فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۱، شمارهٔ ۷۱ (پاییز و زمستان ۱۴۰۱) صص. ۹۷ تا ۱۰۵

آیا حساب متعیّن است؟

مرتضی منیری

چکیده. آیا حساب متعیّن و قطعی است؟ به‌عبارت‌دیگر، آیا به ازای هر حکمی در حسابِ اعداد طبیعی، دلیلی برای درستی یا نادرستی آن حکم وجود دارد؟ برای مثال، آیا شواهدی برای درستی یا نادرستی حدس گولدباخ وجود دارد حتی اگر ما از آن‌ها آگاه نباشیم؟ در وهلهٔ اول به نظر می‌رسد که پاسخ به‌وضوح مثبت است، اما ازکجا مطمئن باشیم؟ قضیهٔ ناتمامیت گودل در این مورد چه می‌گوید؟ مستقل بودن برخی احکام نظریهٔ مجموعه‌ها مانند اصل انتخاب و فرضیهٔ پیوستار چه ارتباطی با این موضوع دارد؟ در این مقاله به بررسی این پرسش‌ها می‌پردازیم. علاوه‌براین، تأثیر وجود امکانات نامتعارفی از قبیل ماشین‌های محاسبی که قادر به انجام تعدادی نامتناهی دستورالعمل در زمانی متناهی‌اند و همچنین دستگاه‌های اثباتی مجهز به قواعد نامتناهی را بر پاسخ این پرسش‌ها بررسی خواهیم کرد.

۱ بیان مسئله

آیا حساب متعیّن[1] است؟ به‌عبارت‌دیگر، آیا لزوماً هر حکمی در حساب، خودش یا نقیض آن، درست است؟ البته اگر به منطق کلاسیک معتقد باشیم، به نظر می رسد که پاسخ به‌وضوح مثبت است. اما منظور ما از متعیّن بودن معنای اصطلاحی این واژه است. در صورت متعیّن بودن می‌باید متناظر با هر حکمی در حساب، شواهد یا دلایلی مرتبط با جهان فیزیکی وجود داشته باشند که درستی یا نادرستی آن حکم حسابی را معلوم کنند. پس اگر شخصی ادعا کند که با نوعی ارتباط معنوی با عالم افلاطونی از درستی یا نادرستی احکام حسابی مطلع می‌شود، دلیلی بر متعیّن بودن حساب نیست.

عبارات و کلمات کلیدی: تعیّن، حساب، ابرماشین، دستگاه اثباتی نامتناهی
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۲/۳۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۶/۱۶

[1] determinate

doi: 10.30504/mct.2022.1286.1895

یک راه نشان دادن درستی یک حکم در حساب، اثبات آن در یک دستگاه اصل موضوعی موجه چون حساب مرتبهٔ اول پئانو[1]، PA، است (اطلاعات بیشتری دربارهٔ این دستگاه در [۲، ۳] آمده است). اگر درستی اصول پئانو را بپذیریم، نتایج آن‌ها را نیز باید بپذیریم. این فراتر از در نظر گرفتن حساب پئانو به عنوان دستگاهی نمادی و پذیرفتن قراردادی اصول آن است. وجود احکام حسابی مستقل از حساب پئانو، شاهدی بر نامتعیّن بودن حساب تلقی می‌شود. ازطرف‌دیگر، می‌دانیم که بنابر قضیهٔ اول ناتمامیت گودل[2]، هر دستگاه اثباتی معقول برای حساب، ناتمام است. پس اگر، برای مثال، دستگاه حساب پئانو را بپذیریم، به کمک آن نخواهیم توانست تکلیف درستی یا نادرستی همهٔ احکام مربوط به حساب را تعیین کنیم و، بنابراین، حساب متعیّن نخواهد بود.

