاورده‌اند و، با توجه به پایبندی آن‌ها به برنامهٔ هیلبرت، این موضوعی مشهود است و مسلماً تنها اشاره‌ای جزئی به قضیه‌های ناتمامیت مُجاز است.

در سپتامبر سال ۱۹۳۰ همایشی در کونیگسبرگ[9] برگزار شد و در آن به هیلبرت، که به تازگی در

---

[2] تسرملو در فهرست اصولش در سال ۱۹۰۸، اصل انتخاب را نیز گنجانده بود. ولی معمول این است که اصل انتخاب را جداگانه ذکر می‌کنند. [8] L'Architecture des mathématiques؛ ترجمهٔ این مقاله در جنگ ریاضی دانشجو (جلد دوم، ۱۳۶۷) آمده است. ویراستار

[1]Zermelo+ Fraenkel+choice [3]Bourbachistes [4]Thèorie des Ensembles [5]Grundzüge der Mathematik
[6]Leçons sur les Lombres [7]Sierpiǹski [9]Königsberg



احترام به خود

بیست‌وسوم ژانویهٔ همان سال از دانشگاه گوتینگن بازنشسته شده بود، شهروندیِ کونیگسبرگ اعطاء شد. وی در این مناسبت فرخنده، در سخنرانی معروف و مؤثری با عنوان منطق و شناخت طبیعت[۱] پرده از عقیده‌اش برمی‌دارد و اظهار می‌کند که «هیچ پرسشِ بی‌پاسخی وجود ندارد»[۲] و آن را با شُعار «باید بدانیم، و خواهیم دانست»[۳] با لحنی قاطعانه به پایان می‌رساند. از طنز ظریف روزگار، درست یک روز قبلْ گودل در سخنرانی‌ای با حضور فون نویمان و در غیاب هیلبرت[۴] خبر از اثبات قضیهٔ ناتمامیت و کاربرد آن در دستگاه‌های ریاضی، مانند حساب پئانو و دستگاه تسرملو–فرانکل، داده بود.[۵]

این اتفاق باید آشوبی به پا کرده باشد. از طرفی، هیلبرت به پارادوکس‌ها روی خوشی نشان داده بود و مریدان وی، مانند اِربران[۶]، با همین ذهنیتْ مسئلهٔ تصمیم را در برخی حالات ثابت کرده بودند. ازدیگرسو، گودل نشان داد که پیشنهادهٔ هیلبرت محدودیت‌های جدّی دارد.[۷] وی نشان داد که هیچ دستگاهی صادق در شرط‌های معینی –مثل شرط بسیار مطلوب داشتن الگوریتمی که بگویید آیا جمله‌ای مفروض جزء اصول هست یا نه– هیچ دستگاهی از این نوع نمی‌تواند دربرگیرندهٔ

---

[۲] وی می‌افزاید: «به نظر من، علت اصلی این که هیچگاه پرسشی بدون پاسخ پیدا نشده است، این است که چنین پرسشی اصلاً وجود نمی‌تواند داشته باشد.»[۱۳]　[۴]که احتمالاً مشغول آماده کردن سخنرانی برای فردایش بوده است.　[۵]گودل بعد از آن نیز در این باره در تاریخ بیست و سوم اکتبر ۱۹۳۰ گزارش مختصری به فرهنگستان وین فرستاده و رسید آن را به تاریخ هفدهم نوامبر ۱۹۳۰ دریافت کرده است.　[۷]ارزیابی‌های تازه‌ای از برنامهٔ هیلبرت را در [۱۱]، [۱۸]، و [۲۰] بیابید.

[1]Naturekennen und Logik　[3]Wir müssen wissen; wir werden wissen.　[6]Jacques Herbrand

همهٔ ریاضیات باشد، و اثبات‌های سازگاری چنین دستگاهی فقط در دستگاه‌هایی میسر می‌شود که احتمالاً ناسازگارتر از دستگاه اصلی‌اند.

با توجه به اهمیت این نتیجه در مطالعات مربوط به مبانی ریاضیات و نیز اشتیاق فون نویمان و دیگران به اندیشه‌های گودل، طبیعی است از خود بپرسیم گودل چه تأثیری بر بورباکیان داشته است. شگفتا که جستجو برای یافتن نامی از گودل در میان مکتوبات آنان حاصلی ندارد. انگار خود را به‌کلّی به تجاهل زده‌اند؛ مگر لحن برخی آثارشان که از کشاکشی میان آگاهی آزاردهنده‌ای از وجود چیزی و میلی به کتمان آن خبر می‌دهد. مَثَلشان به کسانی می‌ماند که خود را در جزیره‌ای یافته‌اند که در آن اژدهایی هست و در پاسخ، به خودباورانده‌اند که تا بر اژدها نامی ننهند وجود نخواهد داشت.

برای نمونه، آنری کارتان در اثری با عنوان دربارهٔ مبانی منطقی ریاضیات[1] اصول تسرملو را به انضمام اصل انتخاب ارائه می‌کند. ولی علی‌رغم گفته‌اش که اصلاحات فرانکل بر اصول تسرملو را در نظر دارد، اصلی‌ترین آن‌ها یعنی اصل جایگزینی را نادیده می‌گیرد. او به‌درستی اشاره کرده است که دستگاه تسرملو به‌دلیل در برنداشتنِ تعریف مناسب برای جفت مرتب، و غیره، دستگاه چندان سودمندی نیست، ولی درعین‌حال ناآگاهی خود را از تمایزات مد نظر گودل با گفتن «درست» وقتی منظورش «ثابت‌شدنی» است و «نادرست» وقتی منظورش «رد شدنی»، و «مشکوک» وقتی منظورش «نامتعیّن» است، آشکار کرده است.

او همچنین دربارهٔ نظریه‌های متناقض توضیح داده و یادآوری می‌کند که تعیینِ متناقض بودن یا نبودن یک نظریه به «مسئلهٔ تصمیم»[2] مربوط است، و آن عبارت است از یافتن روشی کُلّی که معیّن کند چه زمانی یک رابطهٔ مفروض (یعنی یک فرمول) را می‌توان یک اتحاد منطقی (یعنی قضیه) در نظر گرفت. او بیان داشته است که پاسخِ این سؤال تنها در حالت‌های خاص معلوم شده است و در حالت کلی راهی برای پاسخ به آن معلوم نیست. او سپس می‌افزاید «این پرسش‌ها در عین اهمیتی که دارند، در بحث ما نمی‌گنجند.»

او از رسالهٔ اِربران و کتاب درس‌هایی دربارهٔ اعداد ترامتناهی شرپنسکی نام می‌برد و دیدگاهی اتخاذ می‌کند که خود آن را به دیودونه نسبت می‌دهد و می‌گوید که این مفاهیم و اندیشه‌ها، با اینکه در سال ۱۹۳۹ منتشر شدند، «به سال ۱۹۳۸ باز می‌گردند» و اظهار می‌دارد:

یک نظریهٔ ریاضی چیزی جز یک نظریهٔ منطقی، که با دستگاهی از اصول معیّن

[1] Sur le fondement logique des mathématiques [2] Entscheidungsproblem

> می‌شود، نیست. (. . .) هویّات این نظریه، فی‌نفسه از طریق همین دستگاه از اصول تعریف می‌شوند، و موادی را به دست می‌دهند که امکان اطلاق گزاره‌های صادق به آن‌ها وجود دارد. بخش ریاضی یک نظریهٔ منطقی مرکب است از تعریف این هویّات، نام‌گذاری، و اطلاق گزاره‌ها و فرمول‌ها به آن‌ها.

کارتان از کانتور، کرونکر، تسرملو، بروئوور، پارادوکس اسکولم، پوانکاره، و لُبگ نام می‌برد ولی از گودل نه!

