فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۱، شمارهٔ ۷۱ (پاییز و زمستان ۱۴۰۱) صص. ۱ تا ۱۸

بنیان‌گذاری علم جبر در دورهٔ اسلامی

یونس کرامتی

چکیده. علم جبر، به عنوان شاخه‌ای بسیار مهم از ریاضیات، در شکل آغازین خود، یعنی طبقه‌بندی و حلّ معادلات درجهٔ اول و دوم، در حدود سال ۸۲۰ میلادی و با نگارش کتاب الجبر و المقابلة محمد بن موسی خوارزمی، ریاضی‌دان و اخترشناس پرآوازهٔ ایرانی پی ریخته شد. خوارزمی برای نخستین‌بار موجودات جبری را تعریف کرد و اعمال ریاضی روی این موجودات را به عنوان عملیات جبری شناساند. او با توجه به ناشناخته بودن اعداد منفی در جهان باستان و «البته عدد انگاشته‌نشدن صفر» معادلات درجهٔ اول و دوم را در «شش نوع معادلهٔ استاندارد» طبقه‌بندی و دستور یافتن و شرایط وجود ریشهٔ این معادلات را عرضه و برای درستی این دستورها نیز اثبات‌های هندسی عرضه کرد و نشان داد که همهٔ معادلات جبری درجهٔ اول و دوم را می‌توان با عملیات جبری به این شش نوع تبدیل کرد و درنتیجه روش کلّی حلّ همهٔ معادلات درجهٔ اول و دوم را عرضه کرد. برخی تاریخ‌نگاران اروپاییِ ریاضیات کوشیده‌اند با وضع اصطلاحاتی چون «جبر هندی»، و «جبر هندسی/یونانی»، در بنیان‌گذاری علم جبر توسط خوارزمی تردید افکنند. برخی نیز اریثمتیکای دیوفانتوس را منبع الهام جبر خوارزمی یا دست‌کم هر دو کتاب را ادامهٔ سنتی با ریشه در ریاضیات بابلی انگاشته‌اند. اما این دیدگاه‌ها امروز چندان پذیرفته نیست. در دورهٔ اسلامی نیز همهٔ دانشوران دربارهٔ بنیان‌گذاری علم جبر توسط خوارزمی هم‌داستان بوده‌اند و تنها ریاضی‌دانی به نام ابوبرزه، پدربزرگ خود عبدالحمید بن واسع را مقدم بر خوارزمی دانسته است که البته ابوکامل شجاع بن اسلم، ریاضی‌دان نامدار مصری، این ادعا را به‌شدت رد کرده است و دیگر دانشوران دورهٔ اسلامی نیز بر تقدم خوارزمی تأکید کرده‌اند.

۱ درآمد

ابوعبدالله محمد بن موسی خوارزمی، ریاضی‌دان، اخترشناس، و جغرافی‌دان نامدار ایرانی، در روزگار خلافت مأمون عباسی و در حدود سال ۸۲۰ میلادی (حدود ۲۰۵ قمری) با نگارش کتاب پرآوازهٔ

عبارات و کلمات کلیدی: جبر، محمد بن موسی خوارزمی، الجبر و المقابلة، عبد الحمید بن واسع، ابوبرزه، ابوکامل شجاع بن اسلم، جبر هندسی، جبر یونانی، جبر هندی، دیوفانتوس، اریثمتیکا
نوع مقاله: پژوهشی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۷/۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۷/۲۳

doi: 10.30504/mct.2022.1328.1925

الجبر و المقابلة مبانی نظری علمی را پی‌ریخت که امروزه، به افتخار همین کتاب، algebra یا جبر نامیده می‌شود.[۱] این کتاب مطابق رسم معمول آن روزگار به زبان عربی (زبان علمی بیشتر دورهٔ اسلامی) نوشته شده و دارای خطبه‌ای (مقدمه‌ای) مختصر و سه بخش اصلی است:

(۱) بخش «جبر»، که بخش نظری‌تر کتاب و مشتمل بر نظریهٔ معادلات و حساب دوجمله‌ای‌ها همراه با کاربردهای آن است؛

(۲) بخش مساحت شکل‌های هندسی با عنوان «باب المساحة»؛

(۳) بخش محاسبهٔ ارث برحسب وصیت در حالت‌ها و شرایط مختلف با عنوان «کتاب الوصایا» که خود به چند «باب» تقسیم شده است.

جستار حاضر به بررسی محتوا و اهمیت تاریخی بخش نخست اختصاص دارد.

۲ محتوای بخش جبر

خوارزمی، ازآنجاکه سرگرم پی‌ریزی شاخه‌ای جدید از ریاضیات است برای آنکه موجودات ریاضی موردنیاز در این شاخه (به تعبیر امروزی، جمله‌هایی که در معادلات درجهٔ اول و دوم وارد می‌شوند) برای مخاطب قابل فهم باشد می‌کوشد مفهوم آن‌ها را با مثال‌هایی آشنا منتقل کند. درنتیجه پیش از تعریف این موجودات ریاضی، سلسله‌های عددی زیر را می‌آورد:[۲]

$$
\begin{aligned}
&1, 2(=1+1), 3(=1+1+1), \ldots, 10\\
&10, 20(10+10=2\times 10), \ldots, 100(=10\times 10=10^2)\\
&100(10^2), 200(10^2+10^2=2\times 10^2), \ldots, 1000(=10\times 10^2=10^3)
\end{aligned}
$$

سپس به‌قیاس این سه، سه «جنس» یا سه موجود ریاضی تعریف می‌کند:

مال: یعنی همان چیزی که امروزه آن را توان دوم مجهول یعنی x^2 می‌نامند؛

جذر: یعنی که «شیء» (=چیز) نیز نامیده می‌شود؛

عدد مطلق: یا همان اعداد ثابت.

خوارزمی، درواقع، چندجمله‌ای ax^2+bx+c را درقیاس با عددی سه‌رقمی مانند $\overline{abc} =$

---

[۱] این سخن البته بدین معنی نیست که آنچه امروزه معادلات جبری نامیده می‌شود تا پیش از خوارزمی سابقه نداشته است. در ادامه و در مبحث «پیشینهٔ معادلات جبری پیش از خوارزمی»، سابقهٔ این‌گونه معادلات بررسی خواهد شد.

[۲] در تعریف اعداد یک‌رقمی به صورت جمع چند یک، تعریف یونانی عدد یعنی «مجموعه‌ای گردآمده از یک‌ها» در نظر بوده‌است.

جدول ۱. اعمال اصلی جبری

نام عمل	تغییر در دو سوی معادله	معادله پس از عمل
		$۴x^۲ - x + ۲ = x^۲ + ۸x - ۴$
جبر	$+x + ۴$	$۴x^۲ + ۶ = x^۲ + ۹x$
مقابله	$-x^۲$	$۳x^۲ + ۶ = ۹x$
ردّ*	$\div ۳$	$x^۲ + ۲ = ۳x$
* در مرحلهٔ پایانی اگر ضریب بزرگ‌ترین توان ($x^۲$) کوچک‌تر از یک باشد، تقسیم طرفین معادله بر این ضریب «تکمیل» نامیده می‌شود.		

