فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۳ (پاییز ۱۳۸۸) صص. ۳۵ تا ۵۵

برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی، الگوریتم‌های حل و کاربردها

سارا ابراهیمی، علیرضا فخارزادهٔ جهرمی

چکیده

مسائل برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی، که به وفور و با تنوع زیاد در طبیعت و مباحث علمی ظاهر می‌شوند گرچه دارای خواصی شبیه به مسائل برنامه‌ریزی خطی متناهی هستند اما در مواردی و خصوصاً شیوه‌های حل با آن‌ها متفاوت‌اند. دراین نوشتار، نمونه‌هایی از برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی و رده‌های مختلف آن را معرفی و تشریح می‌کنیم. سپس شکاف دوگانی در خصوص آن‌ها را مطرح و بر مبنای آن به ارائهٔ الگوریتم‌های حل این‌گونه مسائل در حالت‌های پیوسته و شمارا می‌پردازیم. همچنین روش همگرایی در خصوص یافتن جواب تقریبی مناسب و همگرا به جواب اصلی نیز مطرح می‌شود. سرانجام طی مثال‌هایی کاربردها و چگونگی کارکرد الگوریتم ها، و کارآیی آن‌ها را تشریح می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی خطی متناهی، برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی، شکاف دوگانی، الگوریتم، اندازه‌های برل منظم.

۱. مقدمه و تاریخچه

توانایی های نظریهٔ دوگانی، وجود الگوریتم سیمپلکس و کارایی آن، کسب اطلاعات مفید با انجام تحلیل حساسیت و دیگر خواص مفید برنامه‌ریزی خطی متناهی موجب شده است تا در بسیاری موارد یک مدل خطی، حتی به قیمت کم شدن دقت، جایگزین مدلی غیرخطی شود.

به طور طبیعی در مدلسازی هر چه بعد مسأله برنامه‌ریزی خطی متناهی (FLP) بزرگ‌تر باشد، قدرت تطبیق مدل با واقعیت و دقت آن بهتر خواهد بود([۲۱]). لذا در دو دههٔ اخیر شاهد تلاش در

جهت توسعه دانش حل مسائل FLP به منظور حل مسائل برنامه‌ریزی خطی نامتناهی $(INLP)$ هستیم.

یک مسألهٔ $INLP$ مسأله‌ای از نوع برنامه‌ریزی ریاضی است که دارای تابع هدف و قیود خطی بوده، اما تعداد متغیرها یا قیود آن (یا هر دو) نامتناهی‌اند. به طور مثال بخشی از مسائل نظریهٔ بازی‌ها را می توان از این دسته بر شمرد. در حالی که بازی‌های دو نفره نمونه‌ای از مسائل FLP هستند، اما اگر بازیکنان استراتژی‌های خود را از فضایی با بعد نامتناهی انتخاب کنند، با مسأله‌ای از نوع $INLP$ مواجه خواهیم بود ([۲۵]). در مسیر گسترش برنامه‌ریزی خطی متناهی، گذر بعدی، مسائلی از نوع مسائل برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی $(SILP)$ است که نزدیک‌ترین تقریب به مسائل $INLP$ هستند، به علاوه انتظار رخداد این دسته از مسائل به دلیل محدودیت تعداد منابع در طبیعت (تعداد قیود) و استفاده متعدد از آنها (متغیرها)، بسیار فراوان است.

مبحث برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی اولین بار توسط کارنس[1] و همکارانش (۱۹۶۳، [۲]) طی مقاله‌ای در مورد مسائل برنامه‌ریزی خطی نیمه‌نامتناهی شمارا مطرح شد. آنها سعی داشتند تا یک نتیجه دوگانی قوی روی کارهای هار[2] (۱۹۲۴، [۹]) بنا نمایند. اما مقالهٔ آنها یک اشتباه داشت که بعدها توسط دوفین[3] و کارلویتز[4] (۱۹۶۵، [۲]) تصحیح شد. در این نوع کارها ایدهٔ بستار کانونی نقش برجسته‌ای دارد. اگر تعدادی قید $\lambda(s)$ برای $s \in S$ (S مجموعهٔ اندیس است) وجود داشته باشد به طوری که مجموعه $\{\lambda(s)(a(s),b(s)) : s \in S\}$ در R^{n+1} فشرده باشد، آنگاه مجموعه قیود برای مسأله برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی «به طور کانونی بسته» نامیده می‌شود. این حالت، همراه با شرط نقطهٔ درونی کافی است تا شرط دوگانی قوی را مستقل از ماهیت مجموعه S تضمین نماید (گلاشف[5] در سال ۱۹۷۹، [۶] این مطلب را ثابت نموده است). نتایج بعدی از تئوری دوگانی برای $SILP$ توسط مقاله‌های کارنی[6] در ۱۹۸۱، بوروابن[7] در ۱۹۸۱ و ۱۹۸۳، دوفین، یاروسلاو[8] و کارلویتز در ۱۹۸۳ شرح داده شده است. همچنین در ۱۹۸۳ گلاشف و گوستاوسون به اتفاق کتابی تحت عنوان «بهینه‌سازی خطی و تقریب» نوشتند [۷]). یکی از موضوع‌های مورد بحث در این کتاب، مسائل برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی پیوسته می باشد. در آنجا ابتدا مراحل هندسی و جبری روش سیمپلکس برای این دسته از مسائل بیان، قضایای دوگانی بررسی و سپس به معرفی بعضی کاربردها پرداخته شده است.

در مسائل کنترل بهینه، مبحث $SILP$ نقش بسزایی دارد و حتی موجب پیشرفت در روش‌های حل (حداقل در کاربری) گردیده است. مقاله رودولف[9] در ۱۹۸۷ این موضوع را تأیید می‌نماید. همچنین در این راستا با مطرح نمودن روش تعدیل[10] (۱۹۹۰، [۲۳]) و (۱۹۹۲، [۲۴])، به حل مسائل کنترل بهینه برمبنای $SILP$ پرداخته شده است. روبیو[11] نیز در (۱۹۹۵، [۲۲]) از این روش برای حل مسأله‌های متضمن معادله انتشار (دیفیوژن) استفاده نمود. فخارزاده، ترابی و اعلام‌پور نیز

1) Charnes 2) Haar 3) Duffin 4) Karlovitz 5) Glashoff 6) Karney 7) Borwein
8) Jeroslow 9) Rudolph 10) Relaxation 11) Rubio

(۱۳۸۱ ه.ش، [۳۰]) موفق به حل همان مسأله با استفاده از روش دیگری برای حل مسائل $SILP$ شدند، آنها مقایسه‌ای را نیز دراین زمینه انجام داده‌اند.

۲. رده‌های مسائل $SILP$ و دوگان آنها

برای بردارهای n مؤلفه‌ای c و $a(s)$ و مجموعه اندیس S یک مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی، در حالت کلی، به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned} &Min: \quad c^T x \\ &S.\,to: \quad a(s)^T x \geq b(s), \qquad s \in S, \quad x \in R^n. \end{aligned} \tag{۱}$$

نسبت به وضعیت S، نوع مسأله $SILP$ در (۱) و شیوهٔ حل آن متفاوت می‌باشد:

الف) اگر مجموعه اندیس S زیر مجموعه‌ای پیوسته از فضای اقلیدسی R^k باشد، آنگاه (۱) تبدیل به مسأله‌ای از نوع $SILP$ پیوسته می‌شود. در حالت خاص معمولاً $k = ۱$ و $S = [a, b] \subseteq R$ اختیار می‌شود. بنا به خاصیت هم‌ارزی و به منظور سادگی $[a, b]$ را $[۰, ۱]$ اختیار می‌کنیم. بنابراین درحالت کلی یک مسأله $SILP$ پیوسته ($SILP۱$) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} &Min: \quad c^T x \\ &S.\,to: \quad a(s)^T x \geq b(s), \qquad s \in [۰, ۱], \quad x \in R^n; \end{aligned} \tag{۲}$$

(لازم به ذکر است که در (۲) همواره فرض می‌کنیم $a(s)$ و $b(s)$ توابعی پیوسته‌اند و می‌توانند نسبت به s غیرخطی نیز باشند).