بی‌شک کارتان در فکر مسائل مربوط به مبانی ریاضیات بوده است؛ پس چرا نامی از گودل نمی‌آورد؟ در میان فرانسوی‌زبان‌هایی که توانسته‌ام با آن‌ها مشورت کنم، روی معنای عبارت فرانسوی est tout idèal [مطلوب/آرمانی/فرضی] در مقالهٔ سال ۱۹۴۲ از کارتان بر سر این اختلاف نظر است که آیا از این مقاله دربارهٔ اطلاعی که کارتان طبیعتاً می‌بایست از قضیه‌های ناتمامیت داشته باشد و علاقهٔ او به بحث در این باره چیزی معلوم می‌شود یا خیر. آن قطعه از نوشتهٔ او در زیر آمده است:[۱]

> مسئلهٔ تصمیم‌گیری دربارهٔ اینکه یک گزارهٔ داده‌شده در یک نظریه صادق است یا نه، به این پرسش تقلیل می‌یابد که آیا یک رابطهٔ داده‌شده، اتحاد منطقی است یا نه. مسئلهٔ تناقض‌آمیز بودن یا نبودن یک نظریه نیز همین‌گونه است. این دو مسئله سرانجام به مسئلهٔ تصمیم مربوط می‌شوند که عبارت است از پیدا کردن روشی کلی که تصمیم‌گیری دربارهٔ اینکه یک رابطه اتحاد منطقی است یا نه را ممکن بسازد. به این مسئله در حالات خاص پاسخ داده‌اند.
>
> پس تا این لحظه، تقسیم‌بندی سه‌گانه که بدان‌ها اشاره کردیم (گزاره‌های صادق، کاذب، و مشکوک) مطلوب است: در نظریه‌ای که از متناقض‌نبودنش اطمینان داریم، گزاره‌هایی وجود دارد که آن‌ها را می‌توان اثبات کرد؛ گزاره‌هایی وجود دارد که می‌توان اشتباه بودن آن‌ها را ثابت کرد (نقیض گزاره‌های صادق)، و نیز گزاره‌هایی وجود دارد که لاجرم باید نسبت به صادق یا کاذب بودن آن‌ها کلاً بی‌اعتنا بود. به‌طورکلی، ممکن است حتی متناقض‌نبودن یک نظریه را نتوانیم ثابت کنیم.

مشابه این جهت‌گیری‌های مبهم در اثری از ژان دیودونه به نام روش‌های اصل موضوعی جدید

---

[۱] در اصل مقاله نقل‌قول مذکور برای قضاوت خواننده ترجمه نشده است. م.

و مبانی ریاضیات[1] به سال ۱۹۳۹ یافت می‌شود که کارتان نیز از آن نام برده است. در آنجا دیودونه یافته‌های کانتور را، که هیلبرت بسی کارگشا دانسته بود، «بی‌حرمتی به عقل سلیم!» می‌خواند. او راه‌حلِ بحران به وجودآمده در مبانی ریاضیات در آغاز قرن را در مکتب صورت‌گرایی هیلبرت می‌داند که بنا به آن درستی یک جزء از ریاضی بسته به پیروی آن از قاعده‌های معیّن است و نه به تعبیر آن. او اظهار داشته است که

> ارزش اصلی رویکرد صورت‌گرایی در آن خواهد بود که ابهاماتی را که همچنان تفکر ریاضی را تیره کرده‌اند به‌طور قطع بزداید؛

و ادامه می‌دهد که

> البته باید اثبات شود که طرح مد نظر هیلبرت برآورده‌شدنی است.

بازهم دیودونه نامی از گودل نمی‌برد. ولی آگاهی توأم با شک خود را از نتایج گودل با جمله‌های زیر بیان می‌کند:

> با توجه به تحقیقات جدید، برخلاف باور هیلبرت، به نظر می‌رسد که میزان تجرّدِ قاعده‌های فراریاضیاتی که برای اثبات سازگاری ریاضیات لازم‌اند به اندازهٔ میزانِ تجردِ خودِ ریاضیات است، و این موضوع از ارزش و سودمندی چنین اثباتی بسیار می‌کاهد.

وی این آگاهی را چند سال بعد نیز، در یادبودنامهٔ هیلبرت، آشکار می‌کند ولی همچنان جرأت آوردن این نام هراس‌آور را به خود نمی‌دهد:

> به نظر می‌آید که شهود هیلبرت این‌بار او را کمی بیش از حد امیدوار کرده است. امروز دلایل خوبی برای شک در امکان چنین اثبات‌هایی (برای سازگاری) پیدا شده است.

نیکولا بورباکی در مقاله‌ای با نام مبانی ریاضیات برای ریاضی‌کاران[2] بار دیگر نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو به‌انضمام اصل انتخاب را عرضه می‌کند و چنین نتیجه می‌گیرد:

---

[2] آیا این اولین جایی است که این اصطلاح مشمئزکننده [working mathematician] ظاهر شده است؟

[1] Les méthode axiomatiques modernes et les fondoments des mathematique

> به عقیدهٔ من می‌توان تمام ریاضیات جاری را روی این مبانی بنا کرد. اگر رویکرد من نکتهٔ بدیعی داشته باشد، صرفاً در این است که به جای دلخوش بودن به بیان آن، اقدام به اثبات آن کرده‌ام همان‌طورکه دیوگِنِس وجود حرکت را ثابت کرد. اثباتم در طول رساله‌ای که خواهم نوشت کامل و کامل‌تر خواهد شد.

همان‌طورکه شاید حدس بزنید، هیچ نامی از گودل آورده نشده و هیچ اشاره‌ای به وجود کاری از گودل که هفده سال پیش از آن در ۱۹۳۱ چاپ شده بود نمی‌شود.

در مقالهٔ دیگری از بورباکی به نام معماری بنای ریاضیات هم نامی از گودل به میان نمی‌آید، ولی این‌بار اشاره‌ای به برخی «پیچیدگی‌ها» می‌شود.

اکنون سؤال من این است:

چرا بورباکی از گودل نامی به میان نیاورده است؟

و

چطور بورباکی متوجه نشده است که دستگاه نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو به‌انضمام اصل انتخاب برای ریاضیات جاری کفایت نمی‌کند؟

به نظر من اهمیت این سؤال‌ها به این دلیل است که گروه بورباکی گروه بسیار تأثیرگذاری بوده است. قصد من نه انکار ارزش بالای سلسله کتاب‌های آنان است و نه عظمت دستاوردهای آنان. تنها معتقدم که نگرش آنان به منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها، که به نسل‌های جدید ریاضی‌دانان نیز منتقل شده، پُرگزند است؛ زیراکه در آن معرفت حاصل از ادراک گوهر ریاضیات، که عاملی روح‌بخش است، جایی نداشت. به جرأت می‌توانم بگویم که اگر اکنون بورباکی مُرده باشد، که بعضی همین را می‌گویند، از سر سِتروَنی رهیافت‌های خودش بوده است.

بگذارید پیش از گمانه‌زنی برای پاسخ این پرسش‌ها، کمی بیشتر دربارهٔ توضیحات بورباکیان دربارهٔ این موضوعات کاوش کنیم.

بورباکی در مقالهٔ معماری بنای ریاضیات میان صورت‌گرایی منطقی، که با آن مخالف است، و روش اصل موضوعی، که مورد قبول او است، به دقت تمایز قائل شده است:

> هدف اصلی در روش اصل موضوعی، دقیقاً همان است که صورت‌گرایی منطقی به تنهایی نمی‌تواند فراهم آورد، یعنی فهم‌پذیری[1] عمیق ریاضیات.