$a \times ۱۰^۲ + b \times ۱۰ + c$ برای مخاطب قابل درک می‌سازد [۸، ص ۹۶]. سپس چهار عمل اصلی جبری را تعریف می‌کند که نام کتاب او برگرفته از نام دو عمل نخست است (نمونه‌ای از آن‌ها در جدول ۱ آمده است).

جبر: هرگاه یکی از این سه جنس در یک سوی معادله از جنسی دیگر کاسته شده باشد (یا به تعبیر امروزی، هرگاه ضریب یکی از جملات در یک سوی معادله منفی باشد)، آن را «جبر» می‌کنیم، یعنی آن جمله را به دو طرف معادله می‌افزاییم تا این کاستی «جبران» شود (به تعبیر امروزی، آن را به طرف دیگر معادله می‌بریم).

مقابله: هریک از اجناس سه‌گانه وقتی در دو سوی معادله ظاهر شوند مقدار کمتر با «مقابله» از دو سوی معادله حذف می‌شود

ردّ: اگر ضریب بالاترین توان مجهول بزرگ‌تر از یک باشد، مقدار اضافه بر یک از آن «ردّ» می‌شود و در مورد دیگر جملات معادله نیز همین کار انجام می‌شود. این کار، درواقع، به‌معنای تقسیم همهٔ جملات معادله بر ضریب بالاترین توان x است.

تکمیل: منطقاً همان عمل ردّ است با این تفاوت که دراین‌حالت ضریب بالاترین توان مجهول کوچک‌تر از یک است و باید به یک برسد.

ملاحظه ۱.۲. خوارزمی همهٔ این معادلات و عملیات را بدون کاربرد نشانه‌های رایج امروزی و فقط با عبارت‌های معمول زبان بیان می‌کند که تاریخ‌نگاران ریاضیات اصطلاحاً به آن «جبر حرفی» می‌گویند. برای نمونه آخرین فرمول جدول ۱ در جبر حرفی چنین بیان می‌شود: «مالی و دو عدد برابر است با سه جزر» (برای ترجمهٔ فارسی خلاصهٔ متن عربی جبر خوارزمی و بازنگاری آن به زبان ریاضی امروز نگاه کنید به [۱۵]).

جدول ۲. ریشهٔ معادلات استاندارد شش‌گانه*

	ریشه/ریشه‌های مثبت معادله	شکل کلی معادله
مفردات	$x = \frac{b}{a}$	۱) $ax^2 = bx$
	$x = \sqrt{\frac{c}{a}}$	۲) $ax^2 = c$
	$x = \frac{c}{b}$	۳) $bx = c$
مقترنات	$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$	۴) $ax^2 + bx = c$
	$x_1, x_2 = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$	۵) $ax^2 + c = bx$
	$x = \frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}}$	۶) $ax^2 = bx + c$

* البته در کتاب خوارزمی، پس از ردّ یا تکمیل همواره $a = 1$؛ که البته این کار به کلیت روابطی که او مطرح کرده آسیبی نمی‌رساند. همچنین چون در دوران باستان، صفر عدد به شمار نمی‌آمد و اعداد منفی نیز شناخته نبودند، در این شش نوع استاندارد همواره $a, b, c > 0$.

خوارزمی سپس همهٔ معادلات درجهٔ اول و دوم را پس از «جبر» و «مقابله» و ردّ یا تکمیل به شش نوع معادلهٔ استاندارد متمایز (جدول ۲) می‌رساند. به‌نحوی‌که در هیچ‌یک از طرفین معادله به‌تعبیر امروزی جمله‌ای با ضریب منفی دیده نشود. او آن سه نوع دوم را که در آنها مجموع دو جمله برابر جملهٔ دیگر است «مقترنات» می‌خواند؛ زیرا همواره دو جمله قرین (کنار) یکدیگرند. سه نوع نخست را نیز ریاضی‌دانان بعدی مفردات نامیدند (زیرا در این سه نوع هر جمله در یک سوی معادله «فرد» یا تنها افتاده است). خوارزمی تأکید می‌کند که باید هر مسئلهٔ جبر و مقابله را به یکی از این شش نوع استاندارد رساند.

۱.۲ بحث دربارهٔ شرایط وجود ریشه

نکتهٔ مهم در اینجا آن است که پاسخ یا ریشهٔ معادله نیز همچون ضرایب جملات در جدول ۲ نمی‌تواند صفر یا منفی باشد. پس منظور خوارزمی (و جبردانان پیرو او) از «ریشهٔ معادله»،تنها و تنها «ریشهٔ مثبت معادله» است. خوارزمی پس از یادکرد نوع پنجم از معادلات آورده است:

> اگر به مسئله‌ای رسیدی که تو را به این معادله می‌رساند، درستی حالت جمع $(b/2a+$ (یعنی عبارت $\sqrt{(b/2a)^2 - c/a}$ را بیازمای. اگر راست نیامد به‌ناچار حالت تفریق (یعنی عبارت $b/2a - \sqrt{(b/2a)^2 - c/a}$) پاسخ مسئله است. این

> حالت در دیگر مقترنات پیش نمی‌آید. و بدان که اگر حاصل‌ضرب نصف جذرها در خودش از درهم‌هایی که با مال بوده‌اند کمتر باشد، مسئله پاسخ نخواهد داشت. و اگر برابر درهم‌ها باشد، پس جذر مال درست نصف جذرها خواهد بود.

درواقع خوارزمی در اینجا برای اولین و آخرین‌بار دربارهٔ شرایط وجود و تعداد پاسخ برحسب مقدار $\Delta' = (b/۲a)^۲ - c/a$ بحث می‌کند. اگر $\Delta' < ۰$ معادله پاسخ (به تعبیر امروزی، ریشهٔ حقیقی) ندارد. اگر $\Delta' = ۰$ معادله یک ریشه (به تعبیر امروزی، ریشهٔ مضاعف) برابر با $b/۲a$ دارد و اگر $\Delta' > ۰$ آنگاه هر دو ریشهٔ معادله مثبت و از نظر خوارزمی پذیرفتنی خواهند بود، زیرا $b/۲a > \sqrt{(b/۲a)^۲ - c/a}$.

اما همچنان‌که خوارزمی تأکید کرده است دو نوع دیگر مقترنات همواره «یک و تنها یک پاسخ مثبت» دارند. زیرا در این دو حالت $\Delta' = (b/۲a)^۲ + c/a$ حاصل جمع دو مقدار مثبت و درنتیجه همواره بزرگ‌تر از صفر خواهد شد. در نوع چهارم چون $\sqrt{(b/۲a)^۲ + c/a} > b/۲a$ پس پاسخ پذیرفته‌شدهٔ نوع چهارم یعنی $\sqrt{c/a + (b/۲a)^۲} - b/۲a$ همواره مثبت و پاسخ پذیرفته‌نشدهٔ نوع ششم یعنی $b/۲a - \sqrt{c/a + (b/۲a)^۲}$ همواره منفی است. منفی بودن پاسخ پذیرفته‌نشدهٔ نوع چهارم یعنی $-\sqrt{c/a + (b/۲a)^۲} - b/۲a$ و مثبت بودن پاسخ پذیرفته‌شدهٔ نوع ششم یعنی $b/۲a + \sqrt{(b/۲a)^۲ + c/a}$ نیز روشن است.