البته قضیه‌های ناتمامیت گودل در مورد نظریه‌های اصل موضوعی مجموعه‌ها، چون ZF، نیز برقرارند و بنابراین می‌باید نظریهٔ مجموعه‌ها را نیز نامتعیّن بدانیم. اما نامتعیّن‌بودن حساب نسبت به نامتعیّن‌بودن نظریهٔ مجموعه‌ها کمتر مورد تردید بوده است. یک دلیلش این است که احکامی که قضیهٔ ناتمامیت گودل، مستقل‌بودن آن‌ها را بیان می‌کند، مانند جملهٔ راسر[3]، احکامی مصنوعی محسوب می‌شوند و درمقابل، احکام طبیعی مستقل و مشهوری، مانند اصل انتخاب و فرضیهٔ پیوستار، برای مجموعه‌ها وجود دارند. البته احکام ریاضی‌واری نیز وجود دارند که از PA مستقل‌اند، مانند آنچه از قضیه‌های مشهور پَریس–هرینگتن[4] نتیجه می‌شوند، و بنابراین شاید تأکید بر این تفاوت چندان موجه نباشد [۱۰، ص ۵]. نکته دیگر آنکه هنوز معلوم نیست که آیا شکل مرتبهٔ اول قضیهٔ آخر فرما در حساب پئانو اثبات‌پذیر است یا نه.

درهرحال، با توجه به اینکه اعداد طبیعی نسبت به مجموعه‌های نامتناهی اشیائی آشناتر برای شهود ما هستند، شاید بررسی این مسئله برای آن‌ها مهم‌تر باشد. حال، اگر حساب در کانون توجه ما باشد، پرسش این است که «آیا اصولاً شواهد پذیرفتنی و قطعی برای تعیین‌تکلیف درستی یا نادرستی هر حکم حسابی می‌تواند وجود داشته باشد؟» به وضوح این شواهد، در صورت وجود، یا ممکن است از ذهن ما انسان‌ها سرچشمه بگیرند و یا از جهان خارج. اما، به طور طبیعی، در اینجا دو محدودیت، یکی محدویت شناختی انسان و دیگری محدویت متافیزیکی، وجود دارد [۱۴، ص ۵، ۷]. محدودیت‌های متافیزیکی باعث محدود شدن بهره‌گیری ار اشیای انتزاعی مستقل از ما در جهت توضیح قطعی‌بودن احکام ریاضی می‌شود. پس پرسش این است که با در نظر گرفتن این محدودیت‌ها آیا توضیح تعیّن حساب ممکن است؟ این مسئله را «تعیّن علمی» می‌نامیم و هدف ما این است

[1] first-order Peano arithmetic [2] Gödel [3] The Rosser sentence [4] Paris-Harington

که معلوم کنیم آیا حساب تعیّن علمی دارد یا نه. برای این منظور، در ادامه، برخی امکانات خاص را بررسی می‌کنیم. از جملهٔ این امکانات، ابرماشین‌های محاسب و دستگاه‌های اثباتی نامتناهی هستند. امکان استفاده از این امکانات به‌ظاهر دست‌نایافتنی برای توجیه متعیّن‌بودن حساب را بررسی خواهیم کرد.

۲ ابرماشین‌ها و مسئلهٔ تعیّن حساب

در این بخش به ابرماشین‌های تورینگ[1] و استفادهٔ آن در مسئلهٔ تعیّن حساب می‌پردازیم. ماشین تورینگ یک ابزار محاسباتی ریاضی‌وار ساده است که اولین‌بار توسط آلن تورینگ در سال ۱۹۳۶ میلادی معرفی شد. مهم‌ترین جنبهٔ ماشین‌های تورینگ این است که برای حل هر مسئلهٔ محاسباتی، زمانی متناهی صرف می‌کنند. این زمان ممکن است به‌طور نجومی طولانی باشد، اما، درهرحال، هر ماشین تورینگ برای حل یک مسئلهٔ الگوریتمی زمانی متناهی در اختیار دارد و، درنهایت، پس از سپری شدن آن متوقف خواهد شد.

ازطرف‌دیگر، ماشین‌های تورینگ نامتناهی، که اخیراً ابداع شده‌اند، می‌توانند زمانی نامتناهی صرف حل یک مسئلهٔ الگوریتمی کنند [۷]. این ماشین‌ها قادرند بی‌نهایت (شمارا) عملیات محاسباتی را انجام دهند، البته برای این کار به زمانی نامتناهی و دست‌نیافتنی نیاز خواهند داشت. درعین‌حال، اخیراً شواهدی به دست آمده است که طبق آن فرض وجود ماشینی که به‌طور معمول توانایی کار در زمان نامتناهی داشته باشد، چندان غیرعلمی نیست. چنین امری را نظریهٔ نسبیت عام محتمل می‌کند. ایدهٔ اصلی در این است که اگر با سرعتی نزدیک به سرعت نور حرکت کنیم، گذر زمان کند و کندتر می‌شود و دراین‌صورت زمان کافی برای محاسبه‌های طولانی فراهم خواهد شد. این امکان استفاده از ابرماشین‌ها را فرضی معقول می‌سازد [۹، ص ۱۴]. منظور ما از ابرماشین تورینگ، ماشین تورینگ نامتناهی است که بی‌شمار عملیات محاسباتی را در زمانی متناهی انجام می‌دهد.

برای مثال، برای بررسی یک حکم عمومی چون فرضیهٔ گولدباخ[2]، یک ابرماشین می‌تواند گام‌به‌گام جلو رود و بررسی کند که آیا هر نمونه از این حکم به ازای n، یعنی $G(n)$، به ازای هر n درست است یا نه. یک ماشین محاسب معمولی نیز می‌تواند چنین کاری را انجام دهد اما، برخلاف یک ابرماشین، برای این منظور زمانی نامتناهی نیاز خواهد داشت. با استقرای ساختاری روی

---
[1] supertask Turing machines [2] Goldbach’s conjecture

فرمول‌ها، می‌توان نشان داد که در اینجا حتی می‌توان G را با هر فرمول حسابی دیگر، که قابل بیان در زبان حساب پئانو باشد، تعویض نمود [۵، ص ۱۶۳].

البته، درحال‌حاضر، امکان وجود چنین دستگاه‌های محاسباتی محل بحث‌ها و اختلاف‌های بسیار است و نیاز به زمان است تا این موضوع کاملاً روشن شود. در ادامه، بحث ما مبتنی‌بر فرض پذیرش امکان وجود چنین ماشین‌های محاسب ویژه‌ای خواهد بود. آیا استفاده از ابرماشین‌ها، درنهایت می‌تواند نشان دهد که حساب متعیّن است؟ برای مثال، آیا وجود یک ابرماشین که قادر به بررسی همهٔ موارد فرضیهٔ گولدباخ در زمان متناهی باشد، شاهدی تجربی بر درستی یا نادرستی آن خواهد بود. بناسراف[1] و پاتنم[2] معتقدند که چنین است:

> اگر موضع ما این بود که رویه‌های «غیرساختنی» –یعنی رویه‌هایی که ما را ملزم به انجام بی‌نهایت عملیات در زمان محدود می کند– قابل‌تصورند [پاورقی: مثلاً اگر کسی یک سری عملیات بی‌پایان، مثلاً $S_۱$، $S_۲$، $S_۳$، . . .، به‌گونه‌ای‌که $S_۱$ در ۱ دقیقه، $S_۲$ در $\frac{۱}{۲}$ دقیقه، $S_۳$ در $\frac{۱}{۴}$ دقیقه، و غیره را بتواند انجام دهد. دراین‌صورت در طی ۲ دقیقه، تمام این سری عملیات نامتناهی را اجرا خواهد کرد.] هرچند عملاً ممکن نیستند (به‌دلیل محدودیت سرعت انجام عملیات فیزیکی)، پس می‌توان گفت که عملاً یک روش تأیید یا رد در نظریهٔ اعداد وجود دارد.

اما وارن[3] و واکسمن[4] اخیراً استدلال کرده‌اند که چنین نیست [۱۳، ص ۱۱]. یعنی، حتی با وجود ابرماشین‌ها هم نمی‌توان ادعا کرد که حساب متعیّن است. دلیل آن‌ها این است که این ماشین‌ها گواه جدیدی اضافه نمی‌کنند، زیرا آن‌ها نمی‌توانند درستی یا نادرستی یک حکم حسابی را «توضیح» دهند. اما منظور آن‌ها از توضیح چیست؟ چگونه می‌توان درستی یک حکم حسابی را توضیح داد؟ مانند آنچه که در بخش ۱ دیدیم، این شواهد، از نظر وارن و واکسمن می‌باید از دیدگاه علمی پذیرفتنی باشند؛ این شرطی است که، به نظر آن‌ها، هر توضیح معقولی باید داشته باشد.

همان‌گونه‌که دیدیم، یک راه برای توضیح درستی یک حکم حسابی، ارائهٔ برهانی برای آن در یک دستگاه اصل موضوعی موجه حسابی نظیر حساب مرتبهٔ اول پئانو است. اگر اصول حساب پئانو را موجه بدانیم، پذیرش نتایج منطقی آن طبیعی می‌نماید. البته، هر حکم حسابی تصمیم‌پذیر[5] مثل $A(n)$ اگر درست باشد، در حساب مرتبه اول پئانو اثبات‌پذیر خواهد بود [۶، ص ۵۴]. بنابراین،

[1] Benacerraf [2] Putnam [3] Warren [4] Waxman [5] decidable

روند بالا، توصیف‌شده برای یک ابرماشین، با فرض وجود ابرماشین، توجیهی برای درستی حکم غیرصوری $\forall n A(n)$ به دست می‌دهد. البته، حکم غیرصوری مذکور فاصلهٔ زیادی تا اثباتی برای $\forall x A(x)$ به عنوان فرمولی در زبان مرتبهٔ اول حساب دارد. برای اثبات جملهٔ اخیر یا می‌باید برهانی منطقی در حساب پئانو برای آن ارائه داد و یا (با استفاده از قضیهٔ تمامیت گودل) نشان داد که این جمله نه‌تنها در مدل استاندارد اعداد طبیعی معمولی درست است، بلکه در هر مدل نااستانداردی از حساب پئانو نیز چنین است. خانوادهٔ چنین مدل‌هایی، حتی اگر خود را به مدل‌های نایکریخت و شمارا محدود کنیم، به‌طور ناشمارا نامتناهی است.

ازطرف‌دیگر، ازآنجاکه هر حکم حسابی درست و تصمیم‌پذیر در حساب پئانو اثبات‌پذیر است، یک ابرماشین نمی‌تواند چیزی در این مورد به شواهد موجود اضافه کند. یعنی نمی‌تواند شواهدی فراتر از اثبات‌پذیری هر نمونه از حکم عمومی مورد بحث در خود حساب پئانو فراهم کند. نکتهٔ قابل توجه دیگر این است که محاسباتی که یک ابرماشین انجام می‌دهد، خود متکی‌بر خواص اعداد طبیعی است و این خواص، درصورت پذیرش مرجعیت حساب پئانو برای معتبر بودن، می‌باید در حساب پئانو، اثبات‌پذیر باشند. به‌عبارت‌دیگر، محاسبات ابرماشین‌ها مشروعیت ذاتی ندارند. پس به این معنی هم ابرماشین‌ها به‌تنهایی شاهدی بر تعیّن حساب نیستند.