[1] intelligibility

بنابراین منظور او از روش اصل موضوعی، نه طرح جامع برای استنتاج کل ریاضیات، بلکه صرفاً انتظامی ذهنی است که طی آن شاخه‌وبرگ مباحث تا رسیدن به شالودهٔ آن‌ها هرس می‌شود تا شباهت‌ها شفاف‌تر و نظریه‌ها سبک‌تر شوند.

> انسجامی که روش اصل موضوعی به ریاضیات می‌بخشد مانند زرهٔ منطق صوری، انسجام یک اسکلت بی‌روح نیست.
>
> بسیاری از ریاضی‌دانان در روش اصل موضوعی فقط به دنبال موشکافی‌های بیهودهٔ منطقی‌ای هستند که هیچ توان به بار آوردن نظریه‌ای را ندارند.
>
> هیچ برداشتی از روش اصل موضوعی دورتر از این نیست که فکر کنیم این روش تصوری ایستا از علم به دست می‌دهد. خواننده نپندارد که ما مدعی یافتن وضعیت قطعی علم شده‌ایم.
>
> چه‌بسا پیشرفت‌های علم ریاضی در آینده، باعث افزایش تعداد ساختارهای بنیادی شود و به بیان اصولی تازه یا ترکیب‌هایی تازه از اصول نیاز پیدا شود.

آندره وِیْ نظر بورباکیان مبنی بر اینکه منطق دستورزبان ریاضیات است را با زیرکی بیشتری بیان می‌کند:

> منطق شاید ضامن سلامت غذای ریاضی‌دان باشد، ولی منبع غذای او نیست. نان روزانهٔ ریاضی‌دان پرسش‌های مهم ریاضی‌اند.

وی با این گفته، ناخواسته اعتقاد خود را مبنی بر اینکه پرسش با اهمیتی در منطق یافت نمی‌شود آشکار می‌کند. ادامهٔ نوشتهٔ او، بدون ذکر نام گودل، حاکی از این است که شاید در منطق هنوز حرف آخر گفته نشده است:

> چه بسا اخلاف ما روش‌های استدلالی به نظریهٔ مجموعه‌ها اضافه کنند که مورد پسند امروز ما نباشند.

این نظر اصلی بورباکی، که یادآور نکات ذکرشده در بندهای پیش است، در تقابل با نظر متعصبانهٔ دیودونه در کتابِ[۱] چشم‌اندازی از ریاضیات محض[۲] آمده است به این مضمون که «نظریهٔ مجموعه‌ها

[۱] در این کتاب، اسم شلاه از فهرست کسانی که در نظریهٔ مدل نقش محوری داشته‌اند حذف شده است؛ [۱۰] را ببینید.

[2] Panorama of Pure Mathematics

به‌خوبی نتیجه داده است».

موضع کلی بورباکی به‌روشنی در مرام‌نامهٔ آن‌ها آمده است:

> برای ما مفهوم ساختارهای سلسله‌مراتبی اصل سازمان‌بخش خواهد بود که طبق آن از ساختارهای ساده به پیچیده و از کُلّی به جزئی حرکت خواهیم کرد.
>
> . . . نظریهٔ گروه‌ها، . . . نظریهٔ مجموعه‌های مرتب (ازجمله مجموعه‌های خوش‌ترتیب)، . . . نظریهٔ ساختارهای توپولوژیک . . .

اما نکته‌ای را باید به‌طور گذرا توجه کنیم که در میان این اظهارات خدشه‌ناپذیر یکی هست که اگر توضیح داده نشود چه‌بسا گمراه‌کننده باشد:

> در نخستین بررسی‌های اصل موضوعی از حساب (مانند حساب ددِکیند–پئانو و هندسهٔ هیلبرت–اقلیدس) با نظریه‌های تک‌ارزشی مواجه بودیم؛ منظور نظریه‌هایی است که، برخلاف نظریهٔ گروه‌ها، براساس دستگاهی تمام از اصولشان کاملاً متعیّن‌اند.

درست است که هندسهٔ اقلیدسی در ابعادِ دو و سه، آن‌طورکه هیلبرت آن را اصل موضوعی کرده است، کاملاً متعیّن است، و بنابراین هر گزاره در هندسهٔ مسطحه اگر در هندسهٔ فضایی قابل اثبات باشد در هندسهٔ مسطحه نیز قابل اثبات است؛ اما بنا به قضیهٔ گودل، چه با اصول موضوعهٔ حساب پئانو، با اصول پئانو یا هر کس دیگری، متعیّن نیست، و، عجبا هندسهٔ تصویری از بُعدِ دو هم همین‌طور است. گرچه با افزودن یک اصل دیگر، همان حکم قضیهٔ دزارْگ[1]، به این هندسه تبدیل به دستگاهی متعیّن می‌شود.[2] شاید بورباکی با در نظر گرفتن منطقی از مرتبهٔ دوم یا بالاتر برای مدل استاندارد حساب، مدعی تک‌ارزشی بودن حساب پئانو شده است؛ البته این خود نیز جای سؤال دارد.

برداشت من از این نقل‌قول‌ها این است که بورباکی جنبهٔ مثبت کار هیلبرت و مکتب او را دریافت و از ایدهٔ تحویل سؤال سازگاری ریاضیات به مجموعه‌ای از قواعد استقبال کرد. ولی بااین‌همه، حتی با اینکه گودل نشان داد برنامهٔ هیلبرت را نمی‌توان به انجام رساند، بورباکی اصرار داشت که منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها موضوعاتی هستند که باید در جلد اول [سلسله کتاب‌ها] بیایند و بعد به فراموشی سپرده شوند.

---

[2] در این باره در [۱] بخوانید.

[1] Desargues

بورباکی در ویرایش‌های بعدی کتاب‌ها تغییر موضع داد تا آنجا که نام گودل را می‌آورد، از قضایای استقلال سخن به میان می‌آورد، و اصل جایگزینی را بیان می‌کند. با این‌همه، رهیافت پیشاگودلی او، که نقطهٔ آغاز من در این بررسی بود، به جای خود باقی است. چنان به نظر می‌آید که این شرح مفصل از ریاضیات را کسانی نوشته‌اند که دانششان در حوزهٔ مبانی ریاضیات مربوط به سال ۱۹۲۹ است.

حالا اجازه بدهید به اولین پرسشم بپردازم:

چرا بورباکیان رهیافت خود را با توجه به آثار بسیار مهم گودل در موضوعات مبانی ریاضیات تغییر ندادند؟

چرا درک بورباکی از مبانی ریاضیات همگام با پیشرفت مطالعات در این زمینه پیش نرفته است؟

پاسخ‌های این سؤال را می‌توان در لایه‌های مختلف جامعه‌شناختی، روانشناختی، و ریاضیاتی جُست. چه‌بسا عاملی ملی‌گرایانه هم در موضع‌گیری بورباکی دخیل بوده باشد. این را می‌توانید با این نظر[۱] الکساندر کویره[۲] مقایسه کنید که می‌گفت:

> از دلایلی که باعث شد در فرانسه به مدت صد سال به هگل اعتنایی نشود، می‌توان به پیچیدگی نوشته‌های او، چیرگی سنت فلسفی دکارت و کانت، و پروتستان‌گرایی او اشاره کرد ولی از همهٔ این‌ها مهم‌تر بی‌اعتقادی فرانسویان به عقیدهٔ راسخ هگل به «این‌همانی سنتز منطقی و صیرورت تاریخی» است. نزد فرانسویان عقل‌گرا، تاریخ امری جدا از عقل و منطق بود، چیزی جاودان بیرون از زمان.