ب) اگر S نامتناهی و شمارا باشد، آنگاه (۱) مسأله‌ای از نوع $SILP$ شمارا ($SILP۲$) است که به صورت کلی زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned} &Min: \quad c^T x \\ &S.\,to: \quad a_i^T x \geq b_i, \qquad i = ۱, ۲, ۳, ..., \quad x \in R^n. \end{aligned} \tag{۳}$$

مسائل $SILP$ در این دسته‌بندی‌ها دارای دوگان نیز هستند و نظریهٔ دوگانی در مورد آنها قابل بررسی است. وضعیت فضای متغیرها و مقادیر سمت راست برای مسائل $SILP۱$ و $SILP۱^*$ (دوگان $SILP۱$) را می‌توان به صورت زیر خلاصه نمود ([۱]):

$$_{SILP۱:}\left[\begin{array}{c} R^n \\ R^n \end{array}\right] \left| \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \right| \left[\begin{array}{c} C[۰, ۱] \\ M_r[۰, ۱] \end{array}\right]_{:SILP۱^*}$$

که درآن $M_r[۰, ۱]$ فضای اندازه‌های برل منظم روی $[۰, ۱]$ است. به علاوه می‌توان فضای متغیرها و فضای مقادیر سمت راست را برای مسائل $SILP۲$ و و دوگان آن $SILP۲^*$ را با نمودار زیر نمایش داد:

$$_{SILP۲:}\left[\begin{array}{c} R^n \\ R^n \end{array}\right] \left| \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \right| \left[\begin{array}{c} R^\infty \\ GFSS \end{array}\right]_{:SILP۲^*}$$

که در آن R^∞ فضای تمام دنباله‌ها روی R و $GFSS$[1] فضای تمام دنباله‌ها با تعدادی متناهی جملهٔ ناصفر روی R می‌باشند.

۳. نمونه‌هایی از حضور و کارایی $SILP$

علاوه بر بهینه‌سازی به معنای عام، نظریه‌های تقریب و کنترل بهینه عرصه‌های ریاضی هستند که در آنها $SILP$ به وفور ظاهر می‌شوند. لیکن این مبحث کاربردهای زیادی در علوم دیگر نیز دارد که در زیر به چند نمونه به منظور آشنایی بیشتر اشاره می‌شود.

جریان شبکهٔ پیوسته با زمان: بیشینه سازی جریان کالا بین دو نقطهٔ معین مبداء و مقصد در شبکهٔ حمل و نقل که کمان‌های آن دارای محدودیت های ظرفیتی مستقل از زمان هستند، مسأله‌ای از نوع FLP است. حال اگر ظرفیت کمان‌ها با زمان تغییر کند و امکان ذخیره‌سازی در گره‌های شبکه نیز موجود باشد، آنگاه مسأله از نوع $INLP$ خواهد بود. این مطلب را می‌توان از مدل ریاضی مسأله که به صورت زیر است نیز استنباط نمود:

$$
\begin{aligned}
&Max: \quad \int_0^T [\textstyle\sum_{i=1}^n x_i(t)]\, dt\\
&S.\,to: \quad \textstyle\sum_{i=1}^n x_i(t) \le d(t), \quad t \in [0, T];\\
&w_i(t) \ge 0, \quad t \in [0, T], \ \ i = 1, ..., n;\\
&0 \le x_i \le f_i, \quad t \in [0, T], \ \ i = 1, ..., n;\\
&0 \le \textstyle\int_0^t [r_i(\tau) - x_i(\tau) - w_i(\tau)] d\tau + s_i \le c_i, \quad t \in [0, T], \ \ i = 1, ..., n.
\end{aligned}
$$

که در آن r_i مخزن i ام، c_i ظرفیت r_i ، $r_i(t)$ میزان جریان ورودی به r_i ، $d(t)$ تقاضا در زمان t، r_i مقدار درجه خروجی جریان از r_i جهت تأمین تقاضا، $w_i(t)$ میزان نشر از r_i در زمان t، $x_i(t)$ مقدار درجهٔ خروجی جریان از r_i در زمان t و s_i میزان ذخیرهٔ اولیه در r_i می‌باشند ([۱]).

طراحی مسیر ربات:

در بعضی مسائل مطرح در علم رباتیک به دنبال یافتن مسیری هستیم که ربات آن را در کمترین زمان ممکن طی نماید. برای این منظور باید تابعی تعیین کنیم که مجموع زمان حرکت ربات را برای مسیری معین کمینه سازد. فرم ریاضی این مسأله به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&Min: \quad \int_0^1 B_{k,\xi}(t)\, dt \equiv \tfrac{1}{k} \textstyle\sum_{i=1}^n x_i(\xi_{i+k} - \xi_i)\\
&S.\,to: \quad B_{k,\xi}(t) = \textstyle\sum_{i=1}^n x_i B_{i,k,\xi}(t) \ge 0, \quad \forall t \in [0, 1], \ \ x \in R^n.
\end{aligned}
$$

---

1) Generalized Finite Sequence Space

به وضوح این مسأله یک مسألهٔ $SILP$ پیوسته است. در این مدل تابع هدف عملاً به t بستگی ندارد. $B_{k,\xi}(t)$، یک B−اسپلاین بوده و $B_{i,k,\xi}(t)$ ها برای هر $i \in \{۱, ۲, ..., n\}$، توابع مخلوط برای B−اسپلاین نامیده می‌شوند که چند جمله‌ای‌هایی از درجه k با متغیر t می‌باشند. x_i ها نیز ضرایب B−اسپلاین و ξ بردار گره (نقاط) می‌باشد ([۲۷]).

تقریب توسط چندجمله‌ای‌ها:

یکی از مهمترین کاربردهای برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی در مسائل مربوط به تقریب یکنواخت توسط چندجمله‌ای‌ها (نظیر چندجمله‌ای‌های چبیشف) می‌باشد. مشخصاً می‌خواهیم تابع پیوستهٔ f را که روی $[۰, ۱]$ تعریف شده است به وسیلهٔ ترکیبی خطی از توابع معین پیوسته $g_۱, g_۲, ..., g_n$ (تعریف شده بر $[۰, ۱]$) تقریب نمائیم. بنابراین، هدف کمینه کردن بیشترین تفاوت بین f و تابع تقریب (خطای مطلق) است، یعنی، $Minimize \ : \ max|f(s) - P(s)|$ که در آن P یک ترکیب خطی از g_i ها است (تابع P، تقریب یکنواخت یا تقریب مینی ماکس f نامیده می‌شود).

مدلسازی این مسأله به صورت مسأله‌ای از نوع $SILP$ دشوار نیست زیرا اگر r بیشترین خطای مطلق باشد، آنگاه مسأله به فرم ذیل خواهد بود:

$$\begin{aligned}
&Min: \quad r\\
&S.\,to: \quad \textstyle\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i g_i(s) + r \geq f(s), \qquad s \in [۰, ۱],\\
&-\textstyle\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i g_i(s) + r \geq -f(s), \qquad s \in [۰, ۱].
\end{aligned}$$

که در آن $[۰, ۱]$ مجموعه اندیس است. دوگان این مسأله را مطابق [۱] می‌توان به فرم زیر نمایش داد:

$$\begin{aligned}
&Max: \quad \textstyle\int_۰^۱ f(s)dw_۱(s) - \int_۰^۱ f(s)dw_۲(s)\\
&S.\,to: \quad \textstyle\int_۰^۱ g_i(s)dw_۱(s) - \int_۰^۱ g_i(s)dw_۲(s) = ۰, \qquad i = ۱, ۲, ..., n\\
&\textstyle\int_۰^۱ dw_۱(s) - \int_۰^۱ dw_۲(s) = ۱,\\
&w_۱, w_۲ \geq ۰, \quad w_۱, w_۲ \in M_r[۰, ۱].
\end{aligned}$$

در آن $M_r[۰, ۱]$ فضای اندازه‌های برل منظم روی $[۰, ۱]$ می‌باشد. این مسأله یک مسأله برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی پیوسته با $n + ۱$ قید و تعداد نامتناهی متغیر است.

مسأله پورت فولیو در اقتصاد [۵]:

می‌خواهیم مبلغ K یورو را به n سهم برای یک دوره از سال اختصاص دهیم. x_i یورو را به سهم iام نسبت می‌دهیم و انتظار داریم در پایان دوره، به ازای هر یک یورو سرمایه‌گذاری در سهم iام، y_i یورو دریافت نماییم. هدف ماکزیمم کردن مقدار پورت فولیو $y^T x$ بعد از گذشت یک سال است که در آن $x = (x_۱, ..., x_n)$ و $y = (y_۱, ..., y_n)$. اما مشکل در این است که y از قبل نامعلوم

می‌باشد، هرچند که اغلب مدل‌های اقتصادی ادعا می‌کنند که بردار y در زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از R^n نظیر y تغییر خواهد کرد. با توجه به این مطلب، نشان داده می‌شود که مسأله، به حل مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی زیر منجر می‌گردد:

$$\begin{aligned} & Max_{v,x}: \quad v \\ & S.\,to: \quad y^T x - v \geq 0, \qquad \forall y \in Y \quad . \\ & \textstyle\sum_i x_i = K, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

در کنار نمونه‌های فوق تعداد بسیاری از مسائل مهندسی مانند کنترل آلودگی ([۱۲])، طراحی مجموعه‌های سیگنال بهینه ([۱۶] و [۸] و [۲۶])، طراحی تولید ([۲۹] و [۱۷])، تئوری تقریب چبیشف ([۱۱] و [۲۰])، طراحی مسیر ربات ([۱۸] و [۱۰] و [۲۸])، طراحی فیلتر ([۱۹])، کنترل بهینه ([۲۴]) و ([۲۱])، و مباحث مربوط به DEA ([۱۴])، نظریهٔ احتمال ([۳])، و همچنین کاربردهای $SILP$ در مباحث برنامه‌ریزی فازی ([۱۳])، هر یک به نوعی می‌توانند به صورت مسائلی از انواع برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی مدلسازی شوند.