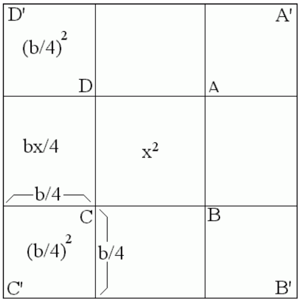
۲.۲ اثبات هندسی درستی دستور محاسبهٔ ریشهٔ مقترنات

در ریاضیات قدیم، هندسه تنها علم برهانی به شمار می‌رفت و در شاخه‌های دیگر ریاضیات، اگر بنابر اثبات قضیه‌ای بود، آن قضیه به‌ناچار باید با روشی هندسی ثابت می‌شد. پس خوارزمی می‌کوشد تا درستی دستورهای یافتن ریشهٔ مقترنات را به‌یاری هندسه ثابت کند. پس برای هریک از این سه نوع، «صورتی» می‌آورد که دلیل نصف کردن جذرها (تقسیم ضریب x بر ۲) را روشن سازد [۸، ص ۱۰۹-۱۲۱].

۱) اثبات درستی دستور محاسبهٔ ریشهٔ معادلهٔ $x^۲ + bx = c$.[۱]

فرض می‌کنیم که طول ضلع مربع مفروض $ABCD$ (شکل ۱) ریشهٔ معادله باشد. مساحت این مربع $x^۲$ خواهد بود. اضلاع این مربع را از هر دو طرف به اندازهٔ $b/۴$ امتداد می‌دهیم. چهار

[۱] خوارزمی در کتاب خود این اثبات را برای حالت خاص $b = ۱۰$ و $c = ۳۹$ آورده، اما ازآنجاکه روش او مستقل از ضرایب معادله است، در اینجا مسئله در حالت کلی ثابت شده است. البته شکل مسئله متناسب با اعدادی که خوارزمی در این حالت خاص داده رسم شده است.



شکل ۱. روش اول برای اثبات دستور ریشهٔ نوع چهارم معادلات استاندارد

مربع، هریک با مساحت $b^۲/۴$، درگوشه‌های شکل ۱ و چهار مستطیل با مساحت $bx/۴$ در بالا، پایین، چپ، و راست مربع مرکزی تشکیل می‌شود. دراین‌صورت داریم

$$x^۲ = bx + c, \qquad S_{AB'C'D'} = (x + ۲ \times \frac{b}{۴})^۲ = (x + \frac{b}{۲})^۲$$
$$S_{AB'C'D'} = x^۲ + ۴(\frac{b}{۴})x + ۴(\frac{b}{۴})^۲ = (x^۲ + bx) + (\frac{b}{۲})^۲$$

در رابطهٔ سوم به ترتیب به جای مقادیر $x^۲ + bx$ و $S_{AB'C'D'}$ معادل آن‌ها را با استفاده از روابط اول و دوم قرار می‌دهیم. درنتیجه خواهیم داشت

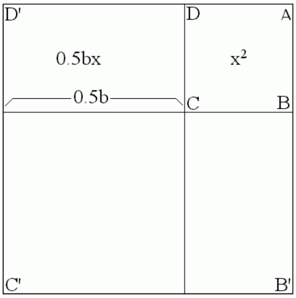
$$(x + \frac{b}{۲})^۲ = c + (\frac{b}{۲})^۲ \Longrightarrow x = \sqrt{c + (\frac{b}{۲})^۲} - \frac{b}{۲}.$$

راه دیگری برای اثبات درستی روش حل این معادله از این قرار است: بازهم فرض می‌کنیم که طول ضلع مربع مفروض $ABCD$ (شکل ۲) پاسخ معادله باشد. اضلاع AD و AB را به اندازهٔ $b/۲$ امتداد می‌دهیم تا نقاط D' و B' به دست آید. داریم

$$x^۲ = bx + c, \qquad S_{AB'C'D'} = (x + \frac{b}{۲})^۲$$
$$S_{AB'C'D'} = x^۲ + ۲(\frac{b}{۲})x + (\frac{b}{۲})^۲ = (x^۲ + bx) + (\frac{b}{۲})^۲$$

در رابطهٔ سوم به ترتیب به جای مقادیر $x^۲ + bx$ و $S_{AB'C'D'}$ معادل آن‌ها را با استفاده از روابط اول و دوم قرار می‌دهیم. خواهیم داشت

$$(x + \frac{b}{۲})^۲ = c + (\frac{b}{۲})^۲ \Longrightarrow x = \sqrt{c + (\frac{b}{۲})^۲} - \frac{b}{۲}.$$



شکل ۲. روش دوم برای اثبات دستور ریشهٔ نوع چهارم معادلات استاندارد

۲) اثبات درستی دستور محاسبهٔ ریشهٔ معادلهٔ $x^۲ + c = bx$.[۱]

فرض می‌کنیم که طول ضلع مربع مفروض $ABCD$ (شکل ۳) پاسخ معادله باشد. نقاط C' و D' را روی امتداد پاره‌خط‌های BC و AD چنان انتخاب می‌کنیم که $AD' = BC' = bx$. نقاط F و E را به ترتیب وسط دو پاره‌خط AD' و BC' انتخاب می‌کنیم. سپس مربع $GEC'J$ را روی پاره‌خط EC' می‌سازیم. مربع $GFIH$ را نیز روی پاره‌خط GF می‌سازیم. داریم

$$GF = GE - FE = \frac{b}{۲} - x, \qquad S_{GFIH} = |GF|^۲ = (\frac{b}{۲} - x)^۲. \qquad (۱.۲)$$

پس اگر بتوانیم مساحت این مربع را برحسب b و c بیابیم با جذر گرفتن از آن به‌سادگی مقدار x مشخص خواهد شد. از روی شکل واضح است که

$$S_{GFIH} = S_{GEC'J} - (S_{FEC'D'} + S_{HID'J}). \qquad (۲.۲)$$

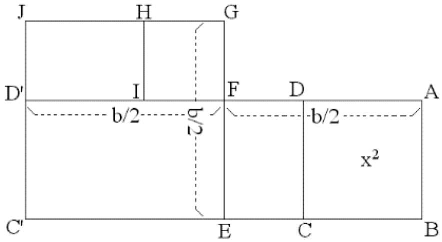
ازطرف‌دیگر، چون $HJ = DC = x$ و $HI = FD = GF$ پس

$$((HI = FD = GF) \wedge (HJ = DC = x)) \Longrightarrow S_{HID'J} = S_{DCEF}. \qquad (۳.۲)$$

از روابط (۲.۲) و (۳.۲) نتیجه می‌گیریم

$$S_{GFIH} = S_{GEC'J} - (S_{FEC'D'} + S_{DCEF}) = S_{GEC'J} - S_{DCC'D'} \qquad (۴.۲)$$

[۱] درکتاب خوارزمی $b = ۱۰$ و $c = ۲۱$ اما در اینجا مسئله در حالت کلی ثابت شده است.