از نمونه‌های دیگر از تعصبات عقیدتی در فرانسه، که به‌راحتی در سایر کشورهای دیگر نیز یافت می‌شود، می‌توان به یک قرن مقاومت دانشگاه پاریس در برابر افکار[۳] پاراسِلْسوس[۴] و مقاومت، متأثر از دکارت، در برابر اندیشه‌های لایب‌نیتس دربارهٔ بی‌نهایت‌کوچک‌ها[۵] اشاره کرد.

بااین‌همه، در سال‌های پایانی دههٔ ۱۹۳۰ بودند محققانی در فرانسه که هم به‌خوبی با کار گودل آشنا بودند و هم فعال در ترویج آن. برای مثال، رسالهٔ طرح‌های پیدایش[۶] از آلبر لوتمن[۷] و دو اثر

---

[۱] [H۴] و [H۶] را ببینید. [۳] این‌ها را لُرد دِیْکِرِ گلانتونی، با آن همه اشتیاق مألوفش به کشمکش‌های ذهنی، با قلم همیشه تازه‌اش مکتوب کرده است:[H۲] را ببینید. [۵] گرچه این اختلاف‌نظر چندان طول نکشید: [H۵] را ببینید.

[2] Alexandre Koyré [4] Paracelsus [6] Les schémas de genèse [7] Albert Lautman

مسئلهٔ مبانی ریاضیات[1] و خالی بودن حساب از تناقض[2] از ژان کاوایه را ببینید که نشان می‌دهند هرگونه موضع‌گیری وطن‌پرستانه برضد گودل، شاید هم محدود به بورباکیان بوده باشد.

جالب است که کاوایه سال ۱۹۲۹ را سال گذارِ میان دو دوره از پیشرفت منطق جدید می‌داند: دورهٔ طبیعی و دورهٔ انتقادی. به دلایل روانشناختی، در بورباکیان تمایلی به نقل مکان از منطق طبیعی، که با آن خو گرفته بودند، وجود نداشت؛ این‌گونه عدم تمایل در میان ریاضی‌دان اروپایی چندان نادر نیست.

نوع برخورد بورباکی با منطق شاید تقلیدی از نگاه تمسخرآمیز پوانکاره به آثار کانتور و راسل باشد. با اینکه پوانکاره در آخرین مقالات[3] خود، نوعی پذیرش رقیب از خود نشان داده است ـ در یک سخنرانی، سه هفته پیش از مرگش، رقیبانش را متحدان اخلاقی خوانده و برای آن‌هایی که با ایده‌ها و روش‌های متفاوت به دنبال آرمان مشترک‌اند احترام قائل شده است ـ ولی این تظاهر به آشتی، سخت توانسته باشد نقدهای تمسخرآمیز و طعنه‌های مخرّب و درعین‌حال کاملاً نارَوای قبلی‌اش بر منطق را از یادها ببرد.

وان هایِنُرت[4] در «مقدمه»اش بر ویرایش فرانسوی کتاب نوشته‌های منطقی[5] اثر اِربران به سال ۱۹۶۸، با اسفبار خواندن وضع منطق در فرانسه، خاطر نشان می‌کند که خسارت وارده به منطق از سوی پوانکاره را مرگ زودهنگام بسیاری از منطق‌دانان فرانسوی دوچندان کرده است، از جمله کوتورات، که در اثر برخورد به یک خودروی باری در جریان بسیج عمومی سال ۱۹۱۴ کشته شد، نیکُد، که در سال ۱۹۲۴ در ۳۱ سالگی به علت بیماری سل مُرد، اِربران، که در حین کوه‌نوردی در ۲۳ سالگی کشته شد، کاوایه، و لوتمن، که در ۴۱ و ۳۶ سالگی به دست آلمان‌ها در سال ۱۹۴۴ در جنبش مقاومت فرانسه کشته شدند. این فقدان آخری بخشی از پدیدهٔ گسترده‌تری بود: منطق‌دانان اهل اروپا که از ترس هیلتر فرار کردند، در آمریکا و اسرائیل پایه‌گذار مکتب‌هایی شدند که به شکوفایی رسیده‌اند و از مکتب‌های اروپایی پیشی گرفتند.[6]

شاید هیلبرت علت گمراهی بورباکیان بوده باشد؛ پایبندی او به برنامه‌اش پذیرفتن نتایج گودل را در ابتدا برای او بسیار دشوار می‌کرد. اما ازآنجایی‌که هیلبرت خیلی سریع‌تر از پیروان جوان‌ترِ

[6] برای مثال، اگر دانشجویان در کمبریج در طی چهار سال در پنجاه جلسهٔ درسی مربوط به منطق شرکت می‌کنند در هاروارد و پرینستون در دویست و پنجاه و در برکلی، که در آن درس منطق جدی گرفته می‌شود، در چهارصد جلسهٔ درسی حاضر می‌شوند.

[1] La problème du fondement des mathématiques [2] La non-contradiction de l'arithmétique [3] Last Essays
[4] van Heijenoort [5] Écrits Logiques

فرانسوی‌اش از تحیّر به در آمد، برای توجیه گمراهی بورباکیان نیاز به جُستن توضیح دیگری است. شاید، مانند بسیاری دیگر از دانشمندان، تعصباتشان آن‌ها را از پی بردن به اهمیت مطالب معلوم باز می‌داشته است.

تصور من این است که بورباکیان به سطحی از عجز روانی رسیده بودند که توانایی رویارویی با این اتفاق مُحتمل را، که نتایج گودل قویاً آن را مطرح می‌کرد، نداشتند و آن اینکه هیچ مبانی‌ای برای ریاضیات از نوعی که هیلبرت پیش نهاده است و بورباکی با آغوش باز پذیرفته است وجود ندارد؛ هیچ راهی برای استوارکردن ریاضیات براساس منطق یا رده‌ها یا هر چیز دیگری از این نوع وجود ندارد که طی آن با تثبیت اصولی برحسب تصورات اولیه، خیالمان از آن‌ها راحت بشود؛ و همچنین با اینکه واقعاً مشکلاتی در مبانی وجود دارد، نمی‌توان آن‌ها را به فصل اول «کتاب اصلی» محدود کرد زیرا آن‌ها به سرتاسر ریاضیات رسوخ می‌کنند.

دومین سؤالم این بود:

چطور گروه بورباکی متوجه نشدند که انتخاب نظریهٔ مجموعه‌ها برای مبانی ریاضیات کفایت نمی‌کند؟

پاسخ من این است که آن‌ها فقط به حوزه‌هایی از ریاضیات توجه داشتند که اصول تسرملو در آن حوزه‌ها کفایت می‌کند؛ این حوزه‌ها را به‌طورکلی می‌توان، در تقابل با حساب، هندسه نامید. [1]

لایب‌نیتس در جایی می‌نویسد که دو هزارتوی معروف وجود دارد که عقل آدمی اغلب در آن‌ها گم می‌شود. یکی مسئلهٔ جبر و آزادی است و دیگری مربوط می‌شود به مسئلهٔ ناگسستگی و بی‌نهایت. در اینجا من مسئلهٔ دوم را به چالش می‌کشم و می‌خواهم موضوعی را بررسی کنم که معتقدم اساس دوگانگی در ریاضیات است، منظورم کشاکشی درونی بین دو نوع نگرش اولیه، یعنی حسابی و هندسی، است.[2] با معمای زیر می‌توان این کشاکش درونی را به صورت جذاب‌تری توضیح داد.