۴. $SILP$ پیوسته و شکاف دوگانی

دوگان مسأله $SILP$ پیوسته(۲)، ($SILP1^*$)، به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\begin{aligned} & Max: \qquad \int_0^1 b(s)d\omega(s) \\ & S.\,to: \qquad \int_0^1 a(s)dw(s) = c \qquad\qquad (4) \\ & \qquad\qquad w \geq 0, \;\; w \in M_r[0,1]. \end{aligned}$$

می‌دانیم که در مسائل برنامه‌ریزی خطی متناهی، بنا بر قضیهٔ قوی دوگانی، همواره مقادیر بهینه متناهی تابع هدف برای مسأله‌های اولیه و دوگان برابر هستند. اما این ویژگی برای مسائل برنامه‌ریزی خطی با بعد نامتناهی همیشه برقرار نمی‌باشد. عدم برقراری چنین خاصیتی در این دسته از مسائل، «شکاف دوگانی» نامیده می‌شود.

متذکر می‌شویم هرگاه w اندازهٔ اتمی[1] و $s_i \in [0,1]$ برای $i = 1, 2, ..., k$ باشد، در این صورت جرم تمرکز یافته w را در s_i به شکل $w(s_i)$ نمایش می‌دهیم. مثال زیر به خوبی وجود شکاف دوگانی را برای یک مسأله $SILP$ نشان می‌دهد:

---

۱) Atomic measure، فرض کنیم A یک مجموعه برل از فضای توپولوژیک Ω باشد و $z \in \Omega$. اندازهٔ δ با تعریف زیر را یک اندازهٔ اتمی یکانی روی A می‌نامند:

$$\delta(z) = \begin{cases} 1 & z \in A \\ 0 & z \notin A. \end{cases}$$

$$Min: \quad x_1$$

$$S.\,to: \quad sx_1 + s^2(1-s)x_2 \geq -s^2, \quad s \in [0,1].$$

ملاحظه می‌شود که برای s های به اندازه کافی نزدیک به صفر مثلاً $s = 0.1$، مقادیر منفی x_1 در قید مسأله صدق نمی‌کند (مثلاً برای $s = 0.1$ و $x_1 = -1$ قید مسأله چنین است $-0.01 \geq -0.1$). لذا جواب $x_1 = x_2 = 0$ جواب بهینه مسألهٔ اولیه فوق است و بنابراین مقدار تابع هدف نیز صفر می‌شود ([۱]). اما دوگان این مسأله به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
Max &: \quad \int_0^1 (-s^2)d\omega(s)\\
S.\,to &: \quad \int_0^1 sdw(s) = 1,\\
&\int_0^1 s^2(1-s)dw(s) = 0,\\
&w \geq 0, \qquad w \in M_r[0,1].
\end{aligned}$$

چون w مثبت است، قید دوم، تمرکز جرم هر جواب شدنی دوگان را در ۰ و ۱ تحمیل می‌کند.

این در حالی است که قید اول تضمین می‌کند که در نقطه $s = 1$ جرم یک وجود دارد. بنابراین مسألهٔ دوگان دارای مقدار تابع هدف ۱ ـ است که به وسیلهٔ هر جواب شدنی w به دست می‌آید. همان گونه که مشاهده شد، برای مثال ذکر شده مقادیر توابع هدف در جواب‌های بهینه مسائل اولیه و دوگان یکسان نیستند. پس این مسأله دارای شکاف دوگانی است.

لذا بنا بر ضرورت باید شرایطی را بررسی کنیم که تحت آنها، یک مسأله $SILP$ پیوسته فاقد شکاف دوگانی باشد زیرا تحت این شرایط می‌توان برای حل این دسته مسائل از الگوریتمی شبیه به سیمپلکس بهره گرفت. برای $\omega \in M_r[0,1]$ دو مجموعهٔ زیر را که به ترتیب مخروط‌های لحظه‌ای M_A و M_B در R^n و R^{n+1} می‌نامیم، چنین تعریف می‌کنیم:

$$M_A = \{\int_0^1 a(s)dw(s) : w \geq 0\} \quad \text{و} \quad M_B = \{\int_0^1 \overline{a}(s)dw(s) : w \geq 0\}.$$

جایی که در آن

$a(s) = (a_1(s), a_2(s), ..., a_n(s))$ و $\overline{a}(s) = (a_1(s), a_2(s), ..., a_n(s), b(s))$ یا $\overline{a}(s) = (a(s), b(s))$

۱.۴. شرایط عدم وجود شکاف دوگانی

اکنون با توجه به مطالب فوق، شرایط عدم وجود شکاف دوگانی را می‌توان در گزارهٔ زیر مشاهده نمود.

گزارهٔ ۱: هر یک از سه شرط زیر برای اطمینان از یکسانی مقادیر بهینه $SILP1$ و $SILP1^*$ کافیست:

الف) مقدار بهینهٔ $SILP1^*$ متناهی و M_B بسته باشد.

ب) مقدار بهینهٔ $SILP1^*$ متناهی و c (بردار ضرایب تابع هدف) درون M_A باشد.
ج) مقدار بهینهٔ $SILP1$ متناهی باشد و $x \neq 0$ای موجود نباشد به طوری که $c^T x = 0$ و $a(s)^T x \geq 0$ برای $s \in [0, 1]$.
گزاره ۲: اگر x_0 چنان موجود باشد که برای هر $s \in [0, 1]$، $a(s)^T x_0 > b(s)$ و مسأله $SILP1$ مقدار بهینه متناهی داشته باشد، آنگاه مقادیر بهین $SILP1$ و $SILP1^*$ یکسانند.
به علاوه شرط ضعیف‌تری نیز وجود دارد که امکان برقراری قسمت (الف) گزارهٔ (۱) را فراهم می‌کند.
گزارهٔ ۳: M_B مخروط محدب تولید شده توسط $G = \{\overline{a}(s) : s \in [0, 1]\}$ است.

اثبات: مراجعه کنید به [۱].
تذکر: گزاره‌های (۲) و (۳) در حالت شمارا برقرار نیستند.

می‌دانیم که مخروط محدب تولید شده توسط مجموعهٔ فشرده‌ای که از مبدأ می گذرد، بسته است بنابراین نتیجه زیر را نیز خواهیم داشت.
نتیجهٔ ۱: اگر $SILP1^*$ دارای مقدار متناهی باشد و به‌علاوه هیچ s_0 ای در $[0, 1]$ به جز صفر موجود نباشد که برای آن $a(s_0) = 0$ و $b(s_0) = 0$، آنگاه مقادیر بهینه $SILP1$ و $SILP1^*$ یکی هستند و مسألهٔ $SILP1^*$ یک جواب بهینه دارد.
تعریف: فرض کنید P یک مخروط محدب مثبت باشد. برای هر x شدنی متعلق به P تعریف می کنیم:

$$B(x) = \{\xi \in X : \quad x + \lambda\xi \in P, \quad x - \lambda\xi \in P, \quad \forall\lambda > 0 \},$$

همچنین فضای پوچ ماتریس ضرایب A را با $N(A)$ نمایش می‌دهیم.
قضیهٔ ۱: فرض کنید مسأله LP یک جواب بهینه x داشته باشد و به علاوه فرض کنید بعد $B(x) \bigcap N(A)$ متناهی باشد. در این صورت LP یک جواب بهینه پایه‌ای دارد ([۱]).

گزارهٔ زیر نشان می‌دهد که اگر یک جواب بهینه وجود داشته باشد، آنگاه یک جواب بهینه پایه‌ای طبق قضیهٔ فوق نیز موجود است.
گزارهٔ ۴: اگر یک جواب شدنی برای $SILP1^*$ با مقدار تابع هدف c_0 موجود باشد، آنگاه یک جواب شدنی با جرم متمرکز در تعدادی متناهی نقطه وجود دارد که همان مقدار را برای $SILP1^*$ به دست می‌دهد.