شکل ۳. اثبات دستور ریشهٔ نوع پنجم معادلات استاندارد

و

$$S_{GEC'J} = |GE|^۲ = (\frac{b}{۲})^۲, \quad (۵.۲)$$
$$S_{DCC'D'} = S_{ABC'D'} - S_{ABCD} = \overline{AD'} \cdot \overline{AB} - |AB|^۲ = bx - x^۲ = c.$$

از روابط (۳.۲)، (۴.۲)، و (۵.۲) نتیجه می‌شود

$$S_{GFIH} = S_{GEC'J} - S_{DCC'D'} = (\frac{b}{۲})^۲ - c. \quad (۶.۲)$$

از روابط (۱.۲) و (۶.۲) نتیجه می‌شود

$$(\frac{b}{۲} - x)^۲ = (\frac{b}{۲})^۲ - c \Longrightarrow \frac{b}{۲} - x = \sqrt{(\frac{b}{۲})^۲ - c}. \quad (۷.۲)$$

و از آنجا به دست می‌آید

$$x = \frac{b}{۲} - \sqrt{(\frac{b}{۲})^۲ - c}.$$

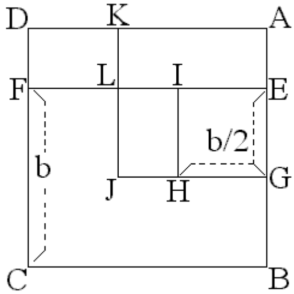
با توجه به اینکه عبارت $b/۲ - x$ در اثبات هندسی فوق برابر اندازهٔ پاره‌خط GF است مقدار آن همیشه مثبت است. پس در رابطهٔ (۷.۲) نمی‌توان مقدار $-\sqrt{(b/۲)^۲ - c}$ را برای آن پذیرفت.

یک پاسخ مسئله عبارت است از $AF - DF$ و پاسخ دیگر $AF + FI$ که معنای آن همان رابطهٔ $x_۱, x_۲ = b' \pm \sqrt{b'^۲ - c}$ خواهد بود که در آن $b' = b/۲$. اما از روی این شکل نمی‌توان ثابت کرد که $AF + FI$ (برابر $x = b' + \sqrt{b'^۲ - c}$) نیز یکی از پاسخ‌های مسئله است.

۳) اثبات درستی دستور محاسبهٔ ریشهٔ معادلهٔ $x^۲ = bx + c$.[۱]

فرض می‌کنیم که طول ضلع مربع مفروض $ABCD$ پاسخ معادله باشد (شکل ۴). پاره‌خط‌های BE و CF را برابر b جدا می‌کنیم. نقطهٔ G را وسط BE اختیار می‌کنیم. مربع $EGHI$ را روی

[۱] در کتاب خوارزمی $b = ۳$ و $c = ۴$ اما در اینجا مسئله در حالت کلی ثابت شده است.



شکل ۴. اثبات دستور ریشهٔ نوع ششم معادلات استاندارد

پاره خط EG و مربع $AGJK$ را روی پاره خط AG می‌سازیم. از روی شکل واضح است که

$$S_{EBCF} = \overline{FC} \cdot \overline{CB} = bx, \quad S_{AEFD} = S_{ABCD} - S_{EBCF} = x^{۲} - bx = c$$
$$S_{AGJK} = |AG|^{۲} = |AB - GB|^{۲} = (x - \frac{b}{۲})^{۲}.$$

ازطرف‌دیگر، از روی شکل داریم

$$S_{AGJK} = S_{AELK} + S_{IHJL} + S_{EGHI}.$$

از دو معادلهٔ اخیر و با توجه به اینکه $S_{EGHI} = |EG|^{۲} = (b/۲)^{۲}$ نتیجه می‌گیریم که

$$(x - \frac{b}{۲})^{۲} = S_{AELK} + S_{IHJL} + (\frac{b}{۲})^{۲}. \qquad (۸.۲)$$

اما از سوی دیگر داریم

$$KD = AD - AK = AB - GB = IH = \frac{b}{۲}, \quad KL = HJ = AE.$$

از دو رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که $S_{KLFD} = S_{IHJL}$ و درنتیجه

$$S_{AELK} + S_{IHJL} = S_{AELK} + S_{KLFD} = S_{AEFD} = c.$$

حالا $S_{AELK} + S_{IHJL}$ را از این رابطه محاسبه و در معادلهٔ (۸.۲) می‌گذاریم

$$(x - \frac{b}{۲})^{۲} = c + (\frac{b}{۲})^{۲} \Longrightarrow x - \frac{b}{۲} = \sqrt{c + (\frac{b}{۲})^{۲}}$$

و از آنجا خواهیم داشت

$$x = \frac{b}{۲} + \sqrt{c + (\frac{b}{۲})^۲}$$

و این همان چیزی بود که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۳ پیشینهٔ معادلات جبری پیش از خوارزمی

اشاره به پی‌ریزی علم جبر در کتاب خوارزمی بدین معنی نیست که آنچه امروزه معادلات جبری نامیده می‌شود تا پیش از خوارزمی سابقه نداشته است. دستور حل معادلات درجهٔ اول در مصر باستان شناخته‌شده بود و بابلی‌ها از حدود ۱۷۰۰ پیش از میلاد، نه‌تنها راه حل معادلات درجهٔ اول و دوم را می‌شناختند، که برخی از معادلات از درجات بالاتر و حتی حالات خاصی از معادلات درجهٔ هشتم را حل می‌کردند [۲۰]. وان در واردن در [۳۳] حتی از سوابق این‌گونه مسائل در دوران پیش از تاریخ سخن گفته است.

شماری انگشت‌شمار از پژوهشگران اروپایی با وضع اصطلاحاتی چون «جبر هندی» و «جبر یونانی»/«جبر هندسی» کوشیده‌اند در بنیان‌گذاری جبر توسط خوارزمی و اصالت الجبر و المقابلهٔ او تردید پیش آورند. پیشینهٔ این تردیدها دست‌کم به سدهٔ ۱۶ م باز می‌گردد [۲۵، ص ۶۱].

جبر هندی

در ۱۸۷۸ م، لئون روده کوشید آثار جبری مسلمانان و به‌ویژه جبر خوارزمی را در قیاس با آنچه امروزه «جبر هندی» یا «جبر یونانی» نامیده می‌شود ناچیز بنمایاند. او در این راه پیشرفتی شگرف در علم جبر به ریاضی‌دانان هندی، دست‌کم از اواخر سدهٔ ۵ م نسبت داد و این پیشرفت‌ها را «احتمالاً الهام‌گرفته از ریاضیات یونان و کلده» انگاشت [۳۰، ص ۵–۹۸]؛ اما رشدی راشد، پژوهشگر نامدار تاریخ ریاضیات، با دلایلی محکم تأثیر این «به‌اصطلاح جبر هندی» را بر الجبر و المقابلة خوارزمی ردّ کرده است [۲۵، ص ۶۴–۷۹].

جبر هندسی/یونانی

کاربرد روش‌هایی در برخی قضایای اصول اقلیدس و به‌ویژه در مخروطات یا مقاطع مخروطی آپولونیوس، شماری از تاریخ‌نگاران ریاضیات را به وجود نوعی از جبر در میان یونانیان، یا به

تعبیر زویتن[1]، ریاضی‌دان دانمارکی، «جبر هندسی» معتقد ساخته است. برای نمونه برخی ترسیمات هندسی مقالهٔ ششم اصول اقلیدس، «اگر» (و البته اگر!) به زبان جبری ترجمه شوند، به حل معادلاتی از درجهٔ یک و دو منجر می‌شوند. این کار مستلزم باور به آن است که هر طولی را می‌توان با عددی نشان داد؛ اما در سنت یونانی هرچند هر عدد را با طولی نمایش می‌دادند اما به مُجاز بودن عکس این عمل باور نداشتند (برای تفصیل بیشتر نگاه کنید به [۱۷، ص ۴۶۷]؛ [۱۸، ص ۵۷۸-۵۷۹]).