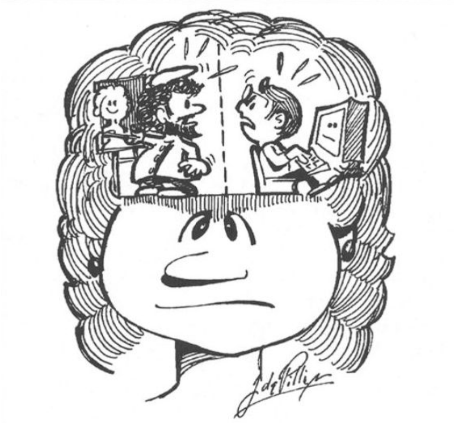
آیا می‌توانید یک راه‌پلهٔ مارپیچ را بدون کمک گرفتن از دستانتان توصیف کنید؟

این سؤال سختی است، شاید به این علت که واژه‌ها زمانمندند، پس از نوع حساب‌اند، ولی مارپیچ‌ها مکانمندند. شاید سختی این سؤال علتی جسمانی داشته باشد: شواهد پزشکی زیادی

---

[1] دکتر بریکُنی با اشاره به دادوستدهای دیگر میان هندسه و حساب در آثار آندره وِی، ژان پیر سِر، و دیگران، به این نظر من نقد وارد کرده است. متأسفانه او نیز با بورباکی هم‌نظر است که «بعید است سؤال‌های مربوط به مبانی ریاضیات مستقیماً در این شاخه‌های ریاضیات رسوخ کرده باشد»، نمی‌دانم چطور می‌شود که اشخاصی این‌همه پذیرای یک گونه از دادوستد باشند ولی در برابر انواع دیگر آن این‌همه مقاومت به خرج دهند. برای مطالعهٔ مسئله‌هایی در هندسهٔ جبری که با کمک منطق حل شده‌اند ،[F۳]،[F۲] و [F۵] را ببینید.

[2] دکتر مَنکسو فصل چهارم کتاب هندسه‌گرایی دکارتی و حساب‌گرایی لایب‌نیتسی، [H۱]، را نشانم داد که در آن برای بررسی اختلاف نظر میان دکارت و لایب‌نیتس از این دوگانگی استفاده شده است.



دوپارگی مغز؟

وجود دارد[۱] مبنی‌بر اینکه معمولاً نیمهٔ چپ مغز مفاهیم زمان‌مند را پردازش می‌کند و نیمهٔ راست مفاهیم مربوط به مکان را.[۲]

بورباکی از مسئلهٔ وجود رابطه میان هندسه و حساب، که مسئله‌ای بسیار قدیمی است و حتی اِلئائیان نیز دربارهٔ آن بحث کرده‌اند، باخبر بوده است و در معماری بنای ریاضیات می‌نویسد:

> صرف‌نظر از ریاضیات کاربردی، همیشه میان خاستگاه‌های هندسه و حساب (به‌ویژه در شکل اولیهٔ آن‌ها)، دوگانگی وجود داشته است، زیرا حساب در ابتدا علم مقادیر منفصل بوده است حال‌آنکه هندسه همواره علم کمیات متصل بوده است. این دو جنبه، منجر به پیدایش دو دیدگاه شده‌اند که از زمان کشف اعداد گنگ در تضاد با هم بوده‌اند. درواقع، دقیقاً همین کشف اعداد گنگ است که تلاش‌های اولیه برای وحدت‌بخشیدن به ریاضیات، یعنی حسابی‌سازی فیثاغورسیان (اینکه «همه چیز

---

[۱] منابع [P۱]، [P۲] و [P۳] را ببینید. از جان دیویس، استاد بازنشستهٔ دانشگاه کمبریج، که توجه مرا به به این تحقیقات جلب کرد سپاسگزارم.

[۲] دوست منتقدی پیش‌نویس اولیه این مقاله را خواند و نوشت: «بورباکی از کدام نیمه‌های مغزش استفاده می‌کرده است؟ نظر من این است که از نیمهٔ چپ. ریاضیات نیمهٔ‌راستی که محصول هندسه‌دانان ایتالیایی بود خوشایند بورباکیان نبوده است: بخش بزرگی از آن مشکوک بود و، اگر بتوان «صادق» و «کاذب» را مفاهیمی مربوط به نیمه‌چپ مغز و «درست» و «نادرست» را مفاهیمی مربوط به نیمهٔ راست مغز به حساب آورد، بیشتر آن مطالب را می‌توان درست ولی کاذب دانست! «بورباکیان به جای استفاده از ابزارهای توپولوژیک و آنالیزی که موجب تقویت شیوهٔ استدلال ایتالیایی‌ها (لفشتس، هاج، و دیگران) می‌شد، راه جبری‌سازی (زاریسکی، شوالی، وِی، گروتندیک) را برگزیدند. به نظرم این انتخاب خودش گویای حقایقی است. در مورد آندره وِی، از خودم می‌پرسم که آیا برخلاف تمایل طبیعی خودش کار نکرده است؛ به نظرم تفکر او همیشه تحلیلی بوده است ولی توانایی این را هم داشته است که با روش‌هایی غیر از روش‌های معمول خودش استدلال کند. شاید به همین دلیل است که کتاب مبانی هندسهٔ جبری او این قدر عجیب‌وغریب به نظر می‌آید.»

عدد است»)، را با شکست مواجه کرد.

یک قرن پیش، اوگاستس دمورگان می‌نویسد:

> استدلال هندسی و روش‌های حسابی هریک جایگاه خود را دارند. آمیختن این‌ها در آموزش ابتدایی، به فهم درست هر دو لطمه می‌زند.

به اندازهٔ ۱۳۰۰ سال دیگر عقب‌تر می‌رویم و در دروس چهارگانهٔ[1] بوئتیوس می‌بینیم که ریاضیات به حساب و هندسه، موسیقی و نجوم تقسیم شده است. از آنجا که دوتای دوم صورت‌های کاربردی دوتای اول است، این تقسیم‌بندی نیز تقسیم‌بندی دوگانه است. از سوی دیگر، جی. جی. سیلوستر در گفتاری آزمایشی در هندسه[2] ایرادشده در چهارم سپتامبر ۱۸۵۴ گفته است [۲۳]:

> سه مفهوم رایج، یا به بیان بهتر، سه حوزهٔ اصلی تفکر، بر همهٔ پیکرهٔ دانش ریاضی چیرگی دارد و هر حقیقت ریاضی ممکن به یکی از آن‌ها یا به ترکیبی از دوتا و یا هر سهٔ آن‌ها مربوط می‌شود. این سه‌تا، سه مفهوم اصلی عدد، فضا و ترتیب‌اند.
>
> ویژگی‌های مجرّد اعداد اشیای مورد استفاده در حساب هستند. در جبر، که دانش اَعمال خوانده می‌شود، مفهوم ترتیب مفهوم اصلی است. در هندسه نیز سروکار ما با تغییرات ویژگی‌ها و نسبت مکان یا اجسام فضایی است.
>
> غور کردن در طبیعت فضا همچون شیئی مستقل، یا مطالعهٔ آن براساس ارتباطش با ذهن انسان کار فیلسوفان است. هندسه‌دانان به مشغلهٔ کم‌رونق‌تر ولی رضایت‌بخش‌ترِ مطالعهٔ فضا به‌منزلهٔ یک حقیقت عینی مشغول‌اند . . .
>
> اگر نبود کشف مقاطع مخروطی، که منسوب به افلاطون است، قانون گرانش عام تا به این ساعت هم استخراج نشده بود. خودِ افلاطون هم تصور نمی‌کرد که دارد برای زبانی دستور می‌نویسد که قرن‌ها بعد ثابت می‌شود که عالَم به آن زبان نوشته شده است.
>
> کسی که می‌خواهد بداند هندسه چیست، باید شجاعانه خود را به اعماق آن بسپارد و فکر و احساس یک هندسه‌دان را بیاموزد.