با توجه به تعریف اندازه‌های اتمی ، در اصل گزارهٔ فوق اذعان می‌دارد که جواب بهینه، ترکیب متناهی از اندازه‌های اتمی است.
از گزاره‌ها و نتایج فوق چنین برمی‌آید که اگر یک مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی شکاف دوگانی نداشته باشد، دارای جواب بهینه متناهی است در نتیجه می‌توان آن را از طریق الگوریتمی که

مشابه الگوریتم سیمپلکس است و «شبه سیمپلکس» نامیده می‌شود حل نمود. واضح است که اگر مسأله‌ای دارای شکاف دوگانی باشد، باید به طرق دیگری (مثلاً از طریق آزمون و خطا) حل شود.

۲.۴. الگوریتمی برای حل مسألهٔ دوگان

همان‌گونه که از گزارهٔ ۴ حاصل گردید، بدون از دست دادن کلیت مسأله، جواب $SILP1^*$ را می‌توان به عنوان یک اندازهٔ اتمی با جرم‌هایی متمرکز در تعدادی متناهی نقطه در نظر گرفت. برای هر اندازهٔ اتمی u در $M_r[0, 1]$، تکیه‌گاه u به صورت $supp(u) = \{s : \ u(s) \neq 0\}$ تعریف می‌شود.

اگر اندازهٔ اتمی w یک جواب شدنی از $SILP1^*$ (مسألهٔ دوگان) باشد، تعریف می‌کنیم:

$$B(w) = \{u \in M_r[0, 1] : supp(u) \subset supp(w)\}.$$

این حالت پوچی ماتریس ضرایب A با توجه به (۴) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N(A) = \{u \in M_r[0, 1] : \int_0^1 a(s)du(s) = 0\}.$$

می‌توان نتیجه گرفت که w (جواب شدنی دوگان) پایه‌ای است اگر و تنها اگر بردارهای $a(s_i)$ که $s_i \in supp(w)$، مستقل خطی باشند ([۱]). بنابراین، اگر w پایه‌ای باشد، $supp(w)$ نمی‌تواند شامل بیش از n عضو باشد، زیرا فضای مقادیر سمت راست، فضای R^n است.
از دیگر سو می‌دانیم که یک جواب پایه‌ای شدنی w ناتباهیده است هرگاه تصویر $B(w)$ تحت ماتریس A با تصویر $M_r[0, 1]$ تحت ماتریس A یکسان باشد، زیرا بردارهای مستقل خطی $a(s_i)$ برای $s_i \in supp(w)$، فضای R^n را تولید می‌کنند. از آنجا که فضای مقادیر سمت راست مسأله $SILP1^*$ مجموعه R^n است، پس A را می‌توان به صورت $A = (a_1(s) \quad a_2(s) \quad \dots \quad a_n(s))$ (ماتریسی با ستون‌های $a_i(s)$ برای $i = 1, 2, ..., n$) نمایش داد. اکنون ماتریس $\hat{A}$ را که شامل ستون‌های $a(s_i)$، برای $s_i \in supp(w)$ است، در نظر می‌گیریم. از آنجا که بردارهای $a(s_i)$ مستقل خطی و مقدارشان n است، پس ماتریس پایهٔ $\hat{A}$ یک ماتریس $n \times n$ وارون پذیر خواهد بود.
همچنین توجه داریم که $b(s)$ و $w(s)$ توابعی از s هستند. حال اگر بجای s، مقادیر s_i از $supp(w)$ را قرار دهیم این توابع تبدیل به بردارهایی با n مؤلفه خواهند شد. فرض می‌کنیم $\hat{w}$ برداری با مؤلفه‌های $w(s_i)$ و $\hat{b}$ برداری با مؤلفه‌های $b(s_i)$ برای $s_i \in supp(w)$ باشد. به علاوه I را مجموعه اندیس‌های عناصر $supp(w)$ می‌گیریم، (بنابراین $I = \{1, 2, 3, ..., n\}$). با استفاده از مطالب فوق، قید انتگرالی $\int_0^1 a(s)dw(s) = c$ در $SILP1^*$ را می‌توان با توجه به تعریف اندازهٔ اتمی به صورت $\sum_{s_i \in supp(w)} a(s_i)w(s_i) = c$ نمایش داد. بنابراین صورت ماتریسی این قیود به فرم $\hat{A}\hat{w} = c$ در خواهد آمد.

تاکنون وجود جواب برای مسألهٔ (۴) به شرط عدم وجود شکاف دوگانی به اثبات رساندیم. اکنون برآنیم که روشی برای دست یابی به این جواب ارائه دهیم. این روش جزو دسته روش‌های تکراری

است و با انتخاب یک پایه آغازین، شروع می‌شود. سپس در هر تکرار جوابی شدنی به‌دست می‌دهد که باعث بهبود وضعیت تابع هدف می‌گردد آن چنان که این جواب‌ها به صورت یک دنبالهٔ متناهی به جواب بهینه همگرا می‌شوند. دراین روند فضای شدنی، همیشه پیوسته در نظر گرفته می‌شود و هیچگاه از گسسته‌سازی استفاده نمی‌شود. بر مبنای آنچه که در خصوص جواب پایه‌ای ذکر شد، این روش را به صورت یک الگوریتم بیان می‌کنیم:

گام ۱) جوابی پایه‌ای شدنی به عنوان جواب آغازین با ماتریس پایه‌ای $\hat{A}$ انتخاب شود. این جواب را می‌توان با آزمون و خطا و یا با استفاده از برخی روش‌ها که منجر به ساختن ماتریس پایه‌ای $\hat{A}$ می‌شود، تعیین نمود. به عنوان نمونه می‌توان ابتدا $SILP1^*$ را با یک مسأله FLP تقریب نمود، آنگاه جواب بهینهٔ این مسأله FLP را یافت و سپس آن را به یک جواب آغازین مسأله $SILP1^*$ گسترش داد.

گام ۲) دستگاه $\hat{A}\hat{w} = c$ حل گردد.

گام ۳) برای هر $s \in [0, 1]$، مقدار $w^*(s) = b(s) - a(s)^T(\hat{A}^{-1})^T\hat{b}$ (تابع هزینه تقلیل یافته) محاسبه شود. اگر برای هر$s \in [0, 1]$، $w^* \geq 0$، آنگاه جواب فعلی بهینه است و الگوریتم متوقف می‌گردد. در غیر این صورت گام بعدی اجرا گردد.

گام ۴) عضو $s_0 \in [0, 1]$ چنان یافت شود که $w^*(s_0)$ بیشینهٔ مثبت باشد، آنگاه $\acute{w}(s_0)$ به عنوان متغیر ورودی از حل دستگاه $\hat{\acute{w}} = \hat{w} - \delta d$ تعیین شود.

گام ۵) مقدار $d_i = [\hat{A}^{-1}a(s_0)]_i$ برای هر $i \in I$ محاسبه شود. اگر برای هر $i \in I$، $d_i \leq 0$، آنگاه جواب بهینه، نامتناهی است و حل مسأله متوقف می گردد، در غیر این صورت (یعنی هرگاه حداقل یک $i \in I$ وجود داشته باشد که $d_i > 0$) به مرحله بعد می‌رویم.

گام ٦) اندیس متغیر خروجی با انجام آزمون کمینه‌سازی زیر به دست آید:

$$\delta = \frac{\hat{w}_r}{d_r} = min\{\frac{\hat{w}_i}{d_i}, \quad d_i > 0, \ \forall i \in I\}.$$

گام ۷) $\hat{\acute{w}}$ از رابطهٔ $\hat{\acute{w}} = \hat{A}^{-1}(c - \delta a(s_0))$ محاسبه شود. اکنون $\acute{w}$ یک جواب شدنی جدید برای $SILP1^*$ است و داریم $supp(\acute{w}) = (supp(w) \bigcup \{s_0\}) - \{s_r\}$.

گام ۸) به گام اول باز گردید.