خوارزمی، گرچه اصول اقلیدس را قاعدتاً به‌واسطهٔ ترجمهٔ عربی حجاج بن یوسف بن مطر می‌شناخته است [۲۵، ص ۳۱] اما نمی‌توان جبر او را ملهم از اصول دانست. زیرا اقلیدس و دیگر ریاضی‌دانان یونانی هرگز نکوشیدند از قضایای پیشتر یادشده، تعبیری جبری به‌دست دهند. ازاین‌گذشته، در اصول اقلیدس واژگانی نظیر واژگان خوارزمی یا مفهوم معادله، به صورت یادشده در الجبر و المقابلهٔ او، نیامده است. با کنار رفتن فرض وجود «جبر هندسی» می‌توان گفت که علم جبر در دورهٔ یونانی ناشناخته بوده است.

بی‌جهت نیست که وان در واردن به‌رغم اختصاص فصلی به «جبر یونانی» در [۳۳، ص۷۰-۹۶] بازهم ترجیح داده است نام خوارزمی را چونان آغازگر جبر به عنوان رشته‌ای مستقل در عنوان کتاب مشهور خود تاریخ جبر: از خوارزمی تا امی نوتر [۲۱] یاد کند زیرا دستاورد این تمدن‌ها تنها شماری از مسائل عددی است که گرچه روش حلّ آن‌ها در مورد معادلات درجهٔ اول و دوم کلیت دارد اما در مورد مسائل عددی خاص بیان می‌شود و روش به‌دست آمدن آن‌ها معلوم نیست و در مورد معادلات بالاتر از درجهٔ دوم، دستورهای حل تنها در مورد مسائل خاص کاربرد دارند؛ [۱۷، ص ۴۶۷] و [۱۸، ص ۵۷۸].

چنان‌که پیشتر آمد، خوارزمی، در آغاز کتاب الجبر و المقابلة خود، موجودات جبری، عملیات جبری، و نیز صورت‌های شش‌گانهٔ عمومی معادلات درجهٔ اول تا سوم را تعریف می‌کند و به نظر راشد تمایز آشکار اثر خوارزمی از جدول‌های بابلی (حاوی حل معادلات درجهٔ اول و دوم) و اریثمتیکای دیوفانتوس (نک ادامهٔ مقاله) از همین‌جا آغاز می‌شود. زیرا کار از مجموعه‌ای از مسائل نمونهٔ منفرد فراتر می‌رود و به تلاشی موفق برای حل هر معادلهٔ درجهٔ اول یا دوم می‌رسد [۲۶، ص ۱۱-۱۲].

راشد در مقدمهٔ فرانسوی بر ویراست متن عربی الجبر و المقابلة خوارزمی، بخشی با عنوان «سنت حساب در سدهٔ ۸م/۲ق و جبر خوارزمی» را با طرح این پرسش آغاز کرده است: «آیا می‌توان برای جبر آغازی در نظر گرفت؟ اگر آری، این آغاز کدام است؟» [۲۵، ص ۱۱]. پاسخ راشد به این

[1]Hieronymus Georg Zeuthen (1839-1920)

پرسش مهم در عنوان همین کتاب، یعنی خوارزمی: آغاز جبر [۲۵]، آمده است.

۱.۳ دیوفانتوس، اریثمتیکا و علم جبر

از میان همهٔ آثار ریاضی نوشته شده تا پیش از روزگار خوارزمی، کتاب اریثمتیکای دیوفانتوس (احتمالاً از نیمهٔ دوم سدهٔ ۳ م)، ریاضی‌دان یونانی‌زبان اسکندرانی شایستهٔ توجه و بررسی ویژه است (دربارهٔ این ریاضی‌دان، آثارش، و معادلات دیوفانتی نگاه کنید به [۱۴، ص۳۸۷–۳۹۶])؛ زیرا یکی از پرسش‌های مورد توجه تاریخ‌نگاران ریاضیات در سدهٔ ۱۹م آن بود که آیا در اریثمتیکا می‌توان نشانه‌هایی از آغاز علم جبر یافت؟ [۲۷، ص ۹۹]. نسلمان [۲۴]، هیث [۲۲]، کلاین [1]، و باشماکوا[2] گمان داشتند که اریثمتیکای دیوفانتوس منبع الهام خوارزمی بوده است یا دست‌کم هر دو کتاب به سنتی ریشه گرفته از ریاضیات بابلی تعلق داشته‌اند [۲۵، ص ۶۱]؛ به‌ویژه با توجه به اینکه در منابع کتاب‌شناسی دورهٔ اسلامی کتابی با عنوان صناعة الجبر به دیوفانتوس منسوب است که تا پیش از کشف دست‌نویس یگانهٔ آن در ۱۳۵۰ شمسی در ایران[۳]، این نظر را بسیار تقویت می‌کرد. از گزارش‌های دورهٔ اسلامی حتی معلوم نبود که این روایت عربی، ترجمهٔ اریثمتیکای دیوفانتوس است و پس از روشن شدن این ارتباط، بازهم این گمان پیش آمد که چه‌بسا دست‌کم شماری از ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی، قرن‌ها پیش از تاریخ‌نگاران اروپایی ریاضیات، به وجود علم جبر در دورهٔ یونانی باور داشته‌اند و مترجم عربی نیز گویا به پشتوانهٔ همین باور، در عنوان و متن کتاب بارها واژهٔ جبر و اصطلاحات جبری را به کار برده باشد.

ابن ندیم هنگام یادکرد دیوفانتوس، به گزارشی بس کوتاه بسنده کرده است: «ذیوفنطس یونانی اسکندرانی و از کتب اوست: کتاب صناعة الجبر»[۴، ص ۲۶۹]. قِفطی، گذشته از به‌کارگیری واژه‌های ستایش‌آمیز، تنها اطلاعی که بر سخن ابن ندیم افزوده، تصریح بر ترجمهٔ کتاب به عربی است: «یونانی اسکندرانی، فاضلی است کامل، در زمان خود مشهور، و کتاب صناعة الجبر، از تصانیف وی، کتابی نامدار است. آن را به عربی نقل کرده‌اند و بنای عمل این صناعت بر آن است و هر که در آن نظر کند، دریائی بیند در آن فنّ»[۱۱، ص ۱۸۴]. ابن ابی اُصَیبَعه ضمن یادکرد احوال و آثار قُسطا بن لوقا بعلبکی (فعال در نیمهٔ دوم سدهٔ ۹ م)، از این کتاب چنین یاد کرده است: «کتاب فی ترجمة دیوفنطس فی الجبر و المقابلة» [۱، ج ۱، ص ۲۴۵] و بدین‌ترتیب قسطا را مترجم کتاب

[۳] گلچین معانی در ضمن جلد هشتم فهرست کتابخانهٔ آستان قدس رضوی [۱۶] دست‌نویسی از مقالات چهارم تا هفتم این ترجمه را شناساند.