[1] quadrivium [2] A probationary lecture on geometry

اگر «ترتیب» را ابرساختاری از دوتای دیگر در نظر بگیریم می‌توان این دسته‌بندی سه‌گانهٔ سیلوستر را به دو دسته تقلیل داد، و شاید این سؤال پیش بیاید که آیا کاهش بیشتر و نهایی این تعداد ممکن است.[۱] ولی گمان من این است که تفکیکی که به لحاظ فیزیولوژیک مغز در نحوهٔ پردازش بین افکار وابسته به مکان و زمان دارد مؤید این ادعا است که وحدت کامل ریاضیات امکان ندارد. پس اجازه دهید این دو نوع درک درونی، حسابی و هندسی، را بیشتر بررسی کنیم.

این دو نوع درک درونی از هم جدا نیستند. هریک دارای زبانی آن‌چنان غنی است که ترجمه از زبان دیگری را میسر می‌کند: در نظریهٔ مجموعه‌ها می‌توان نمونکی از خط اعداد حقیقی را ساخت به این صورت که اول اعداد گویا را بسازیم و بعد (مثلاً) برش‌های ددکیند؛ همچنین می‌توان نقاطِ با فاصلهٔ برابر در فضا را نقاط صحیح روی یک خط دانست. امّا چنین ترجمه‌هایی مستعد پارادوکس‌هایی هستند، زیرا ترجمه‌ها برخاسته از مشخصات ظاهری هستند و نه دریافت‌های اصلی.

به همین دلیل فیثاغورسیان باورشان شده بود که همه چیز عدد است، اما وقتی نشان دادند که قطر یک مربع نسبت به ضلع آن نامتوافق است دچار یأس شدند. در اینجا، وارد کردن یک ساختار سادهٔ هندسی به قلمرو دیگر منجر به ایجاد پارادوکسی در حساب شد.

زمانی اِشْتیفل[۲] (۱۴۸۷–۱۵۶۷) پرسیده بود اعداد گنگ چیست‌اند. از دید هندسه، آن‌ها به عنوان طول، و نه به عنوان عدد، پذیرفتنی‌اند. او نوشته است که «عدد گنگ یک عدد حقیقی نیست، زیرا سایه‌ای از بی‌نهایت آن را پوشانده است.» او $\sqrt{۲}$ را قبول نداشت.

در جهت عکس هم پارادوکس باناخ–تارسکی را داریم که طبق آن، یک کُره را می‌توان به تعداد متناهی قطعه چنان تجزیه کرد که تنها با دَوران و تغییر مکانِ فضاییِ این قطعات، دو کرهٔ هم‌اندازهٔ کرهٔ اولیه به دست آید. اثبات این قضیه از استدلال شرودرْ–برنشتاین به همراه اصل انتخاب نتیجه می‌شود (در غیاب اصل انتخاب، قضیهٔ باناخ–تارسکی برقرار نیست).

---

[۱] همان دوست منتقد دربارهٔ این موضوع نوشته است: «فریمن دایسن، در بخش سوم کتابش [F۴] دربارهٔ یگانه‌سازان و متفرق‌سازان توضیح داده است. یگانه‌سازان از وحدت و متفرق‌سازان از تنوع لذت می‌برند. من همیشه فکر می‌کردم که ریاضی‌دانان گرایشی طبیعی به وحدت دارند. ازسوی‌دیگر، می‌دانم که نظریهٔ مجموعه‌دانانی که به روش اظهار [forcing] علاقه‌مندند هیچگاه نمی‌توانند چنین باشند. به نظر من در مورد بورباکی، تمایزی که دایسن قائل شده است بیشتر صدق می‌کند تا تمایزی که شما بدان اشاره کرده‌اید. بورباکی بیش از همه به یگانه‌سازی علاقه‌مند بوده است. بخشی از این یگانه‌سازی را می‌توان با تنظیم دقیق نظریهٔ اندازه حاصل کرد، و بخش دیگر آن را باید با تبدیل نظریه‌های تحلیلی به نظریه‌های جبری، و بنابراین افزایش گسترهٔ کاربرد آن‌ها و پیدا کردن موارد بیشتر، حاصل آورد. به نظر می‌رسد که جبر اسبِ بارکشِ یگانه‌سازان باشد. بورباکی کوشیده است که محتوای ترکیبیاتی، به معنایی محدود، شاخه‌هایی از ریاضیات را که برای منظور او ”رسیده“ بوده است تا حدی روشن کند.» نمی‌دانم تمایز دایسن چه فرقی با تمایز بین خلاقیت و تثبیت یافته‌ها، مذکور در نخستین بند این مقاله، دارد.

[2] Stifel

در این مورد، استدلال‌هایی که در چهارچوب نظریهٔ مجموعه‌ها طبیعی به حساب می‌آیند به نتایجی منتهی می‌شوند که از لحاظ هندسی پارادوکس‌گونه‌اند. این وضع همان حال‌وهوای نتیجه‌ای از فیبوناتچی در قرن سیزدهم را دارد که در آن ریشه‌ای از یک معادلهٔ مکعبی پیدا کرده بود که از نوع اعدادِ گنگ اقلیدسی نبود.

این نگرش بورباکی به موضوع تقابل هندسه و حساب هنوز هم طرفدار دارد. اخیراً، سُندرز مکلین[1]، ریاضی‌دان برجستهٔ آمریکایی، نیاز به احیای مباحث فلسفهٔ ریاضیات را گوشزد کرده و آنچه را که خود مبانی عظیم نظریهٔ مجموعه‌ای ریاضیات خوانده با عبارات زیر به نقد کشیده است:

> مبانی عظیم نظریهٔ مجموعه‌ای نگرشی تک‌بعدی و اشتباه به ریاضیات است؛ نظریهٔ مجموعه‌ها هیچ ربطی به بخش اعظمی از فعالیت ریاضی ندارد. امروز، منطق‌گرایی، صورت‌گرایی، و افلاطون‌گرایی شدیداً تحت سیطرهٔ مفاهیم نظریهٔ مجموعه‌ها و دقت قیاسی درآمده است.

نقدهای دیگری نیز مطرح شده است ازجمله توم[2] که گفته است [۲۲]:

> به نظر می‌آید که نظریهٔ مجموعه‌ها هندسه را سرکوب کرده است

و از همهٔ این‌ها مهم‌تر، تذکر پایانی در مقاله‌ای به سال ۱۹۲۲ از اسکولم است به این مضمون که:

> مهم‌ترین نتیجهٔ اشاره‌شده در بالا این است که مفاهیم نظریهٔ مجموعه‌ها نسبی‌اند. من این مطلب را در زمستان سال ۱۹۱۵/۱۹۱۶ شفاهاً به پروفسور برنشتاین در گوتینگن گفته بودم. به دو دلیل از انتشار آن‌ها قبلاً خودداری کرده بودم: نخست اینکه مشغول به مسائل دیگری بودم؛ دوم اینکه فکر می‌کردم اینکه نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها بنیان نهایی رضایت‌بخشی برای ریاضیات نیست آنقدر نزد ریاضی‌دانان روشن است که عمدهٔ آنان زحمت آن را به خود نمی‌دهند. به‌تازگی، و با کمال تعجب، دریافته‌ام که بسیاری از ریاضی‌دانان نظریهٔ مجموعه‌ها را بنیان ایده‌آلی برای ریاضیات می‌دانند؛ ازاین‌رو، وقت آن رسید که نقدهای خود را منتشر کنم.

من بورباکی را مقصر این تجدید حمله می‌دانم زیراکه باعث کهنه شدن دانش ریاضی‌دانان از منطق

[1] Saunders Mac Lane [2] Thom

در همان سطح سال ۱۹۲۹ شد.[۱] مکلین، که شاگرد برنایس (در سال‌های ۱۹۳۰ تا ۱۹۳۳) بوده است و نسبت به بورباکی‌ها شناخت بهتری از منطق داشت، موضعی را به باد انتقاد می‌گیرد که منطق‌دانان در شصت سال گذشته در حال ترک آن بودند، ولی ریاضی‌دانان هنوز ساکن آن‌اند.