۳.۴. مثال

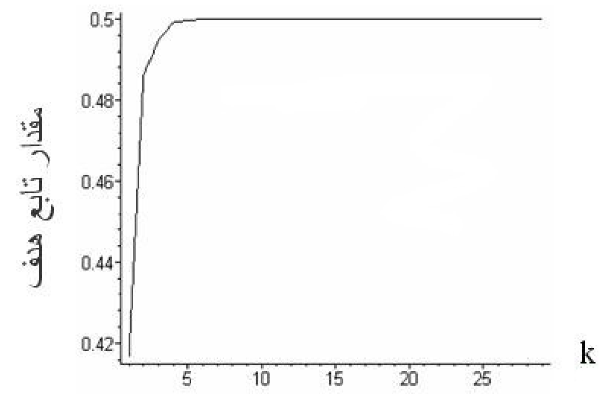
کارایی الگوریتم بیان شده برای حل دوگان یک مسأله برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی پیوسته را در عمل با حل مثالی از این نوع نشان می‌دهیم. صورت مسأله از [۱] انتخاب شده است:

$$\begin{aligned} Min: &\quad x_1 + x_2 \\ S.\,to: &\quad (1 - s)x_1 + sx_2 \geq s(1 - s), \\ &\quad s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

دوگان این مسأله عبارت است از:

$$\begin{aligned} Max: &\quad \int_{\circ}^{\backslash} s(\backslash - s)dw(s) \\ S.\ to: &\quad \int_{\circ}^{\backslash}(\backslash - s)dw(s) = \backslash \\ &\quad \int_{\circ}^{\backslash} sdw(s) = \backslash \\ &\quad w \geq \circ,\quad w \in M_r[\circ, \backslash]. \end{aligned}$$

از طریق آزمون و خطا پایهٔ اولیهٔ مسألهٔ دوگان به صورت $supp(w) = \{\frac{۱}{۴}, \frac{۳}{۴}\}$ به دست آمده است. بر مبنای این جواب مطابق الگوریتم ارائه شده، برنامهٔ شبه سیمپلکس برای حل مسألهٔ دوگان بدین شرح نگاشته شد: در این برنامه به منظور حل دستگاه‌هایی نظیر $\hat{A}\hat{w} = c$ ، $\hat{A}^T x = \hat{b}$ که مدام با آنها سر و کار داریم، از زیربرنامه $DLSARG$ موجود در کتابخانه $MSIMSL$ در بستهٔ نرم‌افزاری Visual Fortran استفاده گردید.



شکل ۱. منحنی نمایش مقادیر بهین تابع هدف بر حسب تکرارها برای مثال ۳.۴

همچنین برای به دست آوردن بیشینه $w^*(s)$ (تابعی هزینه تقلیل یافته) و همچنین $s_\circ$ نقطهٔ بیشینه ساز آن، ابتدا $w^*(s)$ را مطابق آنچه که گذشت به صورت $w^*(s) = b(s) - a(s)^T(\hat{A}^{-\backslash})^T\hat{b}$ تشکیل دادیم. سپس با استفاده از مشتق تابع $w^*(s)$ (نسبت به s) نقطهٔ بیشینه ساز $s_\circ$ را معین نمودیم. بدین منظور در برنامهٔ اصلی، از زیربرنامهٔ $ZPORC$ موجود در کتابخانه $MSIMSL$، جهت به دست آوردن ریشه های مشتق تابع $w^*(s)$ استفاده نمودیم. در برنامه شرط قرار گرفتن ریشه‌ها در $[\circ, \backslash]$ نیز اعمال گردید. با قراردادن این ریشه‌ها، برای $w^*(s)$ موجود در برنامه، هربار بیشترین مقدار مثبت تابع تعیین می‌گردید. به‌علاوه در هر تکرار sای که مقدار بیشینهٔ تابع در آن رخ می‌داد به عنوان $s_\circ$ معرفی می‌شد. در نهایت برنامه بعد از ۲۹ تکرار به مقدار بهین ۰/۵ در نقطه

$s_\circ = ۰/۵$ رسید. منحنی نمایش مقادیر به دست آمده برای تابع هدف بر حسب تکرارها در شکل (۱) نشان داده شده است. چنانچه مشاهده می‌شود، مقدار تابع هدف سیر صعودی خود را با افزایش تکرارها می پیماید واز تکرار ٦ به بعد تغییرات بسیار کم صورت می‌گیرد تا این که مقدار بهین تابع هدف در دو تکرار ۲۸ و ۲۹ به مقدار یکسان ۰/۵ می‌رسد.

۵. $SILP$ شمارا

مسألهٔ $SILP$ شمارا ($SILP۲$) و دوگان آن ($SILP۲^*$) به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$Min: \quad c^T x$$
$$S.\,to: \quad {a_i}^T x \geq b_i, \qquad i = ۱, ۲, ۳, \dots, x \in R^n. \qquad (۱.۵)$$

به طوری که c و a_i برای $i = ۱, ۲, ۳, \dots$، بردارهایی n مؤلفه‌ای هستند و

$$Max: \quad \sum_{i=۱}^{\infty} w_i b_i$$
$$S.\,to: \quad \sum_{i=۱}^{\infty} w_i a_i = c$$
$$w_i \geq \circ.$$
(فقط تعداد متناهی از w_iها غیرصفرند)

اکنون مخروط‌های لحظه‌ای را برای $SILP۲^*$ که به ترتیب در R^n و $R^{n+۱}$ می‌باشند، چنین تعریف می‌کنیم:

$$M_A = \{\sum_{i=۱}^{\infty} w_i a_i : \quad w_i \geq \circ\}, \qquad (۲.۵)$$
$$M_B = \{(\sum_{i=۱}^{\infty} w_i a_i, \sum_{i=۱}^{\infty} w_i b_i) : \quad w_i \geq \circ\}, \qquad (۳.۵)$$

شرایط عدم وجود شکاف دوگانی برای مسأله $SILP۲$ را به‌طور مشابه می‌توان از گزارهٔ ۱ بخش ۱.۴ نتیجه گرفت.

گزارهٔ ۱.۵. دنبالهٔ جواب‌های بهین مسائل متناهی $SILP_k^*$ ($SILP_k^*$ها مسائل FLP هستند که از مسألهٔ نیمه نامتناهی $SILP۱^*$ مطابق گام (۱) در ذیل به دست می آیند) به جواب بهین مسأله $SILP۲^*$ همگرا است.

الگوریتم حل دوگان مسألهٔ $SILP$ شمارا

با توجه به شرح مسأله $SILP$ شمارا و مقایسهٔ آن با حالت پیوسته، اغلب گام‌های الگوریتم این گونه مسائل یکسان هستند. در اینجا گام‌های الگوریتم حل مسأله $SILP۲^*$ بیان می‌شود:

گام ۱) یک جواب پایه‌ای شدنی با ماتریس پایه‌ای $\hat{A}$ انتخاب شود. برای تعیین این جواب می‌توان مسأله $SILP۲^*$ را به یک مسأله FLP تبدیل نمود. آنگاه جواب بهین حاصل از حل مسأله FLP طبق قضیهٔ ۱ بخش ۱.۴، یک جواب پایه‌ای برای مسأله $SILP۲^*$ خواهد بود.

گام ۲) دستگاه $\hat{A}\hat{w} = c$ حل گردد.

گام ۳) برای هر $i = ۱, ۲, ...$، مقدار $w_i^* = b_i - a_i^T (\hat{A}^{-۱})^T \hat{b}$ محاسبه شود. اگر برای هر i، $w_i^* \leq ۰$، آنگاه جواب فعلی بهینه است و الگوریتم متوقف می گردد، در غیر این صورت گام بعدی اجرا گردد.

گام ۴) اندیس k چنان یافت شود که برای آن w_k^* بیشترین مقدار مثبت را داشته باشد. حال متغیر $\hat{w_k}$ به عنوان متغیر ورودی انتخاب و در مرحلهٔ بعد اجرا شود.

گام ۵) برای هر $i \in supp(w)$، $d_i = [\hat{A}^{-۱} a_k]_i$ محاسبه شود. اگر برای هر $i \in supp(w)$، $d_i \leq ۰$، آنگاه جواب فعلی بهینه و نامتناهی است و الگوریتم متوقف شود. در غیر این صورت (یعنی اگر حداقل یک $i \in supp(w)$ وجود داشت که $d_i > ۰$)، آنگاه گام بعد اجرا گردد.

گام ٦) اندیس متغیر خروجی، از آزمون زیر به دست آید:

$$\delta = \frac{\hat{w_r}}{d_r} = min\{\frac{\hat{w_i}}{d_i}, \quad d_i > ۰, \quad i \in supp(w)\}$$

گام ۷) $\hat{\hat{w}}$ از رابطه $\hat{\hat{w}} = \hat{A}^{-۱}(c - \delta a_k)$ محاسبه شود.

گام ۸) $\acute{w} = \hat{\hat{w}} + \delta e_k$ یک جواب شدنی جدید برای $SILP۲^*$ خواهد بود و به علاوه داریم:

$$supp(\acute{w}) = (supp(w) \bigcup \{k\}) - \{r\}$$

این جواب را با جواب آغازین جایگزین و دوباره به گام اول باز گردید. این عمل را آن قدر ادامه دهید تا جواب بهین مسأله حاصل شود.

در حل دوگان مسأله $SILP$ شمارا با استفاده از الگوریتم مشروح فوق مشکل عمده‌ای وجود دارد. این مشکل ناشی از متناهی بودن مجموعه اندیس S می‌باشد به این معنی که در حل مسأله $SILP۱^*$ (که مسأله‌ای با تعداد قیود متناهی و تعداد متغیرهای نامتناهی است) پیدا کردن بیشترین مقدار مثبت w_i^* (تابعی هزینه تقلیل یافته) برای $i = ۱, ۲, ...$، کاری دشوار است. این خود نیز می‌تواند دلیلی برای استفاده از شیوهٔ تکرار و روش همگرایی، که در بخش بعدی به آن می‌پردازیم، باشد.

٦. روش همگرایی راهی برای تقریب مناسب جواب

در اکثر کاربردها، تقریب مناسب جواب یک مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی نامتناهی، با جواب مسأله‌ای متناهی از همین نوع (نظیر کاربردهای نظریهٔ کنترلی ([۲۴]، [۲۳]، [۲۲]، [۱۸])) از اهداف اصلی است. چنین کاری، عملاً بدون عبور از گذرگاه واسطه‌ای برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی ناممکن می‌نماید. به‌علاوه با استفاده از روش‌هایی نظیر بهره‌گیری از مجموعه توابع چگال شمارای مناسب در فضای جواب مسأله $SILP$ پیوسته، نظیر مثال‌های بخش ۳ و [۲۲]، این مسائل را به مسأله $SILP$ شمارا تبدیل می‌کنند.

بنابراین می‌توان با انتخاب تعداد متناهی k از قیود، جواب مسأله $SILP$ شمارا را با یک جواب FLP با k قید تقریب نمود. گزارهٔ ۱.۵ نشان می‌دهد که هر چه تعداد این قیدها بیشتر باشد، یعنی k افزایش یابد جواب دقیق‌تر خواهد بود. بنابراین با حل متوالی مسائل FLP مربوطه و بررسی روند تغییرات جواب‌های آنها در ازای افزایش k، می‌توان به رفتار جواب یک مسأله $SILP$ پی برد. این ایده را در حل مسائل $SILP$، روش همگرایی می‌نامیم.

۱.٦. بیان الگوریتمی روش همگرایی

مسألهٔ اولیه و دوگان برنامه‌ریزی خطی پیوسته $SILP\,1$ و $SILP\,1^*$ را مجدداً در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم مسأله فاقد شکاف دوگانی باشد. پس جواب بهینه موجود است و تمام گزاره‌های ذکر شده در بخش سوم نیز صادق می‌باشند. الگوریتم روش همگرایی برای حل این مسأله را به صورت گام‌های زیر بیان می‌کنیم:

گام ۱) با استفاده از یکی از تکنیک‌های ریاضی، مسأله را می‌توان به مسأله‌ای با تعداد قیود شمارا تبدیل نمود (در مورد مسألهٔ دوگان، با توجه به این که جواب به صورت ترکیبی خطی از اندازه‌های اتمی است این گام بدین طریق نیز قابل بررسی است). مثلاً (حتی در حالت کلی) می‌توان یکی از روش‌های زیر را به کار بست:

الفـ انتخاب یک مجموعه چگال شمارا در مجموعه اندیس S (با توپولوژی مناسب نظیر توپولوژی حاصل از نرم) یا $M_r[0,1]$، به صورت مستقیم؛

بـ انتخاب مجموعه‌ای از توابع چگال شمارا (مثلاً مجموعه‌ای تام با استفاده از توپولوژی همگرای یکنواخت) برای آن دسته از مسائلی که در آنها $a(s)$ و $b(s)$ بر اساس توابع دلخواه از یک فضای معین با بعد متناهی تعریف می‌شوند؛

جـ هر دو مورد فوق (خصوصاً برای مسائلی که تعداد قیود و متغیرها نامتناهی هستند).

گام ۲) انتخاب فقط تعداد متناهی قید، مسأله را به مسأله‌ای از نوع FLP تبدیل می کند که جواب آن با استفاده از روش سیمپلکس قابل دستیابی است (این جواب برای حالت دوگان بیشتر و برای حالت اولیه کمتر از مقدار بهینه کلی مسأله می‌باشد).

گام ۳) افزایش مداوم قیود، دنباله‌ای از جواب‌های حاصل از گام (۲) را به دست می‌دهد. به دلیل انتخاب مجموعهٔ چگال در گام (۱)، این دنباله به ناچار به جواب مسأله $SILP$ شمارا همگرا می‌باشد. این جواب همگرا نیز بنا به خاصیت چگال به کار گرفته شده در تدوین مسأله در گام (۱)، جواب مسأله اصلی را به صورت همگرایی (و با تقریبی بسیار مناسب) به دست می‌دهد. همگرایی چنین دنباله‌هایی از جواب مسائل FLP حاصله در نمونه‌های مختلف نظیر [۲۱] بارها به نمایش گذاشته شده است.

۲.٦ مثال ارائه مثالی عددی در خصوص حل مسائل $SILP$ شمارا، خصوصاً مثالی که جواب آن

حداقل از یک روش شناخته شده دیگر موجود باشد، امری مشکل است؛ به عنوان نمونه حتی در دو مرجع مهم [۱] و [۷] هیچ مثالی ارائه نشده است. این در حالی است که یکی از شیوه های تحقیق، مقایسهٔ نتایج حاصل از روش‌ها و شیوه های مختلف با نتایج مدون است. بنابراین از آنجا که یکی از پرظهورترین شاخه‌های ریاضی و مهندسی برای مسائل $SILP$ نظریهٔ کنترل بهینه می‌باشد، مسأله‌ای از این نوع انتخاب گردیده است. مسألهٔ مورد نظر در خصوص تعیین کنترل بهینه برای یک سیستم انتشار (دیفیوژن) می‌باشد که در مرجع [۲۲] مطرح شده است.

معمولاً مسائل کنترل بهینه به طور ذاتی به صورت مسائل برنامه‌ریزی خطی نامتناهی ظاهر می‌شوند. مطابق [۲۱] نخست این مسائل را بر مبنای روش نشاندن به مسأله‌ای از نوع $SILP$ پیوسته تبدیل می‌کنند. سپس مسأله به یک $SILP$ شمارا تبدیل می‌شود با تقریب این مسألهٔ جدید، جواب تقریباً بهینه از طریق تقریب یک مسأله FLP به دست می‌آید. برای ارائهٔ یک مثال عددی، سیستم کنترلی هدایت شده توسط معادلهٔ انتشار به صورت یک مسأله کنترل بهینه از [۳۰] در نظر گرفته شده است. این مسأله از این جهت که یک سیستم کنترلی با کنترل مرزی است و شرایط اولیه را نیز دربردارد، برای بیان این روش از کلیت قابل توجهی برخوردار است.

بنا به [۳۰] پس از انجام مراحل فوق، نقاط مجهول Z_m به تعداد M و z_n به تعداد N از تقسیم بازه‌های تشکیل دهنده $\Omega = A \times B \times D \times (۰,۱)$ و $\omega = V \times \partial D \times (۰,۱)$ به دست می آیند. با یک گسسته‌سازی ثابت، در تمام مسائل FLP حاصل، تعداد نقاط (گره‌ها)، که معادل تعداد متغیرها در مسألهٔ اولیه می‌باشند را ثابت در نظر می‌گیریم. بنابراین مسائل اولیه FLP حاصل برای ثابت‌های M، N، $M_۱$، $M_۲$، $M_۳$ و a_j ها و b_k ها به صورت زیر در خواهند آمد:

$$\begin{aligned}
Min: \quad & I(\mu,\nu) := \Sigma_{m=۱}^{M}\alpha_m f_۰(Z_m) + \Sigma_{n=۱}^{N}\beta_n f_۱(z_n) \\
S.\,to: \quad & \Sigma_{m=۱}^{M}\alpha_m F_i(Z_m) + \Sigma_{n=۱}^{N}\beta_n G_i(z_n) = \gamma_i,\ i = ۱,۲,\ldots,M_۱; \\
& \Sigma_{m=۱}^{M}\alpha_m \xi_j(Z_m) = a_j,\ j = ۱,۲,\ldots,M_۲; \\
& \Sigma_{n=۱}^{N}\beta_n \zeta_k(z_n) = b_k,\ k = ۱,۲,\ldots,M_۳; \qquad (۱.٦) \\
& \alpha_m,\ \beta_n \geq ۰,\ m = ۱,۲,\ldots,M,\ n = ۱,۲,\ldots,N.
\end{aligned}$$

α_m و β_n ها ضرایب نامنفی و مجهول بوده و تمام توابع F_i، G_i، γ_i، ξ_j و ζ_k و دیگر پارامترها در [۳۰] معرفی شده‌اند. همچنین مسأله کنترل بهینه سیستم انتشار با شرایط اولیه، مرزی و انتهایی مورد نظر به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
& u_t(x,t) - div\left(\frac{x^۲}{۱+t^۲}\nabla u(x,t)\right) = \frac{\|\nabla u(x,t)\|_E^۲ + ۱}{۱ + x^۲ + u(x,t)^۲} \\
& u_x(۰,t) = ۰,\ \ u_x(۱,t) = v(t); \quad \forall t \in (۰,۱), x \in (۰,۱).
\end{aligned}$$

دامنهٔ سیستم فوق $D = [۰,۱]$ است و لذا $\partial D = \{۰,۱\}$، یعنی مرز دامنه تنها شامل دو نقطه $s = ۰$ و $s = ۱$ است. با توجه به شرط مرزی $u_x(۰,t) = ۰$، می‌توان نتیجه گرفت که همیشه

کنترل روی مرز $s = \circ$ برابر صفر است. با شرط پایانی $g(x) = \circ/\circ ۷۵ = u(., T = ۱)$، هدف یافتن کمینه برای مسأله (۱.۶) است به طوری که $f_\circ := \frac{u^۲ + \|\nabla\|_E^۲}{۱ + sin^۲(ut)}$ و $f_۱ \equiv \circ$. با انتخاب $A = [\circ, ۱]$ و $B = [-۵, ۵] \times [-۵, ۵]$ و $V = [-۱\circ, ۱\circ]$، از تقسیم هر یک از بازه‌های تشکیل دهندهٔ $\Omega = A \times B \times D \times (\circ, ۱)$ به ۱۰ قسمت، $۱\circ^۵$ حجره به دست می‌آید. همچنین به تعداد $M = ۱\circ^۵$ نقطه $Z_m = (u_m, w_m, x_m, t_m)$ که نقاط وسط هر یک از حجره‌های حاصل می‌باشند، انتخاب گردیدند. در گسسته سازی $\omega = V \times \partial D \times (\circ, ۱)$، با توجه به این که بر مرز $s = \circ$ کنترل صفر است، پس $s_n = \circ$ و $v_n = \circ$ و بازه زمانی $(\circ, ۱)$ را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم شد تا ۱۰ نقطه $z_n = (v_n, s_n, t_n)$ اختیار گردند. روی مرز $s = ۱$، بازه کنترلی V به ۲۰ و بازه زمانی به ۱۰ قسمت تقسیم شد و تعداد ۲۰۰ نقطه $z_n = (v_n, ۱, t_n)$ (نقاط وسط هر یک از حجره‌ها) انتخاب شدند. از این رو $N = ۱\circ + ۲\circ\circ = ۲۱\circ$ نقطه $z_n = (v_n, s_n, t_n)$ در ω برگزیده شدند. پس به تعداد $M + N = ۱\circ^۵ + ۲۱\circ$ متغیر در مسائل اولیه و در نتیجه به همین تعداد، قید در مسائل دوگان مرتبط با مسائل اولیه وجود خواهند داشت.

اکنون به تشریح یکی از مسائل حل شده از این دسته می‌پردازیم. با تقسیم مربع $[\circ, ۱] \times [\circ, ۱]$ به ۱۶ مربع مساوی، توابع ξ در روابط (۱.۶) را توابع مشخصه بر این مربع ها و همچنین با تقسیم $\Gamma_T = \{\circ, ۱\} \times [\circ, ۱]$ به ۴ بازه مساوی ، توابع ζ را نیز توابع مشخصه بر این بازه ها اختیار می کنیم؛ لذا تعداد قیود مسأله ۳۰ قید خواهد شد. حال بنا به آنچه که گذشت، مسأله برنامه ریزی خطی اولیه مورد نظر چنین خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
&Min: \quad \Sigma_{m=۱}^{۱\circ^۵} \alpha_m f_\circ(Z_m)\\
&S.to: \quad \Sigma_{m=۱}^{۱\circ^۵} \alpha_m F_i(Z_m) + \Sigma_{n=۱}^{۲۱\circ} \beta_n G_i(z_n) = \gamma_i, \quad i = ۱, ۲, \ldots, ۱\circ;\\
&\Sigma_{m=۱}^{۱\circ^۵} \alpha_m \xi_j(x_m, t_m) = \tfrac{۱}{۱۶}, \quad j = ۱, ۲, \ldots, ۱۶; \qquad\qquad (۲.۶)\\
&\Sigma_{n=۱}^{۲۱\circ} \beta_n \zeta_k(s_n, t_n) = \tfrac{۱}{۲}, \quad k = ۱, ۲, ۳, ۴;\\
&\alpha_m \geq \circ,\ \beta_n \geq \circ,\ m = ۱, ۲, \ldots, ۱\circ^۵,\ n = ۱, ۲, \ldots, ۲۱\circ.
\end{aligned}
$$

با حل این مسأله مقدار بهینه تابع هدف ۰.۶۹۰۶۲۳۵۹۳۰۰۹۸۳۰۹ به دست آمد. از حل مسأله برنامه ریزی خطی اولیه متناهی، مقادیر β_n ها نیز به دست می آیند؛ آنگاه با استفاده از آنها تابع کنترل مطابق روش ذکر شده در [۲۱] قابل رسم است؛ توجه داریم که بر مرز $s = \circ$ کنترل نیز صفر می‌باشد. آنگاه مطابق روند بیان شدهٔ فوق تعداد ۴۰ مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی متناهی نظیر (۲.۶) بر مبنای افزایش تعداد قیود مطابق روش همگرایی، مطرح و حل گردیدند که تعدادی از این نتایج در زیر آورده شده است:

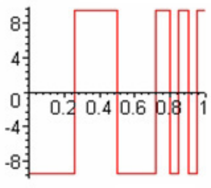
تعداد قیود	مقدار بهینه
۸	۰/۶۲۰ ۲۶۶ ۰۹۷ ۵۹۹ ۷۶۷ ۸
۱۴	۰/۶۶۷ ۳۵۱ ۹۵۹ ۴۵۳ ۹۲۴ ۰
۲۲	۰/۶۷۱ ۸۷۷ ۷۹۵ ۹۰۵ ۶۶۶ ۵
۴۴	۰/۶۹۰ ۹۰۴ ۴۸۱ ۹۱۰ ۷۵۷ ۳
۶۰	۰/۶۹۰ ۹۲۶ ۵۵۲ ۴۷۸ ۹۲۱ ۸
۷۶	۰/۶۹۱ ۳۹۴ ۴۳۴ ۸۲۳ ۴۹۵ ۱
۸۶	۰/۶۹۲ ۰۵۸ ۵۹۷ ۸۸۴ ۹۲۴ ۵
۹۰	۰/۶۹۳ ۲۵۵ ۳۷۱ ۹۲۰ ۴۳۴ ۱
۹۱	۰/۶۹۳ ۳۷۷ ۳۷۰ ۷۹۴ ۹۴۸ ۵
۹۳	۰/۶۹۴ ۰۷۵ ۱۵۹ ۵۲۸ ۸۱۹ ۸
۹۴	۰/۶۹۴ ۱۰۰ ۳۷۸ ۳۸۷ ۵۵۵ ۰

در تمام مسائل، نحوهٔ گسسته سازی فضا ثابت فرض شده است. لازم به ذکر است که با این فرض پس از طی مراحلی، افزایش دو دسته از قیود از نوع توابع مشخصه امکان پذیر نبود؛ زیرا با افزایش شبکه‌بندی در هر یک از اجزاء فضاهای مرتبط به بیش از ۲۰ حجره، نظر به ثابت بودن تعداد گره‌ها، مسائل FLP نشدنی می‌شدند. لذا افزایش قیود در جهت ازدیاد توابع ψ_i ادامه یافت. این روند را تا جایی ادامه دادیم که اختلاف تعداد مورد نظری از جواب‌ها از حدی مطلوب کمتر باشد (شرط توقف) (لازم به ذکر است که در روش نشاندن میزان نزدیکی جواب مسأله FLP به جواب مسأله اصلی هنوز مسأله‌ای باز است).

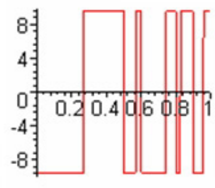
همان گونه که ملاحظه می‌شود با افزایش قیود (و در نتیجه محدود شدن فضای جواب)، مقدار جواب بهینه نیز در حال افزایش می‌باشد. از نحوهٔ افزایش جواب‌های بهینه به دست آمده از جدول فوق نتیجه می‌شود که ۰/۷ کران بالای نزدیک مسأله است. لذا دنبالهٔ جواب‌ها از پایین به مقدار Min مسأله اولیه نیمه نامتناهی و از بالا به مقدار Max مسأله دوگان نیمه نامتناهی همگرا می‌باشد.

در ازای هر یک از جواب‌های به دست آمده برای مسائل FLP، یک تابع کنترل بهینه متناظر از روش ذکر شده در [۲۱] با کمک نرم‌افزار Maple 8 رسم گردید. نمودارهای به دست آمده به صورت قطعه‌ای ثابت با دو مقدار ثابت ۹/۵− و ۹/۵ می‌باشند. خاطر نشان می‌شود که در نمودارهای زیر، محور افقی مربوط به متغییر زمان و محور عمودی مربوط به متغیر کنترل v می‌باشد و اعداد زیر نمودارها بیانگر تعداد قیود مسأله FLP متناظر می‌باشند. با مشاهدهٔ روند تغییر این نمودارها و این که افزایش تعداد قیود دسته دوم (همانگونه که اشکال نشان می‌دهند) موجب افزایش تعداد سویچ ها می‌شود، می‌توان نتیجه گرفت که کنترل بهینه مسأله $SILP$ (یا حالت کلی $INLP$) در شرایط این مسأله، تابعی قطعه‌ای ثابت دو مقداری (با مقادیر ۹/۵− و ۹/۵) است. به علاوه این توابع دارای

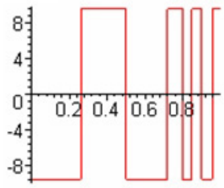
تعداد زیادی سویچ در انتها می‌باشند که به صورت متناوب این دو مقدار را اختیار می‌کنند.



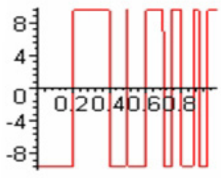
86



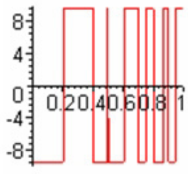
90



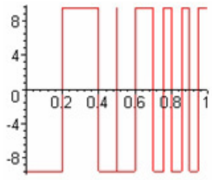
91



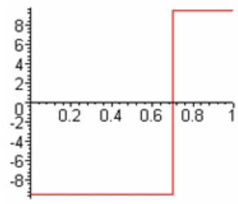
92



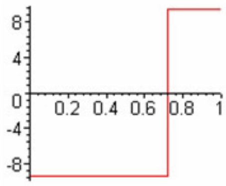
93



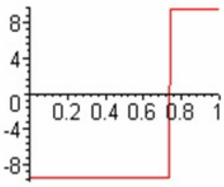
94



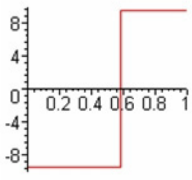
8



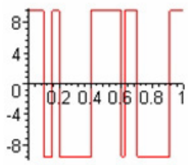
14



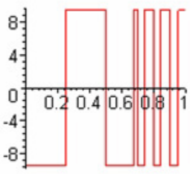
22



44



60



76

مراجع

[1] Anderson, E. J. and Nash, P., *Linear Programming in Infinite Dimensional Space,* Theory and Application, John Wiley and Sons, 1987.

[2] Charnes, A. ,Cooper, W. W. and Kortanek, K. O., *Duality in semi-infinite programs and some works of Haar and Caratheodory,* Managment Sci,9,209-228, 1963.

[3] Dall' Aglio M., *On Some Applications of SILP to Probability and Statistics, semi-infinite programming, Eds.Gobernal/Lopez.* (Alicante 1999), 237-254, Non-convex Optim.Appl., 57, Kluwer Acad.Publ., Dordretch, 2001.

[4] Duffin, R. J. and Karlovitz, L. A., *An infinite linear program with a duality gap.* Managment Sci., 12, 122-134, 1965.

[5] Genotte, G., *Optimal portfolio choices under incomplete information,* the journal of Finance 41(3), 733-746, 1986.

[6] Glashoff, K., *Duality theory of semi-infinite programming, in R Hehich(ed)semi-infinite programming,* Springer-Verlag ,Berlin, 1979.

[7] Glashoff, K. and Gustafson, S. A., *Linear Optimization and Approximation.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[8] Gockenbach, M. S. and Kearsley, A. J., *Optimal signal sets for non-Gausian detectors.* SIAM Journal on Optimization, **Vol.9, No.2**, pp.316-326, 1999.

[9] Haar, A., *Uber linear ungleichungen,* Acta.Math. (Szeged),2,1-14, 1924.

[10] Haaren, A. and Retagen, E., *A semi-infinite programming Algorithm for Robot trajectory planning,* Ph.D. Thesis, University of Trier, 1992.

[11] Hettich, R., *An implementation of a discretization methods for semi-infinite programming,* Mathematical Programming, **Vol.34, No. 3**, pp. 354-361, 1986.

[12] Hettich, R. and Kortanek, K. O., *Semi-infinite programming: Theory, methods and applications,* SIAM Review, **Vol. 35, No.3**, pp. 380-429, 1993.

[13] Inuiguchi M., Tanino T. *Fuzzy Linear Programming With Interactive Uncertain Parameters,* Reliable Computing ,**Vol. 10, No. 5**, pp.357-367, 2004.

[14] Jess A., Jongen, H. T., Neralic, L., and Stein, O., *A semi-infinite programming model in data envelopment analysis,* Optimization 49,369-385, 2001.

[15] Krabs, W., *Optimization and Application.* Wisley, New York, 1979.

[16] Lawrence, C. T., *A Computationally efficient feasible sequencial quadratic programming algorithm,* Ph.D. Thesis, Institute for Systems Research, University of Maryland, 1998.

[17] Li, Y. and Wang, D., *A SILP model for earliness/tardiness production planning with simulated annealing,* Mathl. Comput. Modelling, **Vol. 26**, pp.35-42, 1997.

[18] Marin, S. P., *Optimal parametrization for curves for robot trajectory design,* IEEE Transactions on Automatic Control, **Vol. 33**, pp. 209-214, 1988.

[19] Potchinkov, A. W., *The design of nonrecursive digital filters via convex optimization,* 1998.(http://citeseer.ist.psu.edu/potchinkov98 design.html)

[20] Reemtsen, R. W., *Discretization methods for the solution of semi-infinite programming problems,* Journal of Optimization Theory and Applications, **Vol. 71, No. 1**, pp.85-103, 1991.

[21] Rubio J. E., *Control and Optimization*: the linear treatment of nonlinear problems. Manchester University Press, Manchester, 1986.

[22] Rubio, J. E., *The global control of nonlinear diffusion equations.* SIAM J. Control and Optimization, **Vol. 1, No. 33**, pp308-322, 1995.

[23] Rudolph, H., k *Global solution in optimal control via SILP*, Lecture Note in Control and Inform. Sci.143, Springer-Verlag, New York, pp.394-402, 1990.

[24] Rudolph, H., *The SILP relaxation method in optimal control theory*: General Boundary Condition. Z. Anal. Anwendungen, I, II(11): 143-152, pp.431-436, 1992.

[25] Sanchez-Soriano J., Llorca N., Tijs S. and Timmer J., *Semi-infinite assignment and transportation games. Semi-infinite programming, Eds. Goberna/Lopez,* (Alicante, 1999), 349-363, Nonconvex Optim. Appl., 57, Kluwer Acad. Puble., Dordrecht, 2001.

[26] Vaz, A. I. F., Fernandes, E. M. G. P. and Gomes, M. P. S. F., *Optimal signal sets via Semi-Infinite Linear Programming,* Invertigação Operacional, **Vol. 22, No.1**, pp.87-101, 2002.

[27] Vaz,A.I.F., *Robot trajectory planning with semi-infinite programming, parissept. 26-29, O.R.P, 2001.(http://mapage.noos.*fr/orp-3/proceed.html)

[28] Von Stryk, O. and Schlemmer, M., *Optimal control of the industrial robot manutec* , R. Bulirsch, D. Kraft (eds.):Computational Optimal Control, International Series of Numerical Mathematics, **Vol. 115**, pp.367-382, 1994.

[29] Wang, G. A., *A SILP model for Earliness/Tardiness production planning with a genetic algorithm,* Computers and Mathematics with Applications, **Vol. 31, No. 8**, pp.95-106, 1996.

[۳۰] فخارزاده جهرمی، ع.، اعلام پور، ع. و ترابی، پ. کارایی روش گلاشف ـ گوستاوسون برای تقریب بهتر در حل مسائل کنترل بهینه به روش نشاندن. مجله علوم دانشگاه شهید چمران اهواز، شماره ۱۰، زمستان ۱۳۸۱.

سارا ابراهیمی، saraaau@gmail.com
دانشگاه آزاد اسلامی واحد آشتیان، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

علیرضا فخارزاده جهرمی، a_fakharzadeh@sutech.ac.ir
دانشگاه صنعتی شیراز، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی