فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۱، شمارهٔ ۷۱ (پاییز و زمستان ۱۴۰۱) صص. ۱۹ تا ۴۵

مروری بر مفهوم آشوب در دستگاه‌های دینامیکی گسسته

منیره اکبری✉، مریم ربیعی

چکیده. هدف ما در این مقاله معرفی و بررسی پنج تعریف متداول برای آشوب در دستگاه‌های دینامیکی گسسته و مقایسهٔ آن‌ها با یکدیگر روی بازه‌های فشرده است. این پنج تعریف، که آشوب را از زوایای مختلف توصیف می‌کنند، عبارت‌اند از: آشوب لی–یورک، آشوب توپولوژیک، ω–آشوب، آشوب بلاک–کاپل، و آشوب دیوینی.

۱ مقدمه و تعریف‌های اولیه

آشوب یکی از ویژگی‌های است که در یک دستگاه دینامیکی پیچیده مورد بررسی قرار می‌گیرد. پدیدهٔ آشوب حتی در رفتار نگاشت‌های بسیار ساده نیز مشاهده می‌شود. ایدهٔ اولیه آشوب، بدون تعریف این اصطلاح، از آزمایش‌های تجربی در فیزیک و دیگر شاخه‌های علوم نشأت گرفته است و به همین علت تعریف واحدی از آن وجود ندارد. گرچه اصطلاح «آشوب» در دستگاه‌های دینامیکی گسسته را اولین‌بار لی و یورک در سال ۱۹۷۵ در [۱۷] به کار بردند، یکی از دلایل توسعهٔ این مفهوم انتشار مقالهٔ وجود دورهای یک نگاشت پیوسته از خط حقیقی به خودش نوشتهٔ شارکوفسکی (به زبان روسی) در ۱۹۶۴ است [۱۸]. در نیمهٔ دوم قرن بیستم علاقه به دینامیک آشوبناک گسترش یافت و تلاش‌های زیادی برای بیان تعریف دقیق ریاضی از آشوب صورت گرفت. برخی از آثار برجسته در این زمینه عبارت‌اند از [۱۰، ۱۱، ۲۱]. با انتشار کتاب مقدمه‌ای بر دینامیک آشوبناک [۱۲] نوشتهٔ دیوینی در سال ۱۹۸۶ موضوع آشوب مورد توجه جامعه ریاضی قرار گرفت.

هدف ما در این مقاله بررسی پنج تعریف مختلف از آشوب در دستگاه‌های دینامیکی گسسته

عبارات و کلمات کلیدی: آشوب بلاک–کاپل، آشوب توپولوژیک، آشوب دیوینی، آشوب لی–یورک، ω–آشوب
نوع مقاله: مروری؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۹/۲۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۴/۶

doi: 10.30504/mct.2023.1257.1876

است که معمولاً مورد استفادهٔ ریاضی‌دانان است؛ البته تعریف‌های دیگری از آشوب نیز در منابع تخصصی وجود دارد. تلاش ما بر این است که متداول‌ترینِ این تعریف‌ها را مطرح و بررسی کنیم. تعریف‌ها و بعضی از ویژگی‌های این تعریف‌ها را در بخش‌های ۲ تا ۶ بیان کرده‌ایم. تعریف‌ها را برای حالت کلی و روی فضاهای متری یا فضاهای متری فشرده بیان و در بخش آخر، بخش ۷، رابطهٔ آن‌ها را روی بازه‌های فشرده بررسی کرده‌ایم. برای اجتناب از طولانی شدن مطلب و طرح مفاهیم پیچیدهٔ ریاضی، اثبات بعضی احکام را، تا آنجا که از بحث اصلی دور نیفتیم، آورده‌ایم.

ابتدا، تعاریف و مفاهیم اولیه را یادآوری می‌کنیم. یک دستگاه دینامیکی پیوسته، از فضای X و یک خانوادهٔ تک‌پارامتری از نگاشت‌های $\{f^t : X \to X\}$ برای $t \in \mathbb{R}$ یا $t \in \mathbb{R}^+$ تشکیل می‌شود که در شرط $f^{t+s} = f^t \circ f^s$ و $f^0 = \mathrm{id}$ صدق می‌کنند. برای مثال، جواب‌های معادلهٔ دیفرانسیل $x'(t) = f(x)$ یک دستگاه دینامیکی پیوسته تعریف می‌کنند ($f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ نگاشتی در C^1 است). یک دستگاه دینامیکی گسسته مرکب است از مجموعهٔ ناتهی X و نگاشت $F : X \to X$. با تعریف $F^n = F \circ F^{n-1}$ و $F^0 = \mathrm{id}$، در یک دستگاه دینامیکی گسسته نیز رابطهٔ $F^{m+n} = F^m \circ F^n$ به‌ازای هر $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ برقرار است. برای $x \in X$، مجموعهٔ $\mathrm{O}_F(x) = \{x, F(x), \ldots, F^n(x), \ldots\}$ را مدار[1] x تحت F می‌نامیم. نقطهٔ x یک نقطهٔ تناوبی[2] نگاشت F است هرگاه عدد طبیعی‌ای مانند n وجود داشته باشد به‌طوری‌که $F^n(x) = x$. کوچک‌ترین n با این ویژگی را دورهٔ تناوب[3] x می‌نامیم. نقطهٔ x را نهایتاً تناوبی می‌گوییم اگر $\mathrm{O}_F(x)$ یک مجموعهٔ متناهی باشد. اگر X فضای متری باشد، نقطهٔ $x \in X$ را یک نقطهٔ تقریباً تناوبی[4] می‌نامیم اگر برای هر $\varepsilon > 0$ یک نقطهٔ تناوبی مانند z در فضا وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\limsup\limits_{n\to\infty} d(F^n(x), F^n(z)) < \varepsilon$. زیرمجموعهٔ A از X را Fـناوردا[5] می‌نامیم اگر $F(A) \subseteq A$.

فرض می‌کنیم X و Y دو فضای متری باشند. دستگاه دینامیکی $F : X \to X$ با دستگاه دینامیکی $G : Y \to Y$ نیم‌مزدوج[6] است اگر نگاشت پیوسته و پوشای $\phi : X \to Y$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\phi \circ F = G \circ \phi$. دراین‌صورت، ϕ را نگاشت نیم‌تزویج گوییم. درحالتی‌که ϕ یک همسان‌ریختی (یعنی تابعی پیوسته و وارون‌پذیر با وارون پیوسته) باشد آن را نگاشت تزویج[7] و دو دستگاه را مزدوج می‌گوییم.

[1]orbit [2]periodic point [3]period [4]approximately periodic [5]F-invariant [6]semi conjugate [7]conjugacy map

مجموعهٔ همه دنباله‌ها با دو نماد ۰ و ۱ را با Σ_2 و یا به‌اختصار با Σ نمایش می‌دهیم. برای $u = (u_0u_1u_2\cdots)$ و $s = (s_0s_1s_2\cdots)$ متعلق به Σ تعریف می‌کنیم $d(u,s) = \frac{1}{2^k}$ که در آن k کوچک‌ترین اندیسی است که $u_k \neq s_k$. اگر چنین اندیسی وجود نداشته باشد، آنگاه تعریف می‌کنیم $d(u,s) = 0$. زوج (Σ, d) را فضای دنباله‌ها[1] می‌نامیم. نگاشت $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ با ضابطهٔ $\sigma(s_0s_1s_2\cdots) = (s_1s_2\cdots)$ را نگاشت انتقال[2] می‌گوییم؛ این نگاشت پیوسته است. نماد $(s_0s_1\cdots s_{n-1}\overline{a_na_{n+1}\cdots a_{n+k}})$ به این معناست که بلوک $a_na_{n+1}\cdots a_{n+k}$ در نمایش بالا تکرار شده است؛ بدیهی است که $\sigma^n(\overline{a_1a_2\cdots a_n}) = (\overline{a_1a_2\cdots a_n})$.

۲ آشوبِ لی-یورک

در سال ۱۹۷۵ لی و یورک در مقاله‌ای با عنوان دورهٔ تناوب سه، آشوب را نتیجه می‌دهد [۱۷] قضیهٔ زیر را ثابت کردند.

قضیه ۱.۲. فرض کنید J یک بازه و $F : J \to J$ پیوسته باشد. فرض کنید عدد $a \in J$ وجود دارد به‌طوری‌که $b = F(a)$، $c = F^2(a)$ و $d = F^3(a)$ در نابرابری

$$d \le a < b < c \quad (d \ge a > b > c)$$

صدق کنند. دراین‌صورت،

(۱) برای هر $k \in \mathbb{N}$ نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب k وجود دارد.

(۲) مجموعهٔ ناشمارای $S \subseteq J$ (که شامل هیچ نقطهٔ تناوبی نیست) وجود دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند.

(الف) برای هر $p, q \in S$ با شرط $p \neq q$،

$$\limsup_{n\to\infty} |F^n(p) - F^n(q)| > 0$$

و

$$\liminf_{n\to\infty} |F^n(p) - F^n(q)| = 0;$$

(ب) برای هر $p \in S$ و هر نقطهٔ تناوبی $q \in J$،

$$\limsup_{n\to\infty} |F^n(p) - F^n(q)| > 0.$$

---

[1] sequence space [2] shift map

لی و یورک در [۱۷] متذکر می‌شوند که قضیهٔ ۱.۲ نشان می‌دهد که رفتار آشوبناک برای هر معادلهٔ تفاضلی در هر شرایطی که در آن اندازهٔ جمعیت در یک یا چند نسل متوالی رشد کرده و به بیشترین اندازهٔ ناپایدار خود رسیده و سپس به سطح اولیه یا پایین‌تر کاهش یابد، ظاهر می‌شود. به‌این‌ترتیب، آشوب به مفهوم لی–یورک در فضاهای متری فشرده مطرح شد؛ هرچند شرط فشردگی در این تعریف ضرورت ندارد، وجود آن امکان بررسی خواص بیشتری را فراهم می‌سازد.

تعریف ۲.۲. فرض کنید (X,d) فضای متری فشرده و $F:X\to X$ نگاشتی پیوسته باشد. زیرمجموعهٔ $S\subseteq X$ را یک مجموعهٔ درهم‌ریخته[1] می‌نامند اگر برای هر $x,y\in S$ به‌طوری‌که $x\neq y$ و هر نقطهٔ تناوبی $p\in X$ سه شرط زیر برقرار باشد.

(الف) $\limsup_{n\to\infty} d(F^n(x),F^n(y))>0$؛

(ب) $\liminf_{n\to\infty} d(F^n(x),F^n(y))=0$؛

(پ) $\limsup_{n\to\infty} d(F^n(x),F^n(p))>0$.