جای آن نیست که به نقاط قوت و ضعف دیدگاه‌های مکلین دربارهٔ مبانی ریاضیات آن‌چنان‌که در کتابش تحت عنوان ریاضیات: صورت و کارکرد آمده است به تفصیل بپردازیم، ولی چند تذکر کوتاه به‌جاست.

برخلاف نظر اسکولم، به نظر من برای ریاضیات هیچ مبانی قطعی‌ای وجود ندارد، اما نظریهٔ مجموعه‌ها بخش قابل توجهی از ریاضیات را تحت پوشش قرار می‌دهد. من با اظهارنظر اول مکلین و توم موافقم و سخن آن‌ها را مطابق با این نظر خود می‌یابم که نظریهٔ مجموعه‌ها بیشتر مختصِ جنبهٔ حسابی ریاضیات است تا جنبهٔ هندسی آن. اظهارنظر دوم مکلین را نیز تأیید می‌کنم که نظریهٔ مجموعه‌ها چندان ربطی به هندسهٔ کاربردی ندارد ولی با حساب، در معنای عام آن، رابطهٔ تنگاتنگ دارد.

با اینکه با قسمت بیشتر انتقاد سوم مکلین موافقم، استفادهٔ او از عبارت نظریهٔ مجموعه‌ها\ و دقت قیاسی برایم جای سؤال دارد. او آن‌ها را متحد باهم می‌پندارد و به اینکه این دو به هیئت راه‌حل قطعی مسئلهٔ مبانی ریاضیات در آمده‌اند معترض است. من این دو را از هم جدا می‌بینم. منطق، دانش مربوط به نحوهٔ به کار بردن زبان است؛[۲] نظریهٔ مجموعه‌ها مطالعهٔ مفهوم درست‌بنیانی است، و برخلاف تصور مکلین، مطالعهٔ روش و فرایند تشکیل مجموعه‌ها نیست.

فرق بزرگِ بین دستگاه تسرملو و تسرملو–فرانکل نیز در همین است. دستگاه تسرملو –یا به بیان بهتر، دستگاه فرعی از آن که می‌توان آن را، نظر به طرف‌داری مکلین از آن در کتاب‌ها و مقالاتش، دستگاه مکلین خواند– دستگاهی است که در آن امکانات تشکیل مجموعه‌ها موجود و برای استفاده‌های هندسی نیز کافی است. دستگاه تسرملو–فرانکل دستگاهی است که علاوه بر این‌ها در آن امکانات تعریف‌های بازگشتی موجود است، به این معنی که می‌توان ساختارها را به اشیای ناشناخته وارد کرد. این ویژگی، که نقطهٔ کانونی نظریهٔ مجموعه‌های کریپکی–پلاتِک[۳] است، مناسب جنبهٔ حسابی ریاضیات است.

---

[۱] از قرار معلوم، یکی از اعضای بورباکی در یک سخنرانی در پرینستون و در حضور گودل گفته است که در منطق از زمان ارسطو تا به حال اتفاق تازه‌ای روی نداده است. آیا می‌توانید بگویید او کی بوده است؟

[۲] شاید این گفته برای بسیاری بحث‌برانگیز باشد؛ ولی این اختلاف‌نظر، این دیدگاه مرا که منطق را باید از نظریهٔ مجموعه‌ها جدا دانست تقویت می‌کند.

[3] Kripke-Platek

در نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو نمی‌توان ثابت کرد که هر خوش‌ترتیبی‌ای با یک عددترتیبیِ فون نویمان یکریخت است؛ نمی‌توان وجود عدد ترتیبی فون نویمان $\omega + \omega$ را اثبات کرد، هرچند وجود و درست‌بنیانی ترتیب‌های خطیِ این نوعِ ترتیبی را می‌توان نشان داد؛ همچنین نمی‌توان برای قضیهٔ بازگشت روی اعداد ترتیبی یا رابطه‌های درست‌بنیان دلخواه دلیل آورد. بنابراین استقراء، که در قلب حساب جا دارد، از (بخش بزرگی از) هندسه غایب می‌شود. ازطرف‌دیگر، درک مکانی از حساب غایب می‌شود؛ پس ما به هر دوی آن‌ها، حساب و هندسه، نیاز داریم.

این تصورِ «هندسی» از اعداد صحیح که آن‌ها نقاطی با فاصلهٔ برابر روی یک خط هستند چنین القاء می‌کند که همهٔ اعداد طبیعی دارای جایگاه یکسانی‌اند؛ یا به قول راسل آن‌ها از یک نوع‌اند. در تصور «حسابی» ما از اعداد صحیح، عدد ۰ ساده‌ترین عدد طبیعی است، و اعداد طبیعی بزرگ‌تر از اعداد طبیعی کوچک‌تر تولید می‌شوند، و درنتیجه نسبت به آن‌ها پیچیده‌ترند؛ پس هیچ دو عدد طبیعی‌ای از یک نوع نیستند.[۱] هر تلاشی برای مسلط کردن یکی بر دیگری، به هر دو آسیب می‌زند، و بهتر است فلسفه‌ای برای ریاضیات جستجو کنیم که به هر دو امکان ترقی در یک تعامل مفید بدهد. نظریهٔ مجموعه‌هایی که مکلین در کتابش عرضه کرده است[۲] جزئی از دستگاه تسرملو به انضمام اصل انتخاب است. بنابراین طرح او هم به نقدهایی که در اینجا بر رویکرد پیشاگودلی بورباکیان به ریاضیات و موضع‌گیری آن‌ها دربارهٔ هندسه وارد شد هیچ پاسخی نمی‌دهد.

بگذارید مقاله را با این نقل قول مؤثر از ژان دیودونه که:

> ما هنوز دست به کار فهم رابطهٔ میان ترکیبیات و ریاضیاتِ مفهومی نشده‌ایم

به پایان ببرم و بگویم که هم فلسفهٔ مورد نظر مکلین و هم درکی که دیودونه به دنبال آن بود، از مطالعهٔ مجدد رابطهٔ متقابل میان حساب و هندسه حاصل خواهد شد.

سپاسگزاری

مترجم ترجمهٔ تجاهل بورباکی را به پاس روزهای خوش هم‌صحبتی در فرایبورگ به آدریان متایاس پیشکش می‌کند. از آقای رحمان محمدپور و خانم مریم آجُرلو برای مطالعهٔ دقیق مقاله و گوشزد نارسایی‌های آن، از آقای زانیار قادرنژاد برای تشویق من به چاپ آن، و از آقای علی ولی‌زاده برای پیشنهاد مجلهٔ فرهنگ واندیشهٔ ریاضی سپاسگزاری می‌کنم.

---

[۱] در تعریف فون نویمان برای «اعداد ترتیبی» این توالی اعداد صحیح از منظر «حساب» به‌طرز زیبایی لحاظ شده است؛ و به‌همین‌خاطر نمی‌توانم نظر مکلین را مبنی‌بر اینکه تعریف فون نویمان صرفاً نوعی «حُقّه» است بپذیرم.

[۲] برای بحثی دربارهٔ چندوچون منطقی دستگاه ارائه‌شده در [۱۶] به [۱۷] رجوع کنید.

