فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۱، شمارهٔ ۷۱ (پاییز و زمستان ۱۴۰۱) صص. ۴۷ تا ۶۱

نظریهٔ رسته‌ها؛ هدف یا ابزار

امیر جعفری✉، سیامک یاسمی

چکیده. نظریهٔ رسته‌ها تا چه اندازه‌ای مهم است؟ از نخستین روزهای پیدایش این نظریه تا به امروز، این پرسش ذهن بسیاری از ریاضی‌کاران را به خود مشغول کرده است و پاسخ‌های متنوع و بسیاری هم برای این پرسش وجود دارد: برای عده‌ای نظریهٔ رسته‌ها صرفاً یک ابزار است و برای گروهی دیگر جزء ارکان ریاضیات امروز است. عموماً پرسش‌هایی این‌چنینی پاسخی قطعی و عام ندارند. دست‌کم در این مورد خاص، هنوز جامعهٔ ریاضی به توافقی عام دست پیدا نکرده است و احتمالاً هم پیدا نخواهد کرد. هدف ما در این نوشته این است که ضمن بررسی سیر تحول نظریهٔ رسته‌ها در مورد جایگاه و خاستگاه آن در ریاضیات بحث کنیم.

۱ مقدمه

در بسیاری از قسمت‌های ریاضیات با اشیائی مانند گروه، حلقه، فضای توپولوژیک، فضای اندازه‌پذیر، خمینه، چندگونای[1] جبری، و غیره سروکار داریم و متناسب با این اشیاء، ریختارهای[2] خاصی (مانند توابع) را بین آن‌ها در نظر می‌گیریم مثل همریختی، نگاشت پیوسته، نگاشت هموار، و مانند این‌ها. از تجرید خواص بنیادین این مثال‌ها به مفهوم «رسته» می‌رسیم. بنابراین، به یک تعبیر می‌توان گفت که هر رسته مانند کهکشانی است که عده‌ای از ریاضی‌دانان در آن مشغول به کارند و، آن‌چنان که تجربهٔ تاریخی به ما آموخته است، گاهی نه فقط جالب بلکه ضروری است ارتباطی بین دو کهکشان برقرار کنیم تا بعضی مفاهیم بین آن‌ها انتقال یابد و شاید به شکل ساده‌تر در بیاید.

عبارات و کلمات کلیدی: نظریهٔ رسته‌ها، رسته‌های مشتق‌شده، رسته‌های مثلثی‌شده، نظریهٔ K، رسته‌های مدرج دیفرانسیلی
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۲/۱۸

[1]variety [2]morphisms

doi: 10.30504/mct.2023.1265.1880

ترجیح می‌دهیم پیدایش نظریهٔ رسته‌ها را با مثالی غیر ریاضی شرح دهیم. تقریباً مسلم است که بشر اولیه از ابتدا از خود نپرسیده است که جایی که در آن زندگی می‌کنم چه شکل هندسی‌ای دارد و سپس بعد از کمی نگاه کردن به اطراف خود بگوید که زمین مسطح یا چیزی شبیه به این است. بلکه اساساً طرح این پرسش که «زمین به چه شکلی است؟» نیازمند این بوده است که بشر شناخت بسیاری از محیط اطراف و بعضی مفاهیم مجرد پیدا کند. چیزی مشابه در مورد نظریهٔ رسته‌ها رخ داده است. مسلماً نظریهٔ رسته‌ها شاخهٔ بسیار جوانی از ریاضیات است و بیراه نیست اگر بگوییم که تا پیش از قرن بیستم میلادی اساساً نیازی به مطالعهٔ ساختارهای کلی حاکم بر ساختارهای ریاضی احساس نمی‌شد.

حقیقت این است که پیدایش نظریهٔ رسته‌ها تحول بزرگی در بسیاری از زمینه‌های ریاضی –و مرتبط با ریاضی– ایجاد کرده است که از میان آن‌ها می‌توان به این موارد اشاره کرد: توپولوژی جبری، هندسهٔ جبری، جبر جابه‌جایی و ناجابه‌جایی، منطق ریاضی، و علوم کامپیوتر. نظریهٔ رسته‌ها (به معنای امروزی آن) و کاربردهای آن در ریاضیات و سایر علوم موضوعی بسیار گسترده است و نمی‌توان در این نوشتهٔ کوتاه به همهٔ جوانب آن پرداخت. به همین دلیل، ناچاریم دست به انتخاب بزنیم و از موضوعات متنوع و مهم بسیاری صرف‌نظر کنیم. با در نظر گرفتن علائق و دانشمان، طبیعی است که محورهای اصلی این نوشته محدود به نقش نظریهٔ رسته‌ها در قسمت‌هایی از ریاضیات باشد که با آن‌ها بیشتر آشنا هستیم و بدیهی است که محدودیت‌های این نوشته محدودیت‌های نظریهٔ رسته‌ها نیست.

۲ آغاز و بسط نظریهٔ رسته‌ها

از ریشه‌های تاریخی نظریهٔ رسته‌ها که بگذریم (اطلاعات مختصری را می‌توان در [۱] یافت)، نخستین‌بار مفاهیم اولیهٔ این نظریه در مقالاتی از مکلین[1] و آیلنبرگ[2]، به‌خصوص مقالهٔ [۶] به سال ۱۹۴۵، به‌طور رسمی بیان شده است. در آن سال‌ها نظریه‌های هومولوژی [مانستگی] و کوهومولوژی [همانستگی] متعددی وجود داشت (البته نه با این عنوان‌ها، زیرا این اصطلاحاتی است که امروز به کار می‌بریم) و با وجود شباهت‌های زیادی بین آن‌ها هیچ‌یک از ریاضی‌دانان درک درستی از علت این شباهت نداشتند؛ نظریهٔ رسته‌ها راهی بود برای درک بهتر این شباهت‌ها. اما در اوایل پیدایش این نظریه، هنوزمعلوم نبود که آیا نظریهٔ رسته‌ها صرفاً یک «زبان مناسب» است یا چیزی دیگر. آیا

[1] MacLane [2] Eilenberg

نظریهٔ رسته‌ها صرفاً زبانی است برای بیان آنچه که می‌دانیم و پیش از این هم، شاید با کمی دشواری بیشتر، قادر به بیان آن بودیم؟ این وضعیت مبهم در مورد جایگاه نظریهٔ رسته‌ها بیش از ده سال از زمان پیدایش آن ادامه داشت و عبارت «تجرید بی‌معنی» نیز یادگار همان دوران است. در سال ۱۹۸۲، گروتندیک در نامه‌ای به رانلد براون[1] می‌نویسد: «معرفی عدد صفر یا مفهوم گروه نیز یک کلیت بی‌معنی است، ولی ریاضیات حدوداً هزاران سال عقب نگه داشته شده بود، زیرا کسی وجود نداشت که این قدم‌های کودکانه را بردارد.»

حقیقت امر این است که در آن روزها بسیاری از ریاضی‌دانان نظریهٔ رسته‌ها را «بیش از حد مجرد» می‌دانستند. اما اگر نظریهٔ رسته‌ها فقط یک زبان مناسب هم انگاشته شود، بر کسی پوشیده نیست که زبان نقش مهمی در بیان تفکر و اندیشه دارد. جورج اورول[2]، نویسندهٔ انگلیسی، در رُمان ۱۹۸۴ به توصیف تخیلی حکومت استبدادگری می‌پردازد که قصد دارد بر اندیشهٔ ملتش کنترل پیدا کند. در آنجا پلیسِ اندیشه به‌دنبال خاطیان با تفکرات متضاد می‌گردد و برای اینکه راحت‌تر به مقصود خود برسد، وزارت حقیقت همهٔ لغت‌هایی را که برای تفکر متضاد مورد نیاز است از لغت‌نامه‌ها حذف می‌کند! به نظر می‌رسد که اگر نظریهٔ رسته‌ها وجود نمی‌داشت بسیاری از سؤال‌های مهمی که در ریاضیات قرن بیستم و بیست‌ویکم جواب داده شده‌اند حتی امکان طرح‌شدن نداشتند.

باوجوداین، حتی اگر نظریهٔ رسته‌ها فقط «زبانی مناسب» به شمار می‌رفت، کمتر کسی در مناسب بودن این زبان شک داشت. یک شاهدِ این مطلب، استقبال جامعهٔ ریاضی از کتاب‌هایی بود که در آن‌ها از نظریهٔ رسته‌ها به‌طور اساسی استفاده شده بود. نخستین نمونه از این‌ها کتاب تأثیرگذار استینراد[3] و آیلنبرگ در توپولوژی جبری است که در سال ۱۹۵۲ منتشر شد [۷]. دومین نمونه، کتاب کارتان[4] و آیلنبرگ در زمینهٔ جبر هومولوژیک بود؛ نظریه‌ای که از طریق همین کتاب به جامعهٔ ریاضی معرفی شد [۴]. درواقع، این نخستین کتابی بود که در آن هومولوژی، به‌طور کاملاً مستقل از توپولوژی، برای رستهٔ مدول‌ها روی یک حلقه معرفی و مطالعه می‌شد. در دو دههٔ بعد، شرایط به‌کلّی متحول شد. صرف‌نظر از سایر دستاوردها (که کم اهمیت هم نبودند) این تغییرات دو دسته بودند: یکی کارهای بنیادین گروتندیک در جبر هومولوژیک و هندسهٔ جبری (رجوع شود به [۹]) و دیگری، دستاوردهای اساسی لاویر[5] در منطق ریاضی و نظریهٔ مدل.

گروتندیک نشان داد که اساساً نظریه‌ای را که در کتاب کارتان و آیلنبرگ بسط داده شده بود می‌توان در چارچوبی بسیار کلی‌تر مطرح کرد و با این کار او ابزارهای قدرتمندی را وارد حوزهٔ هندسهٔ

[1] Ronald Brown [2] George Orwell [3] Steenrod [4] Élie Joseph Cartan [5] Francis William Lawvere

جبری کرد (البته پیش از گروتندیک، روش‌های هومولوژیکی را سِر[1] وارد هندسهٔ جبری کرده بود، اما نه به‌شکلی که مورد نظر ماست). لاویر نیز با معرفی و بسط رویکردی اساساً جدید به منطق ریاضی و مبانی ریاضیات فصل جدیدی را در نظریهٔ رسته‌ها و به‌طورکلی ریاضیات نوین آغاز کرد. تعامل میان نظریهٔ رسته‌ها و مبانی ریاضیات موضوعی بسیار جذاب و مفصل است که نیازمند نوشته‌ای جداگانه است. اما مایلیم به این موضوع اشاره کنیم که از یک سو، مفهوم رسته و به‌طورکلی روش‌های مبتنی‌بر آن همواره محل تردید و مباحثات مربوط به نظریهٔ مجموعه‌ها و مبانی ریاضیات بوده است و از این منظر، حتی همین اندازه که، باوجوداین تردیدها، نظریهٔ رسته‌ها به‌عنوان ابزاری مناسب و کارآمد پذیرفته شده است، جالب توجه است. اما از سوی دیگر، تحقیقات لاویر (و دیگران) نشان می‌دهد که اساساً با تکیه بر نظریهٔ رسته‌ها و مفاهیم آن می‌توان مبانی ریاضیات را بنیان نهاد. این ماهیت دوگانهٔ نظریهٔ رسته‌ها درعین‌حال‌که آن را پیچیده می‌کند بر جاذبه‌های ریاضی–فلسفی آن نیز می‌افزاید.

بعد از تحقیقات گروتندیک و لاویر، نظریهٔ رسته دیگر صرفاً زبانی مناسب نبود، چیزی بود که عملاً مفید و موثر از کار درآمد. زیرا نتایج به‌دست آمده از طریق آن پاسخی به پرسش‌ها و نیازهایی بود که مدت‌ها بی‌پاسخ مانده بودند و به تعبیری، نظریهٔ رسته‌ها، شاید نه برای همه اما برای عدهٔ بسیاری، نه تنها جالب که اجتناب‌ناپذیر به نظر می‌رسید. طبیعی بود که پس از چنین تحولی عدهٔ بیشتری به نظریهٔ رسته‌ها روی بیاورند و بدیهی است که همهٔ نتایجی که از طریق آن به دست می‌آمد ارزش یکسانی نداشتند؛ درکنار دستاوردهای ارزشمند، نتایجی نیز منتشر می‌شد (و هنوز هم منتشر می‌شود) که انگیزه‌ای جز «تجرید برای تجرید» یا «تعمیم برای تعمیم» نداشتند و بنابراین ماندگار نبودند و خیلی زود فراموش شدند.

۱.۲ گروتندیک و رسته‌های مشتق‌شده

تحول بزرگ دیگری که مایلیم به آن اشاره کنیم را گروتندیک و مکتب او در هندسهٔ جبری ایجاد کرد. اگرچه از جهاتی باید آن را تحولی در جبر هومولوژیک دانست، با توجه به نقش اساسی و خاصی که نظریهٔ رسته‌ها در آن دارد به بحث ما کاملاً مربوط است و گواه دیگری است بر این واقعیت که گذشته از نقش نظریهٔ رسته‌ها همچون یک نظریهٔ مستقل، اثر این نظریه بر سایر قسمت‌های ریاضیات صرفاً محدود به صوری‌سازی و نام‌گذاری پدیده‌ها و اثبات حقایق غیربدیهی نمی‌شود و در مواردی اساساً

[1] Serre

ریاضیاتی جدید به وجود می‌آورد.

سِر در سال ۱۹۵۵ قضیه‌ای در مورد دوگانی خمینه‌های مختلط ثابت کرد. این قضیه توجه گروتندیک را به‌شدت به خود جلب کرد و سرآغاز نامه‌نگاری‌هایی بین گروتندیک و سِر شد. این نامه‌نگاری‌ها، که سال‌ها به‌طول انجامید و بسیار پربار بود، در کتاب [۵] جمع‌آوری شده است. قضیهٔ دوگانی سِر برای خمینهٔ مختلط فشرده‌ای چون X از بُعد n و بافهٔ منسجم[۱] $\mathcal{F}$ روی آن یک نگاشت جفت‌کنندهٔ تام[۲] چون

$$H^i(X,\mathcal{F})\otimes H^{n-i}(X,\mathcal{F}')\to\mathbb{C}$$

به دست می‌دهد که در آن بافهٔ $\mathcal{F}'$ به‌صورت $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F},\Omega_X^n)$ تعریف شده است؛ منظور از Ω_X^n بافهٔ صورت‌های دیفرانسیلی از مرتبهٔ n روی X است. تعریف این نگاشت ساده ولی اثبات تام بودن آن مشکل است. گروتندیک برای بیان نظریهٔ کلی دوگانی خود، که تعمیمی گسترده از قضیهٔ دوگانی سِر برای خمینه‌های مختلط فشرده است، به نظریه‌ای جدید برای جبر هومولوژیک احتیاج داشت که نه فقط در دسترس نبود، بلکه به یک معنی، اصلاً امکان نداشت! به بیانی دقیق‌تر، نظریهٔ ایده‌آلی که او در نظر داشت در هیچ‌یک از رسته‌هایی که «به‌طور طبیعی» وجود داشتند قابل بسط نبود. این بدان معنا بود که یا باید از آن نظریهٔ خیالی چشم بپوشد یا دست‌به‌کار ساختن رسته‌ای جدید شود. او راه دوم را انتخاب کرد و رسته‌هایی موسوم به رسته‌های مشتق‌شده [رسته‌های مشتق] را معرفی کرد. او نظریه‌ای پیدا کرد که برای یک ریختار $f:X\to Y$ بین دو طرح[۳] مختلط، دوگانی‌ای معرفی می‌کرد که وقتی $Y=\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ و f هموار و سره باشد، دوگانی سِر را در حالت جبری به‌عنوان حالتی خاص در برداشت. صورتی از این نظریهٔ دوگانی که صورت تحلیلی قضیهٔ سِر را نتیجه دهد هنوز موجود نیست ولی به نظر می‌آید از کارهای بسیار جدید شولتسه[۴] و کلائوسن[۵] نتیجه خواهد شد.

توصیف رستهٔ مشتق‌شده کار دشواری نیست: رسته‌ای آبلی را درنظر بگیرید، مثلاً رستهٔ مدول‌ها روی یک حلقه یا رستهٔ بافه‌های شبه‌منسجم روی یک طرح. قضایای استانداردی در نظریهٔ رسته‌ها وجود دارد که نشان می‌دهد ــ صرف‌نظر از برخی مشکلات نظریهٔ مجموعه‌ای ــ می‌توان به‌طور صوری، وارون هر خانوادهٔ دلخواه از ریختارهای یک رسته را به آن اضافه کرد که به آن موضعی‌سازی آن رسته نسبت به خانوادهٔ ریختارها گفته می‌شود. این فرایند به‌نوعی تعمیم موضعی‌سازی یک حلقه

---

[1] coherent sheaf [2] perfect pairing [3] scheme [4] Peter Scholze [5] Dustin Clausen

روی یک زیرمجموعهٔ ضربی آن است.

یادآوری می‌کنیم که ریختار $f^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ بین دو همبافت[۱] در یک رستهٔ آبلی شبه‌یکریختی نامیده می‌شود هرگاه هم‌ریختی القایی $H^n(f^\bullet) : H^n(A^\bullet) \to H^n(B^\bullet)$ بین کوهومولوژی آن‌ها، برای هر n، یکریختی باشد. اگر رستهٔ همبافت‌های رستهٔ آبلی مورد نظر را نسبت به خانوادهٔ همهٔ شبه‌یکریختی‌ها موضعی‌سازی کنیم، آنچه به‌دست می‌آید رستهٔ مشتق‌شده آن رستهٔ آبلی نام دارد. اگر $\mathcal{A}$ یک رستهٔ آبلی باشد، معمولاً رستهٔ مشتق‌شده آن را با نماد $D(\mathcal{A})$ نمایش می‌دهند. شرح و بسط نظری این رسته‌ها به همراه معرفی و مطالعهٔ ساختاری مناسب برای آن مسئولیتی بود که به عهدهٔ وردیه[۲] گذاشته شد و او در رسالهٔ دکترای خود به این کار پرداخت (رجوع کنید به [۱۹]). این ساختار به ساختار «مثلث‌بندی‌شده»[۳] معروف است. توجه به این نکته بجاست که ساختار مثلث‌بندی‌شده تنها یکی از ساختارهایی است که می‌توان برای رستهٔ مشتق‌شده درنظر گرفت. به‌زودی به این مطلب باز خواهیم گشت.

در مورد رسته‌های مثلث‌بندی‌شده و در حالت خاص، در مورد رسته‌های مشتق‌شده نیز در آغاز، جامعهٔ ریاضی چندان با آغوش باز به استقبال این نظریه نرفت و تا مدتی، نزدیک به ده سال، این نظریهٔ فقط در هندسهٔ جبری و توسط گروتندیک و اطرافیانش به‌کار گرفته می‌شد. در اینجا می‌توان از فوکسبو[۴] به‌عنوان یکی از پیشگامان به‌کارگیری نظریهٔ رسته‌های مشتق‌شده در جبر جابه‌جایی یاد کرد. فوکسبو در [۸] می‌نویسد: «نویسنده امیدوار است که خوانندگان، بعداز مطالعهٔ این نوشته، به این نتیجه برسند که رسته‌های مشتق‌شده ابزاری مفید و لازم برای نظریه‌هایی این‌چنینی هستند». این گفته نشان می‌دهد که در آن روزگار این نظریه در جبر جابه‌جایی چندان پرطرفدار نبوده و نیازمند تبلیغ بوده است.

به‌هرروی، کم‌کم کارایی و زایایی این نظریه آن‌قدر آشکار شد که دیگر چشم‌پوشی از آن ممکن نبود. امروز نظریهٔ رسته‌های مثلث‌بندی‌شده دیگر محدود به هندسهٔ جبری نیست، بلکه تقریباً هر جا که نشانی از جبر و هندسه و آنالیز باشد می‌توان ردی از آن یافت. اجازه دهید، هرچند بسیار موجز، به توضیح کلیات نظریهٔ رسته‌های مثلثی‌شده بپردازیم. مرجع بسیار خوبی که خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به آن رجوع کند کتاب [۱۴] است.

این ساختار با الهام از رستهٔ همبافت‌های رسته‌های آبلی و عملیاتی تعریف‌شده روی آن تجرید شده است. دوتا از این اعمال کلیدی‌اند: انتقال[۵] و مخروط‌گیری. اگر $A^\bullet = (A^n, d^n)$

[1] complex [2] Jean-Louis Verdier [3] triangulated category [4] Hans-Bjørn Foxby [5] shift (translation)

یک همبافت باشد، همبافت انتقال‌یافتهٔ $T(A^\bullet) = (T(A^n), T(d^n))$ همبافتی است با شرط $T(A^n) = A^{n+1}$ و $T(d^n) = -d^{n+1}$. دقت کنید که این تابعگون یک خودهم‌ارزی است. مخروط‌گیری برای ریختاری مانند $f^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ از همبافت‌ها، همبافتی به‌نام مخروط نسبت می‌دهد که آن را با نماد $C(f^\bullet)^\bullet = (C(f)^n, d_C^n)$ نمایش می‌دهیم و در آن

$$C(f)^n = A^{n+1} \oplus B^n, \quad d_C^n(a,b) = (-d^{n+1}(a), f(a) + d^n(b)).$$

شاید تعریف مخروط کمی عجیب به‌نظر برسد، ولی اگر آن را همبافت کلِ منسوب به دو-همبافت $f^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ در نظر بگیرید که در آن $A^\bullet$ در سطر منهای یک و $B^\bullet$ در سطر صفر نشسته است و ریختار f نقش دیفرانسیل عمودی را دارد درک بهتری به دست می‌آورید.

مخروط‌گیری خاصیت بسیار جالبی دارد. ابتدا توجه کنید که شمول و افکنشْ یک دنبالهٔ دقیق از همبافت‌ها به‌صورت

$$0 \to B^\bullet \to C(f^\bullet)^\bullet \to T(A^\bullet) \to 0$$

می‌سازد. می‌توان نشان داد ریختاری که با استفاده از لم مار از $H^n(A^\bullet)$ به $H^n(B^\bullet)$ به‌دست می‌آید چیزی جز هم‌ریختی القاشده از $f^\bullet$ نیست. بنابراین f یک شبه‌یکریختی است اگر و تنها اگر مخروطِ آن انقباض‌پذیر (دقیق) باشد. اگر ریختار f را نیز به ابتدای دنبالهٔ فوق اضافه کنیم به

$$A^\bullet \to B^\bullet \to C(f) \to T(A)^\bullet$$

می‌رسیم که خوانندهٔ نکته‌سنج در خواهد یافت که ترکیب دو ریختار اول و دوم صفر نیست. ولی به‌سادگی نتیجه می‌شود که هموتوپ با صفر است. این دنباله را می‌توان یک مثلث تصور کرد که در آن $C(f)^\bullet \to T(A)^\bullet$ به خود $A^\bullet$ بر می‌گردد ولی از طریق یک انتقال؛ این مطلب دلیل نام‌گذاری «مثلثی‌شده» است. یک رستهٔ مثلثی‌شده رسته‌ای جمعی مانند $\mathcal{A}$ به‌همراه یک خودهم‌ارزی T و خانواده‌ای از مثلث‌های خاصِ

$$A \to B \to C \to T(A)$$

است که در تعدادی اصل، مشابه رستهٔ هموتوپی همبافت‌ها، صدق می‌کند. یکی از این اصول ایجاب می‌کند که ریختار $f : A \to B$ در یک مثلث خاص چون

$$A \to B \to C \to T(A)$$

قرار می‌گیرد. اصول دیگر نشان می‌دهند که C با تقریب یکریختی (نه لزوماً یکتا) خوش‌تعریف است که آن را مخروط می‌نامند. اینکه شئ C به‌طور تابعگونی به ریختار f وابسته نیست، یکی از مشکلات جدی رسته‌های مثلثی‌شده است. بعضی از ریاضی‌دانان از جمله بیلینسون[۱] بر این باورند که تعریف رستهٔ مثلثی‌شده هنوز به کمال نرسیده است. فعلاً به همین مقدار توضیحات دربارهٔ این رسته‌ها اکتفا می‌کنیم.

رستهٔ همبافت‌های یک رستهٔ آبلی و همچنین رستهٔ هوموتوپی وابسته به آن ساختار دیگری نیز دارند که به‌اختصار به آن اشاره می‌کنیم. می‌توان مفهوم ریختار بین دو همبافت را کمی ملایم‌تر بیان کرد: برای دو همبافت $A^\bullet$ و $B^\bullet$ تعریف کنید

$$\mathrm{Hom}(A^\bullet, B^\bullet) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}^n(A^\bullet, B^\bullet)$$
$$\mathrm{Hom}^n(A^\bullet, B^\bullet) = \{(f^k) : f^k : A^k \to B^{k+n}\};$$

یعنی هم‌ریختی معمولی همگن از درجهٔ صفر باشند و شرط سازگاری با دیفرانسیل را نیز دارا باشند. حالا این گروه مدرج را به صورت زیر به یک دیفرانسیل مجهز می‌کنیم.

$$d : \mathrm{Hom}^n(A^\bullet, B^\bullet) \to \mathrm{Hom}^{n+۱}(A^\bullet, B^\bullet), \quad d(f) = d_B \circ f - (-۱)^n f \circ d_A.$$

بنابراین برای یک همریختی همگن از درجهٔ صفر شرط سازگاری با دیفرانسیل به صفرشدن دیفرانسیلِ آن تبدیل می‌شود. تعریف هوموتوپی بین دو ریختارِ f و g بین دو همبافت $A^\bullet$ و $B^\bullet$ هم به وجود عضوی چون $h \in \mathrm{Hom}^{-۱}(A^\bullet, B^\bullet)$ با شرط $f - g = d(h)$ تبدیل می‌شود. بنابراین، به بیان دقیق‌تر، یک رستهٔ غنی‌شده در رستهٔ همبافت‌ها داریم یعنی هم‌ریختی‌ها اکنون مدرج و همراه یک دیفرانسیل‌اند. چنین رسته‌ای را رستهٔ DG یا مدرج دیفرانسیلی می‌نامند. برای توصیف مبسوط‌تر این مفهوم به [۱۰] رجوع کنید. به نظر می‌رسد که رسته‌های مثلثی را بتوان با در نظر گرفتن این خاصیت اضافی به طور کامل‌تری توصیف کرد.

۲.۲ نظریهٔ K

زمینهٔ دیگری که برای ورد به نظریهٔ رسته‌ها انتخاب کرده‌ایم، به تعبیری، فصل مشترک چندین شاخهٔ بنیادی ریاضیات، از جمله هندسهٔ جبری و توپولوژی جبری، است. این انتخاب ما نه فقط به دلیل

---

[1] Alexander A. Beilinson

محتوای بسیار زیبا و غنی آن، بلکه به این دلیل است که با وجود اهمیت و جایگاه اساسی‌اش در ریاضیات معاصر، در کشور ما کمتر به آن پرداخته شده است. این درحالی است که موضوعاتی که بیشتر به «شوخی‌های ریاضی»[۱] شبیه‌اند توجه افراد بسیاری را به خود جلب کرده است.

مبحث مورد نظر ما نظریهٔ Kی جبری است. در اینجا قصد نداریم تاریخچه‌ای –حتی کوتاه– از نظریهٔ K بیان کنیم. ولی برای توضیح نقش نظریهٔ رسته‌ها و به‌ویژه نقش رسته‌های مشتق‌شده در این مبحث ناچاریم کمی از تاریخچه را بازگو کنیم.

شروع رسمی نظریهٔ K (جبری) را می‌باید به گروتندیک نسبت داد. او به‌منظور تعمیم قضیهٔ ریمان–رُخ[۲]، تابعگونی تعریف کرد که به هر طرح (در حالت خاص، هر حلقه) یک گروه آبلی نسبت می‌داد، چیزی که امروز به گروه گروتندیک طرح (یا حلقهٔ) مورد نظر معروف است. برای طرحِ X، گروه آبلی آزاد تولیدشده توسط کلاف‌های برداری (یا بافه‌های موضعاً آزاد از رتبهٔ متناهی) روی X را در نظر بگیرید. این گروه K که گروتندیگ آن را به X وابسته کرد، گروه خارج قسمتی مبتنی‌بر رابطهٔ

$$[P] = [P'] + [P'']$$

برای هر دنبالهٔ دقیق همچون

$$\circ \to P' \to P \to P'' \to \circ$$

است. درحالتی‌که $X = \mathrm{Spec}(R)$ طرح آفین روی حلقهٔ جابه‌جایی و نوتریِ R است می‌دانیم تناظر طبیعی بین کلاف‌های برداری و مدول‌های تصویری متناهی‌مولد روی R وجود دارد و همچنین این تعریف را می‌توان برای حلقه‌های ناجابه‌جایی هم تعمیم داد. مثلاً اگر R حلقهٔ اعداد صحیح و یا هر حوزهٔ ایده‌آل اصلی باشد، ازآنجاکه هر مدول تصویری متناهی‌مولد، آزاد است پس گروه K وابسته به آن حلقه همان گروه جمعی اعداد صحیح است. و برای یک مثال هندسی، خط آفین

[۱] معمولاً از کتاب‌های ادبی معروفی که مورد استقبال خوانندگان قرار می‌گیرد فیلم سینمایی تهیه می‌شود؛ از آن جمله می‌توان فیلم جنگ و صلح و همچنین فیلم‌های هری پاتر را نام برد. در مقابل، در ادبیات واژه‌ای وجود دارد با عنوان رمان‌سازی که معنای آن کتابی است که براساس فیلم‌های موفق و پرفروش تهیه می‌شود. معمولاً بهرهٔ اقتصادی این کتاب‌ها بر ارزش ادبی آن‌ها ترجیح دارد. مثلاً می‌توان به داستان طنز کارگردان و نویسندهٔ معروف وودی آلن با عنوان \این قلم فروشی نیست اشاره کرد. در ریاضی نیز چنین اقداماتی در دو دههٔ اخیر پر رونق شده است. در مقابلِ پژوهش‌های عمیق و ناب در باب رسته‌ها می‌توان به مقالاتی ذیل عنوان «رسته‌سازی» اشاره کرد که در آن قضیه‌های مربوط به نظریهٔ مجموعه‌ها به نظریهٔ رسته‌ها تعمیم داده می‌شوند. به‌عبارت‌دیگر، در این نوع مقاله‌ها صرفاً به جای مجموعه‌ها، رسته‌ها و به جای توابع، عملگرها جایگزین می‌شوند.

[2] Riemann-Roch

$\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{K}[x])$ را که در آن $\mathbb{K}$ میدانی دلخواه است در نظر بگیرید. در این مورد گروه K یکریخت با اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ است.

اتیا[1] و هیرتسه‌بروخ[2] به‌منظور مطالعهٔ رده‌های مشخصهٔ خمینه‌ها، همتای توپولوژیک این گروه را مطالعه کردند و نظریه‌ای بسط دادند که امروز به نظریهٔ Kی توپولوژیک معروف است. درحقیقت، آن‌ها دنباله‌ای از تابعگون‌ها را تعریف کردند که جملهٔ صفرم آن همان تابعگونی است که به هر فضای توپولوژیک، گروه گروتندیکِ آن را نسبت می‌دهد.

گرچه شاید انگیزه اصلی نبود، یکی از پرسش‌ها این بود که همتای جبری K–گروه‌ها در مرتبهٔ بالاتر چه باید باشد. دیری نگذشت که بَس[3] اولین K–گروه جبری، موسوم به گروه وایتهد[4]، را تعریف و میلنر[5] نیز تعریف موجهی برای دومین K–گروه جبری ارائه و نتایج ارزشمندی را به کمک آن ثابت کرد. درحقیقت بخش قابل توجهی از کتاب او [۱۳] دربارهٔ خواص همین گروه‌ها است. تلاش‌های زیادی برای ارائه تعریفی موجه برای K–گروه‌های مرتبهٔ بالاتر صورت گرفته است که می‌توان به تعریف‌های سوآن[6]، گرستن[7]، و کروبی[8] اشاره کرد. هریک از این تعریف‌ها مزایا و معایبِ خاص خود را داشتند، اما سرانجام تعریف کوئیلن[9] در [۱۶] بود که به‌عنوان نظریهٔ K مرتبهٔ بالای مورد قبول همگان واقع شد. درحقیقت، کوئیلن نظریهٔ K را برای رسته‌های خاصی موسوم به رسته‌های دقیق تعریف کرد. یک رستهٔ دقیق چیزی نیست جز زیررسته‌ای جمعی از یک رستهٔ آبلی که تحت توسیع بسته است. برای مثال، رستهٔ مدول‌های تصویری متناهی‌مولد بر یک حلقه یا، به‌طورکلی، رستهٔ کلاف‌های برداری جبری بر یک طرح را در نظر بگیرید. می‌توان این رسته‌ها را برحسب اصول موضوع رسته‌ها، یعنی فارغ از نشاندن آن‌ها در رسته‌های آبلی، تعریف کرد. اما ثابت می‌شود که نظریهٔ K مستقل از امکان نشاندن در رستهٔ آبلی است.

اکنون به‌اجمال تعریف کوئیلن را می‌آوریم. فرض کنید $\mathcal{E}$ رسته‌ای دقیق باشد. در مرحلهٔ اول، رسته‌ای دیگر به $\mathcal{E}$ نظیر می‌شود که اشیاء آن همان اشیاء $\mathcal{E}$اند؛ این رسته را با نماد $Q\mathcal{E}$ نمایش می‌دهیم. در مرحلهٔ بعد، مجموعهٔ سادکی $NQ\mathcal{E}$ به این رسته نسبت داده می‌شود. تجسم هندسی این مجموعهٔ سادکی را با نماد $BQ\mathcal{E}$ نمایش می‌دهیم که $BQ\mathcal{E}$ فضایی توپولوژیک است و عضو صفرِ $\mathcal{E}$ نقطه‌ای در این فضا است که آن را، با کمی تسامح در نمادگذاری، با نماد $\circ$ نمایش می‌دهیم. می‌توان نشان داد که نخستین گروه هوموتوپی فضای توپولوژیک به‌دست آمده چیزی جز گروه

[1] Michael Francis Atiyah [2] Friedrich Ernst Peter Hirzebruch [3] Hyman Bass [4] Alfred North Whitehead [5] John Willard Milnor [6] Richard Gordon Swan [7] Stephen M. Gersten [8] Max Karoubi [9] Daniel Gray Quillen

گروتندیک رستهٔ دقیق مورد نظر نیست. کوئیلن Kـگروه‌های مرتبهٔ بالا را به‌صورت گروه‌های هوموتوپی این فضای توپولوژیک تعریف کرد یعنی

$$K_i(\mathcal{E}) = \pi_{i+۱}(BQ\mathcal{E}, \circ).$$

بنابراین کوئیلن نه تنها Kـگروه‌های مراتب بالا را برای طرح‌ها و حلقه‌ها، بلکه برای هر رستهٔ دقیق نیز تعریف کرد. این تعریف تابعگونی [۱] است، یعنی اگر $f : \mathcal{E}_۱ \to \mathcal{E}_۲$ تابعگونی دقیق بین رسته‌های دقیق باشد یک هم‌ریختی بین گروه‌ها مانند

$$K_i(f) : K_i(\mathcal{E}_۱) \to K_i(\mathcal{E}_۲)$$

القاء خواهد کرد. سؤال مهم این است که تحت چه شرایطی این نگاشت یکریختی است.

گروهی که گروتندیک تعریف کرده بود برای ردهٔ وسیعی از رسته‌ها کاربرد داشت، به‌ویژه برای هر رستهٔ مثلث‌بندی‌شده (در حالت خاص، رستهٔ مشتق‌شده). علاوه‌براین، یکی از خواص اساسی‌اش این بود که گروه گروتندیک یک رستهٔ دقیق نه‌تنها به نشاندن آن در رستهٔ آبلی بستگی ندارد بلکه فقط به رستهٔ مشتق‌شده کراندار آن رسته وابسته است. مثلاً، برای رستهٔ آبلی $\mathcal{A}$ داریم $K_\circ(\mathcal{A}) = K_\circ(D^b(\mathcal{A}))$. همچنین می‌توان مفهوم مناسبی برای رستهٔ مشتق‌شده یک رستهٔ دقیق پیدا کرد و درنتیجه یکریختی بالا برای هر رستهٔ دقیق برقرار خواهد بود.

چرا این نتیجه اهمیت دارد؟ دلیلش این است که در فرایند تشکیل رستهٔ مشتق‌شده، اطلاعاتی از دست می‌رود. درحقیقت، یکی از نتایج مهمی که در چند دههٔ گذشته به دست آمده است (و می‌توان گفت یکی از دلایل زیبایی و درعین‌حال دشواری این بخش از ریاضیات بوده است) این است که ممکن است دو رستهٔ آبلی هم‌ارز نباشند اما رستهٔ مشتق‌شده آن‌ها به‌عنوان رسته‌های مثلث‌بندی‌شده هم‌ارز باشند. اولین مثال از این‌گونه رسته‌ها را بیلینسون در سال ۱۹۷۸، وقتی که فقط ۲۱ سال داشت، پیدا کرد. او با بررسی رستهٔ آبلی بافه‌های منسجم روی فضای تصویری $\mathbb{P}^n$، که آن را $\mathcal{A}$ می‌نامیم، توانست دو رستهٔ آبلی دیگر $\mathcal{B}$ و $\mathcal{C}$، که رستهٔ مدول‌های متناهی‌مولد روی دو حلقه‌اند، بیابد به‌طوری‌که

$$D(\mathcal{A}) \simeq D(\mathcal{B}) \simeq D(\mathcal{C})$$

و درعین‌حال هیچ دوتایی از این‌ها هم‌ارز نیستند. برای دیدن جزئیات به [۳] مراجعه کنید. این

[1] functorial

موضوع مفهوم هم‌ارزی مشتق موریتا[۱] را وارد مباحث مختلفی از ریاضیات کرد و موضوع بسیار جالبی است.

بنابراین، نتیجهٔ بالا، به‌ویژه از این جهت جالبِ توجه است که نشان می‌دهد گروه گروتندیک جزو اطلاعات از دست رفته مذکور نیست. حالا این پرسش طبیعی است که آیا همین مطلب برای همهٔ K–گروه‌ها برقرار است ؟ مشکلی که در اولین قدم برای پاسخ به این پرسش وجود داشت این بود که اساساً تعریف کوئیلن برای K–گروه‌ها به‌گونه‌ای نبود که طرز گسترش مناسب آن به رسته‌های مشتق‌شده معلوم باشد، حال‌آنکه گروه گروتندیک چنین مشکلی را نداشت.

یافتن تعریف مناسب برای این کار چندین سال زمان لازم داشت. نخستین گام اساسی در این جهت را والتهاوزن[۲] برداشت. درحقیقت، او با رجوع به ایده‌های گروتندیک، رسته‌هایی معرفی کرد که امروز به رسته‌های والتهاوزن معروف‌اند. والتهاوزن برای رسته‌ها نظریهٔ K تعریف کرد و همچنین نشان داد که این نظریه تعمیم مناسبی برای نظریهٔ Kی کوئیلن است. هر رستهٔ مشتق‌شده دارای یک ساختار رستهٔ والتهاوزن است (پیش از این نیز گفتیم که تنها ساختار ممکن برای رستهٔ مشتقْ ساختار مثلث‌بندی‌شده نیست) و بنابراین می‌توان نظریهٔ Kی والتهاوزن را برای رسته‌های مشتق‌شده به کار برد. اما هدف اصلی والتهاوزن بسط نظریهٔ K برای رسته‌های مشتق‌شده نبود و، درحقیقت، این کار را تامسن[۳] در مقالهٔ زیبا و بلند [۱۸] به انجام رساند. او در این مقاله نظریهٔ K رسته‌های مشتق‌شده را به طور عمیق بررسی کرد.

از بین نتایج ارزشمند تامسن می‌توان به تعمیم‌های اساسی او از نتایج کوئیلن اشاره کرد. دراصل، بسیاری از نتایج کوئیلن تنها تحت شرایط محدودکننده، مانند هموار بودن، قابل به‌کارگیری در هندسهٔ جبری (و جبر جابه‌جایی) بودند و، به‌تعبیری، نتایج تامسن جایگاه واقعی نظریهٔ K را نشان داد. ازجمله نتایج مهم او یکی این است که اگر $f : \mathcal{E}_۱ \to \mathcal{E}_۲$ تابعگونی دقیق بین رسته‌های دقیق باشد به‌طوری‌که تابعگون القایی $D(f) : D(\mathcal{E}_۱) \to D(\mathcal{E}_۲)$ هم‌ارزی رسته‌ای باشد آنگاه هم‌ریختی القایی $K_i(f) : K_i(\mathcal{E}_۱) \to K_i(\mathcal{E}_۲)$ یکریختی است.

بدون شک کار تامسن پاسخی قاطع به وجود نظریهٔ K برای رسته‌های مشتق‌شده بود، اما این پایان راه نبود زیراکه، صرف‌نظر از دلایل تخصصی دیگر، هنوز این پرسش بی‌پاسخ مانده بود که آیا نظریهٔ K فقط به ساختار مثلث‌بندی‌شده رستهٔ مشتق‌شده بستگی دارد یا خیر.

طرح این پرسش که به‌طریقی به گروتندیک و پس از آن به تامسن باز می‌گردد، صرفاً جنبهٔ

[1]Kiiti Morita [2]Friedhelm Waldhausen [3]Robert Wayne Thomason

کنجکاوی ندارد. زیراکه نظریهٔ K والتهاوزن از جهاتی خالی از اشکال هم نیست. مثلاً این نظریهٔ آن‌چنان‌که بایدوشاید «تابعگونی» نیست. بنابراین، با در نظر داشتن این مطلب که گروه گروتندیک یک رستهٔ مشتق‌شده فقط براساس ساختار مثلث‌بندی‌شدهٔ آن تعریف می‌شود و همچنین توجه به یکریختی $K_\circ(A) = K_\circ(D^b(A))$ طبیعی است که بپرسیم آیا نظریهٔ Kی «موجهی» برای رسته‌های مثلث‌بندی‌شده وجود دارد که یکریختی‌های $K_i(A) = K_i(D^b(A))$ برای آن‌ها برقرار باشد؟

شاید کسی که بیشترین تلاش را برای پاسخ دادن به این پرسش کرده است نیمن[1] باشد. او طی مثال‌هایی با عنوان «نظریهٔ K برای رسته‌های مثلث‌بندی‌شده» نظریه‌های K متفاوتی را برای رسته‌های مثلث‌بندی‌شده معرفی کرد و نتایج متعددی را برای آن‌ها اثبات کرد، ولی از این ها هم نمی‌توان پاسخ مثبتی برای پرسش بالا یافت. برای توصیفی از نتایج نیمن از زبان خودش به [۱۵] رجوع کنید.

مسلماً پاسخ به پرسش بالا بستگی به این دارد که چه چیزی را تعریف موجه بدانیم و این نیز به‌نوعی به ذائقه اشخاص وابسته است. باوجوداین، باید دانست که اشلیختینگ[2] ثابت کرده است که مطابق معیارهایی معقول ــکه تقریباً مورد قبول همگان استــ پاسخِ پرسش بالا منفی است. درواقع، او به این پرسش تامسن که آیا دو رستهٔ والتهاوزن که دارای رستهٔ هوموتوپی هم‌ارزند لزوماً گروه‌های K یکریخت دارند جواب منفی داد. برای آگاهی از صورت دقیق این ادعا [۱۷] را مطالعه کنید. پس شاید هنوز این سؤال اساسی مطرح است که اساساً ساختار «درست» رسته‌ای برای نظریهٔ Kی رسته‌های مشتق‌شده چیست؟

به‌غیر از ساختار مثلث‌بندی‌شده و ساختار والتهاوزن نامزدهای متعدد دیگری برای پاسخ به این پرسش وجود دارد که بسیاری از آن‌ها را می‌توان در قالب «ساختار مثلث‌بندی‌شده به‌همراه یک ساختار اضافی» در نظر گرفت. اما اینکه بالاخره کدام‌یک جواب است موضوعی است که مثل بسیاری چیزهای دیگر هنوز معلوم نیست.

۳ دو کاربرد از نظریهٔ رسته‌ها

در پایان به دو کاربرد جالب از نظریهٔ رسته‌ها، یکی در فیزیک و دیگری در هندسهٔ جبری، اشاره می‌کنیم.

[1] Amnon Neeman [2] Marco Schlichting

نظریهٔ تقارن آینه‌ای[1] را فیزیک‌دانانی که در نظریهٔ ریسمان تحقیق می‌کردند در اواسط دههٔ ۸۰ میلادی ابداع کردند. در این نظریه به ارتباط‌های بین دو خمینهٔ مختلط سه‌بعدی کالابی–یائو[2]، موسوم به دوگان آینه‌ای، پرداخته می‌شود. دقیق‌تر آنکه، برای دو خمینهٔ دوگان کالابی–یائو مانند X و Y رابطهٔ $\dim \mathrm{H}^p(X, \Omega_X^q) = \dim \mathrm{H}^{3-q}(Y, \Omega_Y^p)$ بین اعداد هاج[3] برقرار است. کُنتسِویچ[4] در سال ۱۹۹۴ حدس دقیق‌تری برحسب هم‌ارزی دو رستهٔ مشتق‌شده مطرح کرد که به حدس هومولوژیک تقارن آینه‌ای مشهور است و خصوصاً دلیل تساوی بالا را بیان می‌کند. یک خمینهٔ کالابی–یائو سه‌بعدی خمینهٔ مختلط جبری و سه‌بعدی است که دارای یک ۳–فرم دیفرانسیلِ هیچ‌جا صفر است. این فرم دیفرانسیل یک ساختار همتافته[5] نیز روی آن خمینه تعریف می‌کند. کُنتسِویچ حدس زد که رستهٔ مشتق‌شده بافه‌های منسجم روی X باید با یک رستهٔ مشتق‌شده دیگر برای Y، که توسط فوکایا[6] با استفاده از ساختار همبافتهٔ Y تعریف شده بود، هم‌ارز باشد. برای دیدن جزئیات بیشتر می‌توانید به [۱۱] مراجعه کنید.

آخرین موضوعی که می‌خواهیم به آن اشاره کنیم نظریهٔ هندسهٔ جبری مشتق‌شده[7] است. این نظریه نیز زاییدهٔ اندیشه‌های کُنتسِویچ است. او صورتی از مدرج دیفرانسیلی DG برای طرح‌های جبری را معرفی کرد که در آن نقش حلقه با یک حلقهٔ مدرج دیفرانسیلی عوض شده است. بعد از کُنتسِویچ، افراد دیگری حلقه‌هایی با ساختارهایی ریشه‌گرفته از توپولوژی جبری را جایگزین حلقه معمولی کردند. مهم‌ترین پیشرفت‌ها در این موضوع ریشه در کارهای لوری[8] دارند. او به‌طور منسجم دربارهٔ زبان جدیدی برای نظریهٔ رسته‌ها تحقیقاتی انجام داده است؛ این زبان به نظریهٔ ∞–رسته‌ها[9] معروف شده است و در آن هم‌ریختی‌ها در یک سلسله‌مراتب نامتناهی، نه فقط بین اشیاء بلکه بین هم‌ریختی‌ها و هم‌ریختیِ بین هم‌ریختی‌ها و الی‌آخر تا بی‌نهایت، تعریف می‌شوند. برای شناخت بهتر از این مطالب هیجان‌انگیز می‌توانید به کتاب او [۱۲] مراجعه کنید.

سپاسگزاری

چندین سال پیش، نسخهٔ اولیهٔ این مقاله را نویسندهٔ دوم براساس گفتگوهای بسیار شیرین و جذاب با آقای دکتر شهاب رجبی به‌منظور ارائه در یک سخنرانی تهیه کرد. در اینجا از ایشان برای گفتگوهای لذت‌بخش و نظرات کارشناسانه‌اش تشکر و قدردانی می‌کنیم. همچنین، از آقای محمد حائری‌زاده

[1]mirror symmetry [2]Eugenio Calabi–Shing-Tung Yau [3]Hodge numbers [4]Maxim Lvovich Kontsevich
[5]symplectic [6]Kenji Fukaya [7]derived algebraic geometry [8]Jacob Alexander Lurie [9]∞-categories

بابت تایپ و ارائهٔ نظرات سودمند برای روشن‌تر شدن این مقاله سپاسگزاری می‌کنیم.

مراجع

[۱] توکلی، جواد، تاریخچهٔ نظریهٔ رسته‌ها (کاتگوریها)، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ ۶ (۱۳۶۵)، ۱۴-۲۰.

[۲] کروبی، مکس، آشنایی مقدماتی با نظریهٔ K، ترجمهٔ علی تقوی و مرضیهٔ شیرانی، نشر ریاضی، شمارهٔ ۳۳ (۱۳۸۹)، ۴۰-۴۹.

[3] Beilinson, A. A., Coherent sheaves on $\mathbf{P}^n$ and problems in linear algebra, *Funct. Anal. Appl.*, **12** (1978), 214–216.

[4] Cartan, H., Eilenberg, S., *Homological Algebra*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1956.

[5] Colmez, P., Serre, J. P., eds., *Correspondance Grothendieck-Serre*, Société Mathématique de France, Paris, 2001.

[6] Eilenberg, S., MacLane, S., General theory of natural equivalences, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **58** (1945), 231–294.

[7] Eilenberg, S., Steenrod, N., *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1952.

[8] Foxby, H. B., Homological dimensions of complexes of modules, in *Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin*, MP. Malliavin, ed., Springer, Berlin, 1980.

[9] Grothendieck, A., Sur quelques points d'algèbre homologique, I, *Tohoku Math. J.*, **9** (1957), 119 – 221.

[10] Keller, B., On differential graded categories, in *International Congress of Mathematicians*, vol. II, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, 151–190.

[11] Kontsevich, M., *Homological Algebra of Mirror Symmetry*, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, S. D. Chatterji, ed., Birkhäuser, Basel, 1995.

[12] Lurie, J., *Higher Topos Theory*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.

[13] Milnor, J., *Introduction to Algebraic K-Theory*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1971.

[14] Neeman, A., *Triangulated Categories*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[15] Neeman, A., The K-theory of triangulated categories, in *Handbook of K-Theory*, vol. 1, 2, Springer, Berlin, 2005, 1011–1078.

[16] Quillen, D., Higher algebraic K-theory: I, in *Higher K-Theories*, H. Bass, ed., Springer, Berlin, 1973.

[17] Schlichting, M., A note on K-theory and triangulated categories, *Invent. Math.*, **150** (2002), 111–116.

[18] Thomason, R. W., Trobaugh, T., Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories, in *The Grothendieck Festschrift*, vol. III, P. Cartier, L. Illusie, N. Katz, G. Laumon, Y. I. Manin, K. A. Ribet, eds., Birkhäuser, Boston, 2007.

[19] Verdier, J. L., Des catégories dérivées des catégories abéliennes, *Astérisque*, no. 239, 1996.

امیر جعفری: دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ علوم ریاضی
رایانامه: ajafari@sharif.ir
سیامک یاسمی: دانشگاه تهران، دانشکدهٔ ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر
رایانامه: yassem@iut.ac.ir

Farhang va Andishe-ye Riyazi
Volume 41, Number 71, Fall/Winter 2022, Pages 47–61
doi: 10.30504/mct.2023.1265.1880

Theory of Categories; Object or Tool

A. Jafari[1]✉, S. Yassemi[2]

[1] Department of Mathematical Sciences, Sharif University of Technology, Iran
[2]School of Mathematics, Statistics and Computer Science, University of Tehran, Iran

Abstract. How important is the theory of categories? From the early days of its creation until today, this question has occupied the minds of mathematicians and different answers have been provided: For some categories are merely a tool. For others, they are a fundamental part of today's mathematics. Generally, questions like these do not have definite and absolute answers. At least for this particular question, the mathematics community has not reached a common answer, and probably will never reach a resolution. Our goal in writing this article is to discuss the origins and developments of the theory of categories and also discuss its role in mathematics.

Keywords: category theory, derived categories, triangulated categories, K-theory, differential-graded categories
Article history: Recieved 26 January 2022; Accepted 8 May 2022

[1]ajafari@sharif.ir
[2]yassem@iut.ac.ir

ISSN 1022-6443/