محاسبات یک ماشین محاسب معمولی، چون یک ماشین تورینگ متناهی، را می‌توان به‌راحتی به یک برهان در حساب پئانو ترجمه کرد، اما چنین امکانی برای محاسبات یک ابرماشین در حالت کلی وجود ندارد. ازطرف‌دیگر، نتیجهٔ ضعیف‌تر زیر را داریم؛ این حکم نشان می‌دهد که می‌توان برنامه‌ای برای ابرماشین نوشت که تعیین کند آیا جملهٔ حسابی مفروضی در حساب پئانو اثبات‌پذیر است یا نه.

قضیه ۱.۲. ابرماشین قادر به تعیین اثبات‌پذیری یا اثبات‌ناپذیری احکام حسابی قابل بیان در حساب مرتبهٔ اول است.

اثبات. از کدگذاری گودلی استفاده کنیم و سیاهه‌ای از کدهای همهٔ اثبات‌ها فراهم کنیم و پس از آن بررسی می‌کنیم تا ببینیم که آیا کد اثبات حکم مورد نظر در میان آن‌ها موجود است یا نه. توجه کنید که اثبات‌ها دنباله‌هایی متناهی‌اند و بنابراین قابل کدگذاری‌اند. یک ابرماشین می‌تواند همهٔ این کدها را، که دنباله‌ای نامتناهی تشکیل می‌دهد، در زمانی متناهی بررسی کند و معین کند که آیا برهانی برای حکم مورد نظر وجود دارد یا خیر. □

با توجه به قضیهٔ فوق، می‌توان گفت که، با فرض در دسترس بودن ابرماشین‌ها، حساب پئانو تصمیم‌پذیر است. البته این حکم نشان نمی‌دهد که حساب متعیّن است. ممکن است که جمله‌ای حسابی درست باشد ولی در حساب پئانو اثبات‌پذیر نباشد.

۳ دستگاه‌های اثباتی نامتناهی و تعیّن حساب

در این بخش به دستگاه‌های اثباتی [استنتاجی][1] مجهز به قواعد نامتناهی می‌پردازیم. این قواعد مجموعه‌ای (شمارا) نامتناهی از مقدمات و یک نتیجه دارند. هدف آن است که ببینیم آیا وجود چنین دستگاه‌هایی، که امروزه پذیرفته شده‌اند، را می‌توان شاهدی بر متعیّن بودن حساب در نظر گرفت یا نه. یک ویژگی کلیدی دستگاه‌های اثباتی معمولی، از قبیل دستگاه‌های اثباتی اصل موضوعی و حساب رشته‌ای، متناهی بودن اثبات‌ها در آن‌ها است؛ اطلاعات بیشتری دربارهٔ این دستگاه‌ها در [۱] آمده است. قضیهٔ اساسی فشردگی در منطق مرتبهٔ اول، متکی‌بر همین ویژگی است. درعین‌حال، می‌توان دستگاهی اثباتی داشت که در آن اثبات با طول نامتناهی مجاز باشد. این دستگاه‌ها امروزه به‌وفور وجود دارند و توسط منطق‌دان‌ها مطالعه می‌شوند (برای نمونه [۱۱، ص ۱۸] را ببینید). مطالعهٔ دستگاه‌های اثباتی نامتناهی با کارگنتسن[2] در نظریهٔ برهان و تلاش او برای اثبات سازگاری حساب پئانو آغاز شد. البته این مطالعات فراتر از برنامهٔ هیلبرت در مبانی ریاضیات قرار می‌گیرند. یک راه طبیعی برای ساخت دستگاهی نامتناهی برای حساب، اضافه کردن قاعدهٔ ω به اصول مقدماتی حساب است. این قاعده بیان می‌کند که اگر $A(n)$ به ازای هر عدد طبیعی n برقرار باشد، آن‌گاه حکم $\forall x A(x)$ برقرار خواهد بود. جالب است که این قاعده را خود هیلبرت بیان کرده است، اما آن‌طورکه ففرمن اشاره می‌کند این قاعده به‌هیچ‌وجه در برنامهٔ اصلی هیلبرت در مبانی ریاضیات جای نمی‌گیرد [۸، ص ۳۲۴].

دستگاهی که از افزودن قاعدهٔ ω به اصول مقدماتی حساب حاصل می‌شود دستگاهی تمام است، یعنی این دستگاه قادر به اثبات همهٔ جملات حسابی درست است. نکتهٔ دیگر آنکه این دستگاه را می‌توان به گونه‌ای ساخت که در آن، اثبات‌ها بازگشتی[3] باشند، به‌عبارت‌دیگر، شرط متناهی‌بودن را می‌توان با شرط ضعیف‌تر بازگشتی‌بودن تعویض کرد [۶، ص ۳۵۳]. بازگشتی‌بودن یک اثباتِ نامتناهی به معنی آن است که می‌توان هریک از اجزای آن را به‌صورت الگوریتمی مشخص کرد. همان‌طورکه جیرارد می‌گوید بدون این خاصیت اثبات‌های دستگاه منطقی مجهز به این قاعده، تنها

[1] proof systems [2] Gentzen [3] recursive

شکلی از همان نحوهٔ بیان درستی احکام حسابی در ساختار استاندارد اعداد طبیعی‌اند. درحال‌حاضر، دستگاه‌های اثباتی نامتناهی جایگاه مستحکمی در قلب منطق، نظریهٔ برهان، دارند. به قول جیرارد [۶، ص ۴۱۱]:

> به دلایل ایدئولوژیک، گنتسن برهان‌های نامتناهی را رد کرد. درعین‌حال، ما اکنون می‌دانیم که، اگر احتیاط‌های لازم در نظر گرفته شوند، روش‌های نامتناهی شک‌برانگیزتر از روش‌های متناهی نیستند!

اگر موجه‌بودن دستگاه‌های اثباتی نامتناهی را بپذیریم، آنگاه اثبات‌های نامتناهی این دستگاه‌ها برای احکام حسابی را می‌توان به عنوان شواهدی موجه بر درستی آن‌ها تلقی کرد. به‌این‌ترتیب، می‌توان متعیّن بودن حساب را پذیرفت. آیا باید این دستگاه‌ها را موجه دانست؟ بسیاری از فلاسفه مخالف این قاعده‌هایند و توانایی انسان در کار با آن‌ها را رد می‌کنند [۱۲، ص ۱].

اما به نظر می‌رسد که آنچه فلاسفه را به مخالفت دستگاه‌های اثباتی نامتناهی واداشته است عدم مشروعیت این قواعد نیست، بلکه آن‌ها تحقق مقدمات نامتناهی را ناممکن می‌دانند. اما هر قاعدهٔ نامتناهی، با فرض اثبات مقدماتش، دچار ایرادی نیست. نکتهٔ دیگر آن است که ما عملاً قواعد نامتناهی بسیاری را به کار می‌بریم. برای نمونه، وقتی‌که از یک شمای اصل موضوعی، مانند استقرا، استفاده می‌کنیم عملاً، به ازای هر فرمولی از یک اصل، از یک قاعدهٔ فرازبانی نامتناهی استفاده می‌کنیم. بنابراین، اثبات‌های نامتناهی، مانند محاسبات نامتناهی، تحت شرایطی خاص ممکن‌اند. اما در مورد قاعدهٔ ω چه می‌توان گفت؟

دستگاه حسابی مجهز به قاعدهٔ ω در میانهٔ تجزیه و تحلیل قدرت اثباتی حساب پئانو سر برآورد. به کمک این دستگاه می‌توان نشان داد که اگر اصل استقرای عادی، استقرا تا عدد ترتیبی ω، را به استقرا تا ε_0 گسترش دهیم، دستگاه حاصل قادر به اثبات سازگاری حساب پئانو خواهد بود. البته این اثبات نتوانست جلوی شکست برنامهٔ هیلبرت تحت تأثیر قضایای ناتمامیت گودل را بگیرد. متناهی‌گرایی در قلب برنامهٔ هیلبرت به منظور مستحکم‌کردن مبانی ریاضیات قرار داشت. ازطرف‌دیگر، به نظر می‌رسد که حتی اگر مشروعیت قاعدهٔ ω را بپذیریم، اثبات همهٔ فرضیات این قاعده که مجموعه‌ای نامتناهی تشکیل می‌دهند، درحالت‌کلی، در زمانی متناهی امکان‌پذیر نیست.

اما وضعیت در استفاده از ابرماشین‌ها متفاوت خواهدبود. اگر امکاناتی را که نظریهٔ نسبیت عام در اختیار ما می‌گذارد در نظر بگیریم، آن‌چنان‌که در مورد محاسبات نامتناهی در بالا دیدیم، در

سرعت‌های نزدیک به سرعت نور، زمان کافی برای اثبات همهٔ مقدمه‌ها، زمانی که حکم مورد نظر از نوع تعمیمی از یک حکم تصمیم‌پذیر است، وجود خواهد داشت و یک اثبات نامتناهی از آن در زمانی متناهی انجام‌پذیر خواهد بود. همان‌طورکه گفتیم، حساب پئانو به اضافهٔ قاعدهٔ ω، دستگاهی تمام است، یعنی هر حکم حسابی یا نقیضش در این دستگاه اثبات‌پذیر است. بنابراین، امکان وجود اثبات‌های نامتناهی در این دستگاه باعث می‌شود که تعیّن حساب پذیرفتنی باشد. به‌این‌ترتیب، وجود ابردستگاه‌های محاسباتی یکی از ابهامات اصلی در مورد ابراثبات‌ها را از میان برمی‌دارند. ازطرف‌دیگر، می‌توان ابرماشین‌ها را به شکل درست‌تری در ساخت اثبات‌های نامتناهی به کار برد. قضیهٔ زیر این نتیجه را تصریح می‌کند.

قضیه ۱.۳. با فرض ممکن بودن ابرماشین‌های محاسباتی، درست‌بودن یک جملهٔ داده‌شده یا نقیض آن، تصمیم‌پذیر است.

اثبات. برای این منظور، می‌باید به نحو مناسبی فرمول‌ها و برهان‌ها را کدگذاری کرد. سپس، به ازای هر جملهٔ حسابی می‌باید همهٔ اعداد طبیعی را بررسی کرد و دید آیا برای آن جمله یا نقیض آن یک کد برهانی وجود دارد یا نه. با توجه به تمام‌بودن دستگاه اثباتی مجهز به قاعدهٔ ω، این محاسبه جواب نهایی را فراهم خواهد کرد و نشان خواهد که جملهٔ مورد نظر یا نقیض آن درست (اثبات‌پذیر) است. □

توجه کنید که در برهان فوق از بازگشتی‌بودن برهان‌ها، آن‌طورکه قبلاً توضیح دادیم، به‌طوراساسی استفاده می‌شود. به هر برهان عددی نسبت داده می‌شود که از آن کد می‌توان تابعی بازگشتی را به دست آورد که به ازای هر n مرحلهٔ nام برهان را تعیین می‌کند. برای مثال، مشخص می‌کند که فرمول ظاهرشده در آخرین سطر برهان کدام است که این جمله‌ای اثبات شده است. برای بررسی همهٔ این کدها، به یک ابرماشین نیاز خواهد بود. درواقع، ابرماشین مانند تابعی عمومی عمل می‌کند به‌طوری‌که، به ازای هر عدد داده‌شده چون n، رفتار تابع بازگشتی با کد n را شبیه‌سازی می‌کند. اگر این n کد یک برهان باشد، به‌این‌ترتیب تمام مشخصات برهان آشکار خواهد شد. با توجه به نکات فوق، به نظر می‌رسد که با به کار بردن ابرماشین‌ها به هنگام کار با دستگاه‌های اثباتی نامتناهی، می‌توان به‌طور قطعی تعیین کرد که آیا یک حکم حسابی داده‌شده درست است یا نه. به‌عبارت‌دیگر، با فرض وجود ابرماشین‌ها، حساب متعیّن خواهد بود.

مراجع

[۱] آقایی، مجتبی، مروری بر نظریهٔ اثبات، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ ۳۵ (۱۳۸۴)، ۵۵-۷۱.

[۲] منیری، مرتضی، حساب مرتبهٔ اول پئانو و زیرنظریه‌های آن همراه با چند مسألهٔ مرتبط در نظریهٔ پیچیدگی، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ ۳۵ (۱۳۸۴)، ۳۳-۵۴.

[۳] منیری، مرتضی، فلسفه‌های ریاضی، انتشارات دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ۱۳۹۰.

[4] Benacerraf, P., Putnam, H., Introduction , in *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, P. Benacerraf, H. Putnam, H., eds., Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[5] Cevik, A., *Philosophy of Mathematics: Classic and Contemporary Studies*, Chapman & Hall/CRC, 2021.

[6] Girard, J.-Y., *Proof theory and logical complexity*, vol. I, Bibliopolis, Naples, 1987.

[7] Hamkins, J. D., Lewis, A., Infinite time Turing machines, *J. Symbolic Logic*, **65** (2000), 567–604.

[8] Ignjatović, A., Hilbert's program and the omega-rule, *J. Symbolic Logic*, **59** (1994), 322-343.

[9] Manchak, J. B., Roberts, B. W., Supertasks (2016), in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. N. Zalta, ed., available at `https://plato.stanford.edu/entries/spacetime-supertasks/`.

[10] Raatikainen, P., Gödel's iIncompleteness theorems (2022), in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. N. Zalta, ed., available at `https://plato.stanford.edu/entries/goedel-incompleteness/`.

[11] Rathjen, M., Sieg, W., Proof theory (2020), in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. N. Zalta, ed., available at `https://plato.stanford.edu/entries/proof-theory/`.

[12] Warren, J., Infinite reasoning, *Philosophy and Phenomenological Research*, **103** (2021), 385-407.

[13] Warren, J., Waxman, D., Supertasks and arithmetical truth, *Philosophical Studies*, **177** (2020), 1275-1282.

[14] Warren, J., Waxman, D., A metasemantic challenge for mathematical determinacy, *Synthese*, **197** (2020), 477-495.

مرتضی منیری: دانشگاه شهید بهشتی، دانشکدهٔ علوم ریاضی

رایانامه: `m-moniri@sbu.ac.ir`

Farhang va Andishe-ye Riyazi
Volume 41, Number 71, Fall/Winter 2022, Pages 97–105
doi: 10.30504/mct.2022.1286.1895

Is Arithmetic Determinate?

M. Moniri[1]

Faculty of Mathematical Sciences, Shahid Beheshti University, Iran

Abstract. Is arithmetic determinate and definitive? In other words, are there reasons for the correctness or falsity of each arithmetic sentence? For example, is there evidence that Goldbach's conjecture is true or false, even if we don't know about it? At first glance, the answer seems to be clearly yes. But how can you be sure? What does Gödel's incompleteness theorem say about this? What is the relationship between independence of some axioms of set theory, such as the axiom of choice and the continuum hypothesis, with these questions? In this article, we will examine these questions. In addition, we will examine the impact of the presence of unconventional facilities such as computing machines that are able to perform an infinite number of instructions in a finite time, as well as proof systems equipped with infinite rules on the answers to the above questions.

Keywords: determinacy, arithmetic, supertask, infinite proof system
Article history: Recieved 21 May 2022; Accepted 7 September 2022

[1] m-moniri@sbu.ac.ir

ISSN 1022-6443/