یادداشت ویراستاران خوشبختانه مقالات بسیاری به زبان فارسی دربارهٔ موضوع این مقاله موجود است که خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به آن‌ها رجوع کند از جمله

۱) استوارت، آی.، بدرود بورباکی، ترجمهٔ احسان ممتحن، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ **۴۱** (۱۳۸۴)، ۵۳-۵۶.
۲) توم، آر.، ترک ریاضیات به قصد فلسفه، ترجمهٔ سید محمدباقر کاشانی، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ **۲۶** (۱۳۸۰)، ۱۷-۳۰.
۳) کارتان، هنری، نیکلا بورباکی و ریاضیات معاصر، ترجمهٔ همایون معین، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ **۱** (۱۳۶۱)، ۵۲-۶۶.
۴) کلاین، اِم.، بنیادهای ریاضیات، ترجمهٔ رضا کرمی، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ **۶** (۱۳۶۵)، ۶۰-۱۰۴.
۵) گودل، کی.، صدق و اثبات: تصمیم‌ناپذیری در نظام پرینکیپیاماتماتیکا، ترجمهٔ شاپور اعتماد، نشر ریاضی، سال ۲، شمارهٔ **۱** (۱۳۶۸)، ۴۳-۴۵.
۶) هالموس، پال، نیکلای بورباکی، ترجمهٔ سعید ذاکری، جنگ ریاضی دانشجو، جلد **۵** (۱۳۶۸)، ۵۴-۶۵.
۷) هنکین، اِل.، آیا منطق و ریاضیات یکی هستند؟ ترجمهٔ رضا کرمی، پیک ریاضی، شمارهٔ ۳-۴ (۱۳۶۵)، ۳۲-۵۶.

مراجع تاریخی

[H1] Belaval, Y., *Leibniz Critique de Descartes*, Gallimard, Paris, 1960.
[H2] Trevor-Roper, H. R., Baron Dacre of Glanton, The Paracelsian movement, in *Renaissance Essays*, Secker and Warburg, 1985.
[H3] Fernères, G., Cavaillès, J., *Un Philosophe dans la Guerre*, 1903-1944, Éditions du Seuil, Paris, 1982.
[H4] Koyré, A., Rapport sur l’état des études hégéliennes en France, *Revue d’Histoire de la Philosophie*, **5:2** (1931), 147.
[H5] Mancosu, P., The metaphysics of the calculus: A foundational debate in the Paris Academy of Sciences, 1700-1706, *Historia Math.*, **16** (1989), 224–248.
[H6] Poster, M., *Existential Marxism in Postwar France from Sartre to Althusser*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1975.

مراجع دربارهٔ فیزیولوژی

[P1] Annett, M., *Left, Right, Hand and Brain: The Right Shift Theory*, Erlbaum, New Jersey, 1985.
[P2] Beaton, A., *Left Side, Right Side: A Review of Laterality Research*, Yale University Press, New Haven, 1985.
[P3] Springer S. P., Deutsch, G., *Left Brain, Right Brain*, W. H. Freeman, New York, 1981-1985.

مراجع برای مطالعهٔ بیشتر

[F1] Baldwin, J. T., ed., *Classification Theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1292, Springer, Berlin, 1987.
[F2] Denef, J., p-adic semi-algebraic sets and cell decomposition, *J. Reine Angew. Math.*, **369** (1986), 154–166.
[F3] Denef J., van den Dries, L., p-adic and real subanalytic sets, *Ann. of Math.*, (2) **128** (1988), 79–138.

[F4] Dyson, F., *Infinite in all Directions*, Harper and Row, New York, 1988.

[F5] MacIntyre, A., On definable subsets of p-adic fields, *J. Symbolic Logic*, **41** (1976), 605–610.

مراجع ریاضی

[1] Borsuk, K., Szmielew, W., *Foundations of Geometry*, North Holland, Amsterdam, 1960.

[2] Bourbaki, N, L'Architecture des mathématiques, in [15], 35–47.

[3] Bourbaki, N., The architecture of mathematics, *Amer. Math. Monthly*, **57** (1950), 221–232.

[4] Bourbaki, N., Foundations of mathematics for the working mathematician, *J. Symbolic Logic*, **14** (1948), 1–14.

[5] Cartan, H., Sur le fondement logique des mathématiques, *Revue Scientifique*, **81** (1943), 3–11.

[6] Cavaillès, J., *Le Progrès de l'Esprit*, Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 608& 610 , Hermann, Paris, 1938; see also *Sur la Logique et la Théorie de la Science*, Presses Universitaires de France, 1947.

[7] Chevalley, C., *Math. Intelligencer*, **7** (1985), 18; see also *Math. Intelligencer*, **8** (1986), 5.

[8] Dieudonné, J., Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques, *Revue Scientifique*, **77** (1939), 224–232.

[9] Dieudonné, J., David Hilbert, in [15], 291-297.

[10] Dieudonné, J., *A Panorama of Pure Mathematics*, Academic Press, New York, 1982.

[11] Feferman, S., Hilbert's program relativized: Prooftheoretical and foundational reductions, *J. Symbolic Logic*, **53** (1988), 364–384.

[12] Hilbert, D., Ackermann, W., *Grundzüge der Mathematik*, Springer-Verlag, Berlin, 1928.

[13] Hilbert, D., *Gesammelte Abhandlungen*, 3 Band, Springer, Berlin, 1935, 378–387; reprinted by Chelsea, New York 1965.

[14] Lautman, A., *le Progrès de l'Esprit*, Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 591, Hermann, Paris, 1938; see also his *Collected Works*, 1977.

[15] le Lionnais, F., *Les Grands Courants de la Pensée Mathématique*, Cahiers du Sud, 1948; reviewed by S. Mac Lane in *Math. Reviews*, **10**, 230.

[16] Mac Lane, S., *Mathematics: Form and Function*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[17] Mathias, A. R. D., Notes on Mac Lane set theory (submitted to *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*).

[18] Sieg, W., Hilbert's program sixty years later, *J. Symbolic Logic*, **53** (1988), 338–348.

[19] Sierpinski, W., *Leçons sur les Nombres Transfinis*, Collection Borei, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[20] Simpson, S., Partial realisations of Hilbert's programme, *J. Symbolic Logic*, **53** (1988), 349–363.

[21] Simpson, S., Ordinal numbers and the Hilbert Basis Theorem, *J. Symbolic Logic*, **53** (1988) , 961–974.

[22] Skolem, Th., Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, in *Mengenlehre, An Anthology of Papers Written Since 1874 on the Mathematical, Metamathematical and Philosophical Aspects of Set Theory*, U. Felgner, ed., Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1979.

[23] Sylvester, J. J., *Collected Works*, Volume II, Cambridge, 1908; reprinted by Chelsea, New York, 1973.

[24] Weil, A., L'Avenir des mathématiques (1974), in [15], 307-320; also in his *Collected Works*, 1947a.

محسن خانی: محقق پسادکترا، دانشگاه آلبرت لودویگ فرایبورگ، آلمان

رایانامه: mosen.hani@gmail.com

Farhang va Andishe-ye Riyazi
Volume 41, Number 71, Fall/Winter 2022, Pages 129–150
doi: 10.30504/mct.2022.768.1542

The Ignorance of Bourbaki

A. R. D. Mathias
Translated by M. Khani[1]

Post-Doctoral Researcher at Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Germany

Abstract. The author criticizes Bourbaki's approach to fundamentals of mathematics, logic and set theory. He believes that despite being already aware of the impact of Gödel's proof on Hilbert's program of formalism, the group deliberately chose to ignore it, so far as they even refused to mention Gödel and address his work. He then points out the difference between arithmetic and geometric aspects of mathematics, and suggests that Zermelo's set theory, which was acknowledged by Bourbaki, suffices only for the geometric part whereas the arithmetic side needs to rely on Zermelo-Fraenkel system of axioms.

Keywords: foundation of mathematics, set theory, Bourbaki, Hilbert, formalism
Article history: Recieved 25 August 2016; Accepted 6 November 2017

[1] mosen.hani@gmail.com

ISSN 1022-6443/