[1] J. Klein [2] Bashmakova

دیوفانتوس به شمار آورده است در حالی که ابن ندیم و به پیروی از او قفطی هنگام برشمردن آثار قسطا، به یادکرد آثار تألیفی او بسنده کرده‌اند [۴، ص ۲۹۵] : «و له من الکتب سوی ما نقل و فسر و شرح . . .» [۱۱، ص ۲۶۲–۲۶۳].

ترجمهٔ کتاب دیوفانتوس توسط قسطا بن لوقا، یعنی دست‌کم نیم سده پس از روزگار خوارزمی، فرض بهره‌گیری خوارزمی از کتاب دیوفانتوس را کنار می‌زند (برای آگاهی از روزگار فعالیت خوارزمی و تاریخ تقریبی نگارش الجبر و المقابلة نگاه کنید به [۱۳، ص ۹۲–۹۴]). رشدی راشد، مصحح متن عربی صناعة الجبر و مترجم آن به زبان فرانسوی، در چندین اثر خود بارها بر این نکته پای فشرده است که اریثمتیکا/صناعة الجبر نه یک کتاب جبری و نه حتی کتابی در جبر هندسی است. به باور راشد، ترجمهٔ قسطا سخت تحت تأثیر زبان جبری خوارزمی و به‌عبارت‌دیگر کاربرد واژهٔ جبر در عنوان و متن ترجمهٔ عربی و نیز کاربرد شماری از واژگان این فن در متن ترجمه کار مترجم است و او با توجه به واژگان رایج در میان جبردانان دورهٔ اسلامی، هنگام ترجمهٔ اریثمتیکا، واژگان جبری روزگار خود را، بی‌آنکه مابه‌ازایی در اصل یونانی داشته باشد، در ترجمهٔ خود گنجانده است. به نظر راشد، ساختار و روش اریثمتیکا/صناعة الجبر و الجبر و المقابلة و روش نویسندگان آن‌ها تفاوت‌های اساسی دارند [۲۵، ص ۶۱–۶۴]. دیوفانتوس برخلاف خوارزمی و جبردانان پس از او، در پی یافتن همهٔ اعداد صادق در یک مسئله نبوده است بلکه همواره مسئلهٔ او یافتن عددی است که چنین و چنان باشد؛ البته دیوفانتوس در ضمن حل مسائل عددی، از بعضی ابزارها و روش‌ها ـ که بعدها در جبر به کار رفت ـ مانند تغییر متغیر، نشانه‌های اختصاری، و ضرب و تقسیم توان‌های مجهول تا درجهٔ نهم بهره برده است اما باز هم نمی‌توان محتوای اریثمتیکا را «جبر» انگاشت؛ [۱۹، ص ۲۰]، [۲۸، ص vii]، و [۲۹، ص ۳–۳۰].

دربارهٔ منابع بخش مساحت کتاب خوارزمی نیز بحث‌های بسیار درگرفته است که البته ربطی به محتوای جبری کتاب خوارزمی ندارد (برای گزارش تفصیلی این بحث‌ها و مشخصات منابع مرتبط با آن‌ها نگاه کنید به [۱۲، ص ۷۳، ۷۴، ۷۸–۹۵]؛ نیز برای چکیدهٔ این بحث‌ها نگاه کنید به [۱۳، ص ۱۰۰]).

۴ خوارزمی، عبدالحمید بن واسع و بنیان‌گذاری دانش جبر

خوارزمی هیچ گاه به‌صراحت خود را بنیان‌گذار دانش جبر و مقابله ندانسته، اما در دیباچهٔ الجبر و المقابلة، چنین آورده است:

[مرد دانشور یکی از این سه است]: یا کسی است که در دست یافتن به نایافته‌ها بر دیگران پیشی می‌گیرد و این دانش را از خود به یادگار می‌گذارد. یا کسی است که آنچه را پس از آن پیشگامان همچنان دشوار و پیچیده برجای مانده است روشن می‌سازد و در آن [علم]، روش‌های مبهم را روشن، دشوار را آسان و دور را نزدیک می‌گرداند. یا کسی است که در شماری از آثار یک علم اشکالات و آشفتگی‌هایی می‌بیند. پس آنها را اصلاح می‌کند و سامان می‌بخشد در حالی که با خوشبینی به کار نویسنده می‌نگرد و بر او خرده نمی‌گیرد و از یافتن اشتباه دیگران بر خود نمی‌بالد [۸، ص ۹۵].

پیداست که خوارزمی خود را دانشوران دستهٔ نخست می‌داند زیرا از چگونگی طرح مطالب در الجبر و المقابله او کاملاً پیداست که سرگرم پایه‌گذاری دانشی جدید است و به همین مناسبت پیوسته می‌کوشد مفاهیم جدید و ابداعی خود را با تمثیل و مقایسهٔ آن‌ها با مفاهیم جاافتاده و آشنا (مانند مقایسهٔ چندجمله‌ای‌ها با اعداد چند رقمی) به دیگران بشناساند.

از میان دانشوران دورهٔ اسلامی، تنها کسی که فردی جز محمد بن موسی خوارزمی را بنیان‌گذار دانش جبر به شمار آورده ریاضی‌دانی به نام ابوبَرزه فضل بن محمد بن عبدالحمید بن واسع ترک خُتَلی است که گویا در اواخر سدهٔ ۳ یا اوائل سدهٔ ۴ ق می‌زیسته و هم‌روزگار ابوکامل شجاع بن اَسلم، ریاضی‌دان نامدار مصری، بوده است (دربارهٔ ابوبرزه و آثارش نگاه کنید به [۲۳، ص ۶۴۴–۶۴۵]). ابوبرزه بر آن بود که نیای او، عبدالحمید بن واسع، بنیان‌گذار دانش جبر بوده است. اما این ادعا هرگز در میان ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی پذیرفته نشد و گذشته از آنکه ابوکامل شجاع بن اسلم به‌صراحت این مسئله را رد کرده است، دیگر ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی و حتی مورخانی چون ابن خلدون همواره خوارزمی را بنیان‌گذار علم جبر دانسته‌اند و پژوهشگران تاریخ ریاضیات نیز آن را پذیرفته‌اند مگر آیدین سائلی، پژوهشگر اهل ترکیه، که ضمن تأکید ویژه بر واژهٔ «ترک» در نسب عبدالحمید، کوشیده است در این مورد تردید افکند ([۳۱، ص ۸۷–۹۶]).

روزگار فعالیت ابوالفضل (یا ابومحمد) عبد الحمید بن واسع بن ترک خُتَلی حاسب، احتمالاً نیمهٔ نخست سدهٔ ۳ق است؛ [۴، ص ۲۸۱]، [۱۱، ص ۲۳۰، ۲۵۴]، و [۳۲، ش ۳۵]. ابن ندیم از دو اثر وی، یکی الجامع فی الحساب (در شش کتاب) و دیگری کتاب المعاملات، یاد کرده است. قفطی بی‌آنکه از کتاب اخیر یاد کند، از کتابی دیگر موسوم به نوادر الحساب و خواص الاعداد یاد کرده است؛ اما همهٔ این آثار از میان رفته‌اند و امروزه تنها دو نسخهٔ خطی بسیار شبیه به هم، از قطعهٔ

کوچک بی‌نامی دربارهٔ معادلات جبری درجهٔ دوم از وی بر جای مانده که آیدین سائلی، ویراستار متن عربی این قطعه و مترجم آن، براساس یادداشت پایانی دو نسخه، آن را الضرورات فی المقترنات من کتاب الجبر و المقابلة نامیده است [۳۱، ص ۷۹].

دربارهٔ دعوی ابوبرزه مبنی‌بر تقدّم جدش بر خوارزمی در بنیان‌گذاری علم جبر و مقابله، یگانه مأخذ ما سخنان ابوکامل شجاع بن اسلم ریاضی‌دان نامدار مصری، در دو اثر خود، کمال الجبر و تمامه و الزیادة فی أصوله و الوصایا بالجبر و المقابلة است که متأسفانه از میان رفته‌اند و تنها به‌واسطهٔ گزارش حاجی خلیفه که گاه بخشی از مقدمهٔ آثار کهن را نقل می‌کند، از آن آگاهی داریم (برای آگاهی مختصر از سهم ابوکامل در مبحث معادلات جبری به [۱۰] مراجعه کنید). او در کشف الظنون سخن ابوکامل را چنین آورده است:

> ابوکامل شجاع بن اسلم در کتاب الوصایا بالجبر و المقابلة گوید: کتابی معروف به کمال الجبر و تمامه و الزیادة فی أصوله تألیف کردم و در مقدمهٔ کتاب دوم خود (یعنی کمال الجبر یا الوصایا؟) دلیل خود را در پیشی جستن خوارزمی در علم جبر و مقابله بر دیگران، بیان کردم. و ادعای ابو برده [بخوانید: ابوبرزه] جاعل را که این تقدم را به عبدالحمید، که گفته می‌شود نیای اوست، نسبت می‌دهد، رد کردم و کم دانشی او را در آنچه که به جدش نسبت داده است باز نمودم و چنان دیدم که کتابی در وصیت بر اساس قوانین جبر و مقابله بنویسم [۶، ج ۵، ص ۶۷-۶۸].

حاجی خلیفه هنگام اشاره به کتاب الوصایا بالجذور ابوکامل (که به نظر می‌رسد نام دیگر کتاب الوصایا بالجبر والمقابلة باشد) خلاصه‌ای از این سخنان را آورده اما از ابوبرزه نام نبرده است [۶، ج ۵، ص ۱۶۸].

ابوکامل در آغاز الجبر و المقابلة خود نیز، بی‌یادکرد ابوبرزه و عبدالحمید، بر پیشگامی خوارزمی در نگارش کتابی در جبر، دسته‌بندی معادلات درجه اول و دوم، و نیز ابداع «ضروب» یا «اجناس» سه‌گانهٔ عدد، شیء، و مال اشاره کرده و خود را کامل‌کنندهٔ پژوهش‌های خوارزمی دانسته است ([۵، ص ۲۴۳، ۲۴۵]؛ مقایسه کنید با [۶، ج ۲، ص ۵۸۵]).

سنان بن ابی الفتح، شارح آثار خوارزمی نیز در مقدمهٔ کتاب فیه الکعب والمال والاعمال المتناسبة تنها به کتاب الجبر و المقابلة خوارزمی اشاره کرده‌است [۹، گ ۹۵ ر] و ابن خلدون [۳، ص ۳۸۳] در مقدمهٔ مشهور خود بر پیشگامی خوارزمی در این رشته تصریح دارد.

محمد بن احمد خزاعی نیز در آغاز شرح خود بر الجبر و المقابلة خوارزمی (پایان‌یافته در رمضان ۶۰۷ ق/۱۲۱۱م)، داستانی به‌گمان عامیانه اما جالب‌توجه از فردی به نام فقیه ابوبکر بن محمد آورده است که براساس آن امیر المؤمنین علی (ع) علم جبر و مقابله را در پنج روز از «گروهی از ایرانیان دانای به علم جبر و مقابله» آموخت و از آن پس، این علم شفاهاً در میان مردم رواج یافت اما کم‌کم به فراموشی سپرده شد تا آن که مأمون عباسی که جویای این دانش بود، هیچ کس را نیافت مگر «شیخ ابوبکر [بخوانید: ابوعبدالله] محمد بن موسی خوارزمی»، پس از او خواست تا کتابی دربارهٔ آن بنویسد و خوارزمی نیز اصول جبر و مقابله را در کتابی فراهم آورد. خزاعی با پذیرش این روایت عامیانه، هرچند همچنان خوارزمی را نخستین نگارندهٔ کتابی درباب جبر در دورهٔ اسلامی به شمار آورده، اما نقش او را از پایه‌گذاری این علم به احیاءکنندهٔ سنتی کهن تقلیل داده است و این چنین است که نقش او را «تقیید علم» می‌داند؛ [۷، گ ۱۴۶ پ] و [۲، ۲۵۶]. اما خزاعی نیز به‌رغم داشتن چنین دیدگاهی، در شرح دیباچهٔ الجبر والمقابلة، آنجا که خوارزمی دانشوران را به سه دسته تقسیم می‌کند (یادشده در آغاز همین بخش از مقاله)، خوارزمی را از دانشورانی می‌داند که شایسته است در دو دستهٔ نخست جای گیرند. به گمان خزاعی، ازآنجاکه خوارزمی نخستین‌بار در روزگار اسلام این علم را «وضع» کرد درحالی‌که پیشتر کتابی در این باب نوشته نشده بود، در کنار کسانی چون اقلیدس و ابوحنیفه (که به گمان خزاعی، یکی بنیان‌گذار هندسه و دیگری پایه‌گذار فقه و هر دو نویسندهٔ نخستین آثار در رشتهٔ خود بوده‌اند) شایستهٔ حضور در دستهٔ نخست است و به لحاظ آنکه دشواری‌های حساب جبر و مقابله را آسان ساخت و روش‌های این علم را پس از آنکه از میان مردمان رخت بربسته بود روشن ساخت شایسته است در دستهٔ دوم دانشوران نیز جای گیرد [۷، گ ۱۴۷ پ].

مراجع

[۱] ابن ابی اصیبعه، احمد بن قاسم، عیون الانباء فی طبقات الاطباء، ویراستهٔ آگوست مولر، المطبعة الوهبیة، قاهره، ۱۲۹۹.

[۲] ابن تیمیه، احمد، الرد علی المنطقیین، بمبئی، ۱۹۴۹.

[۳] ابن خلدون، عبدالرحمان، المقدمة، دارالفکر، بیروت، بی‌تا.

[۴] ابن ندیم، محمد بن اسحاق، الفهرست، ویراستهٔ گوستاو فلوگل، لایپزیگ، ۱۸۷۱.

[۵] ابوکامل شجاع بن اسلم، الجبر و المقابلة، ویراستهٔ رشدی راشد، برلین–بوستون، ۲۰۱۲.

[۶] حاجی خلیفه، مصطفی بن عبدالله کاتب چلبی، کشف الظنون عن اسامی کتب و الفنون، تصحیح گوستاو فلوگل، لایپزیگ و لندن، ۱۸۳۵.

[۷] خزاعی، محمد بن احمد، شرح و تکملهٔ الجبر و القابلة خوارزمی، دست‌نویس شمارهٔ ۲۷۰۶ (گ ۱۴۶ ر–۲۸۱ پ)، کتابخانهٔ شهیدعلی پاشا.

[۸] خوارزمی، ابوعبدالله محمد بن موسی، الجبر و المقابلة، ویراستهٔ رشدی راشد، پاریس، ۲۰۰۷؛ همچنین نگاه کنید به [۲۵].

[۹] سنان بن ابی الفتح، کتاب فیه الکعب والمال والاعمال المتناسبة، دست‌نویس شمارهٔ ۲۶۰/۴ (گ ۹۵ ر–۱۰۵ ب)، دارالکتب قاهره.

[۱۰] صدیقی، کریم، ابو کامل ریاضیدانی هم‌طراز خوارزمی، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ **۲۲** (۱۳۷۸)، ۳۵-۴۷.

[۱۱] قفطی، علی بن یوسف بن ابراهیم، تاریخ الحکماء (اختصار زوزنی)، ویراستهٔ یولیوس لیپرت، لایپزیگ، ۱۹۰۳.

[۱۲] کرامتی، یونس، تاریخچهٔ خوارزمی‌پژوهی در غرب از ۱۱۲۶ تاکنون، بخش نخست: «الجبر و المقابله»، نقد کتاب ایران و اسلام، جلد ۱، شمارهٔ **۱-۲** (۱۳۹۳)، ۴۷-۱۱۰.

[۱۳] کرامتی، یونس، خوارزمی: زندگی‌نامه و ریاضیات، در دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، ج ۲۳، مرکز دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، تهران، ۱۳۹۶، ۹۱-۱۰۶.

[۱۴] کرامتی، یونس، دیوفانتوس، در دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، ج ۲۴، مرکز دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، تهران، ۱۳۹۸، ۳۸۷-۳۹۶.

[۱۵] کرامتی، یونس، نخستین گام‌های جبر (بررسی جبر و مقابلهٔ خوارزمی)، اهل قلم، تهران، ۱۳۸۰.

[۱۶] گلچین معانی، احمد، فهرست کتب خطی کتابخانه آستان قدس رضوی، جلد هشتم (شامل کتب ریاضی)، کتابخانه آستان قدس رضوی، مشهد، ۱۳۵۰.

[۱۷] معصومی همدانی، حسین، جبر ، در دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، ج ۱۷، مرکز دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، تهران، ۱۳۸۸، ۴۶۶-۴۷۹.

[۱۸] معصومی همدانی، حسین، جبر و مقابله، در دانشنامهٔ جهان اسلام، ج ۹، بنیاد دائرةالمعارف اسلامی، تهران، ۱۳۸۴، ۵۷۶-۵۹۵.

[۱۹] مقدمه بر صناعة الجبر دیوفانتوس، ویراستهٔ رشدی راشد، الهیئة المصریة العامة للکتاب، قاهره، ۱۹۷۵.

[۲۰] نویگه‌باور، اوتو، علوم دقیق در عصر عتیق، ترجمهٔ همایون صنعتی‌زاده، انتشارات علمی و فرهنگی، تهران، ۱۳۷۵.

[۲۱] وان در واردن، ب. ل.، تاریخ جبر: از خوارزمی تا امی نوتر، ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل و علیرضا جمالی، انتشارات مبتکران، تهران، ۱۳۷۶.

[22] Heath, T. L., *Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra*, Cambridge University Press, Cambridge, 1910.

[23] Karamati, Y., Abū Barza, in *Encyclopaedia Islamica*, vol. 10, 2008, 644-645.

[24] Nesselmann, G. H. F., *Die Algebra der Griechen nach den Quellen Bearbeitet*, G. Reimer, Berlin, 1842.

[25] Rashed, R., *Al-Khwārizmī: Le Commencement de l'Algèbre*, Albert Blanchard, Paris, 2007.

[26] Rashed, R., *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*, Springer, Berlin, 1994.

[27] Rashed, R., Les travaux perdus de Diophante (I), *Revue d'Histoire des Sciences*, **27** (1974), 97-122.

[28] Rashed, R., Les travaux perdus de Diophante (II), *Revue d'Histoire des Sciences*, **28** (1975), 3-30.

[29] Rashed, R., Houzel, C., *Les "Arithmétiques" de Diophante*, Lecture Historique et Mathématique, Scientia Graeco-Arabica 11, De Gruyter, Berlin-Boston, 2013.

[30] Rodet, L., L'algèbre d'al-Khârizmi et les méthodes indienne et grecque, *Journal Asiatique*, **11** (1878), 5-98.

[31] Sayılı, A., *Abdulhamid İbn Türk'ün Katışık Denklemerde Mantıki Zaruretler' Adlı Yazısı ve Zamanın Cebri* (Logical Necessities in Mixed Equations by 'Abd al Ḥamīd Ibn Turk and the Algebra of His Time), Türk Tarih Kurumu Basımevi, Ankara, 1962.

[32] Suter, H., *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*, B. G. Teubner, Leipzig, 1900.

[33] van der Waerden, B. L., *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer, Berlin-Heidelberg, 1983.

یونس کرامتی: دانشگاه تهران، دانشکدهٔ الهیات و معارف اسلامی، پژوهشکدهٔ تاریخ علم
رایانامه: ykaramati@ut.ac.ir

Farhang va Andishe-ye Riyazi
Volume 41, Number 71, Fall/Winter 2022, Pages 1–18
doi: 10.30504/mct.2022.1328.1925

The Foundation of Algebra in Medieval Islam

Y. Karamati[1]

Institute for the History of Science, University of Tehran, Iran

Abstract. Algebra, in its basic form, that is the classification and solution of linear and quadratic equations, was founded around 820 AD with the composition of the book *al-Jabr wa al-Maqabalah* by Mohammad ibn Musa Khwarizmi. He defined algebraic entities for the first time and introduced mathematical operations on these entities as algebraic operations. He classified linear and quadratic equations into "6 standard forms" and presented the conditions for the existence of the root of these equations, and also provided geometrical proofs for the correctness of these solutions. He showed that all linear and quadratic equations can be converted into these "6 standard forms" by algebraic operations, and he presented the general method of solving all linear and quadratic equations. Some European historians of mathematics have tried to doubt the foundation of algebra by Khwarizmi. Some others have considered Diophantus *Arithmetica* as the source of inspiration for Khwarazmi's Algebra, or at least both books as a continuation of the tradition rooted in Babylonian mathematics. But these views are not widely accepted today. In Medieval Islam, all the scholars agreed about the foundation of Algebra by Khwarizmi, and only a mathematician named Abu Barza considered his grandfather Abd al-Hamid ibn Wase‘ as the predecessor of Khwarizmi, although Abu Kamel Shuja‘ ibn Aslam strongly rejected this claim and others scholars of Medieval Islam have also emphasized the superiority of Khwarizmi.

Keywords: algebra, Mohammad ibn Musa Khwarizmi, al-Jabr wa al-Maqabalah, Abd al-Hamid ibn Wase‘, Abu Barza, Abu Kamel Shuja‘ ibn Aslam, Diophantus, Arithmetica
Article history: Recieved 7 June 2022; Accepted 27 July 2022

[1] ykaramati@ut.ac.ir

ISSN 1022-6443/© Iranian Mathematical Society