اکنون نگاشت $F:X\to X$ به مفهوم لی–یورک آشوبناک (L/Y–آشوبناک) نامیده می‌شود اگر زیرمجموعهٔ ناشمارای درهم‌ریختهٔ $S\subseteq X$ وجود داشته باشد.

ملاحظه ۳.۲. شرط (پ) در تعریف بالا زائد است زیرا بنابر [۱۰، بخش ۶، لم ۲۸] اگر x و y دو نقطهٔ تقریباً تناوبی باشند، آنگاه

(۱) $\limsup_{n\to\infty} d(F^n(x),F^n(y))=0$، یا

(۲) $\liminf_{n\to\infty} d(F^n(x),F^n(y))>0$.

بنابراین، مجموعه S با شرایط (الف) و (ب) حداکثر یک نقطهٔ تقریباً تناوبی دارد که با حذف آن از مجموعهٔ S مجموعهٔ جدید در شرط (پ) نیز صدق می‌کند.

چون نگاشت‌های پیوسته روی فضاهای متری فشرده، پیوسته یکنواخت‌اند می‌توان دید که شرایط L/Y–آشوب تحت تزویج حفظ می‌شود. درواقع، اگر $F:X\to X$ و $G:Y\to Y$ تحت نگاشت تزویج $\phi:X\to Y$ مزدوج یکدیگر باشند و $S\subseteq X$ زیرمجموعه‌ای ناشمارا و درهم‌ریخته از X باشد، آنگاه $\phi(S)\subseteq Y$ نیز زیرمجموعهٔ ناشمارای درهم‌ریخته‌ای از Y است؛ زیرا اگر $\phi(x_1)$ و $\phi(x_2)$ چنان باشند که $\limsup_{n\to\infty} d(G^n(\phi(x_1)),G^n(\phi(x_2)))=0$، آنگاه

[1] scrambled

با توجه به اینکه $\phi \circ F^n = G^n \circ \phi$، داریم

$$\limsup_{n\to\infty} d(\phi(F^n(x_۱)), \phi(F^n(x_۲))) = ۰. \qquad (۱.۲)$$

اکنون به‌ازای $\varepsilon > ۰$ مفروض، از تعریف پیوستگی یکنواختِ نگاشت $\phi^{-۱} : Y \to X$، مقدار $\delta > ۰$ را به دست می‌آوریم. رابطهٔ (۱.۲) نشان می‌دهد که عدد $N_۰ \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $n \geq N_۰$، $d(\phi(F^n(x_۱)), \phi(F^n(x_۲))) < \delta$. پس برای هر $n \geq N_۰$ نتیجه می‌گیریم $d(F^n(x_۱), F^n(x_۲)) < \varepsilon$. این رابطه به این معنی است که $\limsup\limits_{n\to\infty} d(F^n(x_۱), F^n(x_۲)) = ۰$ که با فرض درهم‌ریخته‌بودن مجموعهٔ S در تناقض است. بررسی شرط (ب) نیز به‌طور مشابه انجام می‌شود.

گزاره ۴.۲. فرض کنید (X, d) فضای متری فشرده باشد. دراین‌صورت، برای هر $k \in \mathbb{N}$ نگاشت پیوستهٔ $F : X \to X$ نگاشتی L/Y-آشوبناک است اگر و فقط اگر نگاشت $F^k : X \to X$ نگاشتی L/Y-آشوبناک باشد.

اثبات. فرض می‌کنیم $F : X \to X$ یک نگاشت L/Y–آشوبناک است. در این صورت، زیرمجموعهٔ ناشمارای $S \subseteq X$ وجود دارد که در شرط‌های (الف) و (ب) از تعریف ۲.۲ صدق می‌کند. نشان می‌دهیم $S \subseteq X$ زیرمجموعه‌ای درهم‌ریخته برای نگاشت F^k نیز هست. فرض می‌کنیم $x, y \in S$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$\limsup_{n\to\infty} d(F^{kn}(x), F^{kn}(y)) = ۰. \qquad (۲.۲)$$

برای $\varepsilon > ۰$ داده‌شده، ابتدا $۰ < \delta < \varepsilon$ را از تعریف پیوستگی یکنواخت توابع $F^i : X \to X$، $۱ \leq i \leq k-۱$، تعیین می‌کنیم. اینک با توجه به (۲.۲)، به‌ازای این δ، عدد طبیعی $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $n > N$، $d(F^{kn}(x), F^{kn}(y)) < \delta$. درنتیجه، برای هر $۱ \leq i \leq k-۱$ و هر $n > N$ داریم $d(F^i(F^{kn}(x)), F^i(F^{kn}(y))) < \varepsilon$. به‌ویژه، برای هر $n > kN$، $d(F^n(x), F^n(y)) < \varepsilon$. پس، $\limsup\limits_{n\to\infty} d(F^n(x), F^n(y)) = ۰$ که با شرط (الف) در تعریف ۲.۲ در تناقض است.

همچنین، از شرط (ب) در تعریف ۲.۲، دنبالهٔ اکیداً صعودی مثل $(n_i)_{i\geq ۰}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\lim_{i\to\infty} d(F^{n_i}(x), F^{n_i}(y)) = ۰. \qquad (۳.۲)$$

پس ثابت $\circ \leq r \leq k-۱$ وجود دارد به‌طوری‌که برای تعداد نامتناهی از n_iها داریم $n_i = k\ell_i + r$ که در آن $\ell_i \geq ۱$. دوباره برای $\varepsilon > \circ$ مفروض، $\delta > \circ$ را از تعریف پیوستگی یکنواخت نگاشت $F^{k-r} : X \to X$ تعیین می‌کنیم. از (۳.۲) نتیجه می‌شود که عدد $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $i > N$، $d(F^{n_i}(x), F^{n_i}(y)) < \delta$ و درنتیجه،

$$d(F^{k(\ell_i+۱)}(x), F^{k(\ell_i+۱)}(y)) = d(F^{k-r}(F^{n_i}(x)), F^{k-r}(F^{n_i}(y))) < \varepsilon.$$

رابطهٔ اخیر نشان می‌دهد که $\liminf_{n\to\infty} d(F^{kn}(x), F^{kn}(y)) = \circ$، پس حکم ثابت می‌شود.

اثبات اینکه اگر $F^k : X \to X$ یک نگاشت L/Y_آشوبناک باشد، آنگاه $F : X \to X$ نیز یک نگاشت L/Y_آشوبناک است، با توجه به روابط زیر بدیهی است.

$$\circ < \limsup_{n\to\infty} d(F^{kn}(x), F^{kn}(y)) \leq \limsup_{n\to\infty} d(F^n(x), F^n(y))$$

و

$$\liminf_{n\to\infty} d(F^n(x), F^n(y)) \leq \liminf_{n\to\infty} d(F^{kn}(x), F^{kn}(y)) = \circ.$$

□

در حالتی که X بازه‌ای فشرده باشد، گزارهٔ زیر برای بررسی آشوب L/Y سودمند است. از این گزاره در بخش ۷ برای بیان مثالی از نگاشتی که L/Y_آشوبناک نیست، استفاده خواهیم کرد.

گزاره ۵.۲ ([۴، گزارهٔ ۴.۳]). فرض کنید I بازه‌ای فشرده باشد. دراین‌صورت، نگاشت پیوستهٔ $F : I \to I$ نگاشتی L/Y_آشوبناک است اگر و فقط اگر نقطه‌ای در I وجود داشته باشد که تقریبا تناوبی نیست.

۳ آشوب توپولوژیک

معمولاً از دیدگاه ریاضی، یک دستگاه با آنتروپی توپولوژیکِ مثبت دستگاهی آشوبناک درنظر گرفته می‌شود. با توجه به [۹]، فورستنبرک در [۱۴] بدون ذکر کلمه آشوب، دستگاه‌های دینامیکی فشرده با آنتروپی توپولوژیکِ صفر را تحت عنوان «قطعی»[1] ذکر کرده است. بعدها در [۱۵]، ضمن بررسی تعریفی از دیوینی، که در بخش ۶ خواهد آمد، آنتروپی توپولوژیک مثبت را به‌عنوان معیار اصلی

[1] deterministic

آشوب مطرح کردند. به‌این‌ترتیب، آنتروپی توپولوژیک مثبت به‌منزلهٔ تعریفی برای آشوب (به نام آشوب توپولوژیک) پذیرفته شده است. چون آنتروپی توپولوژیک کمیتی عددی است، می‌توان میزان آشوبناکی یک دستگاه را مشخص کرد؛ به‌عبارت‌دیگر، می‌توان با استفاده از آنتروپی توپولوژیک، آشوبناکی دو دستگاه را با هم مقایسه کرد.

ابتدا تعریف آنتروپی توپولوژیک را می‌آوریم. فرض می‌کنیم X فضای توپولوژیک فشرده باشد. گردآیه‌ای از زیرمجموعه‌های باز X مانند α یک پوشش باز X است هرگاه اجتماع آن‌ها برابر X باشد. پوشش β یک زیرپوشش α است هرگاه هر عضو β عضوی از α باشد. به‌ازای هر دو پوشش باز α و β، الحاق[1] $\alpha \vee \beta$ گردآیه‌ای از همهٔ $A\cap B$ها است که $A \in \alpha$ و $B \in \beta$. چون X یک فضای فشرده است، هر پوشش باز آن دارای زیرپوشش متناهی است. فرض کنید $N(\alpha)$ مینیمم تعداد اعضای هر زیرپوشش α باشد. آنتروپی پوشش α به‌صورت $H(\alpha) = \log N(\alpha)$ تعریف می‌شود. توجه کنید که اگر α و β دو پوشش باز X باشند، آنگاه با توجه به اینکه به‌ازای هر عضو A از α، عضوی مانند C در $\alpha \vee \beta$ وجود دارد که $C \subseteq A$، بنابراین داریم

$$H(\alpha) \leq H(\alpha \vee \beta). \tag{۱.۳}$$

فرض می‌کنیم $F : X \to X$ نگاشتی پیوسته و α پوششی باز برای X باشد. حالا تعریف می‌کنیم

$$F^{-1}\alpha = \{F^{-1}(A) : A \in \alpha\}$$

و

$$h(F,\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha \vee F^{-1}\alpha \vee \cdots \vee F^{-n+1}\alpha)}{n};$$

این حد، بنابر لم ۱ در بخش ۸ از [۱۰]، وجود دارد. آنتروپی توپولوژیک نگاشت پیوسته‌ای مانند $F : X \to X$ را به‌صورت $h(F) = \sup\limits_{\alpha} h(F,\alpha)$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳ ([۹]). فرض کنید X یک فضای متری فشرده باشد. نگاشت پیوستهٔ $F : X \to X$ را آشوبناک توپولوژیک[2] می‌نامند اگر آنتروپی توپولوژیک نگاشت F مثبت باشد.

اگر هر عضو پوشش باز β در عضوی از پوشش باز α قرار گیرد می‌نویسیم $\alpha < \beta$. بدیهی

[1] join [2] topologically chaotic

است که اگر $\alpha < \beta$، آنگاه $F^{-۱}\alpha < F^{-۱}\beta$. وانگهی، اگر α و β دو پوشش باز X باشند، آنگاه

$$F^{-۱}(\alpha \vee \beta) = F^{-۱}\alpha \vee F^{-۱}\beta. \qquad (۲.۳)$$

همچنین، می‌دانیم اگر $\phi : X \to Y$ همسان‌ریختی باشد، آنگاه α پوشش بازی برای Y است اگر و فقط اگر $\phi^{-۱}(\alpha)$ پوشش باز برای X باشد. بنابراین،

$$H(\alpha) = H(\phi^{-۱}(\alpha)). \qquad (۳.۳)$$

اکنون، با استفاده از (۲.۳)، برای هر پوشش باز α داریم

$$\begin{aligned} h(F^k) &\geq h(F^k, \alpha \vee F^{-۱}\alpha \vee \cdots \vee F^{-k+۱}\alpha) \\ &= \lim_{n\to\infty} k \frac{H(\alpha \vee F^{-۱}\alpha \vee \cdots \vee F^{-k+۱}\alpha \vee F^{-k}\alpha \vee \cdots \vee F^{-nk+۱}\alpha)}{kn} \\ &= kh(F,\alpha). \end{aligned}$$

رابطهٔ اخیر نشان می‌دهد که $\frac{۱}{k}h(F^k)$ یک کران بالا برای همهٔ $h(F,\alpha)$هایی است که α پوشش بازی برای X است. بنابراین،

$$h(F^k) \geq kh(F). \qquad (۴.۳)$$

ازسوی‌دیگر، داریم

$$\alpha \vee (F^k)^{-۱}\alpha \vee \cdots \vee (F^k)^{-n+۱}\alpha < \alpha \vee F^{-۱}\alpha \vee F^{-۲}\alpha \vee \cdots \vee F^{-nk+۱}\alpha.$$

بنابراین، با توجه به (۱.۳)، داریم

$$\begin{aligned} h(F) \geq h(F,\alpha) &= \lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha \vee F^{-۱}\alpha \vee \cdots \vee F^{-nk+۱}\alpha)}{kn} \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha \vee (F^k)^{-۱}\alpha \vee \cdots \vee (F^k)^{-n+۱}\alpha)}{kn} \\ &= \frac{h(F^k,\alpha)}{k}. \end{aligned}$$

ازاین‌رو، با استدلالی مشابه داریم

$$h(F) \geq \frac{h(F^k)}{k}. \tag{۵.۳}$$

از دو نابرابری (۴.۳) و (۵.۳) نتیجه می‌شود

$$h(F^k) = kh(F). \tag{۶.۳}$$

بنابراین، برای هر $k \in \mathbb{N}$، F آشوبناک توپولوژیک است اگر و فقط اگر F^k آشوبناک توپولوژیک باشد. وانگهی، با توجه به روابط (۲.۳) و (۳.۳)، اگر دو نگاشت $F : X \to X$ و $G : Y \to Y$ تحت نگاشت تزویج $\phi : X \to Y$ مزدوج باشند، آنگاه برای هر پوشش باز α از Y، داریم

$$\begin{aligned}
h(G, \alpha) &= \lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha \vee G^{-1}\alpha \vee \cdots \vee G^{-n+1}\alpha)}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{H(\phi^{-1}(\alpha \vee G^{-1}\alpha \vee \cdots \vee G^{-n+1}\alpha))}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{H(\phi^{-1}\alpha \vee \phi^{-1}(G^{-1}\alpha) \vee \cdots \vee \phi^{-1}(G^{-n+1}\alpha))}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{H(\phi^{-1}\alpha \vee F^{-1}(\phi^{-1}\alpha) \vee \cdots \vee F^{-n+1}(\phi^{-1}\alpha))}{n} \\
&= h(F, \phi^{-1}\alpha) \leq h(F).
\end{aligned}$$

بنابراین، $h(G) \leq h(F)$. به‌طور مشابه برای هر پوشش باز α از X داریم $h(F, \alpha) \leq h(G)$. پس، $h(F) = h(G)$.

از قضیهٔ زیر در بخش ۷ برای یافتن رابطهٔ بین آشوب به مفهوم بلاک–کاپل و آنتروپی توپولوژیک استفاده خواهیم کرد.

قضیه ۲.۳ ([۲۳، قضیهٔ ۱.۱]). فرض کنید I بازهٔ فشرده، $F : I \to I$ نگاشتی پیوسته، q عدد طبیعی فرد و بزرگ‌تر از ۱ و p عدد صحیح نامنفی باشد. دراین‌صورت، F نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب $۲^p \times q$ دارد اگر و فقط اگر آنتروپی توپولوژیک F مثبت باشد.

۴ ω–آشوب

در این بخش تعریف دیگری از آشوب با نام ω–آشوب را بیان و برخی از خواص آن را بررسی می‌کنیم

[۱۶]. وجه تمایز این تعریف با آشوب لی-یورک در این است که برای توابع پیوسته روی بازهٔ فشرده، ω-آشوب با آنتروپی توپولوژیک مثبت معادل است، درحالی‌که آشوب لی-یورک این‌گونه نیست. در بخش ۷ به این مباحث خواهیم پرداخت.

فرض می‌کنیم X یک فضای متری فشرده و $F : X \to X$ نگاشتی پیوسته باشد. همچنین، فرض می‌کنیم $X \ni x$ و $\omega(x, F)$ مجموعهٔ نقاط ω-حدی[1] x تحت نگاشت F باشد؛ یعنی مجموعهٔ همه نقاطی که زیردنباله‌ای از $(F^n(x))_{n\geq 1}$ به آن همگرا است. یادآوری می‌کنیم که $\omega(x, F)$ مجموعه‌ای بسته و ناوردا تحت F است. از خواص جالب مجموعه‌های ω-حدی یکی این است که اگر X و Y دو فضای متری فشرده باشند و نگاشت پیوستهٔ $F : X \to X$ با نگاشت پیوسته $G : Y \to Y$ تحت $\phi : X \to Y$ نیم‌مزدوج باشد، آنگاه برای هر $x \in X$ داریم

$$\phi\left(\omega(x, F)\right) = \omega\left(\phi(x), G\right). \qquad (۱.۴)$$

برای اثبات این رابطه فرض کنید $q \in \omega(x, F)$، پس دنبالهٔ صعودی $(n_k)_{k\geq 1}$ از اعداد طبیعی وجود دارد که $\lim\limits_{k\to\infty} F^{n_k}(x) = q$. حالا از پیوستگی ϕ و $\phi \circ F = G \circ \phi$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\lim\limits_{k\to\infty} G^{n_k}(\phi(x)) = \phi(q)$. بنابراین، $\phi(\omega(x, F)) \subseteq \omega(\phi(x), G)$.

حال اگر $z \in \omega(\phi(x), G)$، آنگاه دنبالهٔ صعودی $(n_k)_{k\geq 1}$ در $\mathbb{N}$ وجود دارد که

$$\lim_{k\to\infty} G^{n_k}(\phi(x)) = z. \qquad (۲.۴)$$

از طرفی، چون $F^{n_k}(x) \in X$ و X فشرده است، زیردنباله‌ای از $(F^{n_k}(x))_{k\geq 1}$ وجود دارد که به نقطه‌ای از X مانند $x_\circ$ همگرا است. فرض می‌کنیم زیردنبالهٔ مورد نظر همان $(F^{n_k}(x))_{k\geq 1}$ باشد. پس، $x_\circ \in \omega(x, F)$. دوباره، از پیوستگی ϕ و خواص نیم‌تزویج داریم

$$\lim_{k\to\infty} G^{n_k}(\phi(x)) = \phi(x_\circ). \qquad (۳.۴)$$

روابط (۲.۴) و (۳.۴) نشان می‌دهند که $\phi(x_\circ) = z$. پس $z = \phi(x_\circ) \in \phi(\omega(x, F))$. به‌عبارت‌دیگر، $\omega(\phi(x), G) \subseteq \phi(\omega(x, F))$.

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد خواص مجموعه‌های ω-حدی بخش ۴ از [۱۰] را ببینید؛ همچنین در [۳] اطلاعاتی در این باره آمده است.

[1] ω-limit

تعریف ۱.۴. فرض کنیم $S \subseteq X$ و $F : X \to X$ پیوسته باشد. دراین‌صورت، زیرمجموعهٔ S را ωـدرهم‌ریخته می‌گوییم اگر برای هر $x, y \in S$ با شرط $x \neq y$ داشته باشیم

(الف) مجموعهٔ $\omega(x, F) \setminus \omega(y, F)$ ناشمارا باشد؛

(ب) مجموعهٔ $\omega(x, F) \cap \omega(y, F)$ ناتهی باشد؛

(پ) مجموعهٔ $\omega(x, F)$ شامل حداقل یک نقطهٔ غیرتناوبی باشد.

اکنون نگاشت F را ωـآشوبناک می‌نامیم اگر زیرمجموعهٔ ناشمارای ωـدرهم‌ریختهٔ S وجود داشته باشد.

ملاحظه ۲.۴. ثابت شده است که برای بازه‌های فشرده اگر هر نقطه در $\omega(x, F)$ نقطهٔ تناوبی باشد، آنگاه $\omega(x, F)$ مجموعهٔ متناهی است [۱۹، ۲۰]. بنابراین، در این حالت شرط (پ) در تعریف بالا ضروری نیست.

گزارهٔ زیر نشان می‌دهد که ویژگی ωـآشوب تحت تزویج حفظ می‌شود.

گزاره ۳.۴. اگر X و Y دو فضای متری فشرده باشند و نگاشت پیوستهٔ $F : X \to X$ با نگاشت پیوستهٔ $G : Y \to Y$ تحت $\phi : X \to Y$ مزدوج باشد، آنگاه F نگاشتی ωـآشوبناک است اگر و فقط اگر G نگاشتی ωـآشوبناک باشد.

اثبات. فرض می‌کنیم F یک نگاشت ωـآشوبناک است. پس زیرمجموعهٔ ناشمارای ωـدرهم‌ریختهٔ S وجود دارد به‌طوری‌که در خواص گفته‌شده در تعریف ۱.۴ صدق می‌کند. با توجه به اینکه نگاشت تزویج یک‌به‌یک و پوشا است، با استفاده از برابری (۱.۴) برای هر $x, y \in S$ که $x \neq y$ داریم

۱. $\phi(\omega(x, F) \setminus \omega(y, F)) = \omega(\phi(x), G) \setminus \omega(\phi(y), G)$ ناشمارا است؛

۲. $\phi(\omega(x, F) \cap \omega(y, F)) = \omega(\phi(x), G) \cap \omega(\phi(y), G)$ ناتهی است؛

۳. $\phi(\omega(x, F)) = \omega(\phi(x), G)$ شامل حداقل یک نقطهٔ غیرتناوبی است.

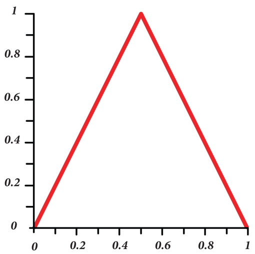
پس $\phi(S) \subseteq Y$ زیرمجموعهٔ ناشمارای ωـدرهم‌ریخته است. بنابراین، G نگاشتی ωـآشوبناک است. □

۵ آشوبِ بلاک‌ـکاپل

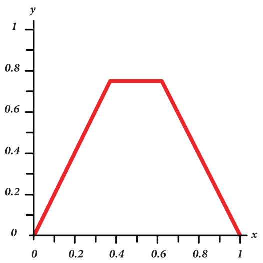
بلاک و کاپل تعریف دیگری از آشوب ارائه دادند که در ادامه به بررسی آن می‌پردازیم. بدین منظور، لازم است ابتدا نگاشت متلاطم و نگاشت اکیداً متلاطم را معرفی کنیم.

تعریف ۱.۵. فرض کنید I بازه و $F: I \to I$ نگاشتی پیوسته باشد. نگاشت F متلاطم[1] نامیده می‌شود اگر زیربازه‌های فشردهٔ J و K با حداکثر یک نقطهٔ مشترک وجود داشته باشند به‌طوری‌که $J \cup K \subseteq F(J) \cap F(K)$. اگر J و K را بتوان به‌گونه‌ای انتخاب کرد که با هم اشتراک نداشته باشند، نگاشت F اکیداً متلاطم[2] نامیده می‌شود.

بدیهی است اگر F اکیداً متلاطم باشد متلاطم نیز است. ولی عکس این مطلب لزوماً درست نیست. برای مثال، نگاشت خیمه[3] $g: [۰, ۱] \to [۰, ۱]$ با ضابطهٔ $g(x) = ۱ - |۲x - ۱|$ (شکل ۱ (الف)) متلاطم است، زیرا کافی است بازه‌های $J = [۰, \frac{۱}{۲}]$ و $K = [\frac{۱}{۲}, ۱]$ را در نظر بگیریم. این نگاشت اکیداً متلاطم نیست زیرا هریک از بازه‌های $[۰, \frac{۱}{۲}]$ و $[\frac{۱}{۲}, ۱]$ را به‌طور یک‌به‌یک و پوشا به بازهٔ $[۰, ۱]$ تصویر می‌کند.



(الف) نمودار نگاشت خیمه



(ب) نمودار نگاشت خیمهٔ بریده به‌ازای $\lambda = \frac{۳}{۴}$

شکل ۱

لم زیر رابطهٔ بین تلاطم و دورهٔ تناوب نقاط تناوبی را آشکار می‌سازد.

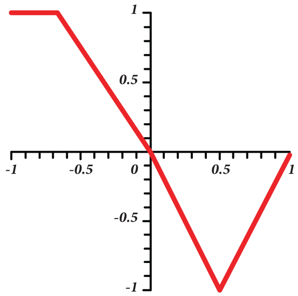
لم ۲.۵ ([۱۰، بخش ۲، لم ۳]). اگر F متلاطم باشد، آنگاه به‌ازای هر عدد طبیعی $n \geq ۱$، نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب n دارد.

همچنین، از تعریف ۱.۵ نتیجه می‌شود که اگر F (اکیداً) متلاطم باشد، آنگاه به‌ازای هر $n > ۱$، F^n نیز (اکیداً) متلاطم است. توجه کنید که اگر به‌ازای nی بزرگ‌تر از ۱، نگاشت F^n متلاطم باشد، آنگاه F لزوماً متلاطم نخواهد بود. مثلاً، نگاشت تکه‌ای‌خطی پیوستهٔ $F: [-۱, ۱] \to [-۱, ۱]$ با ضابطهٔ

$$F(-۱) = F(-\frac{۲}{۳}) = ۱, \quad F(۰) = ۰, \quad F(\frac{۱}{۲}) = -۱, \quad F(۱) = ۰$$

[1] turbulent [2] strictly turbulent [3] tent map

را درنظر بگیرید (شکل ۲). اگر $J = [0, \frac{1}{2}]$ و $K = [\frac{1}{2}, 1]$، آن‌وقت به‌راحتی می‌بینیم که



شکل ۲. نمودار نگاشتی که متلاطم نیست ولی تکرار دوم آن متلاطم است.

$F^2(J) = F^2(K) = [0, 1]$. بنابراین، F^2 نگاشتی اکیداً متلاطم است ولی F هیچ نقطهٔ تناوبی با دوره تناوب فرد بزرگ‌تر از ۱ ندارد، و بنابراین F نگاشتی متلاطم نیست.

قضیه ۳.۵ ([۱۰، بخش۲، قضیهٔ ۱۴]). فرض کنید عدد طبیعی $n \geq 1$ به‌صورت توانی از ۲ نباشد. دراین‌صورت، گزاره‌های زیر هم‌ارزند.

(۱) F دارای نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب n است.

(۲) F^n اکیداً متلاطم است.

(۳) F^n متلاطم است.

از لم و قضیهٔ بالا می‌توان نتیجه گرفت که شرایط زیر هم‌ارزند.

(ش۱) F دارای نقطه‌ای تناوبی است که دورهٔ تناوب آن به‌صورت توانی از ۲ نیست.

(ش۲) عدد طبیعی m وجود دارد به‌طوری‌که F^m اکیداً متلاطم است.

(ش۳) عدد طبیعی n وجود دارد به‌طوری‌که F^n متلاطم است.

اکنون آماده‌ایم آشوب به مفهوم بلاک–کاپل را تعریف کنیم.

تعریف ۴.۵. فرض کنید I بازه‌ای باشد. نگاشت پیوستهٔ $F : I \to I$ آشوبناک به مفهوم بلاک–کاپل یا B/C–آشوبناک نامیده می‌شود هرگاه یکی از شرایط (ش ۱)–(ش ۳) برقرار باشد.

از تعریف بالا و قضیهٔ ۲.۳ نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۵.۵. فرض کنید I بازه‌ای فشرده باشد. دراین‌صورت، نگاشت پیوستهٔ $F : I \to I$ نگاشتی B/C-آشوبناک است اگر و فقط اگر $h(F) > 0$.

همچنین، با توجه به برابری (۶.۳) نتیجهٔ زیر نیز به دست می‌آید.

نتیجه ۶.۵. نگاشت F نگاشتی B/C-آشوبناک است اگر و فقط اگر به‌ازای هر $n > 1$ نگاشت F^n نگاشتی B/C-آشوبناک باشد.

در گزارهٔ بعد ویژگی دیگری از نگاشت‌های B/C-آشوبناک را بیان می‌کنیم. از این گزاره در بخش ۷ در تعیین روابط بین نگاشت‌های آشوبناک استفاده می‌کنیم.

گزاره ۷.۵ ([۱۰، بخش ۶، گزارهٔ ۶]). فرض کنید I بازه‌ای فشرده باشد. دراین‌صورت، نگاشت پیوستهٔ $F : I \to I$ نگاشتی B/C-آشوبناک است اگر و فقط اگر نقطهٔ $c \in I$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\omega(c, F)$ شامل یک مدار تناوبی سره باشد.

قضیهٔ زیر رابطهٔ بین B/C-آشوب و دینامیک نمادین را روشن می‌سازد. با توجه به این قضیه، تعریف معادل دیگری برای B/C-آشوب ارائه می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که σ نگاشت انتقال است.

قضیه ۸.۵ ([۱۰، بخش ۲، نتیجهٔ ۱۶]). نگاشت پیوستهٔ $F : I \to I$ نگاشتی B/C-آشوبناک است اگر و فقط اگر مجموعهٔ فشرده $X \subseteq I$، عدد طبیعی $m \in \mathbb{N}$، و نگاشت پیوسته و پوشای $\phi : X \to \Sigma$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که هر عضو Σ تصویر حداکثر دو نقطه از X تحت ϕ باشد، $F^m(X) = X$، و به‌ازای هر $x \in X$، $\phi(F^m(x)) = \sigma(\phi(x))$.

قضیهٔ بالا امکان تعمیم تعریف B/C-آشوب را روی فضاهای متری فشرده میسر می‌کند.

تعریف ۹.۵. نگاشت پیوستهٔ $F : X \to X$ که در آن X فضای متری فشرده است، نگاشتی B/C-آشوبناک نامیده می‌شود اگر مجموعه‌های بسته و مجزای X_0 و X_1 و عدد طبیعی m وجود داشته باشند به‌طوری‌که اگر $Y = X_0 \cup X_1$ و $G = F^m$، آنگاه

(الف) $G(Y) \subseteq Y$؛

(ب) برای هر دنبالهٔ $\alpha = (\alpha_0\alpha_1\alpha_2\cdots) \in \Sigma$ نقطهٔ $x = x_\alpha \in Y$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $k \geq 0$، $G^k(x) \in X_{\alpha_k}$.

این تعریف معادل آن است که مجموعهٔ بسته $Y \subseteq X$ و عدد طبیعی m وجود داشته باشند به‌طوری‌که $F^m : Y \to Y$ با نگاشت انتقال σ روی فضای دنباله‌ها (Σ) نیم‌مزدوج باشد.

در بخش ۶ از [۱۰] نشان داده شده است که شرط کافی برای B/C–آشوبناک بودن نگاشت پیوستهٔ $F : X \to X$ این است که مجموعه‌های بسته و ناتهی Y_0 و Y_1 و عدد طبیعی m وجود داشته باشند به‌طوری‌که $Y_0 \cup Y_1 \subseteq F^m(Y_0) \cap F^m(Y_1)$.

۶ آشوبِ دیوینی

در سال ۱۹۸۶ دیوینی تعریفی مبتنی‌بر سه شرط برای آشوب در فضاهای متری عرضه کرد [۱۲]. ولی در سال ۱۹۹۲ بانکس و همکاران ثابت کردند که این شرایط برای نگاشت‌های پیوسته مستقل از یکدیگر نیستند [۶]. در سال ۱۹۹۴ در [۲۴] ثابت شد که برای نگاشت‌های پیوسته روی بازه‌ها، یکی از این شرط‌ها دو شرط دیگر را نتیجه می‌دهد. هدف ما در این بخش بررسی این شرایط است. ابتدا تعریف‌های ترایای توپولوژیک و وابستگی حساس به شرایط اولیه را که در تعریف آشوب دیوینی به کار می‌رود بیان می‌کنیم. مفهوم ترایای توپولوژیک را اولین‌بار برکوف در سال ۱۹۲۰ به کار برد ([۷، ص ۲۰۵–۲۰۸] و [۸، ج ۲، ص ۱۰۸ و ۲۲۱]).

در این بخش، (X, d) نشان‌دهندهٔ یک فضای متری است.

تعریف ۱.۶. دستگاه دینامیکی $F : X \to X$ ترایای توپولوژیک، یا به‌اختصار ترایا، نامیده می‌شود اگر برای هر دو زیرمجموعهٔ باز و ناتهی U و V از X عدد صحیح مثبت $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $F^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

دراصل، در یک دستگاه ترایای توپولوژیک در هر همسایگی به‌دلخواه کوچک، نقاطی وجود دارند که تحت تکرارهای نگاشت به جاهای دیگری نگاشته می‌شوند. بنابراین، نمی‌توان دستگاه را به دو زیردستگاه تجزیه کرد به‌گونه‌ای‌که با هم تعاملی نداشته باشند.

تعریف ۲.۶. دستگاه دینامیکی $F : X \to X$ وابستگی حساس به شرایط اولیه دارد اگر عدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in X$ و هر همسایگی U حول x، نقطهٔ $y \in U$ و عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $d(F^n(x), F^n(y)) > \delta$.

دیوینی در [۱۲] دستگاه $F : X \to X$ را آشوبناک نامید اگر در سه شرط زیر صدق کند.

(الف) مجموعهٔ نقاط تناوبی F در X چگال باشد؛

(ب) $F: X \to X$ ترایا باشد؛

(پ) $F: X \to X$ دارای وابستگی حساس به شرایط اولیه باشد.

پس از دیوینی، ریاضی‌دانان دیگر، ازجمله در [۱۶]، تعریف کلی‌تری از این مفهوم ارائه کردند که در ادامه آن را بیان می‌کنیم.

تعریف ۳.۶. نگاشت $F: X \to X$ را یک نگاشت D–آشوبناک می‌نامند اگر زیرمجموعهٔ ناوردا و فشردهٔ Y از X وجود داشته باشد به‌طوری‌که $F: Y \to Y$ در سه شرط بالا صدق کند. در این حالت مجموعهٔ Y را یک مجموعهٔ D–آشوبناک می‌نامند.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که برای نگاشت‌های پیوسته روی فضاهای متری نامتناهی، دو شرط ترایایی و چگال‌بودن مجموعهٔ نقاط تناوبی شرط سوم، یعنی وابستگی حساس به شرایط اولیه، را نتیجه می‌دهد. البته باید توجه داشت که برای نگاشت‌های ناپیوسته، مانند نگاشت دوبرابرساز $F: [0, 1) \to [0, 1)$ با ضابطهٔ (به پیمانهٔ ۱) $F(x) = 2x$، شرط وابستگی حساس به شرایط اولیه در تعریف D–آشوب باید بررسی شود. بنابراین، در حالت کلی، شرط وابستگی حساس به شرایط اولیه در تعریف D–آشوب را نمی‌توان نادیده گرفت.

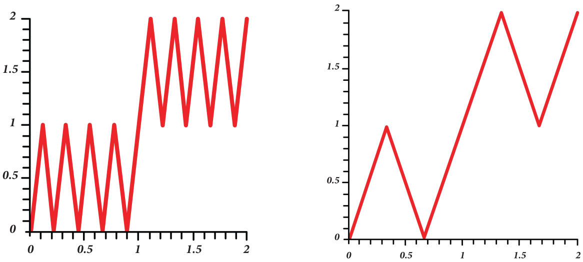
قضیه ۴.۶ ([۶]). فرض کنید (X, d) یک فضای متری نامتناهی باشد. اگر نگاشت پیوسته $F: X \to X$ ترایا و مجموعهٔ نقاط تناوبی F در X چگال باشد، آنگاه F دارای وابستگی حساس به شرایط اولیه است.

مثال‌های زیر نشان می‌دهد که قضیهٔ ۴.۶ تنها حالت ممکن است. در واقع، در مثال ۵.۶ خواهیم دید که دو ویژگی چگال‌بودن مجموعهٔ نقاط تناوبی و وابستگی حساس به شرایط اولیه، ویژگی ترایایی را نتیجه نمی‌دهد، و همچنین، در مثال ۶.۶ نشان می‌دهیم دو ویژگی ترایایی و وابستگی حساس به شرایط اولیه، ویژگی چگال‌بودن مجموعهٔ نقاط تناوبی را نتیجه نمی‌دهد. برای دیدن مثال‌های متنوع دیگر به [۱۳] و [۵] مراجعه کنید.

مثال ۵.۶. نگاشتی مثال می‌زنیم که دارای وابستگی حساس به شرایط اولیه است و مجموعهٔ نقاط تناوبی آن در بازهٔ تعریف‌شده چگال است، ولی ترایا نیست. فرض کنید $I = [0, 2]$ و تعریف کنید

$$f(x) = \begin{cases} 3x & 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ -3x + 2 & \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \\ 3x - 2 & \frac{2}{3} \leq x < 1 \\ f(x-1) + 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

با استقراء می‌توان دید که تحدید نمودار f^n به هریک از زیربازه‌های $[۰,۱]$ و $[۱,۲]$ از ۳^nتا پاره‌خط تشکیل شده است که هریک روی زیربازه‌ای مانند U به‌طولِ $۱/۳^n$ تعریف شده است و f^n هر بازه مانند U را به‌طور یک‌به‌یک و پوشا به‌روی بازهٔ $[۰,۱]$ یا $[۱,۲]$ می‌نگارد. توجه کنید که برای هر n داریم $f^n[۰,۱] = [۰,۱]$ و $f^n[۱,۲] = [۱,۲]$. اینک برای هر $x \in I$ و هر $\varepsilon > ۰$ مفروض، n را آن‌قدر بزرگ اختیار می‌کنیم که $\frac{۱}{۳^n} < \varepsilon$. حالا زیربازهٔ U به‌طولِ $\frac{۱}{۳^n}$ را چنان اختیار می‌کنیم که شامل x باشد و در بازهٔ $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ قرار گیرد. اکنون با توجه به موقعیت x، نقطهٔ z را در $[۰,۱]$ یا $[۱,۲]$ به‌گونه‌ای اختیار می‌کنیم که $|f^n(x) - z| > \frac{۱}{۲}$. با توجه به پوشابودن f^n از بازهٔ U به بازهٔ $[۰,۱]$ یا $[۱,۲]$ (برحسب موقعیت x)، نقطهٔ $y \in U \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ وجود دارد که $f^n(y) = z$. بنابراین، $|f^n(x) - f^n(y)| > \frac{۱}{۲}$ که در آن $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. بنابراین f وابستگی حساس به شرایط اولیه دارد. چگال‌بودن مجموعهٔ نقاط تناوبی f در I نیز ثابت می‌شود؛ زیرا با توجه به موقعیت x، یکی از روابط $U \subseteq [۰,۱] \subseteq f^n(U)$ یا $U \subseteq [۱,۲] \subseteq f^n(U)$ برقرار است (شکل ۳ را ببینید). ولی f ترایا نیست، زیرا کافی است U را از بازهٔ $[۰,۱]$ و V را از بازهٔ $(۱,۲]$ انتخاب کنیم.



(ب) نمودار $f^۲$ — (الف) نمودار f

شکل ۳. f دارای وابستگی حساس به شرایط اولیه است و مجموعهٔ نقاط تناوبی f در I چگال است، ولی f ترایا نیست.

مثال ۶.۶. در این مثال نگاشتی ارائه می‌دهیم که ترایا است و وابستگی حساس به شرایط اولیه دارد، ولی مجموعهٔ نقاط تناوبی آن در فضای تعریف‌شده چگال نیست. فرض می‌کنیم $S^۱$ دایرهٔ یکه به مرکز مبدأ باشد و $X = S^۱ \setminus \{e^{\frac{۲i\pi p}{q}} : \ p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq ۰\}$. روی X متر «طول قوس» را درنظر می‌گیریم؛ یعنی برای $e^{i\theta}$ و $e^{i\eta}$ متعلق به X تعریف می‌کنیم $d(e^{i\theta}, e^{i\eta}) = |\theta - \eta|$. همچنین، نگاشت پیوستهٔ $f : X \to X$ با ضابطهٔ $f(e^{i\theta}) = e^{۲i\theta}$ را تعریف می‌کنیم. دراین‌صورت، f در

X دارای نقاط تناوبی نیست. توجه کنید که نقاط تناوبی f در $S^۱$ به‌صورت

$$\{e^{\frac{۲i\pi p}{q}} \ : \ q = ۲^n - ۱ \text{ و } n,\ p \in \mathbb{N}\}$$

هستند که آن‌ها را از $S^۱$ خارج کرده‌ایم. ولی f ترایای توپولوژیک است، زیرا طول هر کمان تحت f دو برابر می‌شود. همچنین f دارای وابستگی حساس به شرایط اولیه است، زیرا برای هر $e^{i\theta} \in X$ و هر کمان شامل $e^{i\theta}$، نقطهٔ $e^{i\eta}$ واقع بر این کمان را می‌توان چنان اختیار کرد که $۰ < |\theta - \eta| < \pi$. حال n را به‌گونه‌ای اختیار می‌کنیم که $۲^n|\theta - \eta| \leq \pi < ۲^{n+۱}|\theta - \eta|$، پس $d(f^n(e^{i\theta}), f^n(e^{i\eta})) > \frac{\pi}{۲}$.

در ادامه به بررسی D–آشوب روی بازه‌ها می‌پردازیم. در سال ۱۹۹۴ ولکوپ و بری‌لوند نشان دادند که روی بازه‌ها D–آشوب معادل ترایایی است.

گزاره ۷.۶ ([۲۴]). فرض کنید I بازه و $f : I \to I$ نگاشتی پیوسته و ترایا باشد. دراین‌صورت، مجموعهٔ نقاط تناوبی f در I چگال است و f وابستگی حساس به شرایط اولیه دارد.

گرچه در مثال‌های ۵.۶ و ۶.۶، به‌ترتیب، دیدیم که ترایایی نمی‌تواند از چگال‌بودن مجموعهٔ نقاط تناوبی یا از وابستگی حساس به شرایط اولیه نتیجه شود و چگال‌بودن مجموعهٔ نقاط تناوبی نیز نمی‌تواند از وابستگی حساس به شرایط اولیه یا از ترایایی نتیجه شود، در ادامه مثالی از نگاشتی ارائه می‌دهیم که وابستگی حساس به شرایط اولیه دارد، ولی خواص ترایایی و چگال‌بودن مجموعهٔ نقاط تناوبی را ندارد.

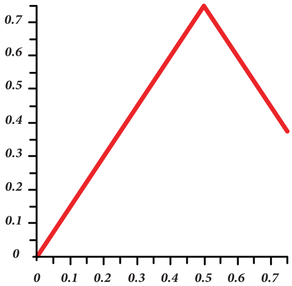
مثال ۸.۶. فرض کنید $I = [۰, \frac{۳}{۴}]$ و

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۳}{۲}x & ۰ \leq x < \frac{۱}{۲} \\ \frac{۳}{۲}(۱ - x) & \frac{۱}{۲} \leq x \leq \frac{۳}{۴}. \end{cases}$$

دراین‌صورت، f وابستگی حساس به شرایط اولیه دارد ولی مجموعهٔ نقاط تناوبی f در I چگال نیست زیرا مدار هر نقطهٔ واقع در بازهٔ $]۰, \frac{۳}{۸}[$ هیچگاه به این بازه برنمی‌گردد. بنابراین، f در این بازه نقطهٔ تناوبی ندارد. بدیهی است که با توجه به گزارهٔ ۷.۶ تابع f ترایا نیست (شکل ۴ را ببینید).

در مثال ۶.۶ نشان دادیم که گزارهٔ ۷.۶ فقط روی بازه‌ها درست است. در مثال بعد، که به ماشین جمع‌کننده[1] معروف است، نگاشتی مثال می‌زنیم که ترایا است ولی هیچ‌یک از ویژگی‌های حساسیت به شرایط اولیه و چگال‌بودن مجموعهٔ نقاط تناوبی را ندارد.

[1] adding machine



شکل ۴. نمودار تابع f در مثال ۸.۶؛ این تابع دارای وابستگی حساس به شرایط اولیه است ولی مجموعهٔ نقاط تناوبی آن در I چگال نیست و همچنین f ترایا نیست.

مثال ۹.۶. فرض می‌کنیم (Σ, d) فضای دنباله‌ها و $\tau : \Sigma \to \Sigma$ ماشین جمع‌کننده به‌ازای $(۱\overline{۰})$ باشد. به‌عبارت‌دیگر، برای $x = (x_۰x_۱x_۲\cdots) \in \Sigma$ این ماشین به‌صورت زیر عمل می‌کند. فرض کنید $n \geq ۰$ اولین اندیسی باشد که به‌ازای آن $x_n = ۰$. دراین‌صورت می‌بینیم که $\tau(x) = (۰۰۰\cdots ۱x_{n+۱}x_{n+۲}\cdots)$، و اگر چنین اندیسی وجود نداشته باشد، آن‌وقت $\tau(x) = (\overline{۰})$. برای مثال، $\tau(\overline{۱}) = (\overline{۰})$ و $\tau(\overline{۰}) = (۱\overline{۰})$. برای کسب اطلاعات بیشتر به [۱۰] مراجعه کنید. نشان می‌دهیم (τ, Σ) ترایا است ولی وابستگی حساس به شرایط اولیه ندارد و همچنین τ دارای نقطهٔ تناوبی نیست.

برای اثبات ترایایی، توجه کنید که $O_\tau(\overline{۰})$ در Σ چگال است، زیرا

$$\{\tau^k(\overline{۰}) : ۰ \leq k \leq ۲^n - ۱\} = \{(a_۰a_۱\cdots a_{n-۱}\overline{۰}) : a_i \in \{۰, ۱\}\}.$$

بنابراین، مجموعهٔ $O_\tau(\overline{۰})$ متشکل از همهٔ عناصری از Σ است که از مرحله‌ای به بعد همهٔ درایه‌های آن صفر است. چنین مجموعه‌ای در Σ چگال است.

همچنین، توجه کنید که نقاط $(\overline{۰})$ و $(\overline{۱})$ تناوبی نیستند، زیرا $\tau^n(\overline{۰})$، $n \geq ۱$، دارای حداقل یک درایهٔ ۱ است و $\tau(\overline{۱}) = (\overline{۰})$. حال فرض کنید $x = (x_۰\cdots x_n\cdots) \in \Sigma$ و $n \geq ۰$ اولین اندیسی باشد که $x_n = ۰$. دراین‌صورت،

$$\{\tau^k(x) : ۱ \leq k \leq ۲^n\} = \{(a_۰a_۱\cdots a_{n-۱}۱x_{n+۱}\cdots) : a_i \in \{۰, ۱\}\}.$$

بنابراین، برای هر k که $۱ \leq k \leq ۲^n$، $\tau^k(x) \neq x$. حال اگر $x_t = ۱$، برای هر $t \geq n + ۱$، آنگاه $(\overline{۱})$ به مدار x تعلق دارد، پس x نمی‌تواند تناوبی باشد و اگر $m \geq n+۱$ و $۱ \leq j \leq ۲^n$

وجود داشته باشند که $\tau^j(x) = (۱۱۱۱\cdots۱۰x_{m+۱}\cdots)$، می‌توان استدلال بالا را دوباره تکرار کرد. ازاین‌رو، τ نقطهٔ تناوبی ندارد.

سرانجام، با توجه به ضابطهٔ ماشین جمع‌کننده، این نگاشت حساس به شرایط اولیه نیست. زیرا اگر n اولین اندیسی باشد که درایهٔ nام x و y در آن با هم تفاوت دارند، آن‌وقت به‌ازای هر k، $\tau^k(x)$ و $\tau^k(y)$ نیز در درایهٔ nام متفاوت‌اند.

در ادامه به بررسی وجود مدار چگال می‌پردازیم و نشان می‌دهیم وجود مدار چگال، تحت شرایطی، می‌تواند ترایایی را نتیجه دهد، هرچند که مفاهیم ترایایی و وجود مدار چگال همان‌گونه‌که در مثال‌های زیر نشان خواهیم داد در حالت کلی دو مفهوم مستقل‌اند.

مثال ۱۰.۶. فرض کنید $X = \{۰\} \cup \{\frac{۱}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ به توپولوژی القایی از $\mathbb{R}$ مجهز باشد و $f : X \to X$ چنان باشد که $f(۰) = ۰$ و $f(\frac{۱}{n}) = \frac{۱}{n+۱}$. با انتخاب $U = \{\frac{۱}{۲}\}$ و $V = \{۱\}$ می‌توان دید که f ترایای توپولوژیک نیست ولی مدار نقطهٔ ۱ در X چگال است.

مثال ۱۱.۶. فرض کنید $I = [۰, ۱]$ و $g(x) = ۱ - |۲x - ۱|$ نگاشت خیمه روی I باشد (شکل ۱(الف)). فرض کنید X مجموعهٔ نقاط تناوبی و نهایتاً تناوبی g در I باشد. تعریف کنید $f = g|_X$. دراین‌صورت، X نامتناهی است و $f : X \to X$ ترایای توپولوژیک است زیرا اگر $U_۱ = U \cap X$ و $V_۱ = V \cap X$ دو زیرمجموعهٔ باز X باشند که در آن U و V زیرمجموعه‌های باز I هستند، آن‌وقت عددی مثل $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $g^n(U) = I$. حال برای هر $x \in X$، نقطهٔ $y \in U$ وجود دارد با این شرط که $x = g^n(y)$. پس y نیز تناوبی یا نهایتاً تناوبی خواهد بود، پس $y \in U_۱$ و درنتیجه، $x = g^n(y) \in g^n(U_۱)$. روابط بالا نشان می‌دهد که $f^n(U_۱) = X \supseteq V_۱$. بنابراین $f : X \to X$ ترایا است. ولی چون مدار هر نقطه از X تحت f متناهی است، $f : X \to X$ مدار چگال ندارد.

رابطهٔ بین وجود مدار چگال و خاصیت ترایایی در گزارهٔ زیر بررسی می‌شود.

گزاره ۱۲.۶ ([۲۲، گزارهٔ ۱.۱]). فرض کنید X فضای توپولوژیک باشد.

(۱) اگر X دارای نقطهٔ تنها نباشد، آنگاه وجود مدار چگال، ترایایی توپولوژیک را نتیجه می‌دهد.
(۲) اگر X تفکیک‌پذیر و رستهٔ دوم باشد، آنگاه ترایایی، وجود مدار چگال را نتیجه می‌دهد.

در ادامه نشان خواهیم داد که اگر X و Y دو فضای متری فشرده باشند و نگاشت پیوستهٔ $f : X \to X$ با نگاشت پیوستهٔ $g : Y \to Y$ تحت $\phi : X \to Y$ مزدوج باشد، آنگاه

$f : X \to X$ نگاشتی D–آشوبناک است اگر و فقط اگر $g : Y \to Y$ نگاشتی D–آشوبناک باشد. برای بررسی صحت این ادعا، بدون کاستن از کلیت بحث، فرض می‌کنیم مجموعهٔ پایایی که تحدید f به آن D–آشوبناک است، همان X باشد. با توجه به اینکه $\phi(X) = Y$، نشان می‌دهیم $g : Y \to Y$ نگاشتی D–آشوبناک است. اگر $W_۱$ و $W_۲$ دو مجموعهٔ باز در Y باشند، آنگاه عدد طبیعی n وجود دارد به‌طوری‌که $f^n(\phi^{-۱}(W_۱)) \cap \phi^{-۱}(W_۲) \neq \emptyset$، زیرا f ترایا است. پس

$$\phi^{-۱}(g^n(W_۱) \cap W_۲) = \phi^{-۱}(g^n(W_۱)) \cap \phi^{-۱}(W_۲) \neq \emptyset.$$

بنابراین، $g : Y \to Y$ ترایا است. از طرفی می‌دانیم که اگر A مجموعهٔ نقاط تناوبی $f : X \to X$ باشد، آنگاه $\phi(A)$ مجموعهٔ نقاط تناوبی $g : Y \to Y$ خواهد بود. با توجه به پیوستگی نگاشت ϕ و اینکه $X = \overline{A}$، داریم $Y = \phi(X) = \phi(\overline{A}) \subseteq \overline{\phi(A)} \subseteq \phi(X) = Y$. بنابراین، $g : Y \to Y$ یک نگاشت D–آشوبناک است.

گزارهٔ زیر ویژگی دیگری از D–آشوب را روی فضاهای متری فشرده نشان می‌دهد.

گزاره ۱۳.۶ ([۴، گزارهٔ ۳.۲]). فرض کنید X فضای متری فشرده و $f : X \to X$ نگاشتی پیوسته باشد. دراین صورت، $f : X \to X$ نگاشتی D-آشوبناک است اگر و فقط اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ تابع $f^n : X \to X$ نگاشتی D-آشوبناک باشد.

۷ مقایسه تعریف‌های مختلف آشوب

در این بخش به مقایسهٔ تعریف‌های مختلفی که در بخش‌های قبل آوردیم می‌پردازیم. در نتیجهٔ ۵.۵ دیدیم که روی بازه‌های فشرده B/C–آشوب با آشوب توپولوژیک معادل است. نشان خواهیم داد که روی این بازه‌ها ω–آشوب و D–آشوب با B/C–آشوب معادل‌اند. همچنین، نشان می‌دهیم B/C–آشوب، L/Y–آشوب را نتیجه می‌دهد و سرانجام با مثالی نشان می‌دهیم L/Y–آشوب معادل دیگر آشوب‌های معرفی‌شده در این مقاله نیست.

ابتدا قضیه زیر را در مورد معادل‌بودن دو تعریف B/C–آشوب و D–آشوب بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۷ ([۴، قضیهٔ ۴.۱]). فرض کنید I بازه‌ای فشرده باشد. دراین‌صورت، نگاشت پیوستهٔ $F : I \to I$ نگاشتی B/C-آشوبناک است اگر و فقط اگر D-آشوبناک باشد.

اثبات. ابتدا فرض می‌کنیم $F : I \to I$ نگاشتی D–آشوبناک با مجموعهٔ D–آشوبناک $Y \subseteq I$

است. مجموعهٔ Y نامتناهی است، زیرا $F:Y\to Y$ خاصیت وابستگی حساس به شرایط اولیه دارد. اگر Y مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه به‌ازای هر $x\in Y$ می‌توان یک همسایگی پیدا داد که شامل هیچ عضو دیگری از Y به‌جز x نباشد. از طرفی، Y مجموعه‌ای فشرده است، پس طبق گزارهٔ ۱۲.۶، نقطهٔ $c\in Y$ وجود دارد به‌طوری‌که $\overline{O_F(c)}=Y$. بنابراین، $\omega(c,F)=Y$ و درنتیجه، $\omega(c,F)$ مجموعه‌ای نامتناهی است. علاوه‌براین، مجموعهٔ نقاط تناوبی $F|_Y$ در Y چگال است، پس $\omega(c,F)$ دارای یک مدار تناوبی سره است، و ازاین‌رو طبق گزارهٔ ۷.۵، نگاشت F نگاشتی B/C–آشوبناک است.

حال فرض می‌کنیم $F:I\to I$ نگاشتی B/C–آشوبناک است. نگاشت G، بازهٔ فشرده I_α، و مجموعهٔ X را همانند اثبات قضیهٔ ۸.۵ در [۱۰، بخش ۲، نتیجهٔ ۱۶] درنظر می‌گیریم. تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{R}=\{x\in X: I_\alpha=\{x\}،\text{ به‌ازای }\alpha\in\Sigma\text{ ای}\}.$$

ثابت می‌شود که $G(I_\alpha)=I_{\sigma(\alpha)}$ و مجموعهٔ α–هایی که به‌ازای آن I_α بازهٔ فشرده‌ای است، مجموعه‌ای حداکثر شمارش‌پذیر است. بنابراین، $\mathcal{R}$ یک مجموعهٔ ناتهی و نامتناهی است که تحت G ناوردا است. تعریف می‌کنیم $Z=\overline{\mathcal{R}}$. با توجه به پیوستگی G، نگاشت $G|_Z:Z\to Z$ خوش‌تعریف است. در ادامه، نشان می‌دهیم $G|_Z:Z\to Z$ نگاشتی D–آشوبناک است.

- نگاشت $G|_Z:Z\to Z$ ترایا است.

فرض می‌کنیم W مجموعهٔ باز ناتهی در Z باشد. دراین‌صورت، نقاط $x\in W\cap\mathcal{R}$ و $\alpha=(a_۱a_۲\cdots)\in\Sigma$ وجود دارند به‌طوری‌که $I_\alpha=\{x\}$. با توجه به تعریف I_α و باز بودن W در Z، عدد طبیعی $k\in\mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $Z\cap I_{a_۱a_۱\cdots a_k}\subseteq W$. برای اثبات اینکه $G|_Z$ ترایا است، نشان می‌دهیم $G^k(Z\cap I_{a_۱a_۱\cdots a_k})=Z$. چون $Z\cap I_{a_۱a_۱\cdots a_k}$ فشرده و $Z=\overline{\mathcal{R}}$، کافی است به‌ازای هر $y\in\mathcal{R}$، پیش‌تصویری از y را در $Z\cap I_{a_۱a_۱\cdots a_k}$ تحت نگاشت G^k بیابیم. فرض می‌کنیم $I_\beta=\{y\}$ که $\beta=(b_۱b_۲\cdots)\in\Sigma$. تعریف می‌کنیم $\gamma=(a_۱a_۲\cdots a_kb_۱b_۲\cdots)\in\Sigma$. داریم $G^k(I_\gamma)=I_\beta=\{y\}$. اگر I_γ مجموعهٔ تک‌عضوی باشد، آنگاه $I_\gamma\subseteq Z$ و اثبات تمام است. حال فرض می‌کنیم I_γ بازهٔ فشرده‌ای باشد و نشان می‌دهیم لااقل یکی از دو نقطهٔ انتهایی آن به Z تعلق دارد.

به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $m_n\in\mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $I_{a_۱a_۲\cdots a_kb_۱b_۲\cdots b_{m_n}}$ زیرمجموعهٔ $\{x\in I:\operatorname{dist}(x,I_\gamma)<\frac{۱}{n}\}$ است. چون مجموعهٔ همه عناصری در Σ که $k+m_n$ درایهٔ اول

آن‌ها به‌صورت $a_1a_2\cdots a_kb_1b_2\cdots b_{m_n}$ باشد ناشمارا است، پس $\gamma_n \in \Sigma$ با $k+m_n$ درایهٔ اول به‌صورت $a_1a_2\cdots a_kb_1b_2\cdots b_{m_n}$ وجود دارد به‌طوری‌که $I_{\gamma_n}=\{y_n\}$. بازه‌های I_γ و I_{γ_n} از هم مجزا هستند و $\operatorname{dist}(y_n, I_\gamma) < \frac{1}{n}$. پس دنبالهٔ $(y_n)_{n\geq 1}$ وجود دارد که به یکی از نقاط انتهایی I_γ میل می‌کند (در صورت لزوم به جای دنبالهٔ $(y_n)_{n\geq 1}$ زیردنباله‌ای از آن را قرار می‌دهیم). بنابراین، نقطهٔ انتهایی I_γ به Z تعلق دارد و تحت G^k به y تصویر می‌شود.

- مجموعهٔ نقاط تناوبی $G|_Z$ در Z چگال است.

فرض می‌کنیم W مجموعهٔ باز ناتهی در Z، $x \in W\cap\mathcal{R}$ و $I_\alpha=\{x\}$ که در آن $\alpha=(a_1a_2\cdots)\in\Sigma$. مانند قسمت قبل می‌توانیم نشان دهیم که به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $m_n\in\mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$I_{a_1a_2\cdots a_{m_n}} \subseteq \{x\in I : \operatorname{dist}(x, I_\alpha) < \frac{1}{n}\}.$$

نقطهٔ تناوبی $\gamma_n = (\overline{a_1a_2\cdots a_{m_n}})\in\Sigma$ را در نظر می‌گیریم. چون $\sigma^{m_n}(\gamma_n)=\gamma_n$، داریم $G^{m_n}(I_{\gamma_n})=I_{\gamma_n}$. اگر I_{γ_n} مجموعه‌ای تک‌عضوی نباشد، G^{m_n} نقاط انتهایی I_{γ_n} را بروی نقاط انتهایی I_{γ_n} تصویر می‌کند. پس هر دو نقطهٔ انتهایی I_{γ_n} نقاط تناوبی G هستند. مانند قسمت قبل می‌توانیم نشان دهیم که لااقل یک نقطهٔ انتهایی آن به Z تعلق دارد. بنابراین، به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$، نقطهٔ $x_n\in I_{\gamma_n}\cap Z$ وجود دارد که تحت G تناوبی است. دنبالهٔ $(x_n)_{n\geq 1}$ به x همگرا است، زیرا $I_{\gamma_n}\subseteq I_{a_1a_2\cdots a_{m_n}}$. بنابراین، مجموعهٔ نقاط تناوبی $G|_Z$ در Z چگال است. پس، $G|_Z$ روی Z نگاشتی D_آشوبناک است و درنتیجه، F روی $Y=\bigcup_{i=0}^{n-1}F^i(Z)$ یک نگاشت D_آشوبناک است. $\square$

قضیهٔ بعد نشان می‌دهد که روی بازه‌های فشرده، آشوب توپولوژیک و ω_آشوب معادل‌اند.

قضیه ۲.۷ ([۱۶، ص ۲۴۴]). فرض کنید I بازه‌ای فشرده و $F:I\to I$ نگاشتی پیوسته باشد. دراین‌صورت، F دارای آنتروپی توپولوژیک مثبت است اگر و فقط اگر ω_آشوبناک باشد.

اکنون نتیجه‌ای جالب از این قضیه:

نتیجه ۳.۷. اگر $F:I\to I$ نگاشتی پیوسته روی بازهٔ فشرده I باشد، آنگاه آشوب توپولوژیک، ω_آشوب، B/C_آشوب و D_آشوب معادل‌اند.

قضیهٔ بعد نشان می‌دهد که روی بازه‌های فشرده، B/C_آشوب، L/Y_آشوب را نتیجه می‌دهد.

با ارائه مثالی نشان می‌دهیم که عکس این مطلب درست نیست.

قضیه ۴.۷. فرض کنیم I بازه‌ای فشرده و $F: I \to I$ نگاشتی پیوسته و B/C-آشوبناک باشد. دراین‌صورت، F نگاشتی L/Y-آشوبناک است.

اثبات. فرض کنید $F: I \to I$ نگاشتی B/C-آشوبناک باشد. بنابه تعریف ۴.۵، به‌ازای nای F^n متلاطم است و بنابه لم ۲.۵، نگاشت $F^n: I \to I$ دارای یک ۳-دور است. با توجه به قضیهٔ ۱.۲، وجود این ۳-دور نشان می‌دهد که $F^n: I \to I$ نگاشتی L/Y-آشوبناک است و سرانجام از گزارهٔ ۴.۲ نتیجه می‌گیریم که $F: I \to I$ نگاشتی L/Y-آشوبناک است. □

این مقاله را با مثالی از نگاشتی که L/Y-آشوبناک است ولی B/C-آشوبناک نیست به پایان می‌بریم.

مثال ۵.۷. فرض کنید $\lambda \in [0, 1]$ و $g_\lambda : [0, 1] \to [0, 1]$ با ضابطهٔ

$$g_\lambda(x) = \min\{g(x), \lambda\}$$

تعریف شود که در آن $g(x)$ نگاشت خیمه است (شکل ۱(الف) را ببینید). نگاشت g_λ، خیمهٔ بریده[1] نامیده می‌شود (شکل ۱(ب) را ببینید).

تعریف می‌کنیم

$$J_\lambda = [0, \frac{\lambda}{2}] \cup [1 - \frac{\lambda}{2}, 1], \quad K_\lambda = (\frac{\lambda}{2}, 1 - \frac{\lambda}{2}).$$

اگر $0 \leq \lambda < \gamma \leq 1$ و g_λ یک مدار تناوبی در J_λ داشته باشد، آن‌وقت این مدار، یک مدار تناوبی g_γ نیز است زیرا به‌ازای $x \in J_\lambda$، $g_\lambda(x) = g_\gamma(x)$. علاوه‌براین، اگر $x \in K_\lambda$ نقطه‌ای تناوبی برای g_λ باشد، چون نگاشت g_λ روی بازهٔ K_λ مقدار ثابت λ را اختیار می‌کند، باید $g_\lambda(x) = \lambda$ و درنتیجه g_λ حداکثر یک نقطهٔ تناوبی در K_λ دارد. تعریف می‌کنیم

$$\lambda_n = \min\{\lambda \in [0, 1] : \text{دارد } [0, \lambda] \text{ دور در-} 2^n \text{یک } g\}.$$

چون $\{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\}$ یک ۳-دور برای نگاشت خیمه است، بنابر قضیهٔ شارکوفسکی، g همهٔ دوره‌های تناوب را دارد [۱۲]؛ همچنین نگاه کنید به [۱]. به‌ویژه، به‌ازای هر n، تعداد 2^n-دورهای نگاشت

[1] truncated tent map

g در بازهٔ $[۰, ۱]$ متناهی و حداقل برابر ۱ است. بنابراین، مجموعهٔی بالا ناتهی و خوش‌تعریف است. درواقع، λ_n یک نقطهٔ تناوبی g با دورهٔ تناوب ۲^n است و در مجموعهٔ $O_g(\lambda_n)$ از همه بزرگ‌تر است. علاوه‌براین، g در $[۰, \lambda_n]$ فقط یک ۲^nـ‌دور دارد. چون $g(K_{\lambda_n}) = (\lambda_n, ۱]$، پس باید $O_g(\lambda_n) \subseteq J_{\lambda_n}$. بنابراین، λ_n یک نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب ۲^n برای g_{λ_n} است.

ادعا می‌کنیم که $\lambda_n < \lambda_{n+۱}$. زیرا درغیراین‌صورت g_{λ_n} در بازهٔ $[۰, \lambda_{n+۱}]$ یک $۲^{n+۱}$ـ‌دور دارد. بنابراین، با توجه به قضیهٔ شارکوفسکی در این بازه، یک ۲^nـ‌دور نیز دارد. به‌عبارت‌دقیق‌تر، در بازهٔ $[۰, \lambda_{n+۱})$ یک ۲^nـ‌دور دارد که با تعریف λ_n در تناقض است. بنابراین، دنبالهٔ $(\lambda_n)_{n\geq ۱}$، دنباله‌ای اکیداً صعودی است. تعریف می‌کنیم $\lambda_* = \lim_{n\to\infty} \lambda_n$. پس نتیجه می‌گیریم که $\frac{۴}{۵} < \lambda_* \leq \frac{۶}{۷}$، زیرا $g_{\frac{۶}{۷}}$ همهٔ دوره‌های تناوب را دارد و مجموعهٔ $\{\frac{۲}{۵}, \frac{۴}{۵}\}$ تنها ۲ـ‌دور نگاشت $g_{\frac{۴}{۵}}$ است. اکنون نشان می‌دهیم نگاشت g_{λ_*} نگاشتی $\mathrm{L/Y}$ـ‌آشوبناک است ولی $\mathrm{B/C}$ـ‌آشوبناک نیست. در [۱۰] نشان داده شده است که حداقل یک نقطه در $[۰, ۱]$ وجود دارد که نسبت به g_{λ_*} تقریباً تناوبی نیست. بنابراین، طبق گزارهٔ ۵.۲، g_{λ_*} نگاشتی $\mathrm{L/Y}$ـ‌آشوبناک است.

حالا فرض می‌کنیم g_{λ_*} نگاشتی $\mathrm{B/C}$ـ‌آشوبناک است. طبق قضیهٔ ۳.۵، عدد فرد $q > ۱$ و $k \geq ۰$ وجود دارند به‌طوری‌که g_{λ_*} دارای یک $q \times ۲^k$ـ‌دور است. فرض می‌کنیم P مدار این نقطهٔ تناوبی باشد و فرض می‌کنیم p بزرگ‌ترین عضو این مدار باشد. چون برد g_{λ_*} برابر $[۰, \lambda_*]$ است، پس $p \leq \lambda_*$. اگر $p < \lambda_*$، آنگاه عدد طبیعی n وجود دارد که $p < \lambda_n$. ازاین‌رو P مدار تناوبی g_{λ_n} نیز هست که تناقض است؛ زیرا مدارهای تناوبی g_{λ_n} دارای دوره‌های تناوب به‌صورت $۱, ۲, ۲^۲, \cdots, ۲^n$اند. اگر $p = \lambda_*$، آنگاه با استفاده از قضیهٔ شارکوفسکی، g_{λ_*} دارای یک $(q + ۲) \times ۲^k$ـ‌دور است که بزرگ‌ترین عضو آن باید اکیداً از λ_* کوچک‌تر باشد، و دوباره به تناقض می‌رسیم. بنابراین، g_{λ_*} نگاشتی $\mathrm{B/C}$ـ‌آشوبناک نیست.

از جمله ویژگی‌های جالب نگاشت خیمهٔ بریده این است که برای $۰ \leq \lambda < \lambda_*$ نگاشت g_λ، آشوبناک به مفهوم هیچ‌یک از پنج تعریف گفته‌شده در این مقاله نیست ولی برای $\lambda_* < \lambda \leq ۱$، بنا به همهٔ این تعریف‌ها آشوبناک است. برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد نگاشت خیمهٔ بریده به [۴] مراجعه نمایید.

سپاسگزاری

نویسندگان از داوران محترم بابت ارائه نظرات سازنده و تذکرات سودمند، که موجب بهبود نگارش

این مقاله شد، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایند.

مراجع

[۱] ربیعی، مریم؛ اکبری، منیره، عکس قضیهٔ شارکوفسکی، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ ۶۶ (۱۳۹۹)، ۱۱۵-۱۳۳.

[۲] رحیمی، مهدی؛ میرزایی ازندریانی، مرتضی، نظریهٔ ارگودیک: دستگاه‌های دینامیکی از دیدگاه آنالیز تابعی، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ ۶۴ (۱۳۹۸)، ۵۹-۷۸.

[۳] رزمی‌نیا، ابوالحسن، یادداشتی بر مجموعه‌های حدّی در دستگاه‌های دینامیکی، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ ۵۶ (۱۳۹۴)، ۴۹-۶۸.

[4] Aulbach, B., Kieninger, B., On Three Definitions of Chaos, *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, **1**(1) (2001), 23-37.

[5] Assaf, D., Gadbois, S., Definitions of chaos, *Amer. Math. Monthly*, **99** (1992), 865.

[6] Banks, J., Brooks, J., Carins, G., Davis, G., Stacey, P., On Devaney's definition of chaos, *Amer. Math. Monthly*, **99** (1992), 332-334.

[7] Birkhoff, G. D., *Dynamical Systems,* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1927.

[8] Birkhoff, G. D., *Collected Mathematical Papers*, Vols. 1, 2, 3, Literary Licensing, LLC, New York, 1950.

[9] Blanchard, F., Topological chaos: What may this mean?, *J. Difference Equ. Appl.*, **15**(1) (2009), 23-46.

[10] Block, L. S., Coppel, W. A., *Dynamics in One Dimension*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[11] Collet, P., Eckmann, J. P., *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems,* Progress in Physics, 1, Birkhäuser, Basel, 1980.

[12] Devaney, R., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems,* Benjamin/Cummings, Menlo Park, Calif., 1986.

[13] Elaydi, S. N., *Discrete Chaos, With Applications in Science and Engineering,* 2nd ed., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2007.

[14] Furstenberg, H., Disjointness in ergodic theory, minimal sets and a problem in diophantine approximation, *Mathematical Systems Theory*, **1** (1967), 1-49.

[15] Glasner, E., Weiss, B., Sensitive dependence on initial conditions, *Nonlinearity*, **6** (1993), 1067-1075.

[16] Li, S., ω-Chaos and topological entropy, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **339** (1) (1993), 243–249

[17] Li, T. Y., Yorke, J., Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly*, **82** (1975), 985-992.

[18] Šharkovskii, A. N., Co-existence of the cycles of a continuous mapping of the line into itself (Russian), *Ukrainian Math. J.*, **16** (1964), 61-71.

[19] Šharkovskii, A. N., About continuous maps on the set of co-limit points, *Proc. Acad. Sci. Ukraine*, (1965), 1407-1410.

[20] Šharkovskii, A. N., Behavior of mappings in the neighborhood of an attracting set, *Ukrainian Math. J.*, **18** (1966), 60-83.

[21] Šharkovskii, A. N., Kolyada, S. F., Sivak, A. G., Fedorenko, V. V., *Dynamics of One- dimensional Mappings*(Russian), Naukova Dumka, Kiev, 1989.

[22] Silvermann, S., On maps with dense orbits and the definition of chaos, *Rocky Mountain J. Math.*, **22**(1) (1992), 353-375.

[23] Smítal, J., Chaotic functions with zero topological entropy, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **297** (1986), 269-282.

[24] Vellekoop, M., Berglund, R., On intervals, Transitivity=Chaos, *Amer. Math. Monthly*, **101** (1994), 353-355.

منیره اکبری: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، گروه ریاضی

رایانامه: `akbari@sru.ac.ir`

مریم ربیعی: دانشگاه الزهرا، گروه ریاضی

رایانامه: `mrabii@alzahra.ac.ir`

Farhang va Andishe-ye Riyazi
Volume 41, Number 71, Fall/Winter 2022, Pages 19–45
doi: 10.30504/mct.2023.1257.1876

An Overview of the Concept of Chaos in Discrete Dynamical Systems

M. Akbari[1], M. Rabii[2]

[1]Department of Mathematics, Shahid Rajaee Teacher Training University, Iran
[2]Department of Mathematics, Alzahra University, Iran

Abstract. Our aim in this paper is to introduce and study five common definitions of chaos in discrete dynamical systems and compare them to each other on compact intervals.These five different definitions that describe chaos from different points of view are Li-Yorke chaos, topological chaos, ω-chaos, Block-Coppel chaos, and Devaney chaos.

Keywords: Block-Coppel chaos, topological chaos, Devaney chaos, Li-Yorke chaos, ω-chaos
Article history: Recieved 18 December 2021; Accepted 6 June 2022

[1]akbari@sru.ac.ir
[2]mrabii@alzahra.ac.ir

ISSN 1022